

Д. Р. Меркин, С. М. Бауэр,
А. Л. Смирнов, Б. А. Смольников

Теория устойчивости в примерах и задачах

Рекомендовано учебно-методическим Советом по математике
и механике УМО по классическому университетскому образованию
в качестве учебного пособия для студентов высших учебных
заведений, обучающихся по специальности «010101 Математика»

R&C
Dynamics

РХД
Москва • Ижевск

2007



<http://shop.rcd.ru>

- физика
- математика
- биология
- техника

Меркин Д. Р., Бауэр С. М., Смирнов А. Л., Смольников Б. А.
Теория устойчивости в примерах и задачах. — М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2007. — 208 с.

В книге представлены задачи по основным разделам курса теории устойчивости. Также содержатся решения задач.

Для студентов механико-математических и технических специальностей университетов, специалистов.

ISBN 5-93972-417-4

© Д. Р. Меркин, С. М. Бауэр, А. Л. Смирнов, Б. А. Смольников, 2007

© НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2007

<http://rcd.ru>

<http://ics.org.ru>

Оглавление

Предисловие	6
От авторов	8
Глава 1. Постановка задачи	9
Задача 1.1	12
Задача 1.2	14
Задача 1.3	16
Задача 1.4	18
Задача 1.5	20
Задача 1.6	21
Глава 2. Прямой метод Ляпунова. Автономные системы	27
Задача 2.1	31
Задача 2.2	32
Задача 2.3	33
Задача 2.4	34
Задача 2.5	36
Глава 3. Устойчивость равновесия консервативных систем	39
Задача 3.1	43
Задача 3.2	45
Задача 3.3	47
Задача 3.4	52
Задача 3.5	54
Задача 3.6	59
Задача 3.7	62
Задача 3.8	65
Задача 3.9	68

Задача 3.10	70
Задача 3.11	73
Задача 3.12	77
Задача 3.13	80
Задача 3.14	82
Глава 4. Устойчивость по первому приближению	86
Задача 4.1	89
Задача 4.2	90
Задача 4.3	93
Задача 4.4	94
Задача 4.5	96
Задача 4.6	97
Задача 4.7	101
Задача 4.8	103
Задача 4.9	105
Задача 4.10	106
Глава 5. Устойчивость линейных автономных систем	108
Задача 5.1	109
Задача 5.2	111
Задача 5.3	114
Глава 6. Влияние структуры сил на устойчивость...	117
Задача 6.1	122
Задача 6.2	123
Задача 6.3	124
Задача 6.4	126
Глава 7. Устойчивость неавтономных систем	129
Задача 7.1	136
Задача 7.2	137
Задача 7.3	138
Задача 7.4	139
Задача 7.5	140
Глава 8. Устойчивость упругих систем	142
Статический критерий устойчивости	142
Энергетический критерий устойчивости	145
Динамический критерий устойчивости	148
Задача 8.1	150

Задача 8.2	154
Задача 8.3	156
Задача 8.4	158
Задача 8.5	161
Задача 8.6	163
Задача 8.7	164
Глава 9. Частотный метод исследования устойчивости	169
Задача 9.1	172
Задача 9.2	174
Задача 9.3	176
Задача 9.4	177
Глава 10. Задачи для самостоятельного решения	182
Предметный указатель	203

Предисловие

В 50–60-х годах XX века стала очевидной потребность в создании учебников по теории устойчивости движения для широкого круга инженерных специальностей. Книги, изданные к тому времени по теории устойчивости движения (Н. Г. Четаева, Р. Беллмана, Е. А. Барбашина, Б. П. Демидовича, Г. Н. Дубошина и др.), были научными монографиями, рассчитанными на сравнительно узкий круг квалифицированных читателей. Поэтому опубликованные учебники выдающихся ученых Ж. Ла-Салля и С. Лефшеца «Исследование устойчивости прямых методом Ляпунова» (1961) и Д. Р. Меркина «Введение в теорию устойчивости движения» (1971) сразу стали бестселлерами. Книга Д. Р. Меркина неоднократно переиздавалась и переведена на английский язык¹, а книга Ж. Ла-Салля и С. Лефшеца — на русский.

В настоящее время проблемы устойчивости равновесия и движения механических систем становятся все более актуальными по мере роста скоростей вращения разнообразных роторных машин, роста статических и динамических перегрузок, усложнения систем управления, все более широкого использования принципов биомеханики в технических устройствах. В связи с этим теория устойчивости движения все шире вводится в учебные программы университетов и вузов.

Учебник Д. Р. Меркина оказался наиболее подходящим для использования в учебном процессе благодаря довольно большому набору практических задач, дополняющих и углубляющих основные теоретические положения учебника. Многолетний опыт преподавания теории устойчивости в Санкт-Петербургском государственном университете и в Санкт-

¹В 1987 году в издательстве «Наука» вышло третье издание книги проф. Д. Р. Меркина *Введение в теорию устойчивости движения* [11], которое было переиздано в 2003 году издательством «Лань». В 1996 издательство «Springer» выпустило перевод этой книги на английский язык, выполненный Ф. Афа и А. Л. Смирновым [25].

Петербургском государственном техническом университете показал, что для успешного владения методами теории устойчивости совершенно необходимо сопровождать чтение теоретического курса самостоятельным решением учащимися достаточно большого количества различных задач. Этому, несомненно, способствует предлагаемый задачник (его третье, дополненное, издание).

*Г. А. Леонов, профессор,
декан математико-механического факультета СПбГУ
А. Х. Гелиг, профессор,
зав. лаб. теоретической кибернетики СПбГУ*

От авторов

В настоящем издании исправлены ошибки и опечатки, обнаруженные в первых изданиях задачника на русском и английском языках [13, 26]. Кроме того, издание дополнено новыми задачами, что привело к изменению нумерации задач по сравнению с первыми изданиями.

Глава 8 не совпадает по теме с соответствующими главами книг [11, 25] и посвящена рассмотрению некоторых классических задач теории устойчивости упругих систем.

Работа проводилась при поддержке РФФИ, грант № 04-01-00257. Авторы выражают особую благодарность рецензентам: академику РАН В.В. Румянцеву и зав.каф. теоретической и прикладной механики СПбГУ проф. П.Е. Товстику за обсуждения и ценные замечания и профессору А.Х. Гелигу за помощь в написании главы 9. Авторы высоко ценят советы профессоров Т. Atanackovic и S. Simic (University of Novi Sad), F. Afagh (Carleton University, Canada) и G. Söderbacka (Luleå University of Technology), использовавших при чтении курсов по теории устойчивости предыдущие издания книги. Авторы благодарны В.И. Сергеевой за большую помощь при подготовке рукописи к печати, а также студентам кафедры теоретической и прикладной механики СПбГУ за предложения и замечания.

Авторы

Глава 1

Постановка задачи

Обозначим через y_1, \dots, y_n вещественные переменные, характеризующие состояние механической или какой-нибудь другой динамической системы. Этими переменными могут быть координаты, скорости, напряжения, температуры и т. п. или функции этих величин. Предполагается, что число переменных y_1, \dots, y_n конечно и что процесс изменения этих переменных во времени описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями, которые могут быть разрешены относительно производных по времени:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= Y_1(y_1, \dots, y_n, t), \\ &\dots \\ \frac{dy_n}{dt} &= Y_n(y_1, \dots, y_n, t). \end{aligned} \tag{1.1}$$

В этих уравнениях Y_1, \dots, Y_n — известные функции переменных y_1, \dots, y_n и времени t , удовлетворяющие условиям существования и единственности решения. Если все функции Y_k не зависят от времени t , то система называется *автономной*, в противном случае — *неавтономной*.

Некоторое вполне определенное движение системы, подлежащее исследованию на устойчивость, называется *невозмущенным движением*. Невозмущенному движению системы отвечает определенное частное решение

$$y_1 = f_1(t), \quad \dots, \quad y_n = f_n(t) \tag{1.2}$$

дифференциальных уравнений (1.1), удовлетворяющее начальным условиям:

$$\text{при } t = t_0 \quad y_1 = f_1(t_0), \quad \dots, \quad y_n = f_n(t_0). \quad (1.3)$$

Изменим начальные условия (1.3), дав начальным значениям переменных y_1, \dots, y_n малые по модулю приращения $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$:

$$\text{при } t = t_0 \quad y_1 = f_1(t_0) + \varepsilon_1, \quad \dots, \quad y_n = f_n(t_0) + \varepsilon_n. \quad (1.4)$$

Движение системы, отвечающее измененным начальным условиям (1.4), называется *возмущенным движением*, а величины $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ — *возмущениями*.

Обозначим значения переменных y_j в возмущенном движении через $y_j(t)$, а в невозмущенном движении через $f_j(t)$ и составим разности между ними:

$$x_j = y_j(t) - f_j(t) \quad (j = 1, \dots, n). \quad (1.5)$$

Переменные x_j называются *отклонениями* или *вариациями* величин y_j .

Совокупность отклонений x_1, \dots, x_n в n -мерном пространстве переменных x_1, \dots, x_n определяет точку M — *изображающую точку*. В возмущенном движении при изменении величин x_1, \dots, x_n изображающая точка описывает траекторию γ . Невозмущенному движению (1.2) отвечает неподвижная точка $x_j = 0$ — начало координат.

В качестве меры отклонения возмущенного движения от невозмущенного можно выбрать величину

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = \sum_{j=1}^n x_j^2, \quad (1.6)$$

так как сумма (1.6) в евклидовом пространстве равна квадрату расстояния от изображающей точки M до начала координат.

Согласно определению возмущенного движения и равенствам (1.4) и (1.5) при $t = t_0$, будем иметь

$$x_j = x_{0j} = \varepsilon_j \quad (j = 1, \dots, n).$$

Примем следующее определение Ляпунова: *если по любому положительному числу ε , как бы оно мало ни было, можно найти такое*

положительное число δ , что при всяких возмущениях x_{0j} , удовлетворяющих условию

$$\sum x_{0j}^2 \leq \delta,$$

и при любом $t \leq t_0$ будет выполняться неравенство

$$\sum x_j^2 < \varepsilon,$$

то невозмущенное движение устойчиво, в противном случае — неустойчиво.

Если невозмущенное движение устойчиво и при этом любое возмущенное движение при достаточно малых начальных возмущениях стремится к невозмущенному движению, т. е. если

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum x_j^2(t) = 0,$$

то невозмущенное движение называется *асимптотически устойчивым*.

В тех случаях, когда асимптотическая устойчивость имеет место при *любых* возмущениях (не обязательно малых), невозмущенное движение называется *устойчивым в целом*.

Иногда устойчивость имеет место не при любых возмущениях, а при возмущениях, подчиненных некоторым условиям в виде равенств или неравенств (например, $\varepsilon_j > 0$). Такая устойчивость называется *условной*.

Для вывода уравнений возмущенного движения найдем из равенства (1.5) переменные $y_j(t)$:

$$y_j(t) = f_j(t) + x_j(t).$$

Внесем эти значения для $y_j(t)$ в дифференциальные уравнения движения системы (1.1). Получим

$$\frac{df_j}{dt} + \frac{dx_j}{dt} = Y_j(f_1 + x_1, \dots, f_n + x_n, t).$$

Разложим правые части этих уравнений в ряды Тейлора по степеням x_j :¹

$$\frac{df_j}{dt} + \frac{dx_j}{dt} = Y_j(f_1, \dots, f_n, t) + \left(\frac{\partial Y_j}{\partial x_1} \right)_0 x_1 + \dots + \left(\frac{\partial Y_j}{\partial x_n} \right)_0 x_n + X_j^*,$$

¹Предполагается, что функции, разлагаемые в ряды, удовлетворяют соответствующим требованиям.

где X_j^* — совокупность членов, зависящих от отклонений x_j в степени выше первой.

Учтем, что в невозмущенном движении функции $f_j(t)$ должны удовлетворять уравнениям движения (1.1). На этом основании будем иметь

$$\frac{dx_j}{dt} = a_{j1}x_1 + \dots + a_{jn}x_n + X_j^*, \quad (j = 1, \dots, n). \quad (1.7)$$

В этих уравнениях коэффициенты $a_{jk} = \left(\frac{\partial Y_j}{\partial x_k}\right)_{x=0}$ в общем случае являются функциями времени t , в частности, они могут быть постоянными.

Уравнения (1.7) называются *дифференциальными уравнениями возмущенного движения*. Если в этих уравнениях отбросить члены X_j^* , то полученные при этом уравнения

$$\frac{dx_j}{dt} = a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n \quad (j = 1, \dots, n)$$

называются *уравнениями первого приближения*.

Обозначив все члены, стоящие в правых частях уравнений (1.7) символами X_j , получим для неавтономных уравнений возмущенного движения

$$\frac{dx_j}{dt} = X_j(x_1, \dots, x_n, t), \quad (j = 1, \dots, n). \quad (1.8)$$

Если уравнения возмущенного движения автономны, т. е. не содержат время t явно, то будем иметь

$$\frac{dx_j}{dt} = X_j(x_1, \dots, x_n). \quad (1.9)$$

Форма дифференциальных уравнений (1.8) или (1.9) называется *нормальной*, а движения, определяемые этими уравнениями, называются *неустановившимися* и *установившимися* соответственно.

Задача 1.1

Однородный тонкий стержень массы m и длины l с горизонтальной осью вращения удерживается в положении равновесия спиральной пружиной (торсионом) жесткости c (см. рис. 1.1). При верхнем вертикальном положении стержня пружина не напряжена.

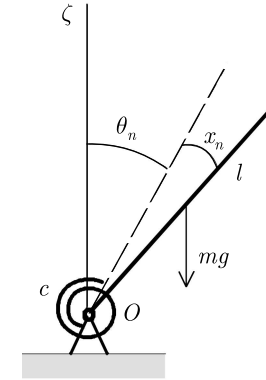


Рис. 1.1

Пренебрегая силами сопротивления, получить уравнение, определяющее равновесные положения стержня. Составить уравнение возмущенного движения стержня около положения равновесия и уравнение первого приближения.

Решение.

В положении равновесия стержня момент $c\theta$, создаваемый пружиной, должен быть равен моменту силы тяжести $\frac{1}{2}mgl \sin \theta$, т. е.

$$c\theta = \frac{1}{2}mgl \sin \theta.$$

Отсюда

$$\sin \theta = k\theta, \quad k = \frac{2c}{mgl}. \quad (1.10)$$

Как видно на рис. 1.2, при малых k уравнение $\sin \theta = k\theta$ может иметь несколько решений.

Пусть θ_n — один из корней этого уравнения. Обозначим изменение этого угла в возмущенном движении через x_n . Воспользуемся теоремой об изменении момента количества движения стержня относительно неподвижной оси O :

$$\frac{1}{3}ml^2 \frac{d^2}{dt^2}x_n = -c(\theta_n + x_n) + \frac{1}{2}mgl \sin(\theta_n + x_n).$$

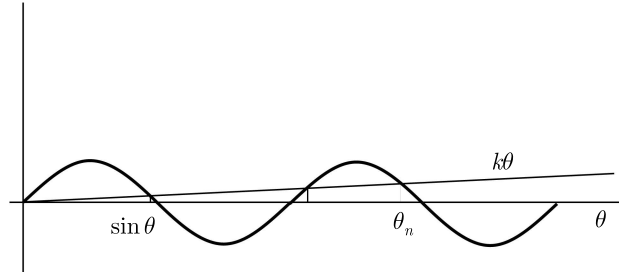


Рис. 1.2

Учитывая значение k из (1.10), получаем уравнение возмущенного движения стержня

$$\ddot{x}_n + \frac{3g}{2l} (k(\theta_n + x_n) - \sin(\theta_n + x_n)) = 0. \quad (1.11)$$

Для получения уравнения первого приближения разложим выражение $\sin(\theta_n + x_n)$ в ряд по степеням x_n следующим образом:

$$\sin(\theta_n + x_n) = \sin \theta_n + x_n \cos \theta_n + \dots$$

Ограничиваясь первыми двумя слагаемыми этого разложения и подставляя их в уравнение (1.11), имеем

$$\ddot{x}_n + \frac{3g}{2l} (k\theta_n + kx_n - \sin \theta_n - \cos \theta_n x_n) = 0.$$

Учитывая, что θ_n должно удовлетворять условию (1.10), получим уравнение первого приближения

$$\ddot{x}_n + \frac{3g}{2l} (k - \cos \theta_n) x_n = 0.$$

Задача 1.2

Известно, что сферический маятник (см. рис. 1.3) при соответствующих начальных условиях может совершать коническое движение, при котором $\vartheta = \vartheta_0 = \text{const}$, $\dot{\psi} = \dot{\psi}_0 = \text{const}$.

