УДК 512.66, 512.58, 512.582.2, 512.732
MSC 18E30, 18G25, 13D30, 18E40

О теориях кручения, весовых и t-структурах в триангулированных категориях*

М. В. Бондарко, С. В. Востоков

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Бондарко М. В., Востоков С. В.* О теориях кручения, весовых и t-структурах в триангулированных категориях // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6 (64). Вып. 1. С. 27–43. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.102

Работа посвящена триангулированным категориям и теориям кручения в них. Мы сравниваем два разных определения теорий кручения. Мы также рассматриваем два важнейших случая этого понятия — весовые и t-структуры (и допустимые триангулированные подкатегории). Одна из целей работы — показать, что ряд основных определений и свойств весовых и t-структур естественным образом обобщается на произвольные теории кручения (в частности, мы определяем для них понятия приведенности и коприведенности); это позволяет оптимизировать некоторые доказательства. Аналогичным образом обобщаются понятия ортогональных и соседствующих весовых и t-структур. Мы связываем соседство теорий кручения с двойственностью Брауна—Коменца и функторами Серра; возможно, эти результаты будут применены к изучению t-структур в компактно порожденных триангулированных категориях и в производных категориях когерентных пучков. Кроме того, в нашей работе описывается связь между теориями кручения и проективными классами.

Ключевые слова: триангулированные категории, теории кручения, весовые структуры, t-структуры, соседствующие структуры, двойственность Брауна—Коменца, функтор Серра.

Введение. Наша статья посвящена изучению некоторых классов объектов в триангулированных категориях. Напомним, что понятие t-структуры было введено в фундаментальной работе [1]; это определение (связанное с каноническими фильтрациями комплексов над абелевыми категориями) имеет огромное значение для современной математики. Позднее (в статьях [2] и [3]) было независимо введено «родственное t-структурам» понятие весовой структуры (связанное с глупыми фильтрациями в гомотопических категориях комплексов). (В [3] и в ряде других статей, связанных с теорией представлений, используется альтернативный термин «ко-t-структура».) Свойства весовых структур (включая их связь с t-структурами) и их применения были подробно исследованы в работах М. В. Бондарко и других авторов (см. введение и параграф 4 статьи [4]).

Основная цель этой работы — показать, что ряд интересных свойств и определений для весовых и t-структур можно изучать «параллельно», пользуясь определением теории кручения (данным в работе [5]; в некоторых других работах теории

*Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант №16-11-10200).

кручения назывались полными Hom-ортогональными парами). Соответственно, не все утверждения нашей статьи полностью новы; однако, в нашей работе они впервые систематически упорядочены. Кроме того, авторы хотели бы применить результаты статьи к теориям кручения, которые не соответствуют весовым и t-структурам (см., например, интересный пример таковой в предложении 2.5.3(1) статьи [6]).

Перечислим некоторые результаты этой работы. Ряд основных свойств теорий кручения представлен в предложении 2.4; совершенно новое предложение 2.6 изучает поведение теорий кручения при точных функторах. В параграфе 3 подробно исследуется связь между теориями кручения, весовыми и t-структурами, и допустимыми триангулированными подкатегориями; большая часть результатов этого параграфа сходна с утверждениями более ранних работ. В параграфе 4 исследуется связь между соседствующими теориями кручения, (слабо) симметричными классами и двойственностью Брауна—Коменца (см. определение 4.1). Этот подход (и соответствующее предложение 4.4) полностью оригинален; авторы планируют изучить его связь с функторами Серра (см. определение 3.1 статьи [7]; напомним, что функторы Серра часто существуют на производных категориях когерентных пучков) в последующих работах. Наконец, в предложении 5.2 исследуется связь между теориями кручения и важным понятием проективного класса (введенным в [8]); это утверждение также является новым.

1. Категорные определения и обозначения.

- Все копроизведения и произведения будут малыми.
- Если X и Y — объекты категории $\underline{B}$, то мы будем обозначать множество $\underline{B}$-морфизмов из X в Y через $\underline{B}(X, Y)$.
- Объект X категории $\underline{B}$ называется *ретрактом* Y, если морфизм id_X может быть пропущен через Y (напомним, что в триангулированной категории это равносильно тому, что X — прямое слагаемое Y).
- Будем говорить, что подкатегория $\underline{D}$ *Каруби-замкнута* в $\underline{B}$, если она содержит все ретракты своих объектов, существующие в $\underline{B}$; мы также будем пользоваться этим термином для классов объектов $\underline{B}$, удовлетворяющих этому условию.
- Если $\mathcal{P}$ — некоторый класс объектов $\underline{B}$, то мы будем обозначать через $\mathrm{Kar}_{\underline{B}}(\mathcal{P}) \subset \mathrm{Obj}\underline{B}$ класс ретрактов элементов $\mathcal{P}$ в $\underline{B}$.
- Нам будет удобно придерживаться следующего соглашения: мы будем писать $\underline{B} \subset \underline{B}'$ и говорить, что $\underline{B}$ — подкатегория $\underline{B}'$ только, если $\underline{B}$ — строгая полная подкатегория $\underline{B}'$, т. е., если выполнено условие полноты и $\underline{B}$ замкнута относительно $\underline{B}'$-изоморфизмов.
- $\underline{C}$ всегда будет обозначать некоторую триангулированную категорию.
- Для любого выделенного треугольника $A \to B \to C \to A[1]$ в $\underline{C}$ будем называть объект B *расширением* C при помощи A. Класс $\mathcal{P} \subset \mathrm{Obj}\underline{C}$ называется *замкнутым относительно расширений*, если он содержит 0, и если для любой такой тройки (A, B, C), в которой A и C принадлежат $\mathcal{P}$, объект B также принадлежит $\mathcal{P}$.
- Для объектов M и N категории $\underline{C}$ мы будем писать $M \perp N$, если группа морфизмов $\underline{C}(M, N)$ равна $\{0\}$. Для классов $X, Y \subset \mathrm{Obj}\underline{C}$ мы будем писать $X \perp Y$, если $M \perp N$ для каждого $M \in X$ и $N \in Y$.
- Для любого класса $\mathcal{P} \subset \mathrm{Obj}\underline{C}$ мы будем обозначать через $\mathcal{P}^{\perp}$ класс

$$\{N \in \mathrm{Obj}\underline{C} : \ M \perp N \ \forall M \in \mathcal{P}\}.$$

Также будем использовать двойственное обозначение:

$$^{\perp}\mathcal{P} = \{M \in \mathrm{Obj}\underline{C} : \ M \perp N \ \forall N \in \mathcal{P}\}.$$

- Мы будем называть аддитивный функтор $H : \underline{C} \to \underline{A}$, где $\underline{A}$ — абелева категория, *гомологическим*, если он переводит выделенные треугольники в длинные точные последовательности.
- Мы будем называть функторы, сохраняющие структуры триангулированной категории, *точными*.

Ниже нам понадобятся следующие утверждения о триангулированных подкатегориях.

Предложение 1.1. *1. Если категория $\underline{C}$ замкнута относительно (малых) произведений (соотв., копроизведений), то любое произведение (соотв., копроизведение) выделенных треугольников в $\underline{C}$ является выделенным треугольником.*

2. Пусть $\underline{C}$ — (строгая полная; см. наше соглашение выше) триангулированная подкатегория категории $\underline{C}'$, и существует правый сопряженный функтор G к вложению $\underline{C} \to \underline{C}'$. Тогда $\underline{C}$ Каруби-замкнута в $\underline{C}'$, и для каждого $N \in \mathrm{Obj}\underline{C}'$ существует выделенный треугольник $LN \to N \to RN \to LN[1]$, в котором объект LN принадлежит $\mathrm{Obj}\underline{C}$, а RN принадлежит $(\mathrm{Obj}\underline{C})^{\perp_{\underline{C}'}}$.

Доказательство. 1. См. предложение 1.2.1 и замечание 1.2.2 книги [9].

2. См. предложения 1.5 и 1.6 статьи [7]; вторая часть утверждения также легко следует из предложений 9.1.18 и 9.1.8 книги [9]. □

2. Теории кручения: основные определения и свойства.

