

МАТЕМАТИКА

УДК 517.956

MSC 35K55

Памяти Г. А. Леонова

О регулярности решений модельной задачи с заданной косо́й производной для квазилинейных параболических систем с недиагональными главными матрицами*

*А. А. Архипова*¹, *Г. В. Гришина*²¹ Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9² Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., 5

Для цитирования: *Архипова А. А., Гришина Г. В.* О регулярности решений модельной задачи с заданной косо́й производной для квазилинейных параболических систем с недиагональными главными матрицами // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6 (64). Вып. 1. С. 3–26. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.101>

Рассматривается квазилинейная параболическая система уравнений с недиагональной главной матрицей в модельном параболическом цилиндре. На плоском участке боковой поверхности цилиндра решение системы удовлетворяет условию заданной косо́й производной. Предполагается, что главная матрица системы и функции, определяющие краевое условие, не обладают гладкостью по временной переменной. Доказана частичная регулярность обобщенного решения задачи (непрерывность по Гельдеру) в окрестности поверхности, где задано краевое условие. Как следствие, показано, что обобщенные решения соответствующей линейной задачи непрерывны по Гельдеру при оптимальных предположениях о гладкости данных задачи по независимым переменным. Для доказательства используется модификация метода $A(t)$ -калорической аппроксимации, учитывающая данное краевое условие.

Ключевые слова: параболические системы, нелинейность, регулярность, косо́я производная.

*Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 18-01-00472).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2019

1. Введение. В работе изучается регулярность обобщенных решений задачи с заданной косою производной для квазилинейных параболических систем с недиагональной главной матрицей. Данная работа обобщает результаты работы авторов [1], полученные для такого класса систем при краевом условии Неймана.

Пусть функция $u = u(x, t)$, $u = (u^1, \dots, u^N)$, $N > 1$, — решение задачи

$$u_t - \operatorname{div}(a(z, u) \nabla u) = g(z), \quad z = (x, t) \in Q_1^+ = B_1^+ \times (-1, 0);$$

$$\frac{\partial u(z')}{\partial t} := \frac{\partial u(z')}{\partial \mathbf{n}_a} + \sum_{\tau=1}^{n-1} \frac{dC^\tau(z', u(z'))}{dx_\tau} = \psi(z'), \quad z' = (x', 0, t) \in \Gamma_1 = \gamma_1 \times (-1, 0). \quad (1)$$

Здесь B_1^+ — полушар в пространстве \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, $\gamma_1 = B_1 \cap \{x_n = 0\}$, $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$, $\nabla u = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_k} \right\}$, $k \leq n$, $\mathbf{n}(x') = (0, \dots, -1)$ — единичная нормаль в точках $x' \in \gamma_1$, внешняя к B_1^+ .

Недиагональная матрица $a(z, u) = \{a_{kl}^{\alpha\beta}(z, u)\}$, $1 \leq \alpha, \beta \leq n$, $1 \leq k, l \leq N$, удовлетворяет условиям Каратеодори и условию равномерной эллиптичности на множестве $Q_1^+ \times \mathbb{R}^N$, эллиптический оператор в (1) определен равенством

$$\operatorname{div}(a(z, u) \nabla u) = \left\{ \sum_{\alpha, \beta \leq n, l \leq N} (a_{kl}^{\alpha\beta}(z, u) u_{x_\beta}^l)_{x_\alpha} \right\}_{k \leq N},$$

и вектор конормальной производной имеет вид

$$\frac{\partial u(z')}{\partial \mathbf{n}_a} = - \left\{ \sum_{\beta \leq n, l \leq N} a_{kl}^{n\beta}(z', u) u_{x_\beta}^l \right\}_{k \leq N}, \quad z' \in \Gamma_1.$$

При $\tau = 1, \dots, n-1$ определены вектор-функции $C^\tau(z', u) = \{C_k^\tau(z', u)\}_{k \leq N}$.

Далее мы всегда предполагаем, что $\tau \leq n-1$, и x_τ определяет касательное направление.

Данная работа посвящена описанию оптимальных предположений относительно гладкости матриц a , C^τ и функций g , ψ по переменным x и t , при которых можно показать непрерывность по Гельдеру обобщенного решения задачи (1) на множестве полной меры в окрестности поверхности Γ_1 и оценить хаусдорфову размерность допустимого замкнутого сингулярного множества решения. Как следствие, для *линейной* задачи с косою производной получаем гладкость решения на всем множестве $Q_1^+ \cup \Gamma_1$, т. е. для линейной задачи сингулярное множество исключается.

Первые результаты о частичной регулярности обобщенных решений простейших квазилинейных параболических систем с недиагональной главной матрицей получены в [2]. Для параболических систем более общего вида (класса систем с контролируемыми нелинейностями) частичная гладкость решений задачи с нелинейным краевым условием типа Неймана изучалась в работе [3] (в условии (1) $\psi = \psi(z', u)$ и $C^\tau = 0$). Регулярность обобщенных решений задачи с косою производной для эллиптических систем уравнений изучалась в работах [4, 5]. В [4] рассмотрены квазилинейные системы при краевом условии (1), а в [5] частичная регулярность обобщенных решений доказана для класса нелинейных эллиптических систем при более общем краевом условии.

Как показывают контрпримеры, построенные для размерностей $n \geq 3$, обобщенные решения квазилинейных параболических систем могут иметь сингулярности

внутри параболического цилиндра даже при гладкой матрице системы и гладких граничных данных [6]. Пример, показывающий, что сингулярности могут накапливаться к границе области, построен для эллиптической квазилинейной системы, удовлетворяющей условию Дирихле [7]. Таким образом, можно ожидать лишь частичную регулярность обобщенных решений квазилинейных параболических систем в окрестности границы области.

В то же время показано, что для широкого класса нелинейных *скалярных* параболических уравнений и *линейных* систем уравнений имеет место непрерывность по Гельдеру обобщенных решений в ситуации, когда главная матрица системы не обладает какой-либо гладкостью по временной переменной. Были рассмотрены краевые задачи Дирихле и Неймана (см. [8–10] и ссылки в них). Метод исследования, примененный в этих работах, не распространяется на случай квазилинейных систем, когда априори известно, что решение может иметь сингулярности.

В работе Ф. Дюзар, Дж. Минджионе [11] был предложен новый метод «А-калорической» аппроксимации, с помощью которого авторы получили новые результаты о частичной регулярности решений для широкого класса параболических систем. Позднее этот метод был применен для изучения гладкости решений в окрестности границы при краевом условии Дирихле [12, 13]. (О применении этого метода для широкого класса систем см. работу [14] и ссылки в ней.) В рамках этого метода исследуемое решение аппроксимируется локально в L^2 -норме решением простейшей параболической системы с постоянной матрицей A .

В работе А. Архиповой, О. Джон, Дж. Стара [15] была предложена модификация этого метода к методу « $A(t)$ -калорической» аппроксимации. Это означает, что исследуемое решение системы аппроксимируется локально в L^2 -норме решением простой линейной системы с матрицей $A(t)$, элементы которой — ограниченные измеримые на временном интервале функции. Это позволило при доказательстве частичной регулярности квазилинейных систем отказаться от требования какой-либо гладкости главной матрицы по переменной t . Метод $A(t)$ -калорической аппроксимации в дальнейшем применялся этими авторами для ослабления предположений о гладкости матриц системы при доказательстве частичной регулярности вблизи границы при условии Дирихле [16], при рассмотрении квазилинейных систем недивергентного вида [17] и систем высокого порядка [18]. Кроме того, он был эффективно использован при изучении гладкости обобщенного решения задачи Вентцеля для параболических линейных и квазилинейных систем с недиагональными главными матрицами [19, 20]. Получение каждого нового результата основывалось на применении главной $A(t)$ -калорической леммы в соответствующей задаче форме.

В работе авторов [1] при ослаблении известных требований гладкости относительно главной матрицы системы $a(z, u)$ была доказана частичная гладкость обобщенных решений задачи Неймана для квазилинейных параболических систем.

В данной работе мы рассматриваем более общее краевое условие и модифицируем метод $A(t)$ -калорической аппроксимации для изучения задачи с заданной косой производной. Мы оцениваем хаусдорфову размерность сингулярного множества решения в окрестности границы при условиях интегральной непрерывности главной матрицы $a(z, u)$ и матриц $M^\tau(z, u) = (C^\tau(z, u))_u$ по пространственным переменным x . Мы не предполагаем какой-либо гладкости матрицы a , а также функций C^τ и их производных по x и u , по временной переменной t . Оптимальность требований относительно функций g и ψ в шкале пространств Морри подтверждается известными результатами для линейных задач. Можно допустить некоторый рост функций

g, ψ, C^τ по аргументу $u, |u| \rightarrow \infty$ (как это сделано в работе [3] для задачи Неймана), но мы не делаем этого, чтобы не усложнять доказательства. Как частный случай, мы показываем непрерывность по Гельдеру обобщенного решения соответствующей линейной задачи на всем множестве $Q_1^+ \cup \Gamma_1$.

В §2 мы приводим принятые обозначения и требования на данные задачи, а также формулируем основные результаты работы — теорему 2.1 о частичной регулярности решений квазилинейных систем и теорему 2.2 о непрерывности по Гельдеру на множестве $Q_1^+ \cup \Gamma_1$ решений линейной задачи. В §3 приведены вспомогательные утверждения для линейной задачи с косою производной, в которой $C^\tau(z, u) = M^\tau(z)u$ и не требуется какой-либо гладкости матриц $a(z)$ и $M^\tau(z)$. В §4 обсуждаем свойства $A(t)$ -калорических функций, удовлетворяющих краевому условию вида (1) и доказываем основную лемму (лемма 4.2). В последнем §5 мы доказываем теоремы 2.1 и 2.2.

2. Обозначения и формулировка основного результата. В работе приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &— n\text{-мерное евклидово пространство с точками } x = (x_1, \dots, x_n) = (x', x_n); \\ u &= (u^1, \dots, u^N), \nabla u = \{u_{x_i}^k\}_{i \leq n}^{k \leq N}, |\nabla u|^2 = \sum_{i \leq n, k \leq N} (u_{x_i}^k)^2; \\ B_R(x^0) &= \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x^0| < R\}, \Lambda_R(t^0) = (t^0 - R^2, t^0); \\ Q_R(z^0) &= B_R(x^0) \times \Lambda_R(t^0), Q'_R(z^0) = Q_R(z^0) \cap \{x_n > 0\}, \Omega_R(x^0) = B_R(x^0) \cap \{x_n > 0\}; \\ \gamma_R(x^0) &= B_R(x^0) \cap \{x_n = 0\}, \Gamma_R(z^0) = Q_R(z^0) \cap \{x_n = 0\}; \\ B_R^+(x^0) &= B_R(x^0) \cap \{x_n > 0\}, \text{ если } x^0 \in \gamma_1(0); \\ Q_R^+(z^0) &= Q_R(z^0) \cap \{x_n > 0\}, \text{ если } z^0 \in \Gamma_1(0); \\ \partial_p Q_R^+(0) &= \partial Q_R^+(0) \setminus (B_R^+(0) \times \{t = t^0\}); |Q_R|_{n+1} = \omega_n R^{n+2}, \omega_n = |B_1|_n. \end{aligned}$$

Мы пишем B_R^+ , если $x^0 = 0$, Q_R, Q_R^+, Γ_R , если $z^0 = 0$.