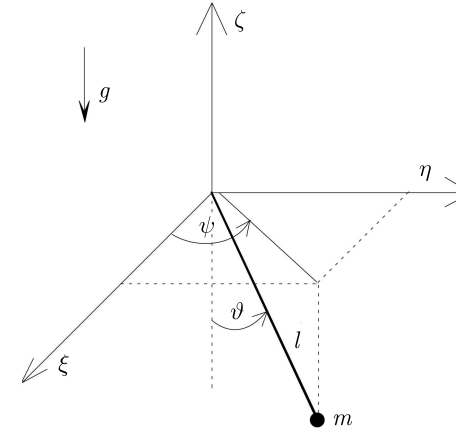


Рис. 1.3

Выбирая этот стационарный режим в качестве невозмущенного движения, составить уравнения возмущенного движения.

Решение.

Используя сферические углы ϑ и ψ в качестве обобщенных координат сферического маятника, построим математическую модель его движения в форме уравнений Лагранжа. Составляя кинетическую и потенциальную энергии сферического маятника

$$T = \frac{1}{2} ml^2 (\dot{\vartheta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \vartheta),$$

$$\Pi = mgl(1 - \cos \vartheta),$$

получим искомые уравнения движения:

$$\begin{aligned} \ddot{\vartheta} &= \left(\dot{\psi}^2 \cos \vartheta - \frac{g}{l} \right) \sin \vartheta, \\ \ddot{\psi} &= -2\dot{\vartheta} \dot{\psi} \text{ctg} \vartheta. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Невозмущенное движение $\vartheta = \vartheta_0$, $\dot{\psi} = \dot{\psi}_0$ должно удовлетворять этой системе. Подставляя постоянные значения ϑ_0 и $\dot{\psi}_0$ в систему (1.12),

найдем, что она удовлетворяется при условии

$$\dot{\psi}_0^2 \cos \vartheta_0 = \frac{g}{l}. \quad (1.13)$$

Именно этому соотношению должны удовлетворять начальные условия для реализации стационарного конического движения сферического маятника. Для получения уравнений возмущенного движения положим

$$\vartheta = \vartheta_0 + x, \quad \dot{\psi} = \dot{\psi}_0 + \dot{y}, \quad (1.14)$$

где x и \dot{y} — отклонение переменных ϑ и $\dot{\psi}$ от их невозмущенных значений, обусловленные неточным заданием их начальных значений. Подставляя выражение (1.14) в уравнения (1.12) и разлагая их правые части в ряды Тейлора по x и y с учетом слагаемых не выше второго порядка, получаем уравнения возмущенного движения:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\dot{\psi}_0^2 \sin^2 \vartheta_0 x + \dot{\psi}_0 \sin 2\vartheta_0 \dot{y} - \\ &\quad \frac{3}{4} \dot{\psi}_0^2 \sin 2\vartheta_0 x^2 + 2\dot{\psi}_0 \cos 2\vartheta_0 x \dot{y} + \frac{1}{2} \sin 2\vartheta_0 \dot{y}^2 \\ \ddot{y} &= -2\dot{\psi}_0 \operatorname{ctg} \vartheta_0 \dot{x} + 2\dot{\psi}_0 \frac{x \dot{x}}{\sin^2 \vartheta_0} - 2 \operatorname{ctg} \vartheta_0 \dot{x} \dot{y} \end{aligned} \quad (1.15)$$

Здесь использовано разложение $\operatorname{ctg}(\vartheta_0 + x) \approx \operatorname{ctg} \vartheta_0 - \frac{x}{\sin^2 \vartheta_0}$, а также учтено соотношение (1.13).

Задача 1.3

По равномерно вращающемуся вокруг вертикальной оси кольцу радиуса a может свободно без трения перемещаться колечко M (см. рис. 1.4). Угловая скорость равномерного вращения кольца равна ω .

Определить положение динамического равновесия колечка, составить уравнение возмущенного движения относительно равновесного положения и выделить уравнение первого приближения.

Решение.

На колечко M действуют три силы:

- 1) сила веса mg колечка, направленная вертикально вниз;
- 2) центробежная сила $F_c = ma\omega^2 \sin \theta$, направленная горизонтально;
- 3) реакция вращающегося кольца, направленная к его центру.

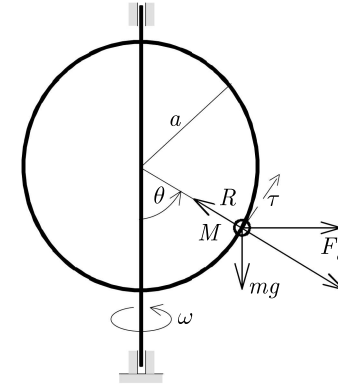


Рис. 1.4

В положении равновесия равнодействующая двух первых сил должна быть равна по величине и противоположна по направлению силе реакции, т. е.

$$\tan \theta = \frac{ma\omega^2 \sin \theta}{mg}.$$

Из этого следует, что

$$\cos \theta = \frac{g}{a\omega^2}.$$

Таким образом, положению равновесия соответствуют четыре угла:

$$\theta_0 = \pm \arccos \frac{g}{a\omega^2}, \quad \theta_1 = 0, \quad \theta_2 = \pi,$$

Для решения $\theta = \theta_0$ дадим приращение x углу θ_0 . Затем, чтобы исключить неизвестную реакцию R в точке M , запишем второй закон Ньютона в проекции на касательную к кольцу τ :

$$ma\ddot{x} = ma\omega^2 \sin(\theta_0 + x) \cos(\theta_0 + x) - mg \sin(\theta_0 + x)$$

или

$$\ddot{x} - \omega^2 \sin(\theta_0 + x) \cos(\theta_0 + x) + \frac{g}{a} \sin(\theta_0 + x) = 0. \quad (1.16)$$

Для получения уравнения первого приближения положим

$$\begin{aligned} \sin(\theta_0 + x) &= \sin \theta_0 + x \cos \theta_0, \\ \cos(\theta_0 + x) &= \cos \theta_0 - x \sin \theta_0. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в (1.16), принимая во внимание только члены первого порядка малости и учитывая, что

$$-\omega^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0 + \frac{g}{a} \sin \theta_0 = 0,$$

получим уравнение первого приближения возмущенного движения

$$\ddot{x} - \left(\omega^2 \cos 2\theta_0 - \frac{g}{a} \cos \theta_0 \right) x = 0$$

или, окончательно,

$$\ddot{x} + \left(\omega^2 - \frac{g^2}{a^2 \omega^2} \right) x = 0.$$

Задача 1.4

Двойной маятник, изображенный на рис. 1.5, удерживается в верхнем вертикальном положении двумя спиральными пружинами жесткости c_1 и c_2 . Точечные массы маятников равны m_1 и m_2 , а длины невесомых стержней — l_1 и l_2 соответственно. В верхнем вертикальном положении маятников спиральные пружины не деформированы.

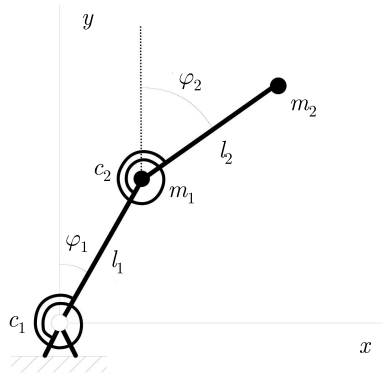


Рис. 1.5

Составить уравнение первого приближения возмущенного движения относительно верхнего вертикального положения. Массой стержней и силами сопротивления пренебречь.

Решение.

Эта система имеет две степени свободы. Для составления уравнений возмущенного движения воспользуемся уравнениями Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_k} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_k} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_k} \quad (k = 1, 2). \quad (1.17)$$

Кинетическая энергия T системы равна $T = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$, где v_1 и v_2 — скорости материальных точек M_1 и M_2 , а Π — потенциальная энергия системы.

Используя рис. 1.5, найдем координаты массы m_1 (x_1, y_1) и массы m_2 (x_2, y_2):

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 \sin \varphi_1, & x_2 &= l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2, \\ y_1 &= l_1 \cos \varphi_1, & y_2 &= l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2. \end{aligned}$$

После дифференцирования по времени получаем

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= l_1 \cos \varphi_1 \dot{\varphi}_1, & \dot{x}_2 &= l_1 \cos \varphi_1 \dot{\varphi}_1 + l_2 \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_2, \\ \dot{y}_1 &= -l_1 \sin \varphi_1 \dot{\varphi}_1, & \dot{y}_2 &= -l_1 \sin \varphi_1 \dot{\varphi}_1 - l_2 \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_2, \end{aligned}$$

откуда $v_1^2 = l_1^2 \dot{\varphi}_1^2$, $v_2^2 = l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + 2l_1 l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + l_2^2 \dot{\varphi}_2^2$. Поскольку мы ищем уравнения первого приближения, то для малых углов φ_1 и φ_2 будем считать, что $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = 1$. Теперь кинетическую энергию T можно записать в виде

$$T = \frac{l_1^2}{2} (m_1 + m_2) \dot{\varphi}_1^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\varphi}_2^2.$$

Потенциальная энергия Π системы складывается из упругой энергии пружин и энергии сил тяжести, т. е.

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} c_1 \varphi_1^2 + \frac{1}{2} c_2 (\varphi_2 - \varphi_1)^2 - (m_1 + m_2) g l_1 (1 - \cos \varphi_1) - \\ &\quad - m_2 g l_2 (1 - \cos \varphi_2). \end{aligned}$$

Учитывая малость углов и группируя члены, получим:

$$\Pi = \frac{1}{2} (c_1 + c_2 - (m_1 + m_2) g l_1) \varphi_1^2 - c_2 \varphi_1 \varphi_2 + \frac{1}{2} (c_2 - m_2 g l_2) \varphi_2^2.$$

Таким образом, уравнения Лагранжа (1.17) принимают вид

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\varphi}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\varphi}_2 + (c_1 + c_2 - (m_1 + m_2) g l_1) \varphi_1 - c_2 \varphi_2 &= 0, \\ m_2 l_1 l_2 \ddot{\varphi}_1 + m_2 l_2^2 \ddot{\varphi}_2 - c_2 \varphi_1 + (c_2 - m_2 g l_2) \varphi_2 &= 0. \end{aligned}$$

Эти два уравнения эквивалентны матричному уравнению

$$A\ddot{\Phi} + C\dot{\Phi} = 0,$$

где

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} (m_1 + m_2)l_1^2 & m_2l_1l_2 \\ m_2l_1l_2 & m_2l_2^2 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 - (m_1 + m_2)gl_1 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 - m_2gl_2 \end{pmatrix}.$$

Задача 1.5

Твердое тело, имеющее неподвижную точку, движется по инерции (случай Эйлера–Пуансо). Доказать, что такое тело может вращаться равномерно вокруг неподвижной оси, совпадающей в этом движении с одной из главных осей инерции (x, y, z) , например, осью z . Приняв за невозмущенное движение

$$\omega_x = \omega_y = 0, \quad \omega_z = \omega_0 = \text{const},$$

составить уравнение возмущенного движения относительно проекций угловой скорости, если моменты инерции тела относительно главных осей инерции тела x, y и z равны A, B и C соответственно. Получить также линейную аппроксимацию уравнений возмущенного движения.

Решение.

Воспользуемся динамическими уравнениями Эйлера:

$$\begin{aligned} A\dot{\omega}_x + (C - B)\omega_y\omega_z &= M_x^e, \\ B\dot{\omega}_y + (A - C)\omega_z\omega_x &= M_y^e, \\ C\dot{\omega}_z + (B - A)\omega_x\omega_y &= M_z^e, \end{aligned} \quad (1.18)$$

где, согласно условиям задачи, $M_x^e = M_y^e = M_z^e = 0$. Установившееся вращение вокруг оси z , определяемое равенствами

$$\omega_x = \omega_y = 0, \quad \omega_z = \omega_0 = \text{const}$$

удовлетворяет (1.18) при $M \equiv 0$, что доказывает его существование. Аналогичное вращение возможно и вокруг осей x и y .

При возмущенном движении обозначим отклонения угловых скоростей ω_x, ω_y и ω_z через x_1, x_2 и x_3 соответственно, т. е.

$$\omega_x = x_1, \quad \omega_y = x_2, \quad \omega_z = \omega_0 + x_3.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (1.18), получим

$$\begin{aligned} A\dot{x}_1 + (C - B)x_2(\omega_0 + x_3) &= 0, \\ B\dot{x}_2 + (A - C)(\omega_0 + x_3)x_1 &= 0, \\ C\dot{x}_3 + (B - A)x_1x_2 &= 0. \end{aligned}$$

Линеаризованная форма уравнений возмущенного движения имеет вид

$$\begin{aligned} A\dot{x}_1 + (C - B)x_2\omega_0 &= 0, \\ B\dot{x}_2 + (A - C)\omega_0x_1 &= 0, \\ C\dot{x}_3 &= 0. \end{aligned}$$

Задача 1.6

На рис. 1.6 изображены две камеры, в которых находится два идентичных гироскопа.

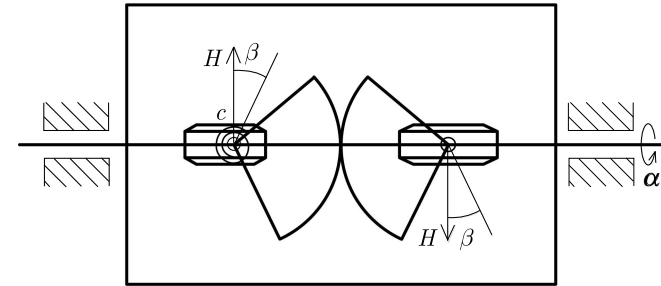


Рис. 1.6

Камеры связаны зубчатой передачей так, что они могут поворачиваться на равные углы β в разные стороны. Ось вращения внешней рамки, содержащей весь механизм, свободна, а на оси вращения одной из камер установлена спиральная пружина жесткости s .

Пренебрегая массами внешней рамки и камер, определить условие установившегося движения, при котором угол β и угловая скорость вращения рамки $\dot{\alpha}$ остаются постоянными. Составить уравнения возмущенного движения относительно установившегося движения.

Решение.

Система состоит из двух связанных между собой идентичных гироскопов, каждый из которых имеет по одной неподвижной точке. Обозначим момент инерции относительно осей x и y для каждого из гироскопов через A , а момент инерции относительно оси z (рис.1.7) через C . Тогда кинетическая энергия T системы примет вид:

$$T = \sum_{i=1}^2 \left(\frac{1}{2} A (\omega_x^2 + \omega_y^2)_i + \frac{1}{2} C (\omega_z^2)_i \right). \quad (1.19)$$

Если один из гироскопов, например левый (см. рис. 1.6), повернут так, что

$$\begin{aligned} \omega_x &= -\dot{\beta}, \\ \omega_y &= \dot{\alpha} \cos \beta, \\ \omega_z &= \dot{\varphi}_1 + \dot{\alpha} \sin \beta, \end{aligned}$$

то для правого гироскопа $\omega_x = \dot{\beta}$ и $\omega_y = -\dot{\alpha} \cos \beta$. Здесь $\dot{\varphi}_1$ — скорость собственного вращения левого гироскопа.

Подставляя выражения для ω_x , ω_y и ω_z в (1.19), получаем

$$T = A\dot{\beta}^2 + A\dot{\alpha}^2 \cos^2 \beta + \frac{C}{2} \left((\dot{\varphi}_1 + \dot{\alpha} \sin \beta)^2 + (\dot{\varphi}_2 + \dot{\alpha} \sin \beta)^2 \right). \quad (1.20)$$

Потенциальная энергия Π системы, обусловленная спиральной пружиной, равна

$$\Pi = \frac{1}{2} c \beta^2. \quad (1.21)$$

Так как мы рассматриваем установившееся вращение гироскопов, при которых вращающий момент M_φ^{rot} уравновешивается моментами сил сопротивления M_φ^{res} , то углы собственного вращения φ_i ($i = 1, 2$) являются циклическими координатами. Действительно, обобщенная сила $Q_\varphi = M_\varphi^{\text{rot}} - M_\varphi^{\text{res}}$, соответствующая координате φ_i , равна нулю. Так как кинетическая энергия (1.20) не зависит от углов φ_i , уравнения Лагранжа относительно φ_i примут вид:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_i} = 0.$$

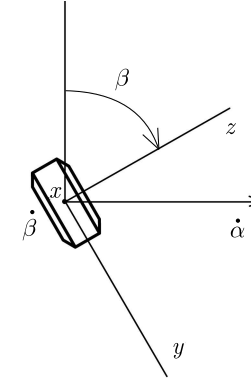


Рис. 1.7

Отсюда $\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_i} = H_i$, где H_i — момент количества движения каждого из гироскопов ($H_i = \text{const}$).