Определение 2.1. Мы будем называть пару s классов $\mathcal{LO}, \mathcal{RO} \subset \mathrm{Obj}\underline{C}$ *теорией кручения в* $\underline{C}$, если $\mathcal{LO}^{\perp} = \mathcal{RO}$, $\mathcal{LO} = {}^{\perp}\mathcal{RO}$, и для каждого объекта M категории $\underline{C}$ существует выделенный треугольник

$$L_sM \stackrel{a_M}{\to} M \stackrel{n_M}{\to} R_sM \to L_sM[1], \tag{2.1}$$

в котором $L_sM \in \mathcal{LO}$ и $R_sM \in \mathcal{RO}$. Мы будем называть всякий треугольник такого вида *s-разложением M*.

Нам также понадобятся следующие определения.

Определение 2.2. Пусть $s = (\mathcal{LO}, \mathcal{RO})$ — теория кручения в $\underline{C}$.

1. Мы будем говорить, что s *порождена* классом $\mathcal{P} \subset \mathrm{Obj}\underline{C}$, если $\mathcal{P}^{\perp} = \mathcal{RO}$.

2. Будем говорить, что теория кручения s *копродуктивна* (соотв., *продуктивна*), если класс $\mathcal{RO}$ замкнут относительно $\underline{C}$-копроизведений (соотв., $\mathcal{LO}$ замкнут относительно $\underline{C}$-произведений). Кроме того, если категория $\underline{C}$ замкнута относительно копроизведений (соотв., произведений), мы будем говорить, что теория кручения s приведена (соотв., коприведена).

3. Если $s' = (\mathcal{LO}', \mathcal{RO}')$ — также теория кручения в $\underline{C}$, и $\mathcal{RO} = \mathcal{LO}'$, то мы будем говорить, что *s соседствует с s' слева*, или, что *s' соседствует с s справа*.

Замечание 2.3. 1. Легко видеть, что объект M не всегда задает свое s-разложение (2.1) единственным образом (в частности, *весовые разложения* не единственны для весовых структур, чьи ядра нетривиальны; см. определение 3.1(1) и замечание 3.3(1) ниже). Однако нам часто будут требоваться некоторые s-разложения объектов; соответственно, мы будем пользоваться для них обозначениями формулы (2.1), не предполагая при этом, что L_sM и R_sM канонически определены.

2. Очевидно, любая теория кручения порождена своим классом $\mathcal{LO}$. Это наблюдение дает возможность применять утверждения, в которых указан некоторый порождающий класс $\mathcal{P}$ для s, к произвольным теориям кручения. Однако, конечно же, более интересной является ситуация, когда s порождена «небольшим» классом $\mathcal{P}$.

3. Понятие соседства впервые появилось в параграфе 4.4 статьи [2] для весовых и t-структур (см. § 3 ниже); отметим однако, что в работе [2] левое и правое соседства определялись другим способом. Напомним также, что в [10, § 3.1] для соседствующей пары теорий кручения тройка классов $(\mathcal{LO}, \mathcal{RO}, \mathcal{RO}')$ называлась *тройкой кручения*.

4. Отметим также, что понятие соседства теорий кручения можно обобщить следующим образом.

Пусть категории $\underline{C}$ и $\underline{C}'$ триангулированны, а категория $\underline{A}$ абелева. Следуя определению 2.5.1 статьи [11], мы будем называть бифунктор $\Phi : \underline{C}^{op} \times \underline{C}' \to \underline{A}$ *двойственностью*, если он гомологичен по обоим аргументам и снабжен бинатуральным естественным преобразованием функторов $\Phi(X, Y) \cong \Phi(X[1], Y[1])$.

Предположим теперь, что в $\underline{C}$ есть теория кручения $s = (\mathcal{LO}, \mathcal{RO})$, а в $\underline{C}'$ задана теория кручения $s' = (\mathcal{LO}', \mathcal{RO}')$. Тогда мы будем говорить, что *s ортогональна к s' относительно* Φ, если $\Phi(X, Y) = 0$ в следующих случаях: если $X \in \mathcal{LO}$ и $Y \in \mathcal{LO}'$, а также если $X \in \mathcal{RO}$ и $Y \in \mathcal{RO}'$.

Простейший пример двойственности — бифунктор $\underline{C}(-,-) : \underline{C}^{op} \times \underline{C} \to Ab$; легко видеть, что две теории кручения $\underline{C}(-,-)$-ортогональны тогда и только тогда, когда они соседствуют. Кроме того, функтор $\underline{C}(-,-)$ можно ограничить на произведение $\underline{D}^{op} \times \underline{E}$, где $\underline{D}$ и $\underline{E}$ — триангулированные подкатегории $\underline{C}$. Более сложные примеры двойственности можно строить при помощи [11, Proposition 2.5.6(2)], а в параграфе 4.5 этой же статьи был указан ряд мотивных применений данной конструкции (см. также параграфы 4.4 и 5 работы [12]).

5. Для всякого класса объектов $\mathcal{P} \subset \mathrm{Obj}\underline{C}$ пара классов $s = (\mathcal{LO}, \mathcal{RO})$, где $\mathcal{RO} = \mathcal{P}^{\perp}$ и $\mathcal{LO} = {}^{\perp}\mathcal{RO}$, очевидно, удовлетворяет свойствам ортогональности, указанным в определении 2.1. Однако, легко видеть, что не обязательно все объекты $\underline{C}$ обладают s-разложениями.

В определении 3.1 статьи [13] пара классов объектов, удовлетворяющая только свойствам ортогональности в определении 2.1, называлась *Hom-ортогональной* (тогда как теории кручения назывались *полными Hom-ортогональными парами*). Легко видеть, что многие наши рассуждения ниже также могут быть применены к парам такого вида.

Сформулируем ряд важных свойств теорий кручения.

Предложение 2.4. *Пусть $s = (\mathcal{LO}, \mathcal{RO})$ и $s' = (\mathcal{LO}', \mathcal{RO}')$ — теории кручения в $\underline{C}$.*

1. *Если s и s' порождены классом объектов $\mathcal{P}$ категории $\underline{C}$, то $s = s'$ и $\mathcal{P} \subset \mathcal{LO} = \mathcal{LO}'$.*

2. *Классы $\mathcal{LO}$ и $\mathcal{RO}$ Каруби-замкнуты в $\underline{C}$ и замкнуты относительно $\underline{C}$-расширений.*
3. *Класс $\mathcal{LO}$ замкнут относительно $\underline{C}$-копроизведений, а класс $\mathcal{RO}$ замкнут относительно $\underline{C}$-произведений.*
4. *Если i и j — целые числа, то класс $\mathcal{RO}[i] \cap \mathcal{LO}[j]$ замкнут относительно расширений и Каруби-замкнут в $\underline{C}$.*

   Кроме того, если теория кручения s (ко)продуктивна, то класс $\mathcal{RO}[i] \cap \mathcal{LO}[j]$ замкнут относительно $\underline{C}$-копроизведений (соотв., относительно $\underline{C}$-произведений).
5. *Если категория $\underline{C}$ замкнута относительно копроизведений, то теория кручения s приведена тогда и только тогда, когда копроизведение любого семейства s-разложений некоторых элементов $M_i \in \operatorname{Obj}\underline{C}$ является s-разложением элемента $\coprod M_i$; здесь i пробегает некоторое множество индексов.*

   Также выполнено двойственное утверждение: если $\underline{C}$ замкнута относительно произведений, то s коприведена тогда и только тогда, когда произведение любого семейства s-разложений является s-разложением соответствующего элемента.
6. *Если s соседствует слева с теорией кручения s' (в категории $\underline{C}$), то s копродуктивна, а s' продуктивна.*
7. *Пара классов $s^{op} = (\mathcal{RO}, \mathcal{LO})$ — теория кручения в категории $\underline{C}^{op}$; она (ко)приведена тогда и только тогда, когда s коприведена (соотв., приведена).*
8. *s-разложения «слабо функториальны» в следующем смысле: любой $\underline{C}$-морфизм $g : M \to M'$ можно дополнить до морфизма произвольных s-разложений объектов M и M'.*

   В частности, если объект M принадлежит $\mathcal{LO}$, то он является ретрактом любого возможного L_sM (см. замечание 2.3(1)).
9. *Пусть L и R — некоторые классы объектов $\underline{C}$ и, кроме того, $L \perp R$ и для каждого $M \in \operatorname{Obj}\underline{C}$ существует выделенный треугольник $l \to M \to r \to l[1]$, в котором $l \in L$ и $r \in R$. Тогда $(\operatorname{Kar}_{\underline{C}}(L), \operatorname{Kar}_{\underline{C}}(R))$ — теория кручения в $\underline{C}$.*

   Кроме того, если R замкнут относительно копроизведений (соотв., L замкнут относительно произведений), то эта теория кручения копродуктивна (соотв., продуктивна).