В интегральных тождествах

$$g \cdot \phi = \sum_{k=1}^N g^k \phi^k, \quad a \nabla u \cdot \nabla \phi = \sum_{\alpha, \beta \leq n, k, l \leq N} a_{kl}^{\alpha\beta} u_{x_\beta}^l \phi_{x_\alpha}^k.$$

Через $\|u\|_{p, \Omega}$ обозначаем норму в пространстве $L^p(\Omega)$, где Ω — ограниченная область в \mathbb{R}^n ; $W_2^k(\Omega)$, $k \geq 1$, — пространства Соболева;

$$v_{r, z^0} = \int_{Q'_r(z^0)} v(z) dz = \frac{1}{|Q'_r|} \int_{Q'_r(z^0)} v(z) dz.$$

Пространство $V_2(Q'_r(z^0)) = C(\Lambda_r(t^0)); W_2^1(\Omega_r(x^0))$ состоит из функций с конечной нормой

$$\|v\|_{V_2(Q'_r(z^0))} = \sup_{\Lambda_r(t^0)} \|v(\cdot, t)\|_{2, \Omega_r(x^0)} + \|\nabla v\|_{2, Q'_r(z^0)}.$$

Параболическое расстояние δ в \mathbb{R}^{n+1} определяется следующим образом:

$$\delta(z^1, z^2) = \max\{|x^1 - x^2|, |t^1 - t^2|^{1/2}\} \quad \forall z^i = (x^i, t^i) \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad i = 1, 2.$$

Для произвольной ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и интервала $\Lambda \subset \mathbb{R}^1$ в цилиндре $Q = \Omega \times \Lambda$ определяем пространство Морри $L^{2,\lambda}(Q; \delta)$, $\lambda \in (0, n+2]$, в метрике δ :

$$L^{2,\lambda}(Q; \delta) = \left\{ u \in L^2(Q) : \|u\|_{L^{2,\lambda}(Q)} = \left(\sup_{z^0 \in Q, 0 < \rho \leq d} \frac{1}{\rho^\lambda} \int_{Q_\rho(z^0)} |u(z)|^2 dz \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\},$$

где $d = \max\{\text{diam}\Omega, |\Lambda|\}$.

Пространство Кампанато $\mathcal{L}^{2,\lambda}(Q; \delta)$ с показателем $\lambda \in (0, n+4]$ в метрике δ — это пространство функций из $L^2(Q)$ с конечной нормой

$$\|u\|_{2,\lambda,Q} = \|u\|_{2,Q} + [u]_{2,\lambda,Q},$$

где полунорма определяется следующим образом:

$$[u]_{2,\lambda,Q} = \left(\sup_{z^0 \in Q, 0 < \rho \leq d} \frac{1}{\rho^\lambda} \int_{Q_\rho(z^0)} |u(z) - (u)_{z^0,\rho}|^2 dz \right)^{\frac{1}{2}}, \quad d = \max\{\text{diam}\Omega, |\Lambda|\}.$$

Для краткости пространства вектор-функций $\mathbb{B}(Q; \mathbb{R}^N)$ мы обозначаем $\mathbb{B}(Q)$. Различные, зависящие от параметров задачи постоянные будем обозначать как c или c_i .

Сформулируем условия на данные задачи, при которых будет доказан основной результат работы — теорема 2.1.

(Н1) Существуют положительные постоянные $\nu \leq \mu$ такие, что

$$(a(z, \eta) \xi \cdot \xi) = \sum_{\alpha, \beta \leq n; k, l \leq N} a_{kl}^{\alpha\beta}(z, \eta) \xi_\beta^l \xi_\alpha^k \geq \nu |\xi|^2, \quad (2)$$

$$|a(z, \eta)| \leq \mu \quad \forall \eta \in \mathbb{R}^N, \xi \in \mathbb{R}^{nN}, \quad \text{п. в. } z \in Q_1^+.$$

(Н2) Элементы матрицы $a(z, \eta)$ равномерно непрерывны по $\eta \in \mathbb{R}^N$ при почти всех $z \in Q_1^+$, точнее, существует неубывающая ограниченная выпуклая вверх функция $\omega(s)$, $s \in [0, \infty)$, такая, что $\omega(s) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow 0$, и

$$\text{ess sup}_{z \in Q_1^+} |a(z, \eta) - a(z, \zeta)| \leq \omega(|\eta - \zeta|^2) \quad \forall \eta, \zeta \in \mathbb{R}^N.$$

(Н3) При $r \geq 0$ определена ограниченная функция

$$q_a(r) = \sup_{\rho \leq r, \eta \in \mathbb{R}^N} \sup_{z^0 \in Q_1^+} \int_{\Lambda_\rho(t^0)} \left(\int_{\Omega_\rho(x^0)} |a(x, t, \eta) - a_{\rho, x^0}(t, \eta)|^2 dx \right) dt,$$

где

$$a_{\rho, x^0}(t, \eta) = \int_{\Omega_\rho(x^0)} a(x, t, \eta) dx, \quad q_a(r) \rightarrow 0, \quad r \rightarrow 0.$$

(Н4) При всех $\tau \leq n-1$ функции $C^\tau(z, \eta)$ удовлетворяют условию Каратеодори на множестве $Q_1^+ \times \mathbb{R}^N$, дифференцируемы по x и η , и существует постоянная $\mu_1 > 0$ такая, что при почти всех $z \in Q_1^+$ и любых $\eta \in \mathbb{R}^N$

$$|C^\tau(z, \eta)| + |\nabla_x C^\tau(z, \eta)| \leq \mu_1 (|\eta| + 1), \quad |M^\tau(z, \eta)| \leq \mu_1,$$

где матрицы $M^\tau = \{M_{kl}^\tau\}$, $M_{kl}^\tau = (C_k^\tau)_{\eta^l}$, $k, l \leq N$.

(H5) Мы предполагаем симметричность матриц M^τ для всех $\tau \leq n-1$:

$$M_{ms}^\tau(z, \eta) = M_{sm}^\tau(z, \eta), \quad 1 \leq s, m \leq N, \quad \eta \in \mathbb{R}^N, \quad \text{п. в. } z \in Q_1^+. \quad (3)$$

(H6) Для функции $\omega(s)$, определенной в условии (H2), справедлива также оценка

$$\operatorname{ess\,sup}_{Q_1^+} |M^\tau(z, \eta) - M^\tau(z, \zeta)| \leq \omega(|\eta - \zeta|^2) \quad \forall \eta, \zeta \in \mathbb{R}^N, \quad \forall \tau \leq n-1.$$

(H7) Существуют такие ограниченные функции $q_\tau(r)$, что

$$q_\tau(r) = \sup_{\rho \leq r, \eta \in \mathbb{R}^N} \sup_{z^0 \in Q_1^+} \int_{\Lambda_\rho(t^0)} \left(\int_{\Omega_\rho(x^0)} |M^\tau(x, t, \eta) - M_{\rho, x^0}^\tau(t, \eta)|^2 dx \right) dt,$$

где

$$M_{\rho, x^0}^\tau(t, \eta) = \int_{\Omega_\rho(x^0)} M^\tau(x, t, \eta) dx, \quad q_\tau(r) \rightarrow 0, \quad r \rightarrow 0.$$

(H8) Функции $g \in L^{2, n-2+2\alpha}(Q_1^+; \delta)$, $\psi \in L^{2, n-1+2\alpha}(\Gamma_1; \delta)$, где $\alpha \in (0, 1)$.

Замечание 2.1. Условие (3) будет выполняться, если, например, для гладких скалярных функций $f^\tau(z, v)$ определить

$$C_k^\tau = (f^\tau)_{v^k}; \quad (C_k^\tau)_{x_j} = (f^\tau)_{v^k x_j}; \quad M_{mk}^\tau = (f^\tau)_{v^m v^k}.$$

Обобщенное решение u задачи (1) из пространства $\widehat{V}(Q_1^+) := L^2(\Lambda_1; W_2^1(B_1^+))$ можно определить следующим образом:

$$\int_{Q_1^+} [-u \cdot \phi_t + a(z, u) \nabla u \cdot \nabla \phi] dz = J(u, \phi) + \int_{Q_1^+} g \cdot \phi dz + \int_{\Gamma_1} \psi \cdot \phi d\Gamma, \\ \forall \phi \in W_2^1(Q_1^+), \quad \phi|_{\partial Q_1^+ \setminus \Gamma_1} = 0, \quad (4)$$

где

$$J(u, \phi) = \int_{\Gamma_1} C^\tau(z', u(z')) \cdot \phi_{x_\tau}(z') d\Gamma.$$

Далее мы сведем интеграл $J(u, \phi)$ к объемному. Если, например, предположить, что функции $C^\tau(z, u(z))$, $\tau \leq n-1$, определены и непрерывно дифференцируемы по всем аргументам на множестве $\overline{Q_1^+} \times \mathbb{R}^N$, то

$$J(z, u) = \int_{Q_1^+} ([C^\tau]_{x_\tau} \cdot \phi_{x_n} - [C^\tau]_{x_n} \cdot \phi_{x_\tau}) dz,$$

где $[C^\tau]_{x_j} = C_{x_j}^\tau + C_{u^m}^\tau u_{x_j}^m$ — полная производная функций C^τ по переменным x_j , $j \leq n$.

Введем далее обозначения

$$p^\tau = -(C^\tau)_{x_n}, \quad p^n = (C^\tau)_{x_\tau}, \quad M^\tau = \{M_{km}^\tau\}, \quad M_{km}^\tau = (C_k^\tau)_{u^m}, \quad k, m \leq N, \quad (5)$$

тогда интеграл $J(u, \phi)$ можно представить в форме

$$J(u, \phi) = \int_{Q_1^+} [p \cdot \nabla \phi + M^\tau(u_{x_\tau} \cdot \phi_{x_n} - u_{x_n} \cdot \phi_{x_\tau})] dz. \quad (6)$$

Определение 2.1. Функция $u \in \widehat{V}(Q_1^+) := L^2(\Lambda_1; W_2^1(B_1^+))$ называется обобщенным решением задачи (1), если она удовлетворяет тождеству

$$\begin{aligned} \int_{Q_1^+} [-u \cdot \phi_t + a(z, u) \nabla u \cdot \nabla \phi] dz &= \int_{Q_1^+} [p \cdot \nabla \phi + M^\tau(u_{x_\tau} \cdot \phi_{x_n} - u_{x_n} \cdot \phi_{x_\tau})] dz + \\ &+ \int_{Q_1^+} g \cdot \phi dz + \int_{\Gamma_1} \psi \cdot \phi d\Gamma, \quad \forall \phi \in W_2^1(Q_1^+), \quad \phi|_{\partial Q_1^+ \setminus \Gamma_1} = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где вектор-функция p определена равенством (5).

В работе мы будем изучать свойства обобщенного решения, удовлетворяющего тождеству (7). Условия на функции C^τ представлены в условиях (H4)–(H7).