Используя (1.20), получим, что

$$C(\dot{\varphi}_i + \dot{\alpha} \sin \beta) = H_i. \quad (1.22)$$

Этот интеграл называется циклическим.

Составим теперь уравнение Лагранжа для координаты β :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}} - \frac{\partial T}{\partial \beta} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \beta}. \quad (1.23)$$

Пользуясь соотношениями (1.20) и (1.21), найдем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}} &= 2A\dot{\beta}, & \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}} &= 2A\ddot{\beta}, \\ \frac{\partial T}{\partial \beta} &= -2A\dot{\alpha}^2 \cos \beta \sin \beta + (H_1 + H_2) \dot{\alpha} \cos \beta, & \frac{\partial \Pi}{\partial \beta} &= c\beta. \end{aligned}$$

Подстановка этих выражений в (1.23) приводит к дифференциальному уравнению

$$2A\ddot{\beta} + 2A\dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta - (H_1 + H_2) \dot{\alpha} \cos \beta = -c\beta. \quad (1.24)$$

В установившемся движении

$$\beta = \beta_0 = \text{const}, \quad \ddot{\beta} = 0, \quad \dot{\alpha} = \omega = \text{const},$$

и из (1.24) получаем условие установившегося движения:

$$A\omega^2 \cos \beta_0 \sin \beta_0 - \frac{H_1 + H_2}{2} \omega \cos \beta_0 + \frac{1}{2} c \beta_0 = 0. \quad (1.25)$$

Чтобы получить уравнения возмущенного движения, положим

$$\beta = \beta_0 + x_1, \quad \dot{\alpha} = \omega + x_2. \quad (1.26)$$

Подставим (1.26) в выражения для кинетической и потенциальной энергии (заметим, что $\dot{\beta} = \dot{x}_1$), тогда

$$T = A\dot{x}_1^2 + A(\omega + x_2)^2 \cos^2(\beta_0 + x_1) + \sum_{i=1,2} \frac{C}{2} (\dot{\varphi}_i + (\omega + x_2) \sin(\beta_0 + x_1))^2, \quad (1.27)$$

$$\Pi = \frac{c}{2} (\beta_0 + x_1)^2.$$

Циклические интегралы (1.22) примут вид:

$$C(\dot{\varphi}_i + (\omega + x_2) \sin(\beta_0 + x_1)) = H_i.$$

Положим

$$H = \frac{H_1 + H_2}{2}.$$

Составим уравнение Лагранжа для x_1 :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial T}{\partial x_1} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_1}. \quad (1.28)$$

В силу (1.25) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} &= 2A\dot{x}_1, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} &= 2A\ddot{x}_1, \\ \frac{\partial T}{\partial x_1} &= 2H(\omega + x_2) \cos(\beta_0 + x_1) - \\ &\quad - 2A(\omega + x_2)^2 \cos(\beta_0 + x_1) \sin(\beta_0 + x_1), \\ \frac{\partial \Pi}{\partial x_1} &= c(\beta_0 + x_1). \end{aligned} \quad (1.29)$$

Разложим функции $\cos(\beta_0 + x_1)$, $\sin(\beta_0 + x_1)$ и $(\omega + x_2)^2$ в ряды:

$$\begin{aligned} \cos(\beta_0 + x_1) &= \cos \beta_0 - x_1 \sin \beta_0 + \dots, \\ \sin(\beta_0 + x_1) &= \sin \beta_0 + x_1 \cos \beta_0 + \dots, \\ (\omega + x_2)^2 &= \omega^2 + 2\omega x_2 + \dots, \end{aligned} \quad (1.30)$$

где многоточие означает члены высших порядков по x_1 и x_2 .

Подставляя (1.29) и (1.30) в (1.28), после упрощения получаем:

$$\begin{aligned} A\ddot{x}_1 + (A\omega^2 \cos 2\beta_0 + H\omega \sin \beta_0 + \frac{c}{2}) x_1 + A\omega^2 \cos \beta_0 \sin \beta_0 - \\ - H\omega \cos \beta_0 + \frac{1}{2} c \beta_0 + (A\omega \sin 2\beta_0 - H \cos \beta_0) x_2 = X_1. \end{aligned}$$

Здесь X_1 — совокупность членов, содержащих x_1 и x_2 в степенях выше первой.

При помощи условия (1.25) получим первое уравнение возмущенного движения:

$$\begin{aligned} A\ddot{x}_1 + (A\omega^2 \cos 2\beta_0 + H\omega \sin \beta_0 + \frac{c}{2}) x_1 + \\ + (A\omega \sin 2\beta_0 - H \cos \beta_0) x_2 = X_1. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Координата α является также циклической, так как согласно (1.20) кинетическая энергия является функцией только скорости $\dot{\alpha}$, а потенциальная энергия не зависит от α . Таким образом, дифференциальное уравнение для координаты α и, следовательно, для x_2 принимает вид:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial x_2} = 0. \quad (1.32)$$

Пользуясь равенством (1.27), найдем:

$$\frac{\partial T}{\partial x_2} = 2A(\omega + x_2) \cos^2(\beta_0 + x_1) + 2H \sin(\beta_0 + x_1).$$

Подставляя это выражение в (1.32), получаем:

$$\begin{aligned} 2A\dot{x}_2 \cos^2(\beta_0 + x_1) - 4A(\omega + x_2) \cos(\beta_0 + x_1) = \\ = \sin(\beta_0 + x_1) \dot{x}_1 + 2H \cos(\beta_0 + x_1) \dot{x}_1 = 0. \end{aligned}$$

Поделив это выражение на $2 \cos(\beta_0 + x_1)$ и оставляя только члены первого порядка по \dot{x}_1 и \dot{x}_2 , получим второе уравнение возмущенного движения:

$$(H - 2A\omega \sin \beta_0) \dot{x}_1 + A \cos \beta_0 \dot{x}_2 = X_2. \quad (1.33)$$

Уравнения (1.31) и (1.33) определяют уравнения возмущенного движения системы относительно установившегося движения.

Глава 2

Прямой метод Ляпунова. Автономные системы

Пусть в области

$$\sum x_j^2 \leq \mu, \quad (2.1)$$

где μ – постоянное положительное число, задана некоторая вещественная функция $V(x) = V(x_1, \dots, x_n)$.

Предполагается, что в области (2.1) эти функции *однозначны, непрерывны* и обращаются в нуль, когда все x_1, \dots, x_n равны нулю, т. е.

$$V(0) = 0. \quad (2.2)$$

Если в области (2.1) функция V кроме нуля может принимать значения только одного знака, то она называется *знакопостоянной* (соответственно *положительной* или *отрицательной*). Если же знакопостоянная функция обращается в нуль *только в том случае, когда все x_1, \dots, x_n равны нулю*, то функция V называется *знакоопределенной* (соответственно *определенно-отрицательной* или *определенно-положительной*). Функции, принимающие как положительные, так и отрицательные значения, называются *знакопеременными* функциями.

Введенные таким образом функции V , используемые для исследования устойчивости движения, называются *функциями Ляпунова*.

Если знакоопределенная функция $V = V(x)$ непрерывна вместе со своими производными, то при $x_1 = \dots = x_n = 0$ она будет иметь

изолированный экстремум и, следовательно, все частные производные первого порядка, вычисленные в этой точке, будут равны нулю:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x_j}\right)_0 = 0 \quad (j = 1, \dots, n). \quad (2.3)$$

Разложим функцию V в ряд Маклорена по степеням x_1, \dots, x_n :

$$V = V(0) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial V}{\partial x_j}\right)_0 x_j + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_k \partial x_j}\right)_0 x_k x_j + \dots,$$

где точками обозначены члены высшего порядка. Учитывая соотношения (2.2) и (2.3), получим

$$V = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n c_{kj} x_k x_j + \dots$$

Здесь постоянные числа $c_{kj} = c_{jk}$ определены равенствами

$$c_{kj} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_k \partial x_j}\right)_0.$$

Если *квадратичная форма*

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n c_{kj} x_k x_j \quad (2.4)$$

определенно-положительная, то при достаточно малых по модулю x_j функция V также будет определено-положительной.

Рассмотрим матрицу коэффициентов квадратичной формы (2.4)

$$C = \begin{pmatrix} \begin{array}{ccc|ccc} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \dots & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{nn} \end{array} \end{pmatrix}$$

и составим из нее n главных миноров

$$\Delta_1 = c_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix}.$$

В линейной алгебре доказывается критерий Сильвестра [6]. Для того чтобы квадратичная форма с вещественными коэффициентами была определено-положительной, необходимо и достаточно, чтобы все главные диагональные миноры $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ матрицы ее коэффициентов были положительны, т. е.

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \dots, \quad \Delta_n > 0.$$

Таким образом, критерий Сильвестра является достаточным (но не необходимым) условием определенной положительности самой функции V .

Можно показать [11], что если функция V знакоопределенная, то поверхность $V(x_1, \dots, x_n) = c$ замкнута.

Известно также, что вектор $\text{grad } V$ направлен по нормали к поверхности $V = c$ в точке M в сторону возрастания функции V , т. е. вектор $\text{grad } V$ направлен во внешнюю часть поверхности $V = c$, если функция V определено-положительна, и внутрь поверхности $V = c$, если функция V определено-отрицательна.

Одновременно с функцией $V(x)$ будем рассматривать ее полную производную по времени t , взятую в предположении, что переменные x_j удовлетворяют дифференциальным уравнениям возмущенного движения (1.9)

$$\dot{V} = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \dot{x}_2 + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} \dot{x}_n,$$

или, учитывая уравнения (1.9),

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x_1} X_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} X_2 + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} X_n, \quad (2.5)$$

или

$$\dot{V} = U \cdot \text{grad } V.$$

Имеют место следующие теоремы об устойчивости движения.

Теорема Ляпунова об устойчивости движения. Если для дифференциальных уравнений возмущенного движения можно найти знакоопределенную функцию V , производная которой \dot{V} в силу этих уравнений является знакопостоянной функцией противоположного знака с V или тождественно равна нулю, то невозмущенное движение устойчиво.

Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости. Если для дифференциальных уравнений возмущенного движения можно найти знакоопределенную функцию V , производная которой \dot{V} в силу этих уравнений является знакоопределенной функцией противоположного знака с V , то невозмущенное движение асимптотически устойчиво.

Теорема Ляпунова о неустойчивости движения. Если дифференциальные уравнения возмущенного движения позволяют найти функцию $V(x)$, которая обладает в силу этих уравнений знакоопределенной производной \dot{V} и может принимать в окрестности нуля значения одного знака с функцией V , то невозмущенное движение неустойчиво.

Условия Ляпунова, налагаемые на производную \dot{V} , ослаблены в теореме Четаева.

Теорема Четаева о неустойчивости движения. Если дифференциальные уравнения возмущенного движения позволяют найти функцию $V(x)$, для которой в сколь угодно малой окрестности нуля существует область $V > 0$, и если производная \dot{V} функции V , вычисленная в силу этих уравнений, положительна во всех точках области $V > 0$, то невозмущенное движение неустойчиво.

Применение основных теорем прямого метода требует знания функций Ляпунова, удовлетворяющих определенным требованиям. Построение функций Ляпунова является искусством. Среди приемов, традиционно используемых для этого, отметим метод преобразования координат, метод неопределенных коэффициентов и построение функции Ляпунова с помощью связки интегралов. Последний способ используется в задачах 2.4–2.5 данной главы и в задачах 2.1–2.4 главы 10. Поскольку производная линейной комбинации первых интегралов в силу системы тождественно равна нулю, знакоопределенность такой функции в силу теоремы Ляпунова об устойчивости дает достаточный критерий устойчивости. Часто в качестве функции Ляпунова для консервативных систем используется интеграл энергии, а для систем со стационарными связями — обобщенный интеграл энергии (гамильтониан) $V = T_2 - T_0 + \Pi$ (см. [3, 4]). Для выявления условия знакоопределенности следует разложить функцию V в ряд по формам. Условия знакоопределенности квадратичной части этого разложения (условия Сильвестра) гарантируют знакоопределенность функции V . Если же квадратичная часть является знакопостоянной функцией, то для вы-

явления знакоопределенности необходим учет высших членов разложения функции V [11].

Задача 2.1

Даны уравнения возмущенного движения

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1^3 + x_1 x_2, \\ \dot{x}_2 &= -5x_2 - 3x_1^2. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Построить функцию Ляпунова и показать, что невозмущенное движение $x_1 = x_2 = 0$ устойчиво в целом¹.

Решение.

Умножаем первое уравнение на x_1 , а второе — на x_2 и складываем уравнения. Получаем:

$$x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 = -(x_1^4 + 2x_1^2 x_2 + 5x_2^2)$$

или

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (x_1^2 + x_2^2) = -(x_1^4 + 2x_1^2 x_2 + 5x_2^2).$$

Функция $V = x_1^2 + x_2^2$ является положительно-определенной при всех x_1 и x_2 , а ее производная по времени

$$\dot{V} = -(x_1^4 + 2x_1^2 x_2 + 5x_2^2)$$

отрицательно-определенная функция при всех x_1 и x_2 .

Действительно, функция

$$x_1^4 + 2x_1^2 x_2 + 5x_2^2$$

удовлетворяет критерию Сильвестра при всех x_1^2 и x_2 , так как

$$\Delta_1 = 1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 4 > 0.$$

На основании теоремы Ляпунова об устойчивости движения система (2.6) является устойчивой в целом.

¹ Движение называется устойчивым в целом (в большом), если оно является асимптотически устойчивым при любом (не только малом) возмущении.

Задача 2.2

Даны функции, производные которых по времени в силу уравнений возмущенного движения соответственно равны:

1. $V = x_1^6 + x_2^3, \quad \dot{V} = -x_1^6 - x_2^4;$
2. $V = 5x_1^4 - 4x_1^2x_2 + x_2^2, \quad \dot{V} = -4x_1^4 + 2x_1^2x_2 - x_2^2;$
3. $V = x_1^6 + 3x_2^2, \quad \dot{V} = -(x_1^3 - x_2)^2;$
4. $V = x_1 - x_2^3, \quad \dot{V} = 4x_1^3.$

Можно ли воспользоваться этими функциями для определения характера устойчивости движения?

Решение.

1. Функцию $V = x_1^6 + x_2^3$ нельзя использовать, так как она знакопеременна (при $x_1 = 0$ и $x_2 > 0$, $V > 0$, а при $x_1 = 0$ и $x_2 < 0$, $V < 0$), а ее производная $\dot{V} = -x_1^6 - x_2^4$ является отрицательно-определенной функцией.

2. Функция $V = 5x_1^4 - 4x_1^2x_2 + x_2^2$ положительно-определенная, так как выполнен критерий Сильвестра:

$$\Delta_1 = 5 > 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0.$$

Производная $\dot{V} = -4x_1^4 + 2x_1^2x_2 - x_2^2$ — отрицательно-определенная функция, так как выполнен критерий Сильвестра:

$$\Delta_1 = -4 < 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 > 0.$$

Применяя критерий Сильвестра, заменяем x_1 на x_1^2 .

Следовательно, согласно теореме Ляпунова, система устойчива в целом.

3. Функция $V = x_1^6 + x_2^2$ положительно-определенная, ее производная $\dot{V} = -(x_1^3 - x_2)^2$ отрицательна. Следовательно, согласно теореме Ляпунова, система устойчива.

4. Функция $V = x_1 - x_2^3$ положительна при $x_1 > 0$ и $x_2 < 0$, а ее производная $\dot{V} = 4x_1^3 > 0$ при $x_1 > 0$. Таким образом, согласно теореме Четаева, система неустойчива.

Задача 2.3

Определить устойчивость положения равновесия системы, уравнения возмущенного движения которой имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \alpha x_2^3 + \beta x_1 \sqrt[3]{x_1^4 + x_2^4}, \\ \dot{x}_2 &= -\alpha x_1^3 + \beta x_2 \sqrt[3]{x_1^4 + x_2^4}. \end{aligned}$$

Решение.