Доказательство. Пункты 1–3, 6 и 7 очевидны.

Пункт 4 немедленно следует из пунктов 2 и 3.

5. Пункт 3 в сочетании с предложением 1.1(1) немедленно дает прямое следствие в данной части предложения.

Предположим теперь, что любые копроизведения s-разложения также являются s-разложениями. Так как для произвольных элементов R_i множества $\mathcal{RO}$ выделенные треугольники $0 \to R_i \to R_i \to 0$ дают s-разложения R_i, получаем, что $\coprod R_i \in \mathcal{RO}$; таким образом, выделенная пара s приведена.

Аналогичное следствие для коприведенных весовых структур легко доказывается двойственным рассуждением (см. пункт 7 этого предложения).

8. Согласно предложению 1.1.9 статьи [1], для доказательства первой части этого пункта достаточно проверить следующее: для любых s-разложений (2.1) и

$L_sM' \to M' \to R_sM' \to L_sM'[1]$ композиция соответствующих морфизмов $L_sM \to M \to M' \to R_sM'$ равна 0. Конечно же, это утверждение следует из того, что $\mathcal{LO} \perp \mathcal{RO}$.

Для того чтобы вывести вторую часть нашего пункта из первой, достаточно взять $g = \mathrm{id}_M$, $M' = M$, и выделенный треугольник $M \stackrel{\mathrm{id}_M}{\to} M \to 0 \to M[1]$ в качестве («первого») s-разложения M.

9. Очевидно, $\mathrm{Kar}_{\underline{C}}(L) \perp \mathrm{Kar}_{\underline{C}}(R)$.

Теперь пусть $M \in {}^{\perp}R$. Тогда в соответствующем выделенном треугольнике $l \to M \stackrel{f}{\to} r \to l[1]$ морфизм f равен 0. Следовательно, $M \in \mathrm{Kar}_{\underline{C}}(L)$; таким образом, ${}^{\perp}R \subset \mathrm{Kar}_{\underline{C}}(L)$. Аналогично (см. п. 7), если объект M принадлежит $\mathrm{Kar}_{\underline{C}}(R)$, то он — ретракт соответствующего r; таким образом, $L^{\perp} \subset \mathrm{Kar}_{\underline{C}}(R)$, и мы получаем первое из искомых утверждений.

Наконец, для того, чтобы доказать второе утверждение этого пункта, достаточно заметить, что (ко)произведение любых ретрактов объектов M_i является ретрактом объекта $\prod M_i$ (соотв., $\coprod M_i$). $\square$

Замечание 2.5. 1. Наше определение теории кручения следует определению 3.2 статьи [10] и несколько отлично от определения 2.2 статьи [5], откуда был позаимствован наш термин. Напомним, что в последнем определении требовалось, чтобы классы $\mathcal{LO}$ и $\mathcal{RO}$ были Каруби-замкнуты в $\underline{C}$, $\mathcal{LO} \perp \mathcal{RO}$, и для каждого $M \in \mathrm{Obj}\underline{C}$ существовало s-разложение (2.1). Очевидно, из пунктов 2 и 9 нашего предложения 2.4 следует, что это определение равносильно нашему определению 2.1 (см. также несколько более слабое предложение 2.3 статьи [5]). Это альтернативное определение удобно применять для проверки того, является ли некоторая пара классов s теорией кручения (см. предложение 3.2 ниже).

Напомним также, что в статьях [14] и [10] теории кручения назывались *парами кручения*.

2. В параграфе 3 мы обсудим важнейшие типы теорий кручения — теории кручения, соответствующие весовым и t-структурам. Часть общих свойств теорий кручения, доказанных в этой работе, дают новые утверждения о структурах этих типов.

3. Из слабой функториальности s-разложений (см. п. 8 нашего предложения 2.4) немедленно следует, что для каждого функтора H из $\underline{C}$ в абелеву категорию $\underline{A}$ соответствие $M \mapsto \mathrm{Im}(H(L_sM) \to H(M))$ (где $M \in \mathrm{Obj}\underline{C}$) дает подфунктор H. Таким образом, s дает некоторую двучленную фильтрацию на каждой теории (ко)гомологий, определенной на $\underline{C}$. Эта фильтрация обобщает весовую фильтрацию, определенную в [2] (см. предложение 2.1.2(1) этой статьи); напомним (см. замечание 2.4.3 там же), что последняя широко обобщает весовые фильтрации Делиня.

Напомним также, что разложения, соответствующие t-структурам, (строго) функториальны (см. определение 3.1(2), замечание 3.3(1) и предложение 3.4(1) ниже).

4. Как было показано в работе [15] (где рассматривались соответствующие весовые структуры), бывает актуальна следующая версия определения приведенности: для каждого регулярного кардинального числа α (т. е. α нельзя представить в виде суммы менее чем α кардиналов, меньших α) будем называть теорию кручения s (в категории $\underline{C}$) *α-приведенной* (соотв., *α-коприведенной*), если $\underline{C}$ и $\mathcal{RO}$ замкнуты относительно копроизведений менее чем α элементов (соотв., если $\underline{C}$ и $\mathcal{LO}$ замкнуты относительно произведений менее чем α элементов). Легко видеть, что эти определения (в сочетании с соответствующей версией предложения 1.1(1), которая также

следует из результатов [9, § 1.2]) позволяют естественным образом обобщить пункты 5–7 нашего предложения 2.4.

Видимо, наиболее актуальным примером здесь является случай $\alpha = \aleph_1$; соответствующие теории кручения можно называть *счетно-приведенными* и *счетно-коприведенными*, соответственно.

Теперь изучим поведение теорий кручения при точных функторах.

Предложение 2.6. *Пусть $s = (\mathcal{LO}, \mathcal{RO})$ — теория кручения, порожденная некоторым классом $\mathcal{P} \subset \operatorname{Obj}\underline{C}$ в триангулированной категории $\underline{C}$; пусть $F : \underline{C} \to \underline{C}'$ — точный функтор, а $s' = (\mathcal{LO}', \mathcal{RO}')$ — теория кручения в $\underline{C}'$.*

I. Пусть функтор F сюръективен на объектах, $F(\mathcal{LO}) \subset \mathcal{LO}'$ и $F(\mathcal{RO}) \subset \mathcal{RO}'$. Тогда пара $(\mathcal{LO}', \mathcal{RO}')$ равна $(\operatorname{Kar}_{\underline{C}'}(F(\mathcal{LO})), \operatorname{Kar}_{\underline{C}'}(F(\mathcal{RO})))$.

II. Предположим, что существует правый сопряженный G к функтору F.

1. Тогда следующие условия равносильны:

(a) $F(\mathcal{LO}) \subset \mathcal{LO}'$;

(b) $F(\mathcal{P}) \subset \mathcal{LO}'$;

(c) $G(\mathcal{RO}') \subset \mathcal{RO}$.

2. Предположим также, что выполнены условия пункта I. Тогда теория кручения s' порождена классом $F(\mathcal{P})$.

3. Пусть F — полное вложение. Тогда $s'' = (\mathcal{LO}'', \mathcal{RO}'')$ — теория кручения, порожденная $F(\mathcal{P})$ в категории $\underline{C}'$; здесь $\mathcal{RO}''$ — класс расширений элементов $F(\operatorname{Obj}\underline{C})^{\perp_{\underline{C}'}}$ при помощи элементов $F(\mathcal{RO})$, а $\mathcal{LO}''$ — замыкание $F(\mathcal{LO})$ относительно $\underline{C}'$-изоморфизмов.

Доказательство. I. Для каждого объекта M' категории $\underline{C}'$ выберем такой $M \in \operatorname{Obj}\underline{C}$, что $F(M) \cong M'$, и выберем s-разложение $L_sM \to M \to R_sM \to L_sM[1]$. Это дает выделенный треугольник $F(L_sM) \to M' \to F(R_sM) \to F(L_sM)[1]$. Далее, из аксиомы ортогональности для s' получаем, что $F(\mathcal{LO}) \perp F(\mathcal{RO})$. Применив предложение 2.4(9) получаем, что $(\operatorname{Kar}_{\underline{C}'}(F(\mathcal{LO})), \operatorname{Kar}_{\underline{C}'}(F(\mathcal{RO})))$ — теория кручения в $\underline{C}'$.