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 2.1. Пусть выполнены условия (H1)–(H8), $u \in \widehat{V}(Q_1^+)$ – обобщенное решение задачи (1), т. е. u удовлетворяет тождеству (7). Существуют такие числа $\theta_0, q_0, r_0 \in (0, 1)$, что если

$$q_*(r_0) := \sup\{q_a, q_\tau\} \leq q_0, \quad (8)$$

и в точке $z^0 \in Q_1^+ \cup \Gamma_1$

$$\frac{1}{R^n} \int_{Q'_R(z^0)} (|\nabla u|^2 + |u|^2) dz < \theta_0 \quad (9)$$

для некоторого $R \leq r_0$, тогда $u \in C^\alpha(\overline{Q'_{sR}(z^0)}; \delta)$, $\nabla u \in L^{2, n+2\alpha}(Q'_{sR}(z^0); \delta)$ при $\alpha \in (0, 1)$ из условия (H8) и некотором $s \in (0, 1)$, и верна следующая оценка:

$$\begin{aligned} \|u\|_{C^\alpha(\overline{Q'_{sR}(z^0)}; \delta)} + \|\nabla u\|_{L^{2, n+2\alpha}(Q'_{sR}(z^0); \delta)} &\leq \\ &\leq c_1 \|u\|_{\widehat{V}(Q_1^+)} + c_2 (\|g\|_{L^{2, n-2+2\alpha}(Q_1^+; \delta)} + \|\psi\|_{L^{2, n-1+2\alpha}(\Gamma_1; \delta)}). \end{aligned} \quad (10)$$

Постоянные c_1 и c_2 зависят от $\nu, \mu, \mu_1, \alpha, n, N$ и функций $q_*(r)$ и $\omega(s)$. Кроме того, c_1 зависит от s и R^{-1} .

Для линейной задачи мы получаем следующий результат.

Теорема 2.2. Пусть для матрицы $a = a(z)$ и функций $C^\tau(z, u) = M^\tau(z) u(z)$ выполнены условия (H1), (H3), (H4), (H5), (H7), и функции g, ψ удовлетворяют условию (H8) с каким-либо $\alpha \in (0, 1)$. Пусть функция $u \in \widehat{V}(Q_1^+)$ – обобщенное решение линейной задачи (1). Тогда $u(z)$ непрерывна по Гельдеру с показателем α на множестве $\overline{Q_s^+}$ при любом фиксированном $s < 1$, и справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|u\|_{C^\alpha(\overline{Q_s^+}; \delta)} + \|\nabla u\|_{L^{2, n+2\alpha}(Q_s; \delta)} &\leq \\ &\leq c \{ \|u\|_{\widehat{V}(Q_1^+)} + \|g\|_{L^{2, n-2+2\alpha}(Q_1^+; \delta)} + \|\psi\|_{L^{2, n-1+2\alpha}(\Gamma_1; \delta)} \}. \end{aligned} \quad (11)$$

Постоянная c в оценке (11) зависит от данных задачи и от $(1-s)^{-1}$.

3. Вспомогательные предложения. Пусть для матрицы $a(z)$ и функций $C^\tau(z, v) = M^\tau(z) v$, $1 \leq \tau \leq n - 1$, выполнены условия (Н1) и (Н4), матрица M^τ удовлетворяет условию симметрии (Н5), и функции $f \in L^2(Q_1^+)$, $\psi \in L^2(\Gamma_1)$.

Пусть далее $v = (v^1, \dots, v^N)$ — решение параболической *линейной* системы (1) в Q_1^+ при заданной косоj производной на Γ_1 :

$$v_t(z) - \operatorname{div}(a(z)\nabla v(z)) = f(z), \quad z \in Q_1^+; \tag{12}$$

$$\left. \frac{\partial v(z')}{\partial \mathbf{n}_a} + \frac{d(M^\tau(z')v(z'))}{dx_\tau} \right|_{z' \in \Gamma_1} = \psi(z').$$

Замечание 3.1. При сделанных выше предположениях относительно данных задачи любое решение задачи (12) из пространства $\widehat{V}(Q_1^+)$ является функцией класса $V_2(Q_1^+)$. Более того, можно показать, что эти обобщенные решения имеют полоjинную производную по времени (см., например, [21, гл. 3, § 4]).

Лемма 3.1. *Для обобщенного решения $v \in \widehat{V}(Q_1^+)$ задачи (12) справедливы неравенство Качопполи*

$$\int_{Q'_r(z^0)} |\nabla v|^2 dz \leq$$

$$\leq \frac{c_1}{r^2} \int_{Q'_{2r}(z^0)} |v - v_{2r, z^0}|^2 dz + c_1 \int_{Q'_{2r}(z^0)} |v|^2 dz + cr^2 \int_{Q'_{2r}(z^0)} |f|^2 dz + cr \int_{\Gamma_{2r}(z^0)} |\psi|^2 d\Gamma \tag{13}$$

и неравенство Пуанкаре

$$\int_{Q'_r(z^0)} |v - v_{r, z^0}|^2 dz \leq c_2 r^2 \int_{Q'_r(z^0)} (|\nabla v|^2 + |v|^2) dz + cr^4 \int_{Q'_r(z^0)} |f|^2 dz + cr^3 \int_{\Gamma_r(z^0)} |\psi|^2 d\Gamma, \tag{14}$$

где $z^0 \in Q_1^+ \cup \Gamma_1$, и $Q_{2r}(z^0) \cap (\partial Q_1^+ \setminus \Gamma_1) = \emptyset$. Постоянные c, c_1, c_2 в неравенствах (13) и (14) зависят от ν, μ, n, N , а c_1 и c_2 зависят также от параметра μ_1 из условия (Н4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если учесть симметричность матриц M^τ , то оценка (13) выводится из тождества (7) точно так же, как это сделано при выводе неравенства Качопполи в лемме 3.1 работы [1], где $C^\tau = 0$.

Для вывода неравенства Пуанкаре мы воспользуемся идеей, изложенной в монографии [8, гл. 4, раздел 2], где неравенство Пуанкаре выводится сначала для гладких решений параболических уравнений, а затем проводится аппроксимация. Здесь мы приведем рассуждение, позволяющее получить неравенство сразу для обобщенных решений v задачи (12) класса $\widehat{V}(Q_1^+)$.

Зафиксируем точку $z^0 \in Q_1^+ \cup \Gamma_1$ и $r > 0$ такие, что $\overline{Q'_r(z^0)} \subset Q_1^+ \cup \Gamma_1$. Пусть $\xi \in C_0^1(B_r(x^0))$, $0 \leq \xi \leq 1$, $|\nabla \xi| \leq \frac{c}{r}$, и $m_r := \int_{\Omega_r(x^0)} \xi(x) dx \geq \kappa_n r^n$ с некоторым $\kappa_n > 0$.

Определим весовые средние

$$\tilde{v}_{r, x^0}(t) = m_r^{-1} \int_{\Omega_r(x^0)} v(x, t) \xi(x) dx, \quad t \in \Lambda_r(t^0), \quad \tilde{v}_{r, z^0} = \int_{\Lambda_r(t^0)} \tilde{v}_{r, x^0}(t) dt.$$

Для почти всех $t \in \Lambda_r(t^0)$ справедливо неравенство

$$\int_{\Omega_r(x^0)} |v(x, t) - \tilde{v}_{r, x^0}(t)|^2 dx \leq c(n) \int_{\Omega_r(x^0)} |v(x, t) - v_{r, x^0}(t)|^2 dx. \quad (15)$$

Правую часть соотношения (15) оценим по неравенству Пуанкаре и полученное неравенство проинтегрируем по интервалу $\Lambda_r(t^0)$:

$$\int_{Q'_r(z^0)} |v(z) - \tilde{v}_{r, x^0}(t)|^2 dz \leq c_1(n)r^2 \int_{Q'_r(z^0)} |\nabla v|^2 dz. \quad (16)$$

Теперь с помощью оценки (16) получаем, что

$$\begin{aligned} \int_{Q'_r(z^0)} |v(z) - \tilde{v}_{r, z^0}|^2 dz &\leq 2 \int_{Q'_r(z^0)} |v(z) - \tilde{v}_{r, x^0}(t)|^2 dz + 2|\Omega_r| \int_{\Lambda_r(t^0)} |\tilde{v}_{r, z^0} - \tilde{v}_{r, x^0}(t)|^2 dt \leq \\ &\leq c_1(n)r^2 \int_{Q'_r(z^0)} |\nabla v(z)|^2 dz + 2|\Omega_r| \int_{\Lambda_r(t^0)} P_r^2(t) dt, \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$P_r^2(t) = |\tilde{v}_{r, z^0} - \tilde{v}_{r, x^0}(t)|^2 = \left| \int_{\Lambda_r(t^0)} [\tilde{v}_{r, x^0}(\tau) - \tilde{v}_{r, x^0}(t)] d\tau \right|^2.$$

Чтобы оценить выражение $P_r^2(t)$, обратимся к тождеству, которому удовлетворяет обобщенное решение задачи (12):

$$\begin{aligned} \int_{Q'_r(z^0)} \{ -v \cdot \phi_t + a \nabla v \cdot \nabla \phi + M^\tau [v_{x_n} \cdot \phi_{x_\tau} - v_{x_\tau} \cdot \phi_{x_n}] \} dz + \\ + \int_{Q'_r(z^0)} (M_{x_n}^\tau v \cdot \phi_{x_\tau} - M_{x_\tau}^\tau v \cdot \phi_{x_n}) dz = \int_{Q'_r(z^0)} f \cdot \phi dz + \int_{\Gamma_r(z^0)} \psi \cdot \phi d\Gamma. \end{aligned} \quad (18)$$

Для произвольно фиксированных $s, l \in \Lambda_r(t^0)$, $s < l$, и параметра $\varepsilon \ll 1$ такого, что $(s - \varepsilon, l + \varepsilon) \subset \Lambda_r(t^0)$, определим кусочно-линейную непрерывную функцию $\chi_\varepsilon(t)$: $\chi_\varepsilon(t) = 0$ при $t \in \Lambda_r(t^0) \setminus (s - \varepsilon, l + \varepsilon)$, $\chi_\varepsilon(t) = 1$ на интервале (s, l) . Очевидно, что $\chi'_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}$ при $t \in (s - \varepsilon, s)$ и $\chi'_\varepsilon(t) = -\frac{1}{\varepsilon}$ при $t \in (l, l + \varepsilon)$. Из тождества (18) с функцией $\phi(z) = \xi(x) \chi_\varepsilon(t)$ получаем равенство

$$\begin{aligned} - \int_{s-\varepsilon}^s \int_{\Omega_r(x^0)} v(x, t) \xi(x) dx dt + \int_l^{l+\varepsilon} \int_{\Omega_r(x^0)} v(x, t) \xi(x) dx dt + \int_{s-\varepsilon}^{l+\varepsilon} \int_{\Omega_r(x^0)} a \nabla v \nabla \xi \chi_\varepsilon dx dt + \\ + \int_{s-\varepsilon}^{l+\varepsilon} \int_{\Omega_r(x^0)} M^\tau [v_{x_n} \xi_{x_\tau} - v_{x_\tau} \xi_{x_n}] \chi_\varepsilon dx dt + \int_{s-\varepsilon}^{l+\varepsilon} \int_{\Omega_r(x^0)} (M_{x_n}^\tau v \xi_{x_\tau} - M_{x_\tau}^\tau v \xi_{x_n}) \chi_\varepsilon dz = \\ = \int_{s-\varepsilon}^{l+\varepsilon} \int_{\Omega_r(x^0)} f \xi \chi_\varepsilon dz + \int_{s-\varepsilon}^{l+\varepsilon} \int_{\Gamma_r(x^0)} \psi \xi \chi_\varepsilon d\gamma dt. \end{aligned}$$