Умножим первое уравнение на x_1^3 , второе — на x_2^3 и, сложив их, получим

$$x_1^3 \dot{x}_1 + x_2^3 \dot{x}_2 = \beta (x_1^4 + x_2^4)^{\frac{4}{3}}$$

или

$$\frac{1}{4} \frac{d}{dt} (x_1^4 + x_2^4) = \beta (x_1^4 + x_2^4)^{\frac{4}{3}}.$$

Положим $x_1^4 + x_2^4 = r^2$. Из устойчивости (или неустойчивости) r следует устойчивость (или неустойчивость) x_1 и x_2 и наоборот. Имеем

$$\frac{1}{4} \frac{dr^2}{dt} = \beta r^{\frac{8}{3}} \quad \text{или} \quad \frac{1}{2} \frac{dr}{dt} = \beta r^{\frac{5}{3}}.$$

Из этого следует

$$\frac{1}{2} \frac{dr}{r^{\frac{5}{3}}} = \beta dt$$

или, после интегрирования,

$$-\frac{3}{2} r^{-\frac{2}{3}} + \frac{3}{2} r_0^{-\frac{2}{3}} = 2\beta(t - t_0)$$

и

$$r^{\frac{2}{3}} = \frac{r_0^{\frac{2}{3}}}{1 - \frac{4}{3} r_0^{\frac{2}{3}} \beta (t - t_0)}.$$

Если $\beta < 0$, то $r \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ и решение асимптотически устойчиво.

С другой стороны, если $\beta > 0$, то $r \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow t_0 + \frac{3}{4\beta} r_0^{-\frac{2}{3}}$ и система неустойчива.

При $\beta = 0$ система устойчива (см. пример в параграфе 1.2 [11]).

Задача 2.4

Покажите, что уравнения возмущенного движения относительно перманентного вращения твердого тела (см. задачу 1.5) имеют два интеграла:

$$\begin{aligned} Ax_1^2 + Bx_2^2 + C(x_3 + \omega_0)^2 &= \text{const}, \\ A^2x_1^2 + B^2x_2^2 + C^2(x_3 + \omega_0)^2 &= \text{const}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Укажите их физический смысл, составьте связку интегралов и докажите, что перманентное вращение вокруг большой оси эллипсоида инерции ($C > A > B$) и вокруг его малой оси ($C < A < B$) устойчивы.

Решение.

Приведенные два интеграла можно получить следующим способом. Умножим первое уравнение задачи 1.6 на x_1 , второе — на x_2 и третье — на $(x_3 + \omega_0)$, получим:

$$\begin{aligned} Ax_1\dot{x}_1 &= B\omega_0x_1x_2 - C\omega_0x_1x_2 + Bx_1x_2x_3 - Cx_1x_2x_3, \\ Bx_2\dot{x}_2 &= C\omega_0x_1x_2 - A\omega_0x_1x_2 + Cx_1x_2x_3 - Ax_1x_2x_3, \\ C(x_3 + \omega_0)\dot{x}_3 &= Ax_1x_2x_3 - Bx_1x_2x_3 + A\omega_0x_1x_2 - B\omega_0x_1x_2. \end{aligned}$$

Складывая эти уравнения, приходим к

$$Ax_1\dot{x}_1 + Bx_2\dot{x}_2 + C(x_3 + \omega_0)\dot{x}_3 = 0$$

и после интегрирования получаем:

$$Ax_1^2 + Bx_2^2 + C(x_3 + \omega_0)^2 = \text{const}, \quad (2.8)$$

т.е. первый из двух интегралов.

Чтобы получить второй интеграл, снова вернемся к трем уравнениям, рассматриваемым в задаче 1.4. Умножаем первое уравнение на A^2x_1 , второе — на B^2x_2 и третье — на $C^2(x_3 + \omega_0)$. Затем, складывая все результирующие уравнения, приходим к одному уравнению. Проинтегрировав его, получаем второй интеграл:

$$A^2x_1^2 + B^2x_2^2 + C^2(x_3 + \omega_0)^2 = \text{const}. \quad (2.9)$$

Обозначим интеграл в (2.7) как V_1 , а интеграл в (2.8) как V_2 .

Составим связку интегралов:

$$V = -V_2 + CV_1 \pm \frac{1}{\omega_0^2} (V_1 - C\omega_0^2)^2,$$

где множитель $\frac{1}{\omega_0^2}$ введен, чтобы сохранить размерность в уравнении. Внесем в эту связку интегралов значения V_1 и V_2 . После элементарных преобразований получаем:

$$\begin{aligned} V &= A(C - A)x_1^2 + B(C - B)x_2^2 \pm \\ &\pm \frac{1}{\omega_0^2} (Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2 + 2C\omega_0x_3)^2 \end{aligned}$$

или

$$V = A(C - A)x_1^2 + B(C - B)x_2^2 \pm 4C^2x_3^2 + \dots, \quad (2.10)$$

где точками обозначены члены, содержащие x_k в степени выше второй.

Возьмем сначала знак «+» в выражении (2.9), т.е.

$$V = A(C - A)x_1^2 + B(C - B)x_2^2 + 4C^2x_3^2 + \dots$$

Если $C > A$, $C > B$ и $|x_k|$ достаточно малы, то функция V будет положительно-определенной, а ее производная по времени равна нулю. Таким образом, на основании теоремы Ляпунова можно заключить, что при $C > A$ и $C > B$ движение устойчиво.

Теперь рассмотрим в выражении (2.9) знак «-», т.е.

$$V = A(C - A)x_1^2 + B(C - B)x_2^2 - 4C^2x_3^2 + \dots$$

Здесь при $C < A$ и $C < B$ функция V является отрицательно-определенной и, согласно теореме Ляпунова, движение устойчиво.

Примечание. Сделанный вывод об устойчивости перманентных вращений твердого тела вокруг осей с минимальным и максимальным моментами инерции справедлив только для абсолютно твердого тела, когда в возмущенном движении существуют как интеграл момента (2.8), так и интеграл энергии (2.7). Однако допущение о консервативности возмущенного движения зачастую оказывается неправомерным, т.к. даже сколь угодно малые диссипативные силы способны разрушить «консервативную» устойчивость, если ей не отвечает минимум полной механической энергии. В рассмотренной задаче именно это обстоятельство имеет место в случае перманентного вращения твердого

тела вокруг оси с минимальным моментом инерции, когда при одном и том же модуле кинетического момента вращение вокруг оси с минимальным моментом инерции обладает максимальной кинетической энергией, а вращение вокруг оси с наибольшим моментом инерции — минимальной энергией. Поэтому вращение вокруг максимальной оси будет обладать вековой устойчивостью, а вокруг минимальной — лишь «временной», причем эта «временная» устойчивость, как показал пример американского спутника «Explorer-11», длится не более полутора часов.

Задача 2.5

Уравнения движения тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой можно привести к виду

$$A\dot{\omega}_x + (C - B)\omega_y\omega_z = \gamma_y m_z - \gamma_z m_y, \quad (2.11)$$

$$B\dot{\omega}_y + (A - C)\omega_z\omega_x = \gamma_z m_x - \gamma_x m_z, \quad (2.12)$$

$$C\dot{\omega}_z + (B - A)\omega_x\omega_y = \gamma_x m_y - \gamma_y m_x,$$

где A , B , и C — главные моменты инерции тела относительно осей x , y , z для точки подвеса, ω_x , ω_y и ω_z — проекции вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ на оси x , y и z , γ_x , γ_y и γ_z — проекции единичного вектора $\boldsymbol{\gamma}$ на оси x , y и z (направляющие косинусы) и m_x , m_y и m_z — составляющие вектора статического момента силы тяжести \boldsymbol{m} относительно осей x , y и z .

Штауде и Млодзеевский независимо друг от друга доказали, что при некоторых условиях тело может перманентно вращаться² вокруг оси $\boldsymbol{\gamma}$, и совокупность таких осей образует конус. Не все перманентные вращения устойчивы.

Составить интегралы движения и с помощью их связи доказать устойчивость перманентного вращения вокруг оси, совпадающей с главной осью, относительно которой момент инерции тела имеет наибольшее значение.

Указание. В матричной форме интегралы движения имеют вид:

$$F_1 = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{J} \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\gamma}^T \boldsymbol{m} = h, \quad F_2 = \boldsymbol{\gamma}^T \boldsymbol{J} \boldsymbol{\omega} = L, \quad F_3 = \boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{\gamma} = 1,$$

²Перманентное вращение — вращение вокруг постоянной в пространстве и в теле оси $\boldsymbol{\gamma}$ с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}(t)$.

где h и L — константы и

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{m} = \begin{pmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \\ \gamma_z \end{pmatrix}.$$

Если тело имеет максимальный момент инерции относительно оси z , то устойчивость нужно определить для вращения тела относительно этой оси; в этом случае $\omega_x = \omega_y = 0$, $m_x = m_y = 0$, $\gamma_x = \gamma_y = 0$. Связку интегралов следует взять в форме

$$V(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}) = F_1 + \lambda F_2 + \frac{1}{2}\mu F_3,$$

где λ и μ — неопределенные множители. Покажите, что $\lambda = -|\boldsymbol{\omega}|$, а для выбранной оси имеет место соотношение $\mu = C\omega^2 - m_z$. Это поможет доказать устойчивость перманентного вращения вокруг оси z .

Решение.

Интеграл $F_1 = h$ — интеграл энергии, $F_2 = L$ — интеграл проекции моментов, а F_3 — условие связи для направляющих косинусов. Ни один из этих интегралов не является положительно-определенной функцией Ляпунова. Поэтому, в соответствии с рекомендацией, составим связку интегралов:

$$V(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}) = F_1 + \lambda F_2 + \frac{1}{2}\mu F_3.$$

Подставим величины F_1 , F_2 и F_3 в эту связку и вычислим первую вариацию функции V :

$$\delta V = \delta \boldsymbol{\omega} (\boldsymbol{J} \boldsymbol{\omega} + \lambda \boldsymbol{J} \boldsymbol{\gamma}) + \delta \boldsymbol{\gamma} (\boldsymbol{m} + \lambda \boldsymbol{J} \boldsymbol{\omega} + \mu \boldsymbol{\gamma}).$$

Эта вариация обращается в ноль, если обе скобки равны нулю:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{J}(\boldsymbol{\omega} + \lambda \boldsymbol{\gamma}) &= 0, \\ \boldsymbol{m} + \lambda \boldsymbol{J} \boldsymbol{\omega} + \mu \boldsymbol{\gamma} &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда заключаем, что

$$\lambda = -|\boldsymbol{\omega}|, \quad \mu = \boldsymbol{\omega}^2 C - m_z. \quad (2.13)$$

Чтобы получить условие положительной определенности функции V , определим ее вторую вариацию в окрестности рассматриваемого перманентного вращения ω , γ :

$$\delta^2 V = \delta\omega J \delta\omega + 2\lambda\delta\gamma J \delta\omega + \mu\delta\gamma\delta\gamma.$$

Заметим, что $F_3 = \gamma\gamma = 1$ и, следовательно, $\gamma\delta\gamma = 0$. Из этого получаем, что в нашем случае $\delta\gamma_z = 0$.

Учитывая это, имеем:

$$\delta^2 V = A\delta\omega_x^2 + B\delta\omega_y^2 + C\delta\omega_z^2 + 2\lambda(A\delta\gamma_x\delta\omega_x + B\delta\gamma_y\delta\omega_y) + \mu(\delta\gamma_x^2 + \delta\gamma_y^2).$$

Для полученной квадратичной формы от $\delta\gamma_x^2$, $\delta\gamma_y^2$, $\delta\omega_x^2$, $\delta\omega_y^2$, $\delta\omega_z^2$ составим матрицу коэффициентов

$$\begin{pmatrix} \mu & 0 & \lambda A & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & \lambda B & 0 \\ \lambda A & 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & \lambda B & 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C \end{pmatrix}.$$

Теперь, воспользовавшись критерием Сильвестра, получим:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \mu > 0, \\ \Delta_2 &= \mu^2 > 0, \\ \Delta_3 &= \mu^2 A - \lambda^2 \mu A^2 = \mu A (\mu - \lambda^2 A) > 0, \\ \Delta_4 &= AB (\mu - \lambda^2 B) (\mu - \lambda^2 A) > 0. \end{aligned}$$

Учитывая, что $m_z > 0$ в силу (2.10), условие $\Delta_1 = \mu > 0$ приводит к

$$\omega^2 > \frac{m_z}{C}.$$

Из условия $\Delta_3 > 0$ следует:

$$\omega^2 > \frac{m_z}{C - A}. \quad (2.14)$$

Если неравенство (2.11) выполняется, то условие $\Delta_4 > 0$ сводится к неравенству

$$\omega^2 > \frac{m_z}{C - B}. \quad (2.15)$$

При $C > B > A$ все условия устойчивости для рассматриваемого перманентного вращения сводятся к одному неравенству (2.12).

Глава 3

Устойчивость равновесия и стационарных движений консервативных систем

I. Устойчивость равновесия потенциальных систем.

Для наиболее распространенного класса потенциальных механических систем исследование устойчивости их состояния равновесия основывается на теореме Лагранжа–Дирихле: *равновесное состояние потенциальной системы устойчиво в том случае, если в этом состоянии ее потенциальная энергия $\Pi(q)$ $q^T = [q_1, \dots, q_n]$ имеет изолированный минимум*. При этом характер этого минимума может быть как гладким (когда в точке минимума функция $\Pi(q_i)$ дифференцируема по всем обобщенным координатам q_i), так и зубцовым (когда по некоторым координатам дифференцируемость отсутствует). В первом случае положения равновесия q_* определяются из соотношений $\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0$, а их

устойчивость зависит от свойств матрицы $\frac{d^2 \Pi}{dq^2}$ в точке $q = q_*$. Признаком устойчивости является выполнение критерия Сильвестра для этой матрицы в точке q_* . Во втором случае приходится использовать качественные или численные методы как для поиска положений равновесия, так и для установления их устойчивости (т.е. условий наличия негладкого минимума). Простейшим примером является равновесие тяжелого однородного прямоугольника на горизонтальной плоскости (рис. 3.1 а).

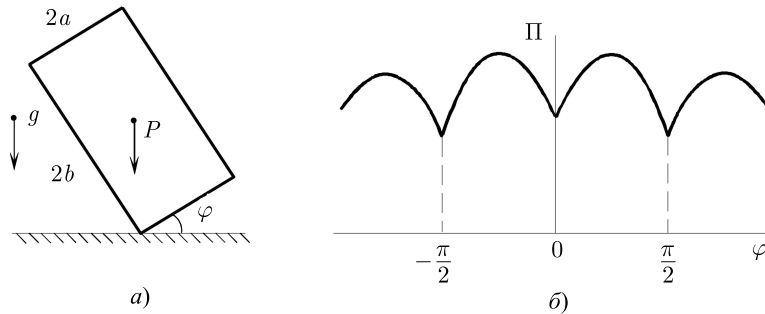


Рис. 3.1

Для него потенциальная энергия в отклоненном состоянии есть

$$\Pi(\varphi) = P(a|\sin \varphi| + b|\cos \varphi|),$$

где выражение в скобке есть высота центра масс прямоугольника над плоскостью, и зависимость ее от угла показана на рис. 3.1 б. Видно, что здесь все устойчивые положения равновесия имеют зубцовый характер, тогда как неустойчивые — гладкий. Зубцовые равновесия являются жесткими, так как для сколь угодно малого отклонения прямоугольника от такого равновесия требуется приложить усилие конечной величины. В главе 3 представлены задачи как с гладкими (3.1–3.5), так и негладкими состояниями равновесия (3.6).

II. Устойчивость стационарных движений механических систем

Весьма распространенными и важными режимами движения механических систем являются их стационарные движения, при которых неизменными остаются некоторые координаты и некоторые скорости. Замечательной особенностью таких режимов является возможность выявления их устойчивости посредством почти той же процедуры, что и выше, т.е. с помощью так называемой измененной потенциальной энергии. Изменение потенциальной энергии состоит в том, что к ней добавляется некоторая часть энергии кинетической. Рассмотрим эту методику применительно к консервативной системе, совершающей стац-

онарные движения. Примером является движение спутника по круговой орбите вокруг Земли. В этом случае одна из обобщенных координат спутника, трактуемого как материальная точка, остается постоянной (это радиус орбиты), тогда как другая — полярный угол φ спутника — изменяется равномерно, т.е. постоянной остается угловая орбитальная скорость $\dot{\varphi}$. В этом случае координата φ не войдет в функцию Лагранжа $L = T - \Pi$, а войдет лишь ее производная. Такая координата называется *циклической* и ей отвечает соответствующий *циклический интеграл*.