Напомним теперь, что классы $\mathcal{LO}'$ и $\mathcal{RO}'$ Каруби-замкнуты в $\underline{C}'$ (см. предложение 2.4(2)), а значит, $\operatorname{Kar}_{\underline{C}'}(F(\mathcal{LO})) \subset \mathcal{LO}'$ и $\operatorname{Kar}_{\underline{C}'}(F(\mathcal{RO})) \subset \mathcal{RO}'$. С другой стороны,

$$\operatorname{Kar}_{\underline{C}'}(F(\mathcal{LO})) = {}^{\perp}(\operatorname{Kar}_{\underline{C}'}(F(\mathcal{RO}))) \supset {}^{\perp}\mathcal{RO}' = \mathcal{LO}',$$

и двойственное рассуждение доказывает последнее необходимое включение $\operatorname{Kar}_{\underline{C}'}(F(\mathcal{RO})) \supset \mathcal{RO}'$.

II. 1. Конечно же, условие (c) равносильно как тому, что $\mathcal{P} \perp G(\mathcal{RO}')$, так и тому, что $\mathcal{LO} \perp G(\mathcal{RO}')$. Применив сопряженность F с G получаем, что все перечисленные условия эквивалентны.

2. Очевидно, для каждого $M' \in \operatorname{Obj}\underline{C}'$ выполнено следующее:

$$F(\mathcal{P}) \perp M' \iff \mathcal{P} \perp G(M') \iff G(M') \in \mathcal{RO} \iff$$
$$\iff \mathcal{LO} \perp G(M') \iff F(\mathcal{LO}') \perp M'.$$

Далее, из пункта I получаем, что $F(\mathcal{LO})^{\perp} = \mathcal{RO}'$; отсюда $F(\mathcal{P})^{\perp} = \mathcal{RO}'$.

3. Конечно же, мы можем считать, что $\underline{C}$ — (строгая полная) подкатегория $\underline{C}'$.

Очевидно, $\mathcal{LO}'' = \mathcal{LO} \perp \mathcal{RO}''$. Согласно предложению 1.1(2), подкатегория $\underline{C}$ Каруби-замкнута в $\underline{C}'$, а значит, класс $\mathcal{LO}$ также Каруби-замкнут в $\underline{C}'$. Предложение 1.1(2) также дает для каждого объекта N категории $\underline{C}'$ выделенный треугольник

$$N' \to N \to N'' \to N'[1], \tag{2.2}$$

в котором $N' \in \mathrm{Obj}\underline{C}$ и $N'' \in (\mathrm{Obj}\underline{C})^{\perp_{\underline{C}'}}$. Так как $\mathcal{LO} \perp N''$, получаем, что $\mathcal{LO}^{\perp} = \mathcal{RO}''$, а значит, класс $\mathcal{RO}''$ Каруби-замкнут в $\underline{C}'$.

Согласно замечанию 2.5(1), осталось проверить, что у каждого $N \in \mathrm{Obj}\underline{C}'$ существует s''-разложение. Выберем s-разложение $L_sN' \to N' \to R_sN' \to L_sN'[1]$ соответствующего объекта N' (см. формулу (2.2)). Применив аксиому октаэдра к этому выделенному треугольнику вместе с треугольником (2.2) получаем, что N является расширением R при помощи L_sN', где R — какое-то расширение объектов N'' и R_sN'. Таким образом, мы получаем s''-разложение объекта N. $\square$

Замечание 2.7. Теорию кручения s'', построенную в п. II.3 нашего предложения 2.6, можно было бы назвать вырожденным расширением s на $\underline{C}'$. Отметим, что если s'' — теория кручения весового или t-типа (см. определение 3.1 ниже), то соответствующая (весовая или t-) структура обязательно вырождена (см. [15, Definition 1.2.2(4)]), поскольку $\cap_{i\in\mathbb{Z}}\underline{C}^{t\geq i} \neq \{0\}$ или $\cap_{i\in\mathbb{Z}}\underline{C}_{w\geq i} \neq \{0\}$ соответственно.

3. О теориях кручения, соответствующих весовым и t-структурам. Теперь рассмотрим «самые важные типы» теорий кручения.

Определение 3.1. Пусть s — теория кручения в категории $\underline{C}$.

1. Предположим, что $\mathcal{LO} \subset \mathcal{LO}[1]$. Тогда мы будем говорить, что теория кручения s *весового типа*. Мы будем называть пару классов $w = (\underline{C}_{w\leq 0}, \underline{C}_{w\geq 0})$, где $\underline{C}_{w\leq 0} = \mathcal{LO}$, а $\underline{C}_{w\geq 0} = \mathcal{RO}[-1]$, *весовой структурой, соответствующей* s, а s будем называть *теорией кручения, соответствующей* w.

Полную подкатегорию $\underline{Hw}$ категории $\underline{C}$,[1] чей класс объектов равен $\underline{C}_{w\leq 0}\cap\underline{C}_{w\geq 0}$, мы будем называть *ядром* весовой структуры w.

Мы будем говорить, что w (ко)приведена, если это свойство выполнено для s.[2]

2. Пусть $\mathcal{LO} \subset \mathcal{LO}[-1]$. Тогда мы будем говорить, что теория кручения s *t-типа*. Мы будем называть пару $t = (\underline{C}^{t\leq 0}, \underline{C}^{t\geq 0})$, где $\underline{C}^{t\leq 0} = \mathcal{LO}$, а $\underline{C}^{t\geq 0} = \mathcal{RO}[1]$, *$t$-структурой, соответствующей* s, а s — *теорией кручения, соответствующей* t.

Полную подкатегорию $\underline{Ht}$ категории $\underline{C}$, чей класс объектов равен $\underline{C}^{t\leq 0} \cap \underline{C}^{t\geq 0}$, мы будем называть *ядром* t.

Мы будем говорить, что t-структура t (ко)приведена, если это свойство выполнено для s.

Теперь изучим связь наших определений со «стандартными». Большая часть результатов этого параграфа не вполне нова (см., например, [4, § 3]).

Предложение 3.2. *1. Наше определение t-структур равносильно определению 1.3.1 статьи [1][3], т. е. каждая теория кручения t-типа задает (единственную) t-структуру в смысле этого определения, и все t-структуры (в этом смысле) соответствуют теориям кручения t-типа.*

[1] Очевидно, эта подкатегория также строга.

[2] Конечно же, если эта весовая структура (ко)приведена, то категория $\underline{C}$ замкнута относительно копроизведений (соотв., произведений).

[3] В этой статье класс $\underline{C}^{t\leq 0}$ обозначался через $\underline{C}^{\leq 0}$, а класс $\underline{C}^{t\geq 0}$ обозначался через $\underline{C}^{\geq 0}$.

2. *Наше определение весовых структур равносильно определению 1.2.1 статьи [4],*[4] *т. е. каждая теория кручения весового типа задает (единственную) весовую структуру в смысле этого определения, и все весовые структуры соответствуют теориям кручения весового типа.*
3. *Если теория кручения s соседствует слева с s', то s имеет весовой тип (соответственно, t-тип) тогда и только тогда, когда теория кручения s' имеет t-тип (соотв., весовой тип).*
4. *Если весовая структура w (ко)приведена, то категория $\underline{Hw}$ замкнута относительно копроизведений (соотв., произведений) и вложение $\underline{Hw} \to \underline{C}$ сохраняет копроизведения (соотв., произведения).*
5. *Пусть триангулированные категории $\underline{C}$ и $\underline{C}'$ удовлетворяют условиям предложения 2.6, п. II.3, и, кроме того, s весового типа. Тогда соответствующая теория кручения s'' — также весового типа, и очевидный функтор $\underline{Hw} \to \underline{Hw}''$ (здесь $\underline{Hw}''$ — ядро весовой структуры w'', соответствующей s'') является эквивалентностью категорий.*

Доказательство. 1. Если $\mathcal{LO} \subset \mathcal{LO}[-1]$ (т. е. $\underline{C}^{t\le 0} \subset \underline{C}^{t\le 0}[-1]$), то $\underline{C}^{t\ge 0} \subset \underline{C}^{t\ge 0}[1]$ (так как функтор сдвига [1] — автоморфизм $\underline{C}$). Таким образом, t действительно является t-структурой в смысле статьи [1]. Обратное утверждение немедленно следует из определения 1.3.1 и предложения 1.3.3 этой же статьи.