Переходя к пределу по $\varepsilon \rightarrow 0$ в последнем равенстве, получаем, что

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_r(x^0)} [v(x, l) - v(x, s)] \xi(x) dx &= \int_s^l \int_{\Omega_r(x^0)} f \xi dx dt + \int_s^l \int_{\Gamma_r(x^0)} \psi \xi d\gamma dt - \\ &- \int_s^l \int_{\Omega_r(x^0)} \{a \nabla v \nabla \xi + (M_{x_n}^\tau v \xi_{x_\tau} - M_{x_\tau}^\tau v \xi_{x_n}) + M^\tau [v_{x_n} \xi_{x_\tau} - v_{x_\tau} \xi_{x_n}]\} dx dt. \end{aligned} \quad (19)$$

Оценивая правую часть равенства (19), выводим оценку

$$\begin{aligned} J_r(l, s) &:= \left| \int_{\Omega_r(x^0)} [v(x, l) - v(x, s)] \xi(x) dx \right|^2 \leq \\ &\leq c(r^{n-2} \|\nabla v\|_{2, Q'_r(z^0)}^2 + r^{n-2} \|v\|_{2, Q'_r(z^0)}^2 + r^n \|f\|_{2, Q'_r(z^0)}^2 + r^{n-1} \|\psi\|_{2, \Gamma_r(z^0)}^2) |l - s| \end{aligned}$$

$\forall l, s \in \Lambda_r(t^0)$. Из полученного неравенства следует, что функция $\tilde{v}_{r, x^0}(t)$ определена при всех $t \in \Lambda_r(t^0)$ и непрерывна на этом интервале, причем

$$J_r(l, s) = |m_r|^2 |\tilde{v}_{r, x^0}(l) - \tilde{v}_{r, x^0}(s)|^2.$$

Теперь выражение $P_r^2(t)$ можно оценить следующим образом:

$$P_r^2(t) \leq c(r^{-n} \|\nabla v\|_{2, Q'_r(z^0)}^2 + r^{-n} \|v\|_{2, Q'_r(z^0)}^2 + r^{-n+2} \|f\|_{2, Q'_r(z^0)}^2 + r^{-n+1} \|\psi\|_{2, \Gamma_r(z^0)}^2). \quad (20)$$

Возвращаясь теперь к неравенству (17), с помощью оценки (20) получаем (14). \square

Замечание 3.2. Так как при доказательстве леммы 3.1 использовались только условие эллиптичности и ограниченности матрицы a , а также условия (Н4) и (Н5) относительно функций C^τ , то полученные в лемме оценки (13) и (14) справедливы для обобщенных решений $u \in \widehat{V}(Q_1^+)$ задачи (1).

Нам потребуется результат о локальной гладкости обобщенного решения простейшей задачи с заданной косой производной в следующей постановке:

$$\begin{aligned} h_t - A(t) \nabla^2 h &= 0, \quad z \in Q_2^+; \\ \frac{\partial h(z')}{\partial \mathbf{n}_A} + M^\tau(t) h_{x_\tau}(z') &= 0, \quad z' \in \Gamma_2, \end{aligned} \quad (21)$$

где элементы матриц $A, M^\tau \in L^\infty(\Lambda_2)$ удовлетворяют условиям (Н1) и (Н5) соответственно.

Отметим, что вопросы разрешимости и возможной гладкости решения задачи Неймана в шкале соболевских пространств при $p > 1$ для *линейных* параболических систем второго и высокого порядков подробно изучались в работах [9, 10]. В частности, в лемме 4.2 работы [9] доказано утверждение приведенной выше леммы 3.2 при $M^\tau = 0$. Анализ всех этапов доказательства леммы 4.2 из [9] показал, что утверждение остается справедливым и при $M^\tau \neq 0$, если M^τ — симметричные матрицы.

Таким образом, справедлив следующий результат.

Лемма 3.2. *Обобщенное решение $h \in \widehat{V}(Q_2^+)$ задачи (21) является непрерывной по Гельдеру функцией в $\overline{Q_1^+}$ (в параболической метрике) при любом показателе $\gamma \in (0, 1)$, и справедлива оценка*

$$\|h\|_{C^\gamma(\overline{Q_1^+}; \delta)} \leq c \|h\|_{2, Q_2^+}, \quad (22)$$

где постоянная c зависит только от $\nu, \mu, \mu_1, n, N, \gamma$.

4. $(A(t), M^\tau(t))$ -калорические функции. В этом параграфе мы рассматриваем матрицы $A, M^\tau \in L^\infty(\Lambda_R(t^0))$, $\Lambda_R(t^0) \subset (-1, 0)$. Для матрицы A выполнено условие эллиптичности (2), а для матриц M^τ , $\tau \leq n-1$, — условие симметричности (3). Будем также считать, что $Q_R(z^0) \cap \Gamma_1 \neq \emptyset$.

Определение 4.1. Функция $h \in \widehat{V}(Q'_R(z^0))$ называется $(A(t), M^\tau(t))$ -калорической в $Q'_R(z^0)$, если она удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_{Q'_R(z^0)} \{-h \cdot \phi_t + A(t) \nabla h \cdot \nabla \phi + M^\tau(t) [h_{x_n} \cdot \phi_{x_\tau} - h_{x_\tau} \cdot \phi_{x_n}]\} dz = 0 \quad (23)$$

$$\forall \phi \in W_2^1(Q'_R(z^0)), \phi|_{\partial Q'_R(z^0) \setminus \Gamma_R(z^0)} = 0.$$

Из тождества (7) следует, что h — обобщенное решение в $Q'_R(z^0)$ задачи с косой производной (21). Согласно замечанию 3.1 имеем $h \in V_2(Q'_R(z^0))$.

Замечание 4.1. Так как матрицы M^τ в (23) не зависят от x и функции f и ψ равны нулю, то для $(A(t), M^\tau(t))$ -калорических функций $h \in \widehat{V}(Q'_R(z^0))$ из леммы 3.1 следуют оценки

$$\int_{Q'_R(z^0)} |\nabla h|^2 dz \leq \frac{c}{R^2} \int_{Q'_{2R}(z^0)} |h - h_{R, z^0}|^2 dz, \quad (24)$$

$$\int_{Q'_R(z^0)} |h - h_{R, z^0}|^2 dz \leq R^2 \int_{Q'_R(z^0)} |\nabla h|^2 dz. \quad (25)$$

Лемма 3.2 гарантирует, что функции h из $\widehat{V}(Q'_R(z^0))$ обладают дополнительной гладкостью и для них справедливы интегральные оценки Кампанато, две из которых приведены далее. Они будут использоваться при доказательстве теорем 2.1 и 2.2.

Лемма 4.1. *Пусть $h \in \widehat{V}(Q_1^+) - (A(t), M^\tau(t))$ -калорическая функция. Тогда при любом $\beta \in (0, 1)$ справедлива оценка*

$$\int_{Q'_\rho(z^0)} |h - h_{\rho, z^0}|^2 dz \leq c_1 \left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+2+2\beta} \int_{Q'_r(z^0)} |h - h_{r, z^0}|^2 dz, \quad \rho \leq r, \quad (26)$$

кроме того,

$$\int_{Q'_\rho(z^0)} |h|^2 dz \leq c_2 \left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+2} \int_{Q'_r(z^0)} |h|^2 dz, \quad \rho \leq r, \quad (27)$$

в цилиндрах $Q'_r(z^0) \subset Q_1^+$, $z^0 \in \overline{Q_{1-s}^+}$, при $r \leq s$, где число $s \in (0, 1)$ фиксировано произвольно. Постоянные c_1, c_2 зависят от ν, μ, μ_1, n, N и не зависят от z^0, c_1 зависит также от β .

Мы не приводим доказательство этой леммы, так как она доказывается точно так же, как лемма 4.1 в работе [1]. Следует только воспользоваться оценками (24), (25) и (22).

Замечание 4.2. Далее мы обозначаем как $C_*^\infty(Q_R^+(z^0))$, $z^0 \in \Gamma_1$, сужение множества $C_0^\infty(Q_R(z^0))$ на $Q_R^+(z^0)$. Заметим, что замыкание этого множества в норме $W_2^1(Q_R^+(z^0))$ определяет совокупность функций этого пространства, обращающихся в ноль на множестве $\partial Q_R^+(z^0) \setminus \Gamma_R(z^0)$. Таким образом, в определениях (7) и (23) достаточно предполагать, что пробные функции $\phi \in C_*^\infty(Q_R^+(z^0))$.

Лемма 4.2. Пусть $z^0 \in \Gamma_1$, и матрицы $A, M^\tau \in L^\infty(\Lambda_r(t^0))$, $\tau \leq n-1$, удовлетворяют условиям (H1), (H4) и (H5) с фиксированными параметрами ν, μ, μ_1 . Для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon, \nu, \mu, \mu_1, n, N) > 0$, что если функция $u \in \widehat{V}(Q_r^+(z^0))$ удовлетворяет условиям

$$\int_{Q_r^+(z^0)} (r^{-2}|u|^2 + |\nabla u|^2) dz \leq 1, \quad (28)$$

$$\left| \int_{Q_r^+(z^0)} \{-u \cdot \phi_t + A(t)\nabla u \cdot \nabla \phi + M^\tau(t)[u_{x_n} \cdot \phi_{x_\tau} - u_{x_\tau} \cdot \phi_{x_n}]\} dz \right| \leq \delta \sup_{Q_r^+(z^0)} |\nabla \phi| \quad (29)$$

для всех $\phi \in C_*^\infty(\overline{Q_r^+(z^0)})$, тогда существует такая $(A(t), M^\tau(t))$ -калорическая функция $h \in \widehat{V}(Q_{r/2}^+(z^0))$, что имеют место неравенства

$$\int_{Q_{r/2}^+(z^0)} (r^{-2}|h|^2 + |\nabla h|^2) dz \leq 2^{n+5},$$

$$\int_{Q_{r/2}^+(z^0)} |h - u|^2 dz \leq \varepsilon r^2.$$

Доказательство. Доказательство этой леммы похоже на доказательство леммы 4.2 работы авторов [1]. Поэтому мы отметим только основные новые его этапы. Достаточно доказать лемму для $r = 1, z^0 = 0$, так как общий случай нетрудно получить, применяя преобразование подобия.