Действительно, в уравнении Лагранжа для координаты φ

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}$$

очевидно имеем $\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$, $\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = 0$ и, следовательно, циклический интеграл будет

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \text{const} = p_{\varphi}.$$

Посредством этого интеграла можно исключить из уравнений движения циклическую скорость, после чего в них останутся только позиционные координаты, остающиеся постоянными в стационарном движении. Анализ устойчивости этой системы сводится к исследованию ее «квазиравновесного» состояния, т.е. к анализу на экстремум новой потенциальной функции — измененной потенциальной энергии $W(q)$, где q — столбец обобщенных позиционных координат. Конкретная процедура построения $W(q)$ разработана Раусом для общего случая, когда в исходной системе с n степенями свободы имеется m позиционных и $n - m$ циклических координат, которым отвечают $n - m$ циклических интегралов

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{m+i}} = \text{const} = p_i, \quad i = 1, n - m. \quad (3.1)$$

Обозначая через Ω столбец из $n - m$ циклических скоростей, а через p отвечающий им столбец циклических интегралов, образуем функцию Рауса

$$R = T - p^T \Omega$$

и исключим из нее все циклические скорости с помощью циклических интегралов (3.1). Тогда функция Рауса представляется в виде суммы

трех алгебраических форм $R = R_2 + R_1 + R_0$, где R_2 — квадратичная форма от позиционных скоростей, R_1 — линейная, а R_0 — форма нулевой степени, причем коэффициенты этих форм являются функциями от q . Как показано Раусом, условием устойчивости стационарного решения рассматриваемой консервативной системы является минимум на этом режиме измененной потенциальной энергии

$$W(q) = \Pi - R_0.$$

Таким образом, стационарный режим определяется системой уравнений (при дифференцируемости $W(q)$)

$$\frac{\partial W}{\partial q} = 0,$$

из которой ищутся стационарные значения позиционных координат q_* . Для их устойчивости необходимо выполнение критерия Сильвестра для функции $W(q)$, т.е. для матрицы вторых производных $\left. \frac{d^2 W}{dq^2} \right|_{q_*}$ в точках q_* . Так, для системы с двумя позиционными координатами q_1 и q_2 будем иметь

$$\left. \frac{d^2 W}{dq^2} \right|_{q_*} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 W}{\partial q_1^2} & \frac{\partial^2 W}{\partial q_1 \partial q_2} \\ \frac{\partial^2 W}{\partial q_1 \partial q_2} & \frac{\partial^2 W}{\partial q_2^2} \end{vmatrix}_{q_*},$$

и условия устойчивости сведутся к неравенствам

$$\left. \frac{d^2 W}{dq^2} \right|_{q_*} > 0, \quad \left. \frac{d^2 W}{dq_1^2} \right|_{q_*} > 0. \quad (3.2)$$

Необходимо оговорить, что здесь неявно подразумевается, что на начальные возмущения наложены ограничения — они действуют так, чтобы в возмущенном движении константы p_i циклических интегралов остались теми же, что и в невозмущенном. Если же это ограничение не выполнено, то можно говорить лишь об орбитальной устойчивости, т.е. об устойчивости по части переменных. Стационарное движение всегда неустойчиво относительно циклических координат, что касается его устойчивости относительно циклических скоростей, то движение, устойчивое относительно позиционных координат, входящих в уравнение Рауса, будет устойчивым и относительно циклических скоростей.

Обратимся к стационарным режимам в неконсервативных системах, где вместо циклических интегралов задается постоянство некоторых обобщенных скоростей, осуществляемое специальными активными приводными устройствами. В этом случае кинетическая энергия выражается в виде суммы трех алгебраических форм от \dot{q} :

$$T = T_2 + T_1 + T_0.$$

Первые две образуют в уравнениях Лагранжа динамические слагаемые, обращающиеся в нуль в положении относительного равновесия (если, разумеется, q — относительные координаты). Последнее же слагаемое T_0 образует квазистатические слагаемые (выражающие статическое воздействие центробежных сил и моментов). Поэтому если ввести в рассмотрение измененную потенциальную энергию

$$W = \Pi - T_0,$$

то положение относительного равновесия и условия их устойчивости определяются соотношениями, аналогичными (3.2).

В главе 3 представлены задачи об исследованиях устойчивости стационарных режимов как для консервативных (3.7–3.9), так и для неконсервативных систем (3.10–3.13), а также задачи гидростатики (3.14).

Задача 3.1

Конец B абсолютно гибкой, невесомой и нерастяжимой нити длины l закреплен неподвижно (см. рис. 3.2). Ко второму концу прикреплен груз весом P .

Блок D неподвижен, а блок C может перемещаться по вертикали, делящей расстояние a между точками B и D пополам. К блоку C подвешен груз весом Q . Пренебрегая размерами блоков D и C и силами сопротивления, определить положение равновесия системы и его устойчивость.

Решение.

Обозначим вертикальные координаты точек C и P через z_1 и z_2 соответственно. Из рис. 3.2 находим

$$z_1 = \frac{a}{2} \tan \varphi, \quad z_2 = l - \frac{2a}{2 \cos \varphi}.$$

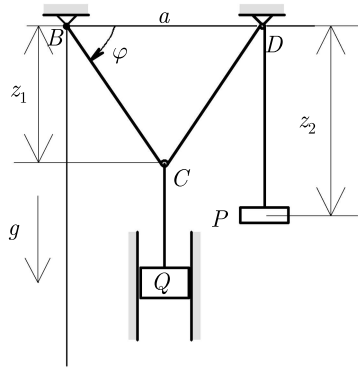


Рис. 3.2

Потенциальная энергия системы равна

$$\Pi = -Qz_1 - Pz_2 = -\frac{Qa}{2} \tan \varphi - P \left(l - \frac{a}{\cos \varphi} \right).$$

В положении изолированного равновесия консервативной системы $\Pi'_\varphi = 0$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = -\frac{Qa}{2} \frac{1}{\cos^2 \varphi} + Pa \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} = -\frac{a}{\cos^2 \varphi} \left(\frac{Q}{2} - P \sin \varphi \right) = 0.$$

Следовательно,

$$\sin \varphi_0 = \frac{Q}{2P} < 1, \quad (3.3)$$

так что при $Q \geq 2P$ равновесия не существует. Если $Q < 2P$, то положение равновесия наблюдается при

$$\varphi_0 = \arcsin \frac{Q}{2P}.$$

Это положение устойчиво, так как в нем

$$\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} \right)_{\varphi=\varphi_0} = \frac{Pa}{\cos \varphi_0} > 0.$$

При вычислении второй производной учтено равенство (3.3).

Задача 3.2

Ток i_1 течет по прямолинейному вертикальному неподвижному проводнику, притягивающему параллельный ему подвижный проводник AB , по которому течет ток i_2 . (см. рис. 3.3).

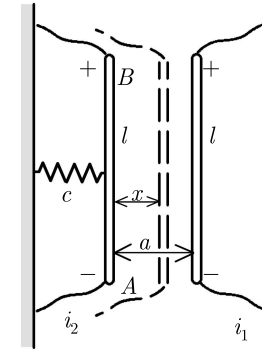


Рис. 3.3

Длина активного участка каждого проводника равна l . Пружина жесткости c прикреплена к проводнику AB . При отсутствии тока в проводнике AB расстояние между проводниками равно a . Найти положение равновесия системы и исследовать их устойчивость.

Указание. Сила взаимодействия двух параллельных проводников равна $F = \beta \frac{2i_1 i_2}{d} l$, где $\beta = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi}$. Здесь i_1 и i_2 — силы тока в проводниках, d — расстояние между проводниками, l — длина активного участка каждого проводника, а μ_0, μ соответственно магнитная проницаемость вакуума и материала.

Решение.

Сила, действующая на подвижный проводник AB , равна

$$F = \beta \frac{2i_1 i_2 l}{d} - cx = \beta \frac{2i_1 i_2 l}{a - x} - cx.$$

Так как эта сила зависит только от одной обобщенной координаты x , то она потенциальна, то есть $F = -\frac{d\Pi}{dx}$, где $\Pi(x)$ — потенциальная

энергия. Для Π тогда получаем выражение

$$\Pi(x) = \int_0^x \left(cx - \beta \frac{2i_1 i_2 l}{a-x} \right) dx = c \left[\frac{x^2}{2} + \alpha \ln \left(1 - \frac{x}{a} \right) \right],$$

где $\alpha = \beta \frac{2i_1 i_2 l}{c}$.

График этой функции показан на рис. 3.4, откуда видно наличие в общем случае точек минимума и максимума $\Pi(x)$.

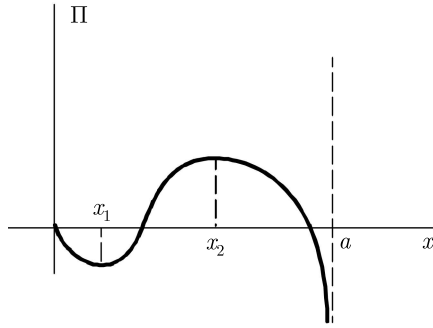


Рис. 3.4

Координаты x_1 и x_2 этих точек следует искать из условия равновесия $F = 0$, сводящегося к уравнению

$$x^2 - ax + \alpha = 0. \quad (3.4)$$

Решения этого уравнения

$$x_1 = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - \alpha} > 0, \quad x_2 = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - \alpha} > 0$$

существуют при условии $\alpha < \frac{a^2}{4}$, то есть когда сила электромагнитного взаимодействия проводников не слишком велика. Чтобы убедиться в наличии минимума и максимума Π в точках x_1 и x_2 , достаточно вычислить в этих точках $\Pi''(x)$:

$$\Pi''(x) = c \left[1 - \frac{\alpha}{(x-a)^2} \right].$$

В точках экстремума согласно (3.4) имеем $a - x_i = \frac{\alpha}{x_i}$, так что

$$\Pi''(x_i) = c \left[1 - \frac{x_i^2}{\alpha} \right] = \frac{c}{\alpha} [2\alpha - ax_i].$$

Тогда для точек x_1 и x_2 имеем

$$\begin{aligned} \Pi''(x_1) &= \frac{c}{\alpha} \left[2\alpha - a \left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - \alpha} \right) \right] = \\ &= \frac{2c}{\alpha} \sqrt{\frac{a^2}{4} - \alpha} \left(\frac{\alpha}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - \alpha} \right) = \frac{2c}{\alpha} \sqrt{\frac{a^2}{4} - \alpha} - \alpha x_1 > 0, \\ \Pi''(x_2) &= \frac{c}{\alpha} \left[2\alpha - a \left(\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - \alpha} \right) \right] = \\ &= \frac{2c}{\alpha} \sqrt{\frac{a^2}{4} - \alpha} \left(-\frac{\alpha}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - \alpha} \right) = -\frac{2c}{\alpha} \sqrt{\frac{a^2}{4} - \alpha} - \alpha x_2 < 0. \end{aligned}$$

При $\alpha = \frac{a^2}{4}$ экстремумы сливаются, образуя точку перегиба, которая, разумеется, неустойчива.

Задача 3.3

Исследовать равновесие системы, показанной на рис. 3.5. Здесь показан обращенный маятник длиной l , к аперсу которого приложена некоторая «мертвая» сила P , действующая вдоль вертикали. В шарнирной опоре маятника имеется торсион (угловая пружина) жесткостью γ , создающий восстанавливающий момент $M = -\gamma\varphi$ при отклонении маятника от вертикали на угол φ .

Решение.

Составим потенциальную энергию маятника

$$\Pi(\varphi) = Pl \cos \varphi + \frac{1}{2} \gamma \varphi^2 = \gamma \left(\frac{\cos \varphi}{\alpha} + \frac{\varphi^2}{2} \right). \quad (3.5)$$

В написанное выражение входят два коэффициента, из отношения которых можно получить один управляющий безразмерный параметр,

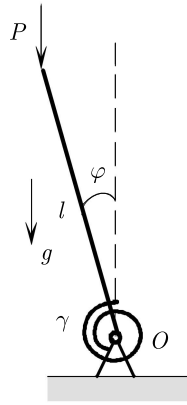


Рис. 3.5

например, $\alpha = \frac{\gamma}{Pl}$. Тогда искомая кривая состояний равновесия¹, изображенная на рис. 3.6, определится уравнением

$$\frac{d\Pi}{d\varphi} = \gamma \left(\varphi - \frac{\sin \varphi}{\alpha} \right) = 0. \quad (3.6)$$

На плоскости (φ, α) эта кривая состоит из ветвей I, II, определяемых соотношениями

$$\begin{aligned} \varphi = 0, & \quad -\infty < \alpha < \infty, \\ -\infty < \alpha < \infty, & \quad \alpha = \frac{\sin \varphi}{\varphi}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

На рис. 3.6 ветвь I представляет собой ось ординат, а ветвь II напоминает затухающую синусоиду. Ветвь I описывает одно равновесное положение маятника $\varphi_* = 0$. Ветвь II определяет континуум критических точек² функций (3.5). Из рис. 3.6 можно видеть, что имеется точка

¹Кривая (поверхность) состояний равновесия устанавливает зависимость положения равновесия от какого-либо определяющего параметра (параметров) системы

²Критические точки функции Π — это либо точки ее стационарности, в которых $\frac{d\Pi}{dq} = 0$, либо точки неаналитического (зубцового) экстремума функции $\Pi(q)$. Если $\Pi(q)$ — потенциальная энергия системы, то критические точки — это точки равновесия.

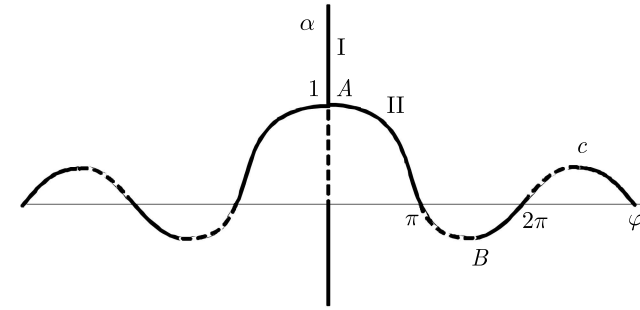


Рис. 3.6

пересечения ветвей I и II — точка A ($\varphi = 0, \alpha = 1$), являющаяся *точкой бифуркации* (точкой расщепления)³. Смысл этого термина становится ясен, если проследить за поведением системы при квазистатическом возрастании силы P от значений $P \approx 0$, которым отвечает $\alpha \rightarrow \infty$, до значений, отвечающих $\alpha = 1$. Видно, что в точке A при дальнейшем уменьшении α возможен плавный переход ветви I на ветвь II и дальнейшее перемещение по ней при монотонном изменении α , согласно (3.7). Возможность такой бифуркации обусловлена формой кривой $\Pi_I(\varphi)$ при разных α , задаваемой ее разложением

$$\delta\Pi = \left(1 - \frac{1}{\alpha} \frac{\delta\varphi^2}{2} + \frac{1}{\alpha} \frac{\delta\varphi^2}{4!} + \dots \right).$$

Видно, что за пределами отрезка $0 \leq \alpha \leq 1$ все точки ветви I являются точками минимума $\delta\Pi$ и им отвечает устойчивое состояние равновесия маятника. Внутри же отрезка имеет место максимум $\delta\Pi$, т. е. им отвечает неустойчивость равновесия. Граничная точка $\alpha = 0$ является сингулярной, и ей отвечает устойчивость при $\alpha \rightarrow -0$ и неустойчивость при $\alpha \rightarrow +0$. Наибольший интерес представляет вырожденная точка бифуркации $\alpha = 1$, в которой разложение $\delta\Pi$ начинается со слагаемого четвертого порядка и которая является поэтому структурно-неустойчивой, хотя в ней равновесие маятника формально устойчиво.

³Точки бифуркации — точки расщепления кривой состояний равновесия на 2 или более ветвей.