2. Если $\mathcal{LO} \subset \mathcal{LO}[1]$ (т. е. $\underline{C}_{w\le 0} \subset \underline{C}_{w\le 0}[1]$), то, очевидно, $\underline{C}_{w\ge 0}[1] \subset \underline{C}_{w\ge 0}$. Воспользовавшись также предложением 2.4(2) мы получаем, что w действительно является весовой структурой в смысле статьи [4].

Обратное утверждение легко следует из предложения 2.4(9) (см. замечание 2.5(1)).

3. Очевидно из наших определений.

4. Так как категория $\underline{C}$ замкнута относительно копроизведений (соотв., произведений), утверждение следует из предложения 2.4(4).

5. Очевидно, мы можем считать, что $\underline{C}$ — (строгая) подкатегория $\underline{C}'$ (т. е. мы отождествляем $\underline{C}$ с ее образом в $\underline{C}'$ и считаем, что она замкнута относительно $\underline{C}'$-изоморфизмов).

Тогда $\mathcal{LO}'' = \mathcal{LO}$, а значит, теория кручения s'' весового типа по определению. Кроме того, $\underline{C}'_{w''\le 0} = \underline{C}_{w\le 0} = \mathcal{LO} \subset \mathrm{Obj}\underline{C}$, а $\underline{C}''_{w\ge 0} \cap \mathrm{Obj}\underline{C} = (\mathcal{LO}[-1])^{\perp_{\underline{C}}} = \underline{C}_{w\ge 0}$, а значит, $\underline{Hw}'' = \underline{Hw}$. □

Замечание 3.3. 1. Напомним, что если s — теория кручения весового типа (соотв., t-типа), то соответствующие s-разложения называются весовыми разложениями (соотв., t-разложениями); эта терминология была использована, в частности, в ряде статей первого автора.

Таким образом, если s приведена, то любые копроизведения соответствующих весовых разложений (соотв., t-разложений) являются весовыми разложениями (соотв., t-разложениями); см. предложение 2.4(4).

2. Если $s = (\mathcal{LO}, \mathcal{RO})$ — теория кручения весового типа (соотв., t-типа) в категории $\underline{C}$, $s' = (\mathcal{LO}', \mathcal{RO}')$ — теория кручения весового типа (соотв., t-типа) в $\underline{C}'$, а $F : \underline{C} \to \underline{C}'$ — точный функтор, для которого $F(\mathcal{LO}) \subset \mathcal{LO}'$ и $F(\mathcal{RO}) \subset \mathcal{RO}'$

[4] Это определение также использовалось в статьях [16, 6, 15] и [13]; оно отличается от «первоначального» определения 1.1.1 статьи [2] обозначениями, т. е. в [2] класс $\underline{C}_{w\le 0}$ обозначался через $\underline{C}^{w\ge 0}$, а $\underline{C}_{w\ge 0}$ — через $\underline{C}^{w\le 0}$.

(см. предложение 2.6, пп. I, II.2), то F называется весо-точным (соотв., t-точным) функтором.

Таким образом, наше предложение 2.6, п. I обобщает предложение 2.3.1 статьи [16] (которое использовалось для изучения весо-точных локализаций). Заметим также, что уже в случае, когда F — тождественный функтор (и, конечно же, $\underline{C}' = \underline{C}$) мы получаем следующее полезное утверждение: если s и s' — теории кручения в $\underline{C}$, $\mathcal{LO} \subset \mathcal{LO}'$ и $\mathcal{RO} \subset \mathcal{RO}'$, то $s = s'$.

Напомним теперь несколько свойств t-структур и свяжем их с нашими определениями.

Предложение 3.4. *Пусть $t = (\underline{C}^{t\le 0}, \underline{C}^{t\ge 0})$ — t-структура, а s — соответствующая ей теория кручения.*

1. *Тогда категория $\underline{Ht}$ абелева, соответствия $M \mapsto L_sM$ и $M \mapsto R_sM$ задают эндофункторы категории $\underline{C}$, а композиция $[1] \circ R_s \circ [-1] \circ L_s$ дает гомологический функтор $H^t : \underline{C} \to \underline{Ht}$.*

2. *Если t-структура t приведена, то эндофункторы L_s, R_s, функтор вложения $\underline{Ht} \to \underline{C}$ и H^t сохраняют малые копроизведения, и категория $\underline{Ht}$ удовлетворяет условию AB4.*

3. *Пусть триангулированные категории $\underline{C}$ и $\underline{C}'$ удовлетворяют условиям предложения 2.6, п. II.3. Тогда соответствующая теория кручения s'' также t-типа, и очевидный функтор $\underline{Ht} \to \underline{Ht}''$ (здесь $\underline{Ht}''$ — ядро весовой структуры t'', соответствующей s'') задает эквивалентность этих категорий.*

4. *Существует взаимно однозначное соответствие между (допустимыми справа; см. замечание 3.5(1) ниже) (строгими) триагулированными подкатегориями $\underline{D} \subset \underline{C}$, для которых существует правый сопряженный G к функтору вложения, и теориями кручения $(\mathcal{LO}_{\underline{D}}, \mathcal{RO}_{\underline{D}})$, для которых $\mathcal{LO}_{\underline{D}}[1] = \mathcal{LO}_{\underline{D}}$; это соответствие переводит $\underline{D}$ в $(\mathrm{Obj}\underline{D}, (\mathrm{Obj}\underline{D})^{\perp})$.*

   Кроме того, каждая теория кручения $(\mathcal{LO}_{\underline{D}}, \mathcal{RO}_{\underline{D}})$ этого типа задает t-структуру.[5]

5. *Пусть категория $\underline{C}$ замкнута относительно копроизведений. Тогда упомянутое выше соответствие сужается до взаимно однозначного соответствия между приведенными теориями кручения $(\mathcal{LO}_{\underline{D}}, \mathcal{RO}_{\underline{D}})$, для которых $\mathcal{LO}_{\underline{D}}[1] = \mathcal{LO}_{\underline{D}}$, и подкатегориями $\underline{D} \subset \underline{C}$, для которых правый сопряженный G (существует и) сохраняет копроизведения.*

Доказательство. 1. Все эти утверждения хорошо известны (см. теорему 1.3.6 и предложение 1.3.3 статьи [1]).

2. Из предложения 2.4(4) получаем, что функторы L_s и R_s сохраняют копроизведения. Конечно же, отсюда следует, что H^t также сохраняет копроизведения.

Далее (аналогично доказательству предложения 3.2(4)), так как категория $\underline{C}$ замкнута относительно малых копроизведений, то из предложения 2.4(4) получаем, что категория $\underline{Ht}$ замкнута относительно копроизведений (т. е. удовлетворяет условию AB3), и вложение $\underline{Ht} \to \underline{C}$ сохраняет копроизведения.

[5] То есть нам не нужно «сдвигать» $\mathcal{RO}$ как в определении 3.1(2).

Напомним теперь, что, согласно теореме 1.3.6 статьи [1], пара $\underline{Ht}$-морфизмов $X \to Y \to S$ дает короткую точную последовательность в $\underline{Ht}$ тогда и только тогда, когда ее можно дополнить до выделенного треугольника в $\underline{C}$. Применив предложение 1.1(1) получаем, что категория $\underline{Ht}$ также удовлетворяет условию AB4.

3. Очевидная модификация рассуждений, использованных для доказательства предложения 3.2(5), легко дает все искомые утверждения.

4. Если G существует, то мы можем рассмотреть на $\underline{D}$ (вырожденную) t-структуру $(\mathrm{Obj}\underline{D}, \{0\})$, и, применив предыдущий пункт нашего предложения, получить, что $(\mathrm{Obj}\underline{D}, \mathrm{Obj}\underline{D}^{\perp_{\underline{C}}})$ является теорией кручения (и t-структурой) в $\underline{C}$. Конечно же, при этом $\mathrm{Obj}\underline{D}[1] = \mathrm{Obj}\underline{D}$.