Итак, пусть условия (28), (29) выполнены в Q_1^+ . Предположим, что утверждение леммы неверно. Тогда существуют такое $\varepsilon > 0$, последовательности матриц $A_k(t), M_k^\tau(t)$, удовлетворяющих условиям леммы, и последовательность функций $u_k \in \widehat{V}(Q_1^+)$, для которых

$$\int_{Q_1^+} (|u_k|^2 + |\nabla u_k|^2) dz \leq 1, \quad (30)$$

$$\left| \int_{Q_1^+} \{-u_k \cdot \phi_t + A_k(t)\nabla u_k \cdot \nabla \phi + M_k^\tau(t)[(u_k)_{x_n} \cdot \phi_{x_\tau} - (u_k)_{x_\tau} \cdot \phi_{x_n}]\} dz \right| \leq \frac{1}{k} \sup_{Q_1^+} |\nabla \phi| \quad \forall \phi \in C_*^\infty(\overline{Q_1^+}), \quad (31)$$

но в то же время

$$\int_{Q_{1/2}^+} |u_k - h|^2 dz > \varepsilon$$

для всех $(A(t), M^\tau(t))$ -калорических функций $h \in \widehat{V}(Q_{1/2}^+)$, принадлежащих классу

$$\mathcal{H}^+ = \left\{ v \in \widehat{V}(Q_{1/2}^+) : \int_{Q_{1/2}^+} (|v|^2 + |\nabla v|^2) dz \leq 2^{n+5} \right\}. \quad (32)$$

Из условия (30) следует, что существует такая подпоследовательность последовательности u_k (здесь и далее при выборе подпоследовательностей мы будем сохранять обозначения исходных последовательностей), что $u_k \rightharpoonup u$, $\nabla u_k \rightharpoonup \nabla u$, $k \rightarrow \infty$, в пространстве $L^2(Q_1^+)$, и

$$\int_{Q_1^+} (|u|^2 + |\nabla u|^2) dz \leq 1. \quad (33)$$

Из условий $\|A_k\|_{L^\infty(Q_1^+)} \leq \mu$, $\|M_k^\tau\|_{L^\infty(Q_1^+)} \leq \mu_1$ следует, что существуют такие подпоследовательности, что $A_k \xrightarrow{*} A$, $M_k^\tau \xrightarrow{*} M^\tau$ в пространстве $L^\infty(Q_1^+)$. Отметим, что условие эллиптичности предельной матрицы A с постоянными ν , μ и условие симметричности матриц M^τ сохраняются.

Следующий шаг — показать, что для некоторой последовательности значений k

$$\|u_k - u\|_{L^2(Q_1^+)} \rightarrow 0, \quad \|u_k - u\|_{L^2(\Gamma_1)} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \quad (34)$$

Мы опускаем обоснование этих предельных переходов, так как они фактически совпадают с тем, как это сделано в [1] при рассмотрении задачи Неймана.

Наличие соотношений (34) позволяет сделать предельный переход в неравенстве (31) по $k \rightarrow \infty$.

Покажем, например, что при $\phi \in C_*^\infty(\overline{Q_1^+})$

$$\int_{Q_1^+} M_k^\tau(t) (u_k)_{x_n} \cdot \phi_{x_\tau} dz \rightarrow \int_{Q_1^+} M^\tau(t) u_{x_n} \cdot \phi_{x_\tau} dz, \quad k \rightarrow \infty. \quad (35)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \int_{Q_1^+} M_k^\tau(t) (u_k)_{x_n} \cdot \phi_{x_\tau} dz &= \\ &= - \int_{Q_1^+} M_k^\tau(t) u_k \cdot \phi_{x_\tau x_n} dz + \int_{\Gamma_1} M_k^\tau(t) u_k \cdot (-1) \phi_{x_\tau} d\Gamma =: J_k + S_k. \end{aligned}$$

Рассмотрим отдельно предельный переход для J_k и S_k . Имеем

$$J_k \rightarrow - \int_{Q_1^+} M^\tau(t) u \cdot \phi_{x_\tau x_n} dz = \int_{Q_1^+} M^\tau(t) u_{x_n} \cdot \phi_{x_\tau} dz - \int_{\Gamma_1} M^\tau(t) u \cdot (-1) \phi_{x_\tau} d\Gamma,$$

так как из сходимости последовательности u_k в $L^2(Q_1^+)$ и *-слабой сходимости в $L^\infty(Q_1^+)$ последовательности матриц M_k^τ следует, что

$$\begin{aligned} J_k + \int_{Q_1^+} M^\tau(t) u \cdot \phi_{x_\tau x_n} dz = \\ = - \int_{Q_1^+} M_k^\tau(t) (u_k - u) \cdot \phi_{x_\tau x_n} dz - \int_{Q_1^+} (M_k^\tau(t) - M^\tau(t)) u \cdot \phi_{x_\tau x_n} dz \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Если принять во внимание сходимость последовательности u_k в $L^2(\Gamma_1)$, то аналогично доказывается, что

$$S_k \rightarrow - \int_{\Gamma_1} M^\tau(t) u \cdot \phi_{x_\tau} d\Gamma, \quad k \rightarrow \infty.$$

Из сказанного следует справедливость предельного перехода (35). Слабой сходимости последовательности u_k в $L^2(Q_1^+)$ достаточно, чтобы обосновать предельный переход

$$\int_{Q_1^+} u_k \cdot \phi_t dz \rightarrow \int_{Q_1^+} u \cdot \phi_t dz, \quad k \rightarrow \infty.$$

Таким образом, в результате предельного перехода в (31), получаем интегральное тождество (23), т. е. u является $(A(t), M^\tau(t))$ -калорической функцией в Q_1^+ .

Далее мы рассмотрим следующие вспомогательные задачи при каждом k из выбранной последовательности:

$$\begin{aligned} (v_k)_t - A_k(t) \nabla^2 v_k &= (A(t) - A_k(t)) \nabla^2 u, \quad z \in Q_{1/2}^+, \\ \frac{\partial v_k}{\partial \mathbf{n}_{A_k}} + M_k^\tau(t) (v_k)_{x_\tau} &= \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_{A_k}} + M_k^\tau(t) u_{x_\tau}, \quad z' \in \Gamma_{1/2}; \\ v_k &= 0, \quad z' \in \partial Q_{1/2}^+ \setminus \Gamma_{1/2}. \end{aligned} \quad (36)$$

При каждом k существует единственное обобщенное решение $v_k \in V_2(Q_{1/2}^+)$ задачи (36) (см. замечание 3.1), функции v_k удовлетворяют тождеству

$$\begin{aligned} \int_{Q_{1/2}^+} [-v_k \cdot \phi_t + A_k(t) \nabla v_k \cdot \nabla \phi] dz - \int_{\Gamma_{1/2}} M_k^\tau(t) v_k \cdot \phi_{x_\tau} d\Gamma = \\ = \int_{Q_{1/2}^+} (A_k(t) - A(t)) \nabla u \cdot \nabla \phi dz - \int_{\Gamma_{1/2}} (M_k^\tau(t) - M^\tau(t)) u \cdot \phi_{x_\tau} d\Gamma \quad (37) \end{aligned}$$

при всех $\phi \in C_*^\infty(\overline{Q_{1/2}^+})$.

Представляя поверхностные интегралы в (37) как объемные, получаем тождество

$$\begin{aligned} & \int_{Q_{1/2}^+} \{-v_k \cdot \phi_t + A_k(t) \nabla v_k \cdot \nabla \phi + M_k^\tau(t) [(v_k)_{x_n} \cdot \phi_{x_\tau} - (v_k)_{x_\tau} \cdot \phi_{x_n}]\} dz = \\ & = \int_{Q_{1/2}^+} (A_k(t) - A(t)) \nabla u \cdot \nabla \phi dz + \int_{Q_{1/2}^+} (M_k^\tau(t) - M^\tau(t)) [u_{x_n} \phi_{x_\tau} - u_{x_\tau} \cdot \phi_{x_n}] dz. \end{aligned} \quad (38)$$

Учитывая симметричность матриц M^τ , из тождества (38) нетрудно вывести равенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{B_{1/2}^+} |v_k(x, s)|^2 dx + \int_{Q_{1/2}^+} A_k(t) \nabla v_k \cdot \nabla v_k dz &= \int_{Q_{1/2}^s} (A_k(t) - A(t)) \nabla u \cdot \nabla v_k dz + \\ &+ \int_{Q_{1/2}^s} (M_k^\tau(t) - M^\tau(t)) [u_{x_n} \cdot (v_k)_{x_\tau} - u_{x_\tau} \cdot (v_k)_{x_n}] dz, \end{aligned} \quad (39)$$

где $s \in \Lambda_{1/2}$, $Q_{1/2}^s = Q_{1/2}^+ \cap \{t < s\}$. (Подробный вывод при $M^\tau = 0$ приведен в доказательстве леммы 4.2 из [1].)

Из тождества (39) следует оценка

$$\sup_{s \in \Lambda_{1/2}} \|v_k(\cdot, s)\|_{2, B_{1/2}^+}^2 + \|\nabla v_k\|_{2, Q_{1/2}^+}^2 \leq c \|\nabla u\|_{2, Q_{1/2}^+}^2 \leq c(\nu, \mu, \mu_1). \quad (40)$$

Кроме того, из равенства (39) имеем

$$\|v_k(\cdot, s)\|_{2, B_{1/2}^+}^2 \leq c \int_{Q_{1/2}^s} |\nabla u|^2 dz \rightarrow 0, \quad s \rightarrow 0.$$

Таким образом, получаем, что предельная функция $v \in V_2(Q_{1/2}^+)$, и $v = 0$ на множестве $\partial_p Q_{1/2}^+ \setminus \Gamma_{1/2}$.

Из оценки (40) следует слабая сходимость некоторой подпоследовательности функций v_k в $L^2(Q_{1/2}^+)$, но как и в случае с последовательностью u_k , можно показать, что

$$\|v_k - v\|_{2, Q_{1/2}^+} \rightarrow 0, \quad \|v_k - v\|_{2, \Gamma_{1/2}} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \quad (41)$$

Соотношения (41) позволяют сделать предельный переход в тождестве (38):

$$\int_{Q_{1/2}^+} [-v \cdot \phi_t + A(t) \nabla v \cdot \nabla \phi + M^\tau(t) \{v_{x_n} \cdot \phi_{x_\tau} - v_{x_\tau} \cdot \phi_{x_n}\}] dz = 0. \quad (42)$$

Формально подставляя v в тождество (42) (мы опускаем процедуру сглаживания функции v по переменной t), получаем, что $v = 0$ в $Q_{1/2}^+$, т. е.

$$\|v_k\|_{2, Q_{1/2}^+} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \quad (43)$$

Вычитая теперь из тождества (23), которому удовлетворяет функция u в $Q_{1/2}^+$, тождество (38), получаем, что $w_k = u - v_k$ удовлетворяет соотношению

$$\int_{Q_{1/2}^+} [-w_k \cdot \phi_t dz + A_k(t) \nabla w_k \cdot \nabla \phi] dz + \int_{Q_{1/2}^+} M_k^T(t) [(w_k)_{x_n} \cdot \phi_{x_\tau} - (w_k)_{x_\tau} \cdot \phi_{x_n}] dz = 0$$

при таких же функциях ϕ , что и в тождестве (37).