Обращаясь теперь к ветви II, определяемой равенством (3.7), найдем на ней вырожденные критические точки из условия

$$\frac{d^2\Pi_{II}}{d\varphi^2} = \gamma \left(1 - \frac{\cos\varphi}{\alpha}\right) = 0. \quad (3.8)$$

Сопоставляя его с (3.7), получаем для этих точек соотношения

$$\alpha_{**} = \cos\varphi_{**}, \quad \tan\varphi_{**} = \varphi_{**}. \quad (3.9)$$

Нетрудно убедиться, что они представляют собой точки экстремумов ветви II, так как согласно (3.8)

$$\frac{d\alpha}{d\varphi} = \frac{\varphi \cos\varphi - \sin\varphi}{\varphi^2} = 0.$$

В общем же случае для вырожденных критических точек имеем

$$\frac{d\alpha}{d\varphi} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial \varphi}}{\frac{\partial Q}{\partial \alpha}} = \frac{\frac{\partial^2 \Pi_{II}}{\partial \varphi^2}}{\frac{\partial^2 \Pi_{II}}{\partial \varphi \partial \alpha}}.$$

Ясно, что эти точки — неморсовские⁴ и они структурно-неустойчивы. Все остальные точки ветви II есть морсовские точки, устойчивость или неустойчивость в которых определяется знаком $\frac{\partial^2 \Pi_{II}}{\partial \varphi^2}$. Согласно (3.9) условие устойчивости есть

$$\begin{aligned} \alpha &> \cos\varphi, & \alpha &> 0; \\ \alpha &< \cos\varphi, & \alpha &< 0. \end{aligned}$$

На рис. 3.6 устойчивые участки кривой состояний равновесия выделены жирной линией, а неустойчивые — прерывистой.

Чтобы исследовать устойчивость равновесия в вырожденных точках B, C и т. д., запишем вблизи них разложение Π с учетом усло-

⁴Морсовская критическая точка (названная в честь американского математика М. Морса, изучившего их в 1930 г.) — это невырожденная критическая точка, в которой $\frac{d\Pi}{dq} = 0$, $\left|\frac{d^2\Pi}{dq^2}\right| \neq 0$. Если же $\left|\frac{d^2\Pi}{dq^2}\right| = 0$, то критическая точка называется вырожденной (неморсовской). Морсовские критические точки бывают трех видов — точки минимума, максимума и седловые.

вий (3.6) и (3.8). Отбрасывая в силу этих условий линейные и квадратичные по $\delta\varphi$ слагаемые получим

$$\delta\Pi = \frac{\sin\varphi_*}{6\alpha_*} \delta\varphi^3 + \dots = \frac{1}{3!} \left. \frac{d^3\Pi}{d\varphi^3} \right|_* \delta\varphi^3,$$

откуда очевидна неустойчивость равновесия в этих точках, за исключением точки A, в которой $\varphi_* = 0$, и разложение начинается с четной степени $\delta\varphi$.

В отличие от точки бифуркации A все прочие вырожденные точки ветви II являются точками катастроф, так как при монотонном изменении управляющего параметра α в них происходит скачкообразный переход маятника в новое состояние равновесия (или движения). Так при приближении к точке C по ветви II малейшее превышение величины α над предельным уровнем α_C приводит к срыву системы из точки C. Такие точки называют предельными точками кривой состояний равновесия⁵. На языке теории катастроф рассмотренная катастрофа носит название катастрофы складки, так как саму ветвь II можно трактовать как сечение некоторой складчатой поверхности состояний равновесия. В тех случаях, когда энергия $\Pi(q, \alpha)$ зависит от большего числа параметров или большего числа координат, соответственно усложняется и геометрия поверхности состояний равновесия, на которой могут появиться сборки (постепенно исчезающие складки), сдвоенные сборки и иные геометрические формы, дающие названия соответствующим типам катастроф.

В заключение продемонстрируем, сколь неожиданно структурная неустойчивость точек бифуркации может влиять на форму кривой состояний равновесия и положение ее ветвей. С этой целью допустим, что ненапряженному состоянию торсиона отвечает некоторый угол маятника φ_0 с вертикалью. Тогда вместо (3.5) для его потенциальной энергии получим другое выражение

$$\Pi(\varphi) = \frac{(\varphi - \varphi_0)^2}{2} + \frac{\cos\varphi}{\alpha}$$

так, что уравнение для кривой состояния равновесия будет (см. рис. 3.7)

$$\alpha = \frac{\sin\varphi}{\varphi - \varphi_0}.$$

⁵Предельные точки кривой состояния равновесия — точки катастрофы, т. е. точки скачкообразного перехода системы из состояния равновесия при малом изменении определяющего параметра α .

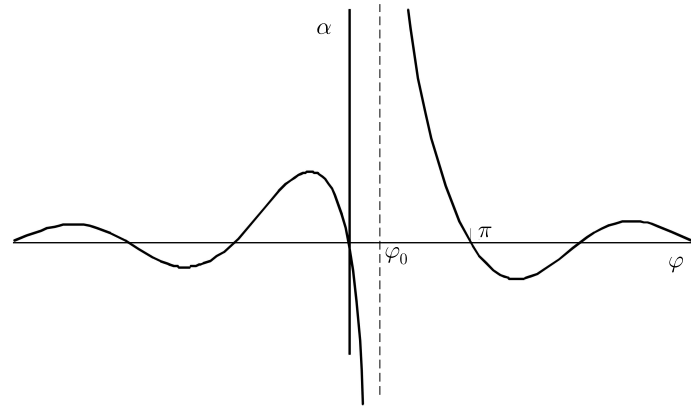


Рис. 3.7

Видно, что кривая состояний равновесия распадается на две изолированные ветви, совсем не похожие на те ветви I и II, которые фигурировали ранее. Здесь уже нет точек бифуркации и переход с одной ветви на другую возможен только в режиме катастрофы.

Задача 3.4

Исследовать устойчивость вертикального положения равновесия системы обращенных маятников, изображенной на рис. 3.8, где показаны все размеры системы.

Массы всех маятников и жесткости пружин одинаковы и равны m и c соответственно. Полагаем, что массой стержней можно пренебречь, а массы m можно рассматривать как материальные точки. При вертикальном положении маятников пружины не напряжены.

Решение.

Составим потенциальную энергию системы при малых углах φ_k . Деформации первой, второй и третьей пружин, вычисленные с точностью до малых первого порядка, равны $3h\varphi_1$, $2h(\varphi_2 - \varphi_1)$ и $h(\varphi_3 - \varphi_2)$ соответственно. Поэтому потенциальная энергия всех пружин равна

$$\Pi_{\text{spr}} = \frac{1}{2}c(3h\varphi_1)^2 + \frac{1}{2}c(2h(\varphi_2 - \varphi_1))^2 + \frac{1}{2}c(h(\varphi_3 - \varphi_2))^2.$$

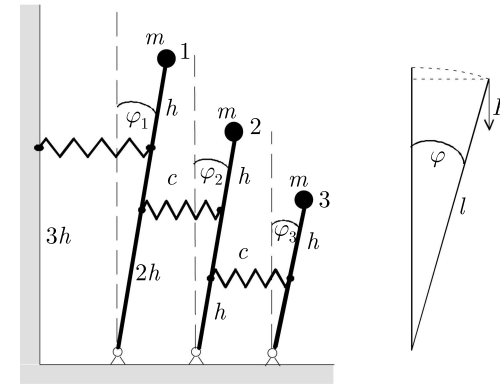


Рис. 3.8

Для нахождения потенциальной энергии силы тяжести маятников необходимо вычислить вертикальное смещение их апексов с точностью до второго порядка, поэтому потенциальная энергия силы тяжести $p = mg$ при повороте маятника длины l на угол φ (см. рис. 3.8) будет равна

$$\Pi_p = -pl(1 - \cos \varphi) \simeq -pl \frac{\varphi^2}{2}.$$

Потенциальная энергия Π_{p_k} сил тяжести всех маятников примет вид:

$$\Pi_{p_k} = -\frac{1}{2}4hp\varphi_1^2 - \frac{1}{2}3hp\varphi_2^2 - \frac{1}{2}2hp\varphi_3^2.$$

Полная потенциальная энергия системы Π равна $\Pi_{\text{spr}} + \Pi_{p_k}$, т. е.

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2}9ch^2\varphi_1^2 + \frac{1}{2}4ch^2(\varphi_2 - \varphi_1)^2 + \frac{1}{2}ch^2(\varphi_3 - \varphi_2)^2 - \\ & - \frac{1}{2}4ph\varphi_1^2 - \frac{1}{2}3ph\varphi_2^2 - \frac{1}{2}2ph\varphi_3^2. \end{aligned}$$

Группируя члены, получим квадратичную форму

$$2\Pi = ph \left[(13\gamma - 4)\varphi_1^2 + (5\gamma - 3)\varphi_2^2 + (\gamma - 2)\varphi_3^2 - 8\gamma\varphi_1\varphi_2 - 2\gamma\varphi_2\varphi_3 \right],$$

где $\gamma = \frac{ch}{p}$. Для того чтобы эта квадратичная форма имела минимум в точке $\varphi_i = 0$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялся критерий Сильвестра. Матрица коэффициентов формы имеет вид:

$$ph \begin{pmatrix} 13\gamma - 4 & -4\gamma & 0 \\ -4\gamma & 5\gamma - 3 & -\gamma \\ 0 & -\gamma & \gamma - 2 \end{pmatrix},$$

а ее главные угловые миноры будут

$$\Delta_1 = ph(13\gamma - 4) > 0,$$

$$\Delta_2 = ph \begin{vmatrix} 13\gamma - 4 & -4\gamma \\ -4\gamma & 5\gamma - 3 \end{vmatrix} = p^2 h^2 (49\gamma^2 - 59\gamma + 12) > 0,$$

$$\Delta_3 = p^3 h^3 \begin{vmatrix} 13\gamma - 4 & -4\gamma & 0 \\ -4\gamma & 5\gamma - 3 & -\gamma \\ 0 & -\gamma & \gamma - 2 \end{vmatrix} = \\ = p^3 h^3 (36\gamma^3 - 153\gamma^2 + 130\gamma - 24) > 0.$$

Разрешая эти неравенства, получаем условия устойчивости:

$$1) 13\gamma - 4 > 0,$$

$$2) 49\gamma^2 - 59\gamma + 12 > 0,$$

$$3) 36\gamma^3 - 153\gamma^2 + 130\gamma - 24 > 0$$

или

$$1) \gamma > \frac{4}{13},$$

$$2) \gamma > \frac{92.6}{98},$$

$$3) \gamma > 3.18,$$

Последнее условие очевидно является самым сильным.

Ответ: вертикальное положение устойчиво при $\frac{ch}{p} > 3.18$.

Задача 3.5

Исследовать устойчивость плоского равновесия правильного шарнирного 6-угольника со стороной a , вершины которого стянуты 6-ю радиальными пружинами жесткостью c , натянутыми с силой F (рис. 3.9). Рассмотреть случаи:

а) пружины скреплены только попарно, образуя 3 диагональных пружины,

б) пружины в центре скреплены все вместе.

Решение.

Чтобы использовать симметрию системы, выберем симметричные обобщенные координаты α, β и γ . Тогда потенциальная энергия системы примет симметричную форму

$$\Pi = \frac{1}{2}A(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + B(\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma),$$

где A и B — константы, зависящие от a, F и c и подлежащие определению. Для их нахождения рассмотрим две симметричные деформации системы.

I) $\alpha = \beta = \gamma$ — центральная симметрия.

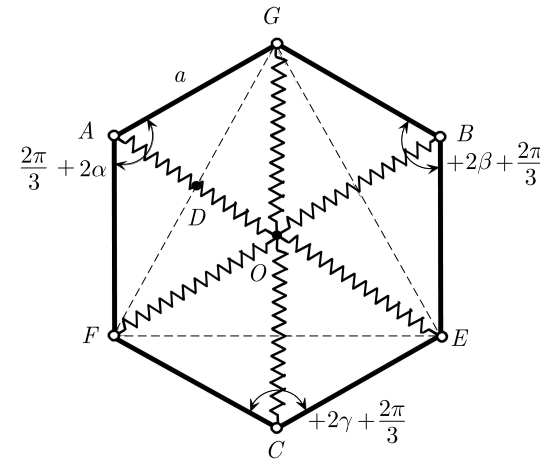


Рис. 3.9

Для случая а) энергия каждой пары пружин будет одинакова и равна

$$\Pi_I = \frac{1}{2} \frac{c\Delta^2}{2} + F\Delta,$$

где S — длина пружины после деформации, $\Delta = S - 2a$ — суммарное удлинение диагональной пружины, а $\frac{c}{2}$ — ее жесткость. Имеем $S = S_{AD} + S_{DE}$, причем

$$S_{AD} = a \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) \approx a \left(\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \alpha \right) = \frac{a}{2} \left(1 - \alpha\sqrt{3} - \frac{\alpha^2}{2}\right),$$

$$S_{DE} = 2a \sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) \frac{\sqrt{3}}{2} \approx \frac{a}{2} \left(3 + \alpha\sqrt{3} - \frac{3\alpha^2}{2}\right),$$

$$S = a(2 - \alpha^2), \quad \Delta = -a\alpha^2.$$

Видно, что $\Pi_I = -Fa\alpha^2$, то есть в положении равновесия $\alpha_* \equiv 0$ Π_I имеет максимум (если $F > 0$). Следовательно, оно неустойчиво.

Обратимся ко второму случаю скрепления б). В этом случае удлинения отдельных пружин в каждой паре различны, то есть $S_{AO} \neq S_{OE}$, так что для одной пары имеем

$$\begin{aligned} \Pi_{II} &= \frac{1}{2}c\Delta_{AO}^2 + F\Delta_{AO} + \frac{1}{2}c\Delta_{OE}^2 + F\Delta_{OE} = \\ &= \frac{1}{2}c(\Delta_{AO}^2 + \Delta_{OE}^2) + F(\Delta_{AO} + \Delta_{OE}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{AO} &= S_{AD} + \frac{1}{3}S_{DE} \approx \\ \frac{a}{2} \left(1 - \alpha\sqrt{3} - \frac{\alpha^2}{2}\right) &+ \frac{a}{2\sqrt{3}} \left(\sqrt{3} + \alpha - \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{2}\right) = \\ &= a \left(1 - \frac{\alpha}{\sqrt{3}} - \frac{\alpha^2}{2}\right), \end{aligned}$$

$$S_{OE} = \frac{2}{3}S_{DE} \approx a \left(1 + \frac{\alpha}{\sqrt{3}} - \frac{\alpha^2}{2}\right),$$

$$\Delta_{AO} = -a \left(\frac{\alpha}{\sqrt{3}} + \frac{\alpha^2}{2}\right), \quad \Delta_{OE} = a \left(\frac{\alpha}{\sqrt{3}} - \frac{\alpha^2}{2}\right),$$

$$\Pi_{II} = \frac{1}{2}c(\Delta_{AO}^2 + \Delta_{OE}^2) + F(\Delta_{AO} + \Delta_{OE}) \approx \frac{ca^2}{3}\alpha^2 - Fa\alpha^2.$$

Полная энергия будет

$$\Pi = (ca^2 - 3Fa)\alpha^2.$$

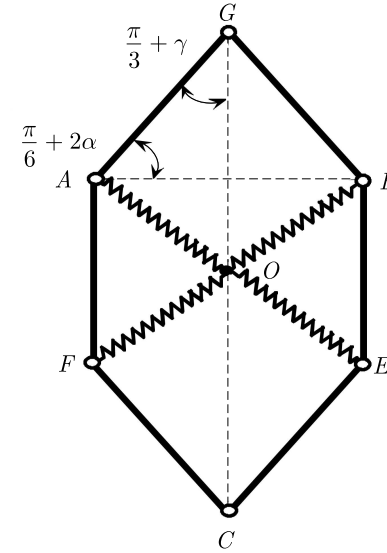


Рис. 3.10

Рассмотрим теперь другую деформацию, обладающую осевой симметрией (рис. 3.10).