Обратно, класс $\mathcal{LO}$ замкнут относительно $\underline{C}$-расширений (см. предложение 2.4(2)); поэтому если $\mathcal{LO} = \mathcal{LO}[1]$, то соответствующая категория $\underline{D}$ — (строгая) триангулированная подкатегория $\underline{C}$. Кроме того, пара $(\mathcal{LO}, \mathcal{RO})$ является t-структурой по нашему определению 3.1(2) (см. также предложение 3.2(1)), так как $\mathcal{RO} = \mathcal{RO}[1]$. Тогда функтор, полученный из L_t заменой области значения на $\underline{D}$, является искомым сопряженным G согласно (вышеупомянутому) предложению 1.3.3 статьи [1].

Остается отметить, что указанные сами соответствия, очевидно, взаимно обратны друг к другу (см. предложение 2.4(1)).

5. Нам нужно узнать, какие из теорий кручения $s = (\mathcal{LO}, \mathcal{RO})$, для которых $\mathcal{LO} = \mathcal{LO}[1]$, приведены. Согласно предложению 2.4(5) это условие равносильно тому, что копроизведения s-разложений являются s-разложениями. Применив предложение 1.1(1) (см. также пункт 2 нашего предложения), мы легко получаем, что это равносильно тому, что эндофунктор $L_t : \underline{C} \to \underline{C}$ сохраняет копроизведения.

Далее, так как функтор вложения $i : \underline{D} \to \underline{C}$ обладает правым сопряженным, он сохраняет копроизведения. Таким образом, L_t сохраняет копроизведения в том и только в том случае, когда G удовлетворяет этому же условию. $\square$

Замечание 3.5. 1. Пункт 4 нашего предложения 3.4 непосредственно связан с предложением 1.5 статьи [7]. Соответственно, триангулированную подкатегорию $\underline{D} \subset \underline{C}$, для которой функтор вложения $\underline{D} \to \underline{C}$ обладает правым сопряженным, можно называть *допустимой справа* (см. определение 1.2 там же).

2. Конечно же, допустимые справа триангулированные подкатегории дают «самый простой» класс теорий кручения (в $\underline{C}$); этот класс состоит из всех теорий кручения одновременно весового типа и t-типа.

Напомним также, что термин «приведенная» был первоначально введен для триангулированных допустимых справа подкатегорий (см., например, [18, § 1]).

4. О симметрии и соседствующих теориях кручений. Нам понадобится еще несколько определений.

Определение 4.1. В этом параграфе мы зафиксируем коммутативное ассоциативное кольцо с единицей R, для которого категория $\underline{C}$ R-линейна, и копорождающий инъективный модуль I над R.

Пусть $\mathcal{P}$ и $\mathcal{P}'$ — некоторые классы объектов $\underline{C}$, а $P \in \mathrm{Obj}\underline{C}$.

1. Мы будем обозначать через H^P копредставленный P функтор $\underline{C}(P, -) : \underline{C} \to R-\mathrm{Mod}$, а через H_P — представимый функтор $\underline{C}(-, P) : \underline{C}^{op} \to R-\mathrm{Mod}$.
2. $\underline{C}$-морфизм h мы будем называть *$\mathcal{P}$-нулевым*, (соотв., *$\mathcal{P}$-конулевым*), если для каждого $M \in \mathcal{P}$ гомоморфизм $H^M(h)$ (соотв., $H_M(h)$) равен нулю.

3. Мы будем говорить, что класс $\mathcal{P}$ *слабо симметричен* $\mathcal{P}'$, если $\mathcal{P}^{\perp} = {}^{\perp}\mathcal{P}'$; мы будем говорить, что $\mathcal{P}$ *симметричен* $\mathcal{P}'$, если класс $\mathcal{P}$-нулевых морфизмов совпадает с классом $\mathcal{P}'$-конулевых.
4. Для любого R-линейного гомологического функтора H из $\underline{C}$ в абелеву категорию $R - \mathrm{Mod}$ (R-модулей) мы будем называть функтор $\widehat{H} : M \mapsto R - \mathrm{Mod}(H(M), I)$ из $\underline{C}^{op}$ в $R - \mathrm{Mod}$ *двойственным по Брауну—Коменцу* к H.

   Соответственно, мы будем называть объект P' категории $\underline{C}$ *двойственным по Брауну—Коменцу* к P и обозначать его через $\hat{P}$, если функтор $H_{P'}$ двойственен (по Брауну—Коменцу) к H^P.

Замечание 4.2. Конечно же, для любой триангулированной категории $\underline{C}$ мы можем взять $R = \mathbb{Z}$ (и, соответственно, $I = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$) в этом определении; в частности, мы будем считать $R = \mathbb{Z}$ в параграфе 5 ниже.

Однако значительный интерес представляет случай, когда R — поле; конечно же, тогда можно взять $I = R$. В этом случае соответствующие двойственные объекты можно вычислять при помощи функторов Серра (см. определение 3.1 статьи [7]).

Сформулируем теперь ряд основных свойств «симметрий».

Предложение 4.3. *Пусть $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$, $\mathcal{P}_i$ и $\mathcal{P}'_i$ (где i пробегает некоторый класс I) — некоторые классы объектов $\underline{C}$; пусть P — объект $\underline{C}$, а h — морфизм в $\underline{C}$. Предположим также, что $H : \underline{C} \to R - \mathrm{Mod}$ — гомологический функтор.*

Тогда выполнены следующие утверждения.

1. *P принадлежит классу $\mathcal{P}^{\perp}$ в том и только в том случае, когда морфизм id_P — $\mathcal{P}$-нулевой; дуализируя, получаем, что $P \in {}^{\perp}\mathcal{P}$ в том и только в том случае, если id_P является $\mathcal{P}$-конулевым.*
2. *Если класс $\mathcal{P}$ симметричен $\mathcal{P}'$, то он также слабо симметричен $\mathcal{P}'$.*
3. *Класс $\mathcal{P}$ (слабо) симметричен $\mathcal{P}'$ в том и только в том случае, когда $\mathcal{P}'$ (слабо) симметричен $\mathcal{P}$ в категории $\underline{C}^{op}$.*[6]
4. *Если класс $\mathcal{P}_i$ (слабо) симметричен $\mathcal{P}'_i$ для всех $i \in I$, то класс $\cup\mathcal{P}_i$ (слабо) симметричен $\cup\mathcal{P}'_i$.*
5. *Функтор $\widehat{H}$ (двойственный по Брауну—Коменцу к функтору H) гомологичен. Кроме того, если функтор $\widehat{H}$ представлен некоторым объектом $N \in \mathrm{Obj}\underline{C}$, то морфизм h является $\{N\}$-конулевым в том и только в том случае, если $H(h) = 0$.*

Доказательство. 1. Очевидно.

2. Первая часть этого пункта немедленно следует из предыдущего пункта, а вторая очевидна.

3, 4. Очевидно.

5. Функтор $\widehat{H}$ гомологичен, так как I — инъективный объект в категории $R - \mathrm{Mod}$. Далее, так как I копорождает эту категорию, $H(h) = 0$, если $\widehat{H}(h) = 0$, тогда как обратное следствие выполнено автоматически. $\square$

Свяжем теперь симметрию и теории кручения.

[6] Поэтому мы и говорим о симметрии.

Предложение 4.4. *Пусть $\mathcal{P}$ и $\mathcal{P}'$ — некоторые классы объектов $\underline{C}$, $s = (\mathcal{LO}, \mathcal{RO})$ и $s' = (\mathcal{LO}', \mathcal{RO}')$ — теории кручения в этой категории, причем некоторый класс $\mathcal{P}_s \subset \operatorname{Obj}\underline{C}$ порождает s, а некоторый $\mathcal{P}_{s'}$ копорождает s' (т. е. $\mathcal{LO} = {}^{\perp}\mathcal{P}_{s'}$). Тогда выполнены следующие утверждения.*

1. *Класс $\mathcal{P}_s$ слабо симметричен $\mathcal{P}'$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{LO}$ также слабо симметричен $\mathcal{P}'$.*
2. *Класс $\mathcal{P}$ слабо симметричен $\mathcal{P}_{s'}$ в том и только в том случае, когда $\mathcal{P}$ слабо симметричен $\mathcal{RO}'$.*
3. *Следующие условия равносильны:*

   (i) класс $\mathcal{P}_s$ слабо симметричен $\mathcal{P}_{s'}$;

   (ii) $\mathcal{LO}$ симметричен $\mathcal{RO}'$;

   (iii) существует такой класс $\mathcal{Q}$, порождающий s, и класс $\mathcal{Q}'$, копорождающий теорию кручения s', что $\mathcal{Q}$ симметричен $\mathcal{Q}'$;

   (iv) теория кручения s соседствует слева с s'.
4. *Пусть для каждого элемента $\mathcal{P}_s$ существует двойственный к нему (по Брауну—Коменцу), а теория кручения s' соседствует справа с s. Тогда s' копорождена в вышеупомянутом смысле двойственными к элементам $\mathcal{P}_s$.*

Доказательство. 1, 2: очевидно (если вспомнить соответствующие определения).