Таким образом, функция w_k является $(A_k(t), M_k^T(t))$ -калорической функцией в $Q_{1/2}^+$,

$$\|w_k - u\|_{2, Q_{1/2}^+} = \|v_k\|_{2, Q_{1/2}^+} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Принимая во внимание оценку (33) для функции u и соотношение (43), заключаем, что при некотором $k_0 \in \mathbb{N}$ справедлива оценка

$$\|w_k\|_{\widehat{V}(Q_{1/2}^+)} \leq \|u\|_{\widehat{V}(Q_{1/2}^+)} + \|v_k\|_{\widehat{V}(Q_{1/2}^+)} \leq 2(\omega_n)^{1/2} \quad \forall k \geq k_0. \quad (44)$$

Из неравенства (44) следует оценка

$$\int_{Q_{1/2}^+} (|w_k|^2 + |\nabla w_k|^2) dz \leq 2^{n+5},$$

и, кроме того,

$$\|w_k - u_k\|_{2, Q_{1/2}^+} \leq \|w_k - u\|_{2, Q_{1/2}^+} + \|u - u_k\|_{2, Q_{1/2}^+} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Два последних соотношения означают, что существует $(A_k(t), M_k^T(t))$ -калорическая функция w_k , аппроксимирующая функцию u_k , причем функция w_k принадлежит классу \mathcal{H}^+ , определенному равенством (32). Таким образом, мы получили противоречие со сделанным предположением. Следовательно, верно утверждение леммы. \square

В следующем параграфе нам потребуется следствие к лемме 4.2, которое мы сформулируем также в виде леммы.

Лемма 4.3. Пусть выполнены предположения леммы 4.2. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такая постоянная $C_\varepsilon = C(\varepsilon, \nu, \mu, \mu_1, n, N) > 0$, что верно следующее утверждение: для любой функции $u \in \widehat{V}(Q_r^+(z^0))$ существуют $(A(t), M^T(t))$ -калорическая функция $h \in \widehat{V}(Q_{r/2}^+(z^0))$ и функция $\phi \in C_*^\infty(\overline{Q_r^+(z^0)})$, $\sup_{Q_r^+(z^0)} |\nabla \phi| \leq 1$ такие, что

$$\int_{Q_{r/2}^+(z^0)} (|h - h_{r/2, z^0}|^2 + r^2 |\nabla h|^2) dz \leq 2^{n+5} \int_{Q_r^+(z^0)} (|u - u_{r, z^0}|^2 + r^2 |\nabla u|^2) dz,$$

$$\begin{aligned} \int_{Q_{r/2}^+(z^0)} |u - h|^2 dz &\leq \varepsilon \int_{Q_r^+(z^0)} (|u - u_{r, z^0}|^2 + r^2 |\nabla u|^2) dz + \\ &+ C_\varepsilon r^2 \left| \int_{Q_r^+(z^0)} \{-u \cdot \phi_t + A(t) \nabla u \cdot \nabla \phi + M^T(t) [u_{x_n} \cdot \phi_{x_\tau} - u_{x_\tau} \cdot \phi_{x_n}]\} dz \right|^2. \end{aligned}$$

Так как доказательство этого утверждения почти не отличается от доказательства леммы 4.3 из [20], мы его опускаем.

Замечание 4.3. Утверждения лемм 4.2 и 4.3 остаются справедливыми для любого цилиндра $Q'_r(z^0)$, $Q'_r(z^0) \cap (\partial Q_1^+ \setminus \Gamma_1) = \emptyset$. Так как нас интересует поведение решения вблизи поверхности Γ_1 , то можно рассматривать только цилиндры, для которых $\text{dist}(x^0, \gamma_1) \leq r/2$. В противном случае $Q_{r/2}(z^0) \cap \Gamma_1 = \emptyset$, и все результаты этого параграфа справедливы в цилиндрах $Q_{r/2}(z^0)$ согласно утверждениям, доказанным в работе [15].

5. Доказательства теорем 2.1 и 2.2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1. Зафиксируем точку $z^0 \in \Gamma_1$ и $Q_{2R}^+(z^0) \subset Q_1^+$. Пусть $u \in \widehat{V}(Q_{2R}^+(z^0))$ — обобщенное решение задачи (1):

$$\begin{aligned} & \int_{Q_{2R}^+(z^0)} [-u \cdot \phi_t + a(z, u) \nabla u \cdot \nabla \phi + (C_{x_n}^\tau \cdot \phi_{x_\tau} - C_{x_\tau}^\tau \cdot \phi_{x_n})] dz + \\ & + \int_{Q_{2R}^+(z^0)} M^\tau (u_{x_n} \cdot \phi_{x_\tau} - u_{x_\tau} \cdot \phi_{x_n}) dz = \\ & = \int_{Q_{2R}^+(z^0)} g \cdot \phi dz + \int_{\Gamma_{2R}(z^0)} \psi \cdot \phi d\Gamma \quad \forall \phi \in C_*^\infty(Q_{2R}^+(z^0)). \end{aligned} \quad (45)$$

Покажем, что по данным задачи можно выбрать такие параметры θ_0, q_0, r_0 , что при выполнении условий (8) и (9) справедливо неравенство

$$\Phi(\rho, z^0) := \int_{Q_\rho^+(z^0)} (|u - u_{\rho, z^0}|^2 + \rho^{2\beta} |u|^2) dz \leq c \left\{ \left(\frac{\rho}{r}\right)^{2\alpha} \Phi(r, z^0) + M_0^2 \rho^{2\alpha} \right\} \quad \forall \rho \leq r, \quad (46)$$

где показатель $\alpha \in (0, 1)$ — из условия (Н8), и число $\beta \in (\alpha, 1)$ фиксировано произвольно,

$$M_0^2 = \|g\|_{L^{2, n-2+2\alpha}(Q_1^+)}^2 + \|\psi\|_{L^{2, n-1+2\alpha}(\Gamma_1^+)}^2.$$

Прежде всего отметим, что из неравенств Качопполи и Пуанкаре, после применения условия (Н8), для функции u можно получить неравенства

$$\begin{aligned} R^{-n} \int_{Q_R^+(z^0)} |\nabla u|^2 dz & \leq c \int_{Q_{2R}^+(z^0)} (|u - u_{2R, z^0}|^2 + R^2 |u|^2) dz + c M_0^2 R^{2\alpha}, \quad (47) \\ \int_{Q_R^+(z^0)} |u - u_{R, z^0}|^2 dz & \leq c R^2 \int_{Q_R^+(z^0)} (|\nabla u|^2 + |u|^2) dz + M_0^2 R^{2\alpha}. \end{aligned}$$

Определим матрицы

$$A(t) := a_{R, x^0}(t, u_{R, z^0}) = \int_{B_R^+(x^0)} a(x, t, u_{R, z^0}) dx,$$

$$M^\tau(t) := M_{R,x^0}^\tau(t, u_{R,z^0}) = \int_{B_R^+(x^0)} M^\tau(x, t, u_{R,z^0}) dx, \quad \tau = 1, \dots, n-1.$$

Заметим, что $A, M^\tau \in L^\infty(\Lambda_R(t^0))$, причем $A(t)$ удовлетворяет условию эллиптичности с постоянными $\nu \leq \mu$ из условия (Н1), а $M^\tau(t)$ — симметричные матрицы.

Так как функция $u \in \widehat{V}(Q_R^+(z^0))$, то согласно лемме 4.3 существует такая $(A(t), M^\tau(t))$ -калорическая функция $h \in \widehat{V}(Q_{R/2}^+(z^0))$, что

$$\int_{Q_{R/2}^+(z^0)} (|h - h_{R/2,z^0}|^2 + R^2 |\nabla h|^2) dz \leq 2^{n+5} \int_{Q_R^+(z^0)} (|u - u_{R,z^0}|^2 + R^2 |\nabla u|^2) dz; \quad (48)$$

$$\int_{Q_{R/2}^+(z^0)} |u - h|^2 dz \leq \varepsilon \int_{Q_R^+(z^0)} (|u - u_{R,z^0}|^2 + R^2 |\nabla u|^2) dz + C_\varepsilon R^2 \mathcal{L}_R^2(u, \phi), \quad (49)$$

где

$$\mathcal{L}_R(u, \phi) = \left| \int_{Q_R^+(z^0)} (-u \cdot \phi_t + A(t) \nabla u \cdot \nabla \phi + M^\tau(t) [u_{x_n} \cdot \phi_{x_\tau} - u_{x_\tau} \cdot \phi_{x_n}]) dz \right|$$

для некоторой $\phi \in C_*^\infty(\overline{Q_R^+(z^0)})$, $|\nabla \phi| \leq 1$ в $Q_R^+(z^0)$. Для оценки выражения $\mathcal{L}_R(u, \phi)$ обратимся к интегральному тождеству (45) с функцией u и заметим, что $\sup_{Q_R^+(z^0)} |\phi(z)| \leq cR$, так как $\phi = 0$ на множестве $\partial B_R^+(x^0) \setminus \gamma_R(x^0)$ при $t \in \Lambda_R(t^0)$. В результате получим

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_R(u, \phi) \leq \\ & \leq \int_{Q_R^+(z^0)} (|\Delta A| + |\Delta M^\tau|) |\nabla u| dz + 2\mu_1 \int_{Q_R^+(z^0)} |u| dz + cR \int_{Q_R^+(z^0)} |g| dz + \int_{\Gamma_R(z^0)} |\psi| d\Gamma, \end{aligned}$$

где

$$|\Delta A| = |a(z, u) - A(t)| \leq |a(z, u) - a(z, u_{R,z^0})| + |a(z, u_{R,z^0}) - A(t)|,$$

аналогично оценивается выражение $|\Delta M^\tau| = |M^\tau(z, u) - M^\tau(t)|$.