Имеем $\frac{\pi}{6} + 2\alpha + \frac{\pi}{3} + \gamma = \frac{\pi}{2}$, откуда

$$2\alpha = 2\beta = -\gamma.$$

Далее легко находим

$$\begin{aligned} S_{AE} &= \sqrt{a^2 + \left(2a \sin\left(\frac{\pi}{3} + \gamma\right)\right)^2} \approx \\ &\approx a \sqrt{1 + \left(\sqrt{3} \left(1 - \frac{\gamma^2}{2}\right) + \gamma\right)^2} \approx a \sqrt{4 + 2\gamma\sqrt{3} - 2\gamma^2} \approx \\ &\approx 2a \sqrt{1 + \frac{\gamma\sqrt{3} - \gamma^2}{2}} \approx 2a \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{4}\gamma - \frac{11}{32}\gamma^2\right), \end{aligned}$$

$$\Delta_{AE} = a \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma - \frac{11}{16}\gamma^2\right),$$

$$\begin{aligned}
 S_{CG} &= a + 2a \cos\left(\frac{\pi}{3} + \gamma\right) \approx a \left(1 + 1 - \frac{\gamma^2}{2} - \gamma\sqrt{3}\right) = \\
 &= a \left(2 - \gamma\sqrt{3} - \frac{\gamma^2}{2}\right), \\
 \Delta_{CG} &= -a \left(\sqrt{3}\gamma + \frac{\gamma^2}{2}\right).
 \end{aligned}$$

Полная энергия деформации будет

$$\begin{aligned}
 \Pi &= \frac{1}{2}c\Delta_{AE}^2 + 2F\Delta_{AE} + \frac{1}{4}c\Delta_{CG}^2 + F\Delta_{CG} = \\
 &= \frac{1}{2}c \left(a^2\frac{3}{4}\gamma^2 + \frac{a^2}{2}3\gamma^2\right) + Fa \left(-\frac{11}{8}\gamma^2 - \frac{\gamma^2}{2}\right) = \\
 &= \frac{9}{8}ca^2\gamma^2 - \frac{15}{8}F\gamma^2.
 \end{aligned}$$

Далее, приравняв Π_I и Π_{II} исходному выражению Π , в котором учтены соотношения $\alpha = \beta = \gamma$ и $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}\gamma$, составляем уравнения для нахождения констант A и B :

$$\begin{cases} \frac{3}{2}A\alpha^2 + 3B\alpha^2 = (ca^2 - 3Fa)\alpha^2, \\ (3A - 3B)\alpha^2 = \left(\frac{3}{2}ca^2 - \frac{15}{2}Fa\right)\alpha^2. \end{cases}$$

Упрощая их, получаем

$$\begin{cases} \frac{A}{2} + B = \frac{1}{3}ca^2 - Fa, \\ A - B = \frac{3}{2}ca^2 - \frac{5}{2}Fa, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{11}{9}ca^2 - \frac{7}{3}Fa, \\
 B &= -\frac{5}{18}ca^2 + \frac{1}{6}Fa.
 \end{aligned}$$

Составляя теперь определитель квадратичной формы Π

$$\begin{vmatrix} A & B & B \\ B & A & B \\ B & B & A \end{vmatrix},$$

выписываем условия Сильвестра

$$\begin{cases} A > 0, \\ A > B, \\ A^3 + 2B^3 - 3AB^2 > 0, \end{cases}$$

которые приводятся к виду

$$\begin{cases} F < \frac{11}{21}ca, \\ F < \frac{3}{5}ca, \\ (A - B)^2 (A + 2B) > 0. \end{cases}$$

Последнее условие примет вид $F < \frac{1}{3}ca$. Это условие и определяет границу области устойчивости.

Ответ: $F < \frac{1}{3}ca$.

Задача 3.6

Колечко A может скользить без трения по гладкому кольцу радиуса R , расположенному в вертикальной плоскости (см. рис. 3.11).

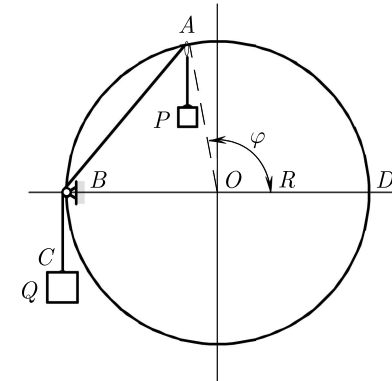


Рис. 3.11

К колечку A абсолютно гибкой, нерастяжимой нитью привязан груз весом $P = m_1g$. Другой конец нити перекинут через ничтожно малый блок B , закрепленный на конце горизонтального диаметра кольца,

и держит на своем конце C груз весом $Q = m_2g$. Определить положения равновесия колечка A и их устойчивость.

Решение.

Нетрудно видеть, что потенциальная энергия системы представляется суммой двух слагаемых

$$\Pi = PR \sin \varphi + Ql = \Pi_1 + \Pi_2,$$

где l — длина участка AB нити, равная

$$l = 2R \left| \cos \frac{\varphi}{2} \right| = 2R \cos \frac{\varphi}{2} \operatorname{sign} \left(\cos \frac{\varphi}{2} \right). \quad (3.10)$$

Наличие модульного слагаемого в выражении (3.10) означает, что оно может иметь не только гладкий, но и зубцовый экстремум в точке разрыва производной $\Pi'(\varphi)$, то есть в точке $\cos \frac{\varphi}{2} = 0$, где $\varphi = \pi$. Целесообразно поэтому рассмотреть выражение (3.10) по отдельности в диапазоне 1) $0 < \varphi < \pi$ и 2) $\pi < \varphi < 2\pi$. В интервале 1) очевидно имеем

$$\Pi_1 = R \left(P \sin \varphi + 2Q \cos \frac{\varphi}{2} \right) = RP \left(\sin \varphi + 2\kappa \cos \frac{\varphi}{2} \right), \quad \kappa = \frac{Q}{P},$$

и тогда гладкий экстремум определится условием

$$\Pi'_1 = PR \left(\cos \varphi - \kappa \sin \frac{\varphi}{2} \right) = 0. \quad (3.11)$$

Выпишем вытекающее из (3.11) уравнение кривой состояний равновесия

$$\kappa = \frac{\cos \varphi}{\sin \frac{\varphi}{2}} = \frac{1}{\sin \frac{\varphi}{2}} - 2 \sin \frac{\varphi}{2}.$$

Графически оно представлено ветвью I на рис. 3.12.

Видно, что экстремум $\Pi_1(\varphi)$ существует только в диапазоне $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, причем он является максимумом, т. к. в этом диапазоне

$$\Pi''_1(\varphi) = -RP \left(\sin \varphi + \frac{\kappa}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \right) < 0.$$

Ясно, что положения равновесия колечка A в диапазоне $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ неустойчивы.

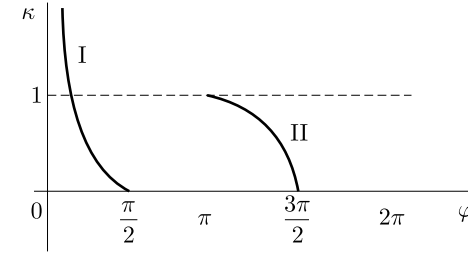


Рис. 3.12

В интервале 2) имеем

$$\Pi_2 = RP \left(\sin \varphi - 2\kappa \cos \frac{\varphi}{2} \right),$$

и здесь экстремум $\Pi_2(\varphi)$ дается условием

$$\Pi'_2(\varphi) = RP \left(\cos \varphi + \kappa \sin \frac{\varphi}{2} \right) = 0, \quad (3.12)$$

которое задает на плоскости (φ, κ) ветвь II (рис. 3.12)

$$\kappa = -\frac{\cos \varphi}{\sin \frac{\varphi}{2}} = 2 \sin \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{\sin \frac{\varphi}{2}}.$$

Видно, что эта ветвь лежит в диапазоне $\pi < \varphi < \frac{3}{2}\pi$, в котором

$$\Pi''(\varphi) = RP \left(\frac{\kappa}{2} \cos \frac{\varphi}{2} - \sin \varphi \right) = RP \frac{1}{2} \cos \frac{\varphi}{2} (\kappa - 4 \sin \frac{\varphi}{2}) > 0.$$

Ясно, что ветвь II отвечает устойчивым положениям равновесия. Остается выяснить структуру точки $B(\varphi = \pi)$, в которой имеет место разрыв производной. Согласно (3.11) производная слева есть $\Pi'_1(B) = -PR(1 + \kappa) = -2PR$, а согласно (3.12) $\Pi'_1(B) = -PR(1 - \kappa) \equiv 0$, так как в точке B имеем $\kappa = 1$. Отсюда следует, что в точке B минимум $\Pi(\varphi)$ имеет «полужубцовый» характер, показанный на рис. 3.13, и ему отвечает так называемое «полужесткое» состояние устойчивого равновесия.

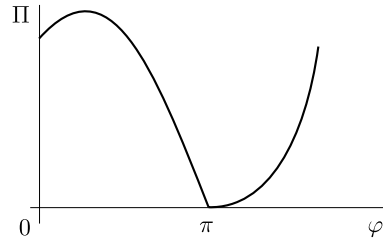


Рис. 3.13

Всем прочим точкам ветви Π отвечает «мягкое» состояние устойчивого равновесия. Таким образом, неустойчивые равновесия колечка A существуют при любых значениях $\kappa > 0$ и лежат в диапазоне $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, тогда как устойчивые — только при $0 < \kappa \leq 1$ и они лежат в диапазоне $\pi \leq \varphi < \frac{3\pi}{2}$.

Задача 3.7

Материальная точка M , изображенная на рис. 3.14, свободно скользит по гладкой поверхности тора, заданного параметрическими уравнениями:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \psi, & y &= \rho \sin \psi, & z &= b \sin \vartheta, \\ \rho &= a + b \cos \vartheta, \end{aligned}$$

где ось z направлена вверх.

Найти возможные стационарные движения точки, характеризующиеся постоянством угла ϑ , и исследовать их устойчивость.

Решение.

Записывая согласно условию задачи

$$\begin{aligned} x &= (a + b \cos \vartheta) \cos \psi, \\ y &= (a + b \cos \vartheta) \sin \psi, \\ z &= b \sin \vartheta, \end{aligned}$$

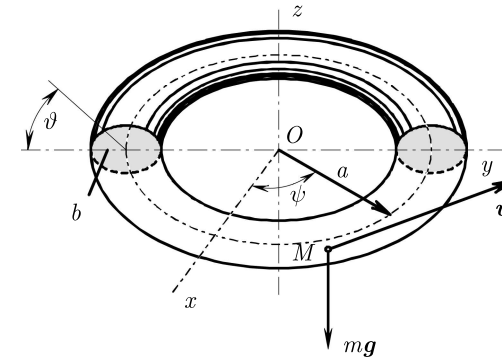


Рис. 3.14

выразим компоненты вектора скорости

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -b\dot{\vartheta} \sin \vartheta \cos \psi - \dot{\psi}(a + b \cos \vartheta) \sin \psi, \\ \dot{y} &= -b\dot{\vartheta} \sin \vartheta \sin \psi + \dot{\psi}(a + b \cos \vartheta) \cos \psi, \\ \dot{z} &= b\dot{\vartheta} \cos \vartheta. \end{aligned}$$

Отсюда следует выражение для кинетической энергии точки

$$T = \frac{m}{2} \left[b^2 \dot{\vartheta}^2 + \dot{\psi}^2 (a + b \cos \vartheta)^2 \right]. \quad (3.13)$$

Записывая также и потенциальную энергию

$$\Pi = mgz = mbg \sin \vartheta, \quad (3.14)$$

легко заметить, что в выражения (3.13), (3.14) не входит координата ψ , а входит лишь ее производная, что означает, что координата ψ циклическая. Отвечающий ей циклический интеграл

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = m\dot{\psi}(a + b \cos \vartheta)^2 = p = \text{const} \quad (3.15)$$

выражает, очевидно, постоянство момента количества движения точки относительно центра тора O . Вторым интегралом в задаче является интеграл энергии $T + \Pi = \text{const}$. Ограничиваясь поиском и анализом

лишь стационарных движений материальной точки на торе, составим для их нахождения функцию Рауса:

$$R = T - \psi p = \frac{m}{2} [b\dot{\vartheta}^2 - \dot{\psi}^2(a + b \cos \vartheta)^2] = R_2 + R_0,$$

где R_2 — квадратичная часть (по $\dot{\vartheta}$) функции R , а R_0 содержит $\dot{\vartheta}$ в нулевой степени:

$$R_0 = -\frac{m}{2} \dot{\psi}^2 (a + b \cos \vartheta)^2.$$

Следовательно, потенциальная энергия приведенной системы равна

$$W = \Pi - R_0 = mgb \sin \vartheta + \frac{1}{2} m \dot{\psi}^2 (a + b \cos \vartheta)^2,$$

и, исключая из нее $\dot{\psi}$ посредством (3.15), приходим к окончательному выражению для $W(\vartheta)$:

$$W(\vartheta) = mgb \sin \vartheta + \frac{p^2}{2m} \frac{1}{(a + b \cos \vartheta)^2}.$$

Дальнейший анализ стационарных движений сводится к исследованию экстремумов функции $w(\vartheta)$. Так для нахождения относительных равновесий по углу ϑ выписываем условие $w'_\vartheta = 0$, имеющее вид

$$\frac{p^2}{m^2 g} \sin \vartheta = -\cos \vartheta (a + b \cos \vartheta)^3 \quad (3.16)$$

Нетрудно видеть, что корни этого уравнения располагаются в диапазонах

$$-\frac{\pi}{2} < \vartheta_1 < 0, \quad \frac{\pi}{2} < \vartheta_2 < \pi.$$

При $\frac{b}{a} \ll 1$ можно получить приближенные выражения для этих корней, пренебрегая вторым слагаемым в скобке. Тогда вместо (3.16) получим уравнение

$$\beta \sin \vartheta + \cos \vartheta = 0, \quad \beta = \frac{p^2}{m^2 g a^3},$$

корни которого определяются равенством

$$\sin \vartheta_{1,2} \approx \mp \frac{1}{\sqrt{\beta^2 + 1}}$$

Для выявления устойчивости найденных относительных равновесий остается исследовать знак

$$W''_{\vartheta\vartheta}(\vartheta) = -mbg \sin \vartheta + \frac{p^2 b a \cos \vartheta + b(1 + 2 \sin^2 \vartheta)}{m (a + b \cos \vartheta)^4}.$$

Видно, что решение $\vartheta = \vartheta_1$ устойчиво, так как $W''_{\vartheta\vartheta}(\vartheta_1) > 0$, и тогда решение $\vartheta = \vartheta_2$ неустойчиво (так как минимумы и максимумы непрерывной функции $W(\vartheta)$ чередуются). В заключение заметим, что решение ϑ_1 отвечает скольжению по внутренней поверхности тора, а ϑ_2 — по внешней.

Задача 3.8

Горизонтальная трубка AB , показанная на рис. 3.15, может свободно вращаться вокруг вертикальной оси CD .

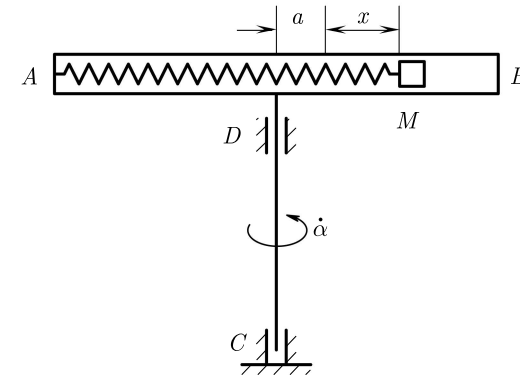


Рис. 3.15

Внутри трубки помещена пружина жесткости c . Один конец пружины прикреплен к стенке трубки в точке A . К свободному концу пружины прикреплено тело M массы m . Когда система находится в состоянии покоя, тело M находится на расстоянии a от оси вращения ($a > 0$ или $a < 0$). При свободном вращении возможно установившееся движение, при котором трубка вращается с постоянной угловой

скоростью ω , а тело M находится в относительном покое. Считая тело M материальной точкой, пренебрегая силами сопротивления и массой пружины, определить параметры установившегося движения и его устойчивость, если момент инерции трубки относительно оси вращения CD равен J .

Решение.

Потенциальная энергия пружины равна $\Pi = \frac{1}{2}cx^2$, а кинетическая энергия точечной массы M и трубки AB , вращающейся с угловой скоростью $\dot{\alpha}$, имеет вид

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{\alpha}^2(a+x)^2 + \frac{1}{2}J\dot{\alpha}^2.$$

Видно, что угловая координата α , характеризующая поворот трубки AB , является циклической (так как в выражение для T входит только $\dot{\alpha}$) и ей отвечает циклический интеграл

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} = m\dot{\alpha}(a+x)^2 + J\dot{\alpha} = p = \text{const}, \quad (3.17)$$

выражающий постоянство момента количества движения системы. Для нахождения стационарного режима относительного равновесия массы M построим функцию Рауса

$$R = T - \dot{\alpha}p = \frac{1}{2}cx^2 - \frac{\dot{\alpha}^2}{2} [m(a+x)^2 + J] = R_2 + R_0.$$

Здесь R_2 — ее квадратичная часть (по \dot{x}), а R_0 — слагаемое нулевой степени относительно \dot{x} . Составляя далее согласно [11] измененную потенциальную энергию $W(x)$

$$W = \Pi - R_0 = \frac{1}{2}cx^2 + \frac{1}{2}\dot{\alpha}^2 [J + m(a+x)^2]$$

и исключая из нее $\dot{\alpha}$ посредством (3.17), получим окончательное выражение для $W(x)$:

$$W(x) = \frac{1}{2}cx^2 + \frac{1}{2} \frac{p^2}{J + m(a+x)^2}. \quad (3.18)$$

Отыскание положения относительного равновесия массы M сводится теперь к нахождению экстремумов $W(x)$, то есть к определению корней уравнения

$$W'(x) = cx - \frac{mp^2(a+x)}{[J + m(a+x)^2]^2} = 0.$$

Переписав его в виде

$$cx [J + m(a+x)^2]^2 = p^2m(a+x),$$

видим, что оно сводится к уравнению пятой степени и не допускает в общем случае аналитического решения. Поэтому в данной задаче удобно рассмотреть непосредственно график функции $W(x)$ для $a > 0$, представляющий собой согласно (3.18) суперпозицию графиков двух простых слагаемых.