3. Непосредственно из определения, теория кручения s соседствует слева с s', если $\mathcal{LO}^{\perp} = {}^{\perp}\mathcal{RO}'$; следовательно, условие (i) равносильно (iv). Применив предложение 4.3(1) мы также получаем, что из условия (iii) следует (i). Далее, равносильность условий (ii) и (iv) немедленно следует из предложения 5.2(1) ниже. Так как из (ii) следует (iii), мы получаем искомую равносильность.

4. Класс $\mathcal{P}_s$ симметричен к $\widehat{\mathcal{P}_s}$ согласно предложению 4.3. Таким образом, остается применить предыдущий пункт. □

Замечание 4.5. 1. Рассматриваемые в этой статье определения симметрии и использование симметричных классов в качестве (ко)порождающих отчасти следует идеям (параграфа 2) статьи [17], где симметричные классы были связаны с вопросом *представимости Брауна.*[7] Кроме того, в этой работе было отмечено, что в каждой *компактно порожденной* триангулированной категории $\underline{C}$ для каждого *компактного* объекта существует двойственный по Брауну—Коменцу.

Отметим при этом, что связь симметричных классов с теориями кручения ранее в литературе не исследовалась.

2. Теорема 3.11 статьи [10] говорит, что в компактно порожденной *алгебраической* триангулированной категории $\underline{C}$ для каждой *компактно порожденной* теории кручения s (т. е. в качестве $\mathcal{P}_s$ мы берем множество компактных объектов) существует соседствующая справа теория кручения. Таким образом, эта теория кручения s' копорождена соответствующим классом $\widehat{\mathcal{P}_s}$, что дает о ней новые сведения.

3. Теоретически, п. 3 нашего предложения 4.4 дает полное описание всех возможных соседствующих теорий кручения. Действительно, можно начать с теории

[7] Именно эта работа и мотивировала нас напомнить определение симметричных классов; отметим, что для целей нашей статьи достаточно было бы определения слабой симметричности.

кручения s, выбрать для нее порождающий класс $\mathcal{P}_s$ (например, равный всему классу $\mathcal{LO}$), найти класс $\mathcal{P}_{s'}$, слабо симметричный $\mathcal{P}_s$ (если такой существует), и «копородить» s' (если $\mathcal{P}_{s'}$ копорождает теорию кручения).

Заметим, однако, что единственный общий метод построения (слабо) симметричных классов — это применение двойственности Брауна—Коменца (и, соответственно, функторов Серра; см. замечание 4.2). Таким образом, мы строим симметричные классы «поэлементно», и было бы интересно найти другие методы построения.

4. Условие симметричности неудобно тем, что класс $\mathcal{P}_s$-нулевых морфизмов зависит не только от s, но и от выбора $\mathcal{P}_s$. Поэтому даже если теории кручения s и s' соседствуют, не всегда легко найти «маленькие» симметричные $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{Q}'$ как в условии 3(iii) нашего предложения 4.4. Нам известно только два «основных» типа симметричных классов: классы, построенные при помощи двойственности Брауна—Коменца, и классы типа $(\mathcal{LO}, \mathcal{RO}')$ (см. условие 3(ii)).[8]

5. О связи с проективными классами. Следуя предложению 2.6 работы [8], введем следующее определение.

Определение 5.1. Будем называть пару $(\mathcal{P}, I)$, где $\mathcal{P}$ — некоторый класс объектов триангулированной категории $\underline{C}$, а I — это класс $\mathcal{P}$-нулевых морфизмов (см. определение 4.1(2)) *проективным классом*, если $\mathcal{P}$ — максимальный среди классов, для которых все элементы I являются $\mathcal{P}$-нулевыми, и для каждого $M \in \mathrm{Obj}\underline{C}$ существует выделенный треугольник $L \to M \xrightarrow{n} R \to L[1]$, в котором $L \in \mathcal{P}$ и $n \in I$.

Оказывается, каждой теории кручения соответствует некоторый проективный класс.

Предложение 5.2. *Пусть s — теория кручения в категории $\underline{C}$.*

1. Тогда $\underline{C}$-морфизм $h : M \to N$ является $\mathcal{LO}$-нулевым в том и только в том случае, если он пропускается через какой-то элемент класса $\mathcal{RO}$.

2. Пара $(\mathcal{LO}, \mathcal{LO}-null)$, где $\mathcal{LO}-null$ — класс $\mathcal{LO}$-нулевых морфизмов, является проективным классом.

Доказательство. 1. Так как $\mathcal{LO} \perp \mathcal{RO}$, каждый морфизм, который пропускается через $\mathcal{RO}$, $\mathcal{LO}$-нулевой. Обратно, если морфизм $h : M \to N$ является $\mathcal{LO}$-нулевым, то для каждого s-разложения объекта M морфизм $h \circ a_M$ (см. обозначения в формуле (2.1)) равен нулю. Очевидно, отсюда следует, что h пропускается через $R_s M \in \mathcal{RO}$.

2. Для каждого $L \in \mathcal{LO}$ и $h \in \mathcal{LO} - \mathrm{null}$ гомоморфизм $H^L(h)$ (см. определение 4.1(1)) равен 0 по определению. Так как класс $\mathcal{LO}$ Каруби-замкнут в $\underline{C}$ (см. предложение 2.4(2)), согласно лемме 3.2 статьи [8],[9] остается для каждого объекта X категории $\underline{C}$ доказать следующее: существует такой морфизм $a : L \to X$, что $L \in \mathcal{LO}$, а морфизм $X \to \mathrm{Cone}(a)$, который дополняет a до выделенного треугольника, $\mathcal{LO}$-нулевой. Согласно первому пункту нашего предложения, для этого достаточно взять в качестве a (любую версию) a_X (в обозначениях формулы (2.1)). □

[8] Симметрические классы также можно «объединять» (см. предложение 4.3(4)); однако, это не дает «принципиально новых» симметричных классов.

[9] Строго говоря, эта лемма сформулирована в предположении $\mathcal{LO} = \mathcal{LO}[1]$ (см. начало [8, § 3]); однако, это дополнительное предположение никак не используется в доказательстве леммы.

Замечание 5.3. 1. Это утверждение является новым даже для случаев теорий кручений весового типа и теорий кручений t-типа. Авторы считают его полезным потому, что оно связывает сравнительно новое понятие теорий кручения с проективными классами, изученными значительно лучше. Напомним, в частности, что результаты [8, § 3.1] позволяют строить «новые» проективные классы из «старых», пользуясь соответствующими «операциями».

2. Конечно же, применив вторую часть нашего предложения 4.4 (в сочетании с предложением 2.4(7)) к категории $\underline{C}^{op}$, мы получим, что в этой категории $\mathcal{RO}$ можно дополнить до проективного класса. Таким образом (следуя статье [8]), мы могли бы назвать пару ($\mathcal{RO}, \mathcal{RO}$ − conull) (где $\mathcal{RO}$ − conull — класс $\mathcal{RO}$-конулевых морфизмов) *инъективным классом.*

Литература

1. *Beilinson A., Bernstein J., Deligne P.* Faisceaux pervers // Asterisque. 1982. Vol. 100. P. 5–171.

2. *Bondarko M.* Weight structures vs. t-structures; weight filtrations, spectral sequences, and complexes (for motives and in general) // J. of K-theory. 2010. Vol. 6, no. 3. P. 387–504. См. также http://arxiv.org/abs/0704.4003 (дата обращения: 27.10.2018).

3. *Pauksztello D.* Compact cochain objects in triangulated categories and co-t-structures // Central European J. of Math. 2008. Vol. 6, no. 1. P. 25–42.