Из условий (Н2), (Н3), (Н6)–(Н8) следует, что

$$\begin{aligned} R^2 \mathcal{L}_R^2(u, z^0) & \leq c \left[\omega \left(\int_{Q_R^+(z^0)} |u - u_{R,z^0}|^2 dz \right) + q_*(R) \right] R^2 \int_{Q_R^+(z^0)} |\nabla u|^2 dz + \\ & + cM_0^2 R^{2\alpha} + cR^2 \int_{Q_R^+(z^0)} |u|^2 dz. \quad (50) \end{aligned}$$

При выводе неравенства (50) мы воспользовались выпуклостью и ограниченностью функции $\omega(\cdot)$. Оценивая правую часть соотношения (50) с помощью неравенств (47) и определения функции $\Phi(r, z^0)$, получаем, что

$$R^2 \mathcal{L}_R^2(u, z^0) \leq c[\omega(\Phi(R, z^0)) + q_*(R)]\Phi(2R, z^0) + cM_0^2 R^{2\alpha} + cR^{2(1-\beta)}\Phi(R, z^0). \quad (51)$$

Из неравенств (47) и (49) следует, что

$$\int_{Q_{R/2}^+(z^0)} |u - h|^2 dz \leq c \varepsilon \Phi(2R, z^0) + C_\varepsilon R^2 \mathcal{L}_R^2(u, \phi) + c M_0^2 R^{2\alpha}. \quad (52)$$

Оценивая правую часть неравенства (52) с помощью оценки (51), приходим к соотношению

$$\int_{Q_{R/2}^+(z^0)} |u - h|^2 dz \leq c \{(\varepsilon + C_\varepsilon [\omega(\Phi(R, z^0)) + q_*(R) + R^{2(1-\beta)}]) \Phi(2R, z^0) + c(1 + C_\varepsilon) M_0^2 (2R)^{2\alpha}\}. \quad (53)$$

При $\rho \leq R/4$ справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} \Phi(\rho, z^0) &\leq 4 \int_{Q_\rho^+(z^0)} |u - h|^2 dz + 2 \int_{Q_\rho^+(z^0)} |h - h_{\rho, z^0}|^2 dz + 2\rho^{2\beta} \int_{Q_\rho^+(z^0)} |h|^2 dz \leq \\ &\stackrel{(26), (27)}{\leq} c \left(\frac{R}{\rho}\right)^{n+2} \int_{Q_{R/2}^+(z^0)} |u - h|^2 dz + \left(\frac{\rho}{R}\right)^{2\beta} \int_{Q_{R/2}^+(z^0)} (|h - h_{R/2, z^0}|^2 + R^{2\beta} |h|^2) dz \stackrel{(*)}{\leq} \\ &\stackrel{(*)}{\leq} c \left(\frac{R}{\rho}\right)^{n+2} \int_{Q_{R/2}^+(z^0)} |u - h|^2 dz + c \left(\frac{\rho}{R}\right)^{2\beta} \Phi(2R, z^0) + c M_0^2 R^{2\alpha}. \quad (54) \end{aligned}$$

В переходе (*) мы воспользовались оценками (47), (48) и неравенством $|h| \leq |u - h| + |u|$.

Применяя к правой части неравенства (54) оценку (53) получаем, что

$$\begin{aligned} \Phi(\rho, z^0) &\leq c \left\{ \left(\frac{\rho}{R}\right)^{2\beta} + \left(\frac{R}{\rho}\right)^{n+2} (\varepsilon + C_\varepsilon [\omega(\Phi(R, z^0)) + q_*(R) + R^{2(1-\beta)}]) \right\} \Phi(2R, z^0) + \\ &+ c \left(\frac{R}{\rho}\right)^{n+2} (1 + C_\varepsilon) M_0^2 (2R)^{2\alpha}. \quad (55) \end{aligned}$$

Дальнейшие рассуждения совпадают с соответствующими этапами доказательства теоремы 2.1 работы авторов [1]. Мы приводим их для полноты изложения.

Обозначив $r = 2R$, $\rho = \tau r$, где $\tau \leq 1/8$ будет фиксировано далее, мы получим из неравенства (55) соотношение

$$\begin{aligned} \Phi(\tau r, z^0) &\leq c_0 \{ \tau^{2\beta} + \tau^{-(n+2)} (\varepsilon + C_\varepsilon [\omega(\Phi(r, z^0)) + q_*(r) + r^{2(1-\beta)}]) \} \Phi(r, z^0) + \\ &+ K_\varepsilon M_0^2 r^{2\alpha}, \quad K_\varepsilon = c \tau^{-(n+2)} (1 + C_\varepsilon). \quad (56) \end{aligned}$$

Напомним, что мы фиксировали $\beta > \alpha$. Далее полагаем $\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2} \in (\alpha, \beta)$ и выбираем τ так, чтобы выполнялось неравенство

$$c_0 \tau^{2\beta} \leq \frac{\tau^{2\gamma}}{8}. \quad (57)$$

При фиксированном τ выбираем ε из соотношения

$$\varepsilon c_0 \tau^{-(n+2)} \leq \frac{\tau^{2\gamma}}{8}. \quad (58)$$

Функция $\omega(s) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow 0$ в условиях (Н2) и (Н6), что позволяет фиксировать параметр θ_0 так, чтобы

$$c_0 C_\varepsilon \tau^{-(n+2)} \omega(\theta_0) \leq \frac{\tau^{2\gamma}}{8}. \quad (59)$$

Теперь мы можем выбрать радиус r_0 настолько малым, чтобы выполнялись соотношения

$$c_0 C_\varepsilon \tau^{-(n+2)} (q_*(r_0) + r_0^{2(1-\beta)}) \leq \frac{\tau^{2\gamma}}{8}, \quad K M_0^2 r_0^{2\alpha} < \frac{\theta_0}{2}, \quad K = K_\varepsilon. \quad (60)$$

Предположим, что для некоторого $r \leq r_0$ функция $\Phi(r, z^0)$ достаточно мала, точнее,

$$\Phi(r, z^0) < \theta_0. \quad (61)$$

При выполнении условий (57)–(61) из неравенства (56) следует, что

$$\Phi(\tau r, z^0) \leq \frac{\tau^{2\gamma}}{2} \Phi(r, z^0) + K M_0^2 r^{2\alpha}. \quad (62)$$

В частности,

$$\Phi(\tau r, z^0) \underset{(60), (61)}{\leq} \frac{\tau^{2\gamma}}{2} \theta_0 + \frac{\theta_0}{2} < \theta_0. \quad (63)$$

Неравенство (63) означает, что условие (61) выполнено при замене r на τr . Заметим, что все остальные условия на выбор τ , ε , r_0 также выполняются при замене r на τr . Следовательно, верно неравенство (62), если заменить r на τr , т. е.

$$\Phi(\tau^2 r, z^0) \leq \frac{\tau^{2\gamma}}{2} \Phi(\tau r, z^0) + K M_0^2 (\tau r)^{2\alpha}, \quad \gamma > \alpha. \quad (64)$$

Повторяя далее рассуждения для последовательности радиусов $r_j = \tau^j r$, $j \in \mathbb{N}$, и проводя итерации в полученных соотношениях, получим (как и в работе [1]) оценку

$$\Phi(\tau^j r, z^0) \leq \frac{\tau^{2\gamma j}}{2} \Phi(r, z^0) + K M_0^2 \tau^{2\alpha j} \sum_{s=0}^j \tau^{2(\gamma-\alpha)s} r^{2\alpha}, \quad (65)$$

откуда следует, что

$$\Phi(\tau^j r, z^0) \leq \tau^{2\alpha j} \{ \Phi(r, z^0) + K_1 M_0^2 r^{2\alpha} \}.$$

Полученные неравенства гарантируют, что при всех $\rho \leq r$ справедлива оценка

$$\Phi(\rho, z^0) \leq c \left[\left(\frac{\rho}{r} \right)^{2\alpha} \Phi(r, z^0) + \rho^{2\alpha} M_0^2 \right]. \quad (66)$$

Неравенство (66) совпадает с неравенством (46), и из него следует, что

$$\frac{1}{\rho^{n+2+2\alpha}} \int_{Q_\rho^+(z^0)} |u - u_{\rho, z^0}|^2 dz \leq c \left\{ \frac{\|u\|_{\hat{V}(Q_1^+)}}{r^{n+2+2\alpha}} + M_0^2 \right\}, \quad \rho \leq r, \quad (67)$$

где постоянная c определяется параметрами задачи и не зависит от z^0 и r . Заметим, что при фиксированном $r \leq r_0$ неравенство (61) остается справедливым в некоторой окрестности точки z^0 , т. е. существует такая окрестность $Q_{sr}^+(z^0)$, что для всех $\xi \in Q_{sr}^+(z^0)$ выполняется неравенство

$$\Phi(r, \xi) < \theta_0. \quad (68)$$

Из неравенства (68) следует оценка (67) для всех $\xi \in Q_{sr}^+(z^0)$, а не только для точки z^0 , т. е.

$$\sup_{\xi \in Q_{sr}^+(z^0)} \frac{1}{\rho^{n+2+2\alpha}} \int_{Q'_\rho(\xi)} |u - u_{\rho, z^0}|^2 dz \leq c_1 \|u\|_{\widehat{V}(Q_1^+)}^2 + c_2 M_0^2.$$

Таким образом, мы оценили полунорму (следовательно, и норму) функции u в пространстве $\mathcal{L}^{2, n+2+2\alpha}(Q_{sr}^+(z^0); \delta)$. В силу изоморфизма этого пространства пространству Гельдера $C^\alpha(\overline{Q_{sr}^+(z^0)}; \delta)$ заключаем, что решение u непрерывно по Гельдеру с показателем α в окрестности точки z^0 , и справедлива оценка (10). \square

Следствие 5.1. (Оценка сингулярного множества). Пусть

$$\Sigma_u = \left\{ z^0 \in Q_1^+ \cup \Gamma_1 : \liminf_{\rho \rightarrow 0} \int_{Q'_\rho(z^0)} \rho^{-n} (|\nabla u|^2 + |u|^2) dz > 0 \right\}.$$

Тогда $R(u) = (Q_1^+ \cup \Gamma_1) \setminus \Sigma_u$ — открытое относительно $Q_1^+ \cup \Gamma_1$ множество регулярных точек функции u . Замкнутое сингулярное множество Σ_u допускает оценку $\dim_{\mathcal{H}}(\Sigma_u; \delta) \leq n$.

Для доказательства следствия зафиксируем $\beta \in (\alpha, 1)$, где α — показатель из условия (H8). Пусть

$$\Sigma_\beta(u) = \left\{ z^0 \in Q_1^+ \cup \Gamma_1 : \liminf_{\rho \rightarrow 0} \rho^{-(n+2(1-\beta))} \int_{Q'_\rho(z^0)} (|\nabla u|^2 + |u|^2) dz > 0 \right\}.$$

Предположим, что $z^0 \in R_\beta(u) = (Q_1^+ \cup \Gamma_1) \setminus \Sigma_\beta(u)$. Тогда

$$\liminf_{\rho \rightarrow 0} \rho^{-(n+2(1-\beta))} \int_{Q'_\rho(z^0)} (|\nabla u|^2 + |u|^2) dz = 0.$$

Из этого соотношения и неравенства Пуанкаре следует, что $\Phi(\rho, z^0) \rightarrow 0$ для некоторой последовательности $\rho \rightarrow 0$. Это означает, что в точке z^0 выполнено условие (61) при некотором $r \leq r_0$, т. е. z^0 — регулярная точка. Таким образом, множество $R_\beta(u)$ открыто относительно $Q_1^+ \cup \Gamma_1$, а множество $\Sigma_\beta(u)$ замкнуто, и $\mathcal{H}_{n+2(1-\beta)}(\Sigma_\beta(u); \delta) = 0$. Заметим, что замкнутое множество $\Sigma(u) = \bigcap_{\beta \in (\alpha, 1)} \Sigma_\beta(u)$ допускает оценку $\dim_{\mathcal{H}}(\Sigma_u; \delta) \leq n$, где размерность Хаусдорфа множества $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ в параболической метрике δ определяется как

$$\dim_{\mathcal{H}}(D; \delta) = \inf \{ \kappa \geq 0 : \mathcal{H}_\kappa(D; \delta) = 0 \}. \quad \square$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.2. Схема доказательства та же, что использовалась для доказательства теоремы 2.1. В этом случае для функции $\Phi(r, z^0)$ мы получаем оценку вида (55), в которой отсутствует слагаемое, содержащее функцию $\omega(\cdot)$. Точнее, справедливо неравенство

$$\Phi(\rho, z^0) \leq c \left(\frac{\rho}{R}\right)^{2\beta} \Phi(2R, z^0) + c \left(\frac{R}{\rho}\right)^{n+2} \{\varepsilon + C_\varepsilon q_*(2R) + R^{2(1-\beta)}\} \Phi(2R, z^0).$$

Анализируя далее доказательство теоремы 2.1, заключаем, что в данном случае можно так выбрать параметры τ, ε, r_0 , что в любой точке z^0 будут выполняться неравенства (64), (66). Из сказанного следует, что все точки множества $\overline{Q_s^+}$, $s < 1$, будут регулярными, и оценка (11) справедлива на всем множестве $\overline{Q_s^+}$. \square

Литература

1. Архипова А. А., Гришина Г. В. Регулярность решений квазилинейных параболических систем с негладкой по времени главной матрицей при краевом условии Неймана // В сб. Проблемы математ. анализа. 2018. Вып. 92. С. 27–44.
2. Giaquinta M., Giusti E. Partial regularity for solutions to nonlinear parabolic systems // Ann. Mat. Pura Applic. 1973. Vol. 97. P. 253–261.
3. Архипова А. А. О регулярности решения задачи Неймана для квазилинейных параболических систем // Известия Росс. Акад. Наук, сер. матем. 1994. Т. 58. Вып. 5. С. 3–25.
4. Архипова А. А. О регулярности решений задачи с косою производной для квазилинейных эллиптических систем // Зап. научн. сем. ПОМИ. 1994. Т. 213. С. 5–13.
5. Архипова А. А. О регулярности решений модельных нелинейных эллиптических систем при краевом условии типа заданной косою производной // Зап. научн. сем. ПОМИ. 1995. Т. 221. С. 30–57.
6. Stará J., John O. Some (new) counterexamples of parabolic systems // Comment. Math. Univ. Carolin. 1995. Vol. 36. P. 503–510.
7. Giaquinta M. A counterexample to the boundary regularity of solutions to elliptic systems // Manuscripta Math. 1978. Vol. 26. P. 217–220.
8. Krylov N. V. Lectures on Elliptic and Parabolic Equations in Sobolev Spaces. In Ser.: Graduate Studies in Math. Vol. 96. Amer. Math. Soc., 2008.
9. Dong H., Kim D. L-p solvability of divergence type parabolic and elliptic systems with partially BVO coefficients // Calc. Var. 2011. Vol. 40. P. 357–389.
10. Dong H., Zhang H. Conormal problem of higher-order parabolic systems // Transactions of AMS. 2016. Vol. 368, no. 1. P. 7413–7460.
11. Duzaar F., Mingione G. Second order parabolic systems, optimal regularity and singular sets of solutions // Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Nonlinear. 2005. Vol. 22. P. 705–751.
12. Bögelein V., Duzaar F., Mingione G. The boundary regularity for nonlinear parabolic systems. I // Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Nonlinear. 2010. Vol. 27. P. 201–255.
13. Bögelein V., Duzaar F., Mingione G. The boundary regularity for nonlinear parabolic systems. II // Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Nonlinear. 2010. Vol. 27. P. 145–200.
14. Duzaar F., Mingione G., Steffen K. Parabolic systems with polynomial growth and regularity // Mem. Amer. Math. Soc. 2011. Vol. 214, no. 1005. P. 128.
15. Arkhipova A., John O., Stará J. Partial regularity for solutions of quasilinear parabolic systems with nonsmooth in time principal matrix // Nonlinear Analysis. Ser. A. 2014. Vol. 95. P. 421–435.
16. Arkhipova A., Stará J. Boundary partial regularity for solutions of quasilinear parabolic systems with nonsmooth in time principal matrix // Nonlinear Analysis, Ser. A. 2015. Vol. 120. P. 236–261.
17. Arkhipova A., Stará J. Regularity of weak solutions to linear and quasilinear parabolic systems of non divergence type with non smooth in time principal matrix: $A(t)$ -caloric method // Forum Mathematicum. 2017. Vol. 29, N 5. P. 1039–1064.
18. Arkhipova A., Stará J. Regularity problem for 2m-order quasilinear parabolic systems with nonsmooth in time principal matrix // Topological Methods in Nonlinear Analysis. 2018. Vol. 52, no. 1. P. 111–146. <https://doi.org/10.12775/TMNA.2018.006>

19. Arkhipova A. Regularity of weak solutions to the model Venttsel problem for linear parabolic systems with non smooth in time principal matrix. *A(t)*-caloric approximation method // Manuscripta Math. 2016. Vol. 151, no. 3. P. 519–548.

20. Arkhipova A. Regularity of solutions of the model Venttsel’s problem for quasilinear parabolic systems with nonsmooth in time principal matrix // Computational Mathematics and Math. Physics. 2017. Vol. 3. P. 476–496; in Russian: Ж. Вычислит. Матем. и Математ. Физики. 2017. Т. 57, № 3. С. 470–490.

21. Ладъжеская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Изд-во Наука, 1967. 736 с.

Статья поступила в редакцию 13 июня 2018 г.;
после доработки 3 августа 2018 г.;
рекомендована в печать 27 сентября 2018 г.

Контактная информация:

Arkhipova Arina Alekseevna — д-р физ.-мат. наук, проф.; arinaark@gmail.com,
arina@AA1101.spb.edu

Grishina Galina Vladimirovna — канд. физ.-мат. наук, доц.; galinavg@yandex.ru

Regularity of solutions to a model oblique derivative problem for quasilinear parabolic systems with nondiagonal principal matrices

A. A. Arkhipova¹, G. V. Grishina²

¹ St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

² Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul., 5, Moscow, 105005, Russian Federation

For citation: Arkhipova A. A., Grishina G. V. Regularity of solutions to a model oblique derivative problem for quasilinear parabolic systems with nondiagonal principal matrices. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2019, vol. 6 (64), issue 1, pp. 3–26. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.101> (In Russian)

We consider quasilinear parabolic systems of equations with nondiagonal principal matrices. The oblique derivative of a solution is defined on the flat part of the lateral surface of a parabolic cylinder. We do not assume smoothness of the principal matrix and the boundary functions in the time variable and prove partial Hölder continuity of a weak solution near the flat part of the lateral surface of the cylinder. Hölder continuity of weak solutions to the correspondent linear problem is stated. A modification of the *A(t)*-caloric approximation method is applied to study regularity of weak solutions.

Keywords: parabolic systems, nonlinearity, regularity, oblique derivative.

References

1. Arkhipova A., Grishina G., “Regularity of Solutions to Quasilinear Parabolic Systems with Time-Nonsmooth Principal Matrix and the Neumann Boundary Condition”, *Journal of Mathematical Sciences* **232**(3), 232–253 (2018).

2. Giaquinta M., Giusti E., “Partial regularity for solutions to nonlinear parabolic systems”, *Ann. Mat. Pura Applic.* **97**, 253–261 (1973).

3. Arkhipova A., “On the regularity of the solution of the Neumann problem for quasilinear parabolic systems”, *Russian Academy Science, Izvestiya Math.* **45**(2), 231–253 (1995).

4. Arkhipova A., “On the regularity of solutions for oblique derivative problem to quasilinear elliptic systems”, *Journal of Math. Sci., N. Y.* **84**(1), 817–822 (1997).

5. Arkhipova A., “On the regularity of weak solutions of the model nonlinear elliptic systems under the oblique derivative type problem”, *Journal of Math. Sci., N. Y.* **87**(2), 3284–3303 (1997).

6. Stará J., John O., “Some (new) counterexamples of parabolic systems”, *Comment. Math. Univ. Carolin.* **36**, 503–510 (1995).
7. Giaquinta M., “A counterexample to the boundary regularity of solutions to elliptic systems”, *Manuscripta Math.* **26**, 217–220 (1978).
8. Krylov N. V., *Lectures on Elliptic and Parabolic Equations in Sobolev Spaces*. In Ser. *Graduate Studies in Math.* **96** (Amer. Math. Soc., 2008).
9. Dong H., Kim D., “L-p solvability of divergence type parabolic and elliptic systems with partially BVO coefficients”, *Calc. Var.* **40**, 357–389 (2011).
10. Dong H., Zhang H., “Conormal problem of higher-order parabolic systems”, *Transactions of AMS* **368**(1), 7413–7460 (2016).
11. Duzaar F., Mingione G., “Second order parabolic systems, optimal regularity and singular sets of solutions”, *Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Non Linéaire* **22**, 705–751 (2005).
12. Bögelein V., Duzaar F., Mingione G., “The boundary regularity for nonlinear parabolic systems. I”, *Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Non Linéaire* **27**, 201–255 (2010).
13. Bögelein V., Duzaar F., Mingione G., “The boundary regularity for nonlinear parabolic systems. II”, *Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Non Linéaire* **27**, 145–200 (2010).
14. Duzaar F., Mingione G., Steffen K., “Parabolic systems with polynomial growth and regularity”, *Mem. Amer. Math. Soc.* **214**(1005), 128 (2011).
15. Arkhipova A., John O., Stará J., “Partial regularity for solutions of quasilinear parabolic systems with nonsmooth in time principal matrix”, *Nonlinear Analysis. Ser. A* **95**, 421–435 (2014).
16. Arkhipova A., Stará J., “Boundary partial regularity for solutions of quasilinear parabolic systems with nonsmooth in time principal matrix”, *Nonlinear Analysis, Ser. A* **120**, 236–261 (2015).
17. Arkhipova A., Stará J., “Regularity of weak solutions to linear and quasilinear parabolic systems of non divergence type with non smooth in time principal matrix: $A(t)$ -caloric method”, *Forum Mathematicum* **29**(5), 1039–1064 (2017).
18. Arkhipova A., Stará J., “Regularity problem for 2m-order quasilinear parabolic systems with nonsmooth in time principal matrix”, *Topological Methods in Nonlinear Analysis* **52**(1), 111–146 (2018) <https://doi.org/10.12775/TMNA.2018.006>
19. Arkhipova A., “Regularity of weak solutions to the model Venttsel problem for linear parabolic systems with non smooth in time principal matrix. $A(t)$ -caloric approximation method”, *Manuscripta Math.* **151**(3), 519–548 (2016).
20. Arkhipova A., “Regularity of solutions of the model Venttsel’s problem for quasilinear parabolic systems with nonsmooth in time principal matrix”, *Computational Mathematics and Math. Physics* **3**, 476–496 (2017).
21. Ladyzhenskaya O. A., Solonnikov V. A., Uraltseva N. N., *Linear and Quasilinear Parabolic Equations* (Amer. Math. Soc. Providence, RI, 1968).

Received: June 13, 2018
 Revised: August 3, 2018
 Accepted: September 27, 2018

Author’s information:

Arina A. Arkhipova — arinaark@gmail.com, arina@AA1101.spb.edu
 Galina V. Grishina — galinavg@yandex.ru