4. *Bondarko M. V., Sosnilo V. A.* On constructing weight structures and extending them to idempotent extensions // Homology, Homotopy and Appl. 2018. Vol. 20, no. 1. P. 37–57.

5. *Iyama O., Yoshino Y.* Mutation in triangulated categories and rigid Cohen–Macaulay modules // Inv. math. 2008. Vol. 172, no. 1. P. 117–168.

6. *Bondarko M. V.* On morphisms killing weights, weight complexes, and Eilenberg-Maclane (co)homology of spectra. Препринт. 2015. http://arxiv.org/abs/1509.08453 (дата обращения: 27.10.2018).

7. *Бондал А. И., Капранов М. М.* Представимые функторы, функторы Серра и перестройки // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1989. Т. 53, № 6. С. 1183–1205.

8. *Christensen J.* Ideals in triangulated categories: phantoms, ghosts and skeleta // Adv. in Math. 1998. Vol. 136, no. 2. P. 284–339.

9. *Neeman A.* Triangulated Categories. Vol. 148. In: Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, 2001. viii+449 pp.

10. *Beligiannis A.* Relative homology, higher cluster-tilting theory and categorified Auslander–Iyama correspondence // J. of Algebra. 2015. Vol. 444. P. 367–503.

11. *Bondarko M. V.*, Motivically functorial coniveau spectral sequences; direct summands of cohomology of function fields // Doc. Math., extra volume: Andrei Suslin's Sixtieth Birthday. 2010. P. 33–117. См. также http://arxiv.org/abs/0812.2672 (дата обращения: 27.10.2018).

12. *Bondarko M. V.* Gersten weight structures for motivic homotopy categories; retracts of cohomology of function fields, motivic dimensions, and coniveau spectral sequences. Препринт. 2018. https://arxiv.org/abs/1803.01432 (дата обращения: 27.10.2018).

13. *Pospisil D., Šťovíček J.* On compactly generated torsion pairs and the classification of co-t-structures for commutative Noetherian rings // Trans. Amer. Math. Soc. 2016. Vol. 368. P. 6325–6361.

14. *Saorin M., Šťovíček J.* On exact categories and applications to triangulated adjoints and model structures // Adv. Math. 2011. Vol. 228, no. 2. P. 968–1007.

15. *Bondarko M. V., Sosnilo V. A.*, On purely generated α-smashing weight structures and weight-exact localizations. Препринт. 2017. http://arxiv.org/abs/1712.00850 (дата обращения: 27.10.2018).

16. *Bondarko M. V., Sosnilo V. A.* On the weight lifting property for localizations of triangulated categories // Lobachevskii J. of Math. 2018. Vol. 39, no. 7. P. 970–984.

17. *Krause H.* A Brown representability theorem via coherent functors // Topology. 2002. Vol. 41, no. 4. P. 853–861.

18. *Keller B.* A remark on the generalized smashing conjecture // Manuscripta Math. 1994. Vol. 84, no. 1. P. 193–198.

Статья поступила в редакцию 3 августа 2018 г.;
после доработки 9 сентября 2018 г.;
рекомендована в печать 27 сентября 2018 г.

Контактная информация:

Бондарко Михаил Владимирович — д-р физ.-мат. наук, проф.; mbondarko@gmail.com
Востоков Сергей Владимирович — д-р физ.-мат. наук, проф.; s.vostokov@spbu.ru

On torsion theories, weight and t-structures in triangulated categories

M. V. Bondarko, S. V. Vostokov

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Bondarko M. V., Vostokov S. V. On torsion theories, weight and t-structures in triangulated categories. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2019, vol. 6 (64), issue 1, pp. 27–43. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.102 (In Russian)

The paper is dedicated to triangulated categories along with torsion theories in them; we compare two possible definitions of this notion. We also study the most important types of torsion theories, these being weight structures and t-structures (along with admissible triangulated subcategories). One of the main goals of the paper is to demonstrate that several important definitions and properties of weight structures and t-structures naturally extend to general torsion theories (so, we define smashing and cosmashing torsion theories); this observation leads to a certain optimization of proofs. Similarly we generalize the notion of adjacent and orthogonal weight and t-structures. Moreover, we relate adjacent torsion theories to the Brown—Comenetz duality and Serre functions; we hope to apply these results to the study of t-structures in compactly generated categories and in certain derived categories of coherent sheaves. Furthermore, we prove some completely new statements on the behaviour of torsion theories under exact functors. Lastly, we describe the relation of torsion theories to projective classes.

Keywords: triangulated categories, torsion theories, weight structures, t-structures, adjacent structures, Brown—Comenetz duality, Serre functor.

References

1. Beilinson A., Bernstein J., Deligne P., "Faisceaux pervers", *Asterisque* **100**, 5–171 (1982).

2. Bondarko M., "Weight structures vs. t-structures; weight filtrations, spectral sequences, and complexes (for motives and in general)", *J. of K-theory* **6**(3), 387–504 (2010). See also http://arxiv.org/abs/0704.4003 (accessed: October 27, 2018).

3. Pauksztello D., "Compact cochain objects in triangulated categories and co-t-structures", *Central European J. of Math.* **6**(1), 25–42 (2008).

4. Bondarko M. V., Sosnilo V. A., "On constructing weight structures and extending them to idempotent extensions", *Homology, Homotopy and Appl.* **20**(1), 37–57 (2018).

5. Iyama O., Yoshino Y., "Mutation in triangulated categories and rigid Cohen–Macaulay modules", *Inv. math.* **172**(1), 117–168 (2008).

6. Bondarko M. V., "On morphisms killing weights, weight complexes, and Eilenberg-Maclane (co)homology of spectra" (preprint, 2015). http://arxiv.org/abs/1509.08453 (accessed: October 27, 2018).

7. Bondal A. I., Kapranov M. M., "Representable functors, Serre functors, and mutations", *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Seriya Matematicheskaya* **53**(6), 1183–1205 (1989) [transl. in: *Izvestiya: Mathematics* **35**(3), 519–541 (1990)].

8. Christensen J., "Ideals in triangulated categories: phantoms, ghosts and skeleta", *Adv. in Math.* **136**(2), 284–339 (1998).

9. Neeman A., *Triangulated Categories*, In: *Annals of Mathematics Studies* **148** (Princeton University Press, 2001, viii+449 pp.).

10. Beligiannis A., "Relative homology, higher cluster-tilting theory and categorified Auslander–Iyama correspondence", *J. of Algebra* **444**, 367–503 (2015).

11. Bondarko M. V., "Motivically functorial coniveau spectral sequences; direct summands of cohomology of function fields", *Doc. Math., extra volume: Andrei Suslin's Sixtieth Birthday*, 33–117 (2010). See also http://arxiv.org/abs/0812.2672 (accessed: October 27, 2018).

12. Bondarko M. V., "Gersten weight structures for motivic homotopy categories; retracts of cohomology of function fields, motivic dimensions, and coniveau spectral sequences" (Preprint, 2018). https://arxiv.org/abs/1803.01432 (accessed: October 27, 2018).

13. Pospisil D., Šťovíček J., "On compactly generated torsion pairs and the classification of co-t-structures for commutative Noetherian rings", *Trans. Amer. Math. Soc.* **368**, 6325–6361 (2016).

14. Saorin M., Šťovíček J., "On exact categories and applications to triangulated adjoints and model structures", *Adv. Math.* **228**(2), 968–1007 (2011).

15. Bondarko M. V., Sosnilo V. A., "On purely generated α-smashing weight structures and weight-exact localizations" (Preprint, 2017). http://arxiv.org/abs/1712.00850 (accessed: October 27, 2018).

16. Bondarko M. V., Sosnilo V. A., "On the weight lifting property for localizations of triangulated categories", *Lobachevskii J. of Math.* **39**(7), 970–984 (2018).

17. Krause H., "A Brown representability theorem via coherent functors", *Topology* **41**(4), 853–861 (2002).

18. Keller B., "A remark on the generalized smashing conjecture", *Manuscripta Math.* **84**(1), 193–198 (1994).

Received: August 3, 2018
Revised: September 9, 2018
Accepted: September 27, 2018

Author's information:

Mikhail V. Bondarko — mbondarko@gmail.com
Sergei V. Vostokov — s.vostokov@spbu.ru