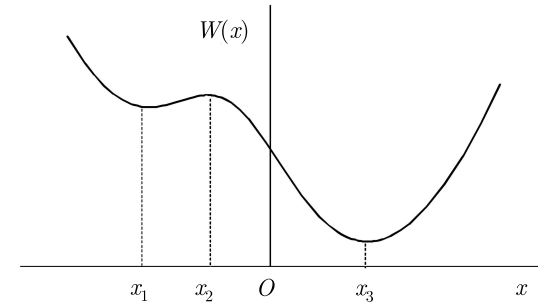


Рис. 3.16

Легко заключить, что при $J \gg ma^2$ он имеет единственный минимум в точке

$$x_3 \approx \frac{map^2}{J^2c - mp^2} = \frac{a}{\frac{cJ^2}{mp^2} - 1}.$$

При уменьшении момента инерции трубки до $J < J_{cr}$ на графике $W(x)$ появляются экстремумы в точках $x_1 < 0$ и $x_2 < 0$, и при $J \rightarrow 0$ вместо максимума в точке x_2 появляется точка разрыва. Таким образом, в данной системе при всех значениях J существует устойчивое положение равновесия точки M в точке x_3 и к нему добавляются устойчивое (x_1) и неустойчивое (x_2) положения при $J < J_{cr}$. Нахождение же

значения J_{cr} требует довольно сложного анализа и здесь не приводится.

Задача 3.9

Для системы, рассматриваемой в задаче 1.6, доказать, что установившееся движение устойчиво относительно β , $\dot{\beta}$, и $\dot{\alpha}$.

Указание. Потенциальная энергия приведенной системы $W = \Pi - R_0$ равна

$$W = \frac{1}{2}c\beta^2 + \frac{(n - H \sin \beta)^2}{4A \cos^2 \beta},$$

где $n = 2A\dot{\alpha} \cos^2 \beta + 2H \sin \beta$ — интеграл, отвечающий циклической координате α .

Решение.

Из решения задачи 1.6 возьмем значения кинетической и потенциальной энергии системы:

$$\begin{aligned} T &= A\dot{\beta}^2 + A\dot{\alpha}^2 \cos^2 \beta + C(\dot{\varphi} + \dot{\alpha} \sin \beta)^2, \\ \Pi &= \frac{1}{2}c\beta^2. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Поскольку T и Π содержат только скорости $\dot{\alpha}$ и $\dot{\varphi}$, α и φ являются циклическими координатами. Этим координатам соответствуют два циклических интеграла: $T'_{\dot{\alpha}} = n = \text{const}$ и $T'_{\dot{\varphi}} = 2H = \text{const}$.

Далее, из (3.19) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} &= 2A\dot{\alpha} \cos^2 \beta + 2H \sin \beta = n, \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} &= 2C(\dot{\varphi} + \dot{\alpha} \sin \beta) = 2H. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \frac{n - 2H \sin \beta}{2A \cos^2 \beta}, \\ \dot{\varphi} &= \frac{H}{C} - \dot{\alpha} \sin \beta. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Подставляя эти значения в выражение для T и отбрасывая несущественную постоянную $\frac{H^2}{C}$, получим T^* :

$$T^* = A\dot{\beta}^2 + \frac{(n - 2H \sin \beta)^2}{4A \cos^2 \beta}. \quad (3.21)$$

Построим выражения для функции Рауса R :

$$R = T^* - n\dot{\alpha} - 2H\dot{\varphi}.$$

Используя выражения (3.20) и (3.21), находим

$$\begin{aligned} R &= A\dot{\beta}^2 + \frac{(n - 2H \sin \beta)^2}{4A \cos^2 \beta} - n \frac{n - 2H \sin \beta}{2A \cos^2 \beta} - \\ &\quad - H \left(\frac{H}{C} - \frac{n - 2H \sin \beta}{2A \cos^2 \beta} \sin \beta \right). \end{aligned}$$

После некоторых преобразований, пренебрегая постоянными членами, получаем

$$R = A\dot{\beta}^2 - \frac{(n - 2H \sin \beta)^2}{4A \cos^2 \beta} = A\dot{\beta}^2 - R_0, \quad (3.22)$$

$$W = \Pi - R_0 = \frac{1}{2}c\beta^2 + \frac{(n - 2H \sin \beta)^2}{4A \cos^2 \beta}.$$

Положим, что угол β настолько мал, что $\sin \beta \simeq \beta$ и $\cos \beta \simeq 1 - \frac{\beta^2}{2}$. Тогда с точностью до членов второго порядка малости

$$\frac{1}{\cos^2 \beta} \simeq \frac{1}{\left(1 - \frac{\beta^2}{2}\right)^2} \simeq \frac{1}{1 - \beta^2} = (1 - \beta^2)^{-1} = 1 + \beta^2.$$

Теперь второе соотношение (3.22) примет вид

$$W = \frac{(2Ac + n^2 + 4H^2)\beta^2 - 4nH\beta + n^2}{4A}.$$

Опять оставляя только члены до второго порядка включительно, получаем:

$$W = \frac{1}{4A} [(2Ac + 4H^2 + n^2)\beta^2 + n^2 - 4nH\beta],$$

откуда

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial \beta} &= \frac{1}{2A} [(2Ac + 4H^2 + n^2)\beta - 2nH], \\ \frac{\partial^2 W}{\partial \beta^2} &= \frac{1}{2A}(2Ac + 4H^2 + n^2) > 0.\end{aligned}$$

Приравнявая первое соотношение нулю, находим значение угла β_0 при относительном равновесии:

$$\beta_0 = \frac{2nH}{2Ac + 4H^2 + n^2}. \quad (3.23)$$

Из второго неравенства находим, что это положение устойчиво относительно угла β . Из устойчивости движения относительно β и из (3.20) следует устойчивость относительно $\dot{\alpha}$ и $\dot{\varphi}$.

При условии, что равенство (3.23) выполняется, движение системы состоит из постоянного отклонения осей гироскопов на угол β_0 и равномерного вращения всей системы с угловой скоростью

$$\dot{\alpha}_0 = \frac{n - 2H \sin \beta_0}{2A \cos^2 \beta_0}.$$

Задача 3.10

Твердое тело свободно качается вокруг горизонтальной оси NT (см. рис. 3.17). Ось NT вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси Oz . Точка G является центром тяжести тела, плоскость NTG — плоскость симметрии, ось OG — главная ось инерции. Ось KL параллельна NT , а ось FD , которая проходит через точку O , перпендикулярна к NT и OG .

Моменты инерции тела относительно OG , KL и FD равны C , A и B соответственно; h — длина OG , M — масса тела. Найти возможные положения относительного равновесия тела и исследовать их устойчивость.

Решение.

Твердое тело может вращаться вокруг оси NT (рис. 3.17). Допустим, что оно имеет угловую скорость $\dot{\varphi}$ и в данный момент времени ось OG составляет угол φ с вертикальной осью z .

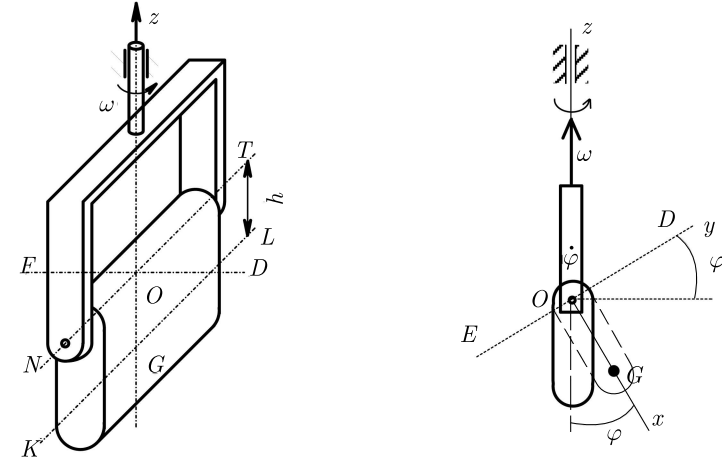


Рис. 3.17

Угловая скорость $\dot{\varphi}$ представляется вектором, направленным вдоль оси NT . После того как OG и OD повернулись на угол φ , проекции угловой скорости ω равны

$$\omega_{OG} = -\omega \cos \varphi, \quad \omega_{OD} = \omega \sin \varphi.$$

Момент инерции тела относительно оси NT равен $A + Mh^2$. Следовательно, кинетическая энергия тела равна

$$T = \frac{1}{2} (A + Mh^2) \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} B \omega^2 \sin^2 \varphi + \frac{1}{2} C \omega^2 \cos^2 \varphi.$$

Потенциальная энергия силы тяжести равна $\Pi = Mgh(1 - \cos \varphi)$. Из выражения для кинетической энергии находим

$$T_2 = \frac{1}{2} (A + Mh^2) \dot{\varphi}^2, \quad T_1 = 0, \quad T_0 = \frac{\omega^2}{2} (B \sin^2 \varphi + C \cos^2 \varphi).$$

Легко показать, что в данном примере $T_k = R_k$ (при $k = 0, 1, 2$). (См. соотношения (3.12) и (3.14) в [11]). Потенциальная энергия W приведенной системы принимает вид:

$$W = \Pi - T_0$$

или

$$W = Mgh(1 - \cos \varphi) - \frac{1}{2}\omega^2 (B \sin^2 \varphi + C \cos^2 \varphi).$$

Тогда при постоянной угловой скорости ω получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \varphi} &= Mgh \sin \varphi - \omega^2 \sin \varphi \cos \varphi (B - C), \\ \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} &= Mgh \cos \varphi - \omega^2 (B - C) (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Относительное равновесие имеет место при $W'_\varphi = 0$. Из равенств (3.24) следует, что существует три положения относительного равновесия: $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$ и $\varphi = \arccos \frac{Mgh}{\omega^2 (B - C)}$. Рассмотрим каждое положение отдельно.

1. $\varphi_1 = 0$. В этом случае

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} \Big|_{\varphi=0} = Mgh - \omega^2 (B - C). \quad (3.25)$$

Очевидно, что при $B < C$ вторая производная от W по φ положительна для всех ω . Следовательно, при $B < C$ относительное равновесие, соответствующее $\varphi = 0$, устойчиво при всех ω .

Из формулы (3.25) видно, что $W''_{\varphi\varphi} > 0$ при $B > C$, если $\omega^2 < \frac{Mgh}{B - C}$. В этом случае равновесие устойчиво. При $\omega^2 > \frac{Mgh}{B - C}$ равновесие становится неустойчивым.

2. $\varphi_2 = \pi$. В этом случае

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} \Big|_{\varphi=\pi} = -Mgh - \omega^2 (B - C).$$

Следовательно, $W''_{\varphi\varphi} < 0$ при $B > C$, и равновесие неустойчиво.

Если $B < C$ равновесие устойчиво при $\omega^2 > \frac{Mgh}{C - B}$ и неустойчиво при $\omega^2 < \frac{Mgh}{C - B}$ (в первом случае $W''_{\varphi\varphi} > 0$, а во втором случае $W''_{\varphi\varphi} < 0$).

3. $\varphi_3 = \arccos \frac{Mgh}{(B - C)\omega^2}$. В этом случае равновесие существует, если $Mgh < |B - C|\omega^2$. Тогда $\sin \varphi \neq 0$, и

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{Mgh}{\omega^2 (B - C)}, \\ \cos^2 \varphi &= \frac{M^2 g^2 h^2}{\omega^4 (B - C)^2}, \\ \sin^2 \varphi &= 1 - \cos^2 \varphi = 1 - \frac{M^2 g^2 h^2}{\omega^4 (B - C)^2}, \end{aligned}$$

так что

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} \Big|_{\varphi=\varphi_3} &= \frac{M^2 g^2 h^2}{\omega^2 (B - C)} - \omega^2 (B - C) \left(2 \frac{M^2 g^2 h^2}{\omega^4 (B - C)^2} - 1 \right) = \\ &= -\frac{M^2 g^2 h^2}{\omega^2 (B - C)} + \omega^2 (B - C). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Из условия $Mgh < \omega^2 |B - C|$ следует $M^2 g^2 h^2 < \omega^4 (B - C)^2$ или $\frac{M^2 g^2 h^2}{\omega^2 (B - C)} < \omega^2 (B - C)$. Тогда из (3.26) получаем при $B > C$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} \Big|_{\varphi=\varphi_3} > 0,$$

и относительное равновесие устойчиво, а при $B < C$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} \Big|_{\varphi=\varphi_3} < 0,$$

и относительное равновесие неустойчиво.

Задача 3.11

На рис. 3.18 вертикальная ось AB является осью симметрии тонкого однородного круглого диска весом P и радиуса r .

Ось AB может свободно поворачиваться в сферической опоре A . В точке B она удерживается двумя взаимно-перпендикулярными горизонтально расположенными пружинками BQ и BD . Обе пружинки

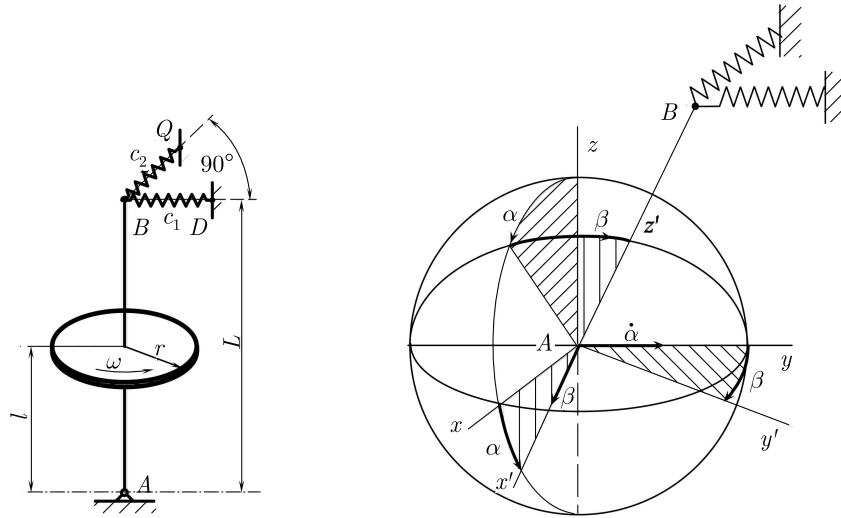


Рис. 3.18

имеют одинаковую жесткость $c_1 = c_2 = c$. Они прикреплены к оси диска на расстоянии L от нижней опоры A . Диск находится в поле силы тяжести на расстоянии l от нижней опоры. Найти угловую скорость ω , которую нужно сообщить диску для того, чтобы вертикальное положение оси AB было устойчиво.

Решение.

Рассмотрим неподвижную систему координат $Axyz$, где ось z направлена вертикально вверх, а оси x и y параллельно пружинам BQ и BD , когда ось AB находится в вертикальном положении. Кроме того, введем систему скользящих координат диска $Ax'y'z'$, которую возьмем параллельной системе $Axyz$, когда ось диска вертикальна. Ось z' совпадает с осью диска, а оси Ax' и Ay' находятся в плоскости диска. Моменты инерции диска относительно осей Ax' и Ay' равны $A = \frac{mr^2}{4}$, а относительно оси Az' момент инерции равен $C = \frac{mr^2}{2}$, где $m = \frac{P}{g}$ — масса диска, а r — его радиус. Центр масс диска находится на рассто-

янии l от неподвижной точки A . Найдем кинетическую энергию диска. Она состоит из энергии центра масс и энергии вращательного движения диска. Обозначим через x и y координаты центра масс при отклонении оси диска на углы α и β (см. рис. 3.18).

Тогда кинетическая энергия диска равна

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}A(\dot{\alpha}^2 \cos^2 \beta + \dot{\beta}^2) + \frac{1}{2}C(\omega + \dot{\alpha} \sin \beta)^2.$$

Если допустить, что углы α и β малы, т.е. $\cos \alpha = 1$, $\cos \beta = 1$, $\sin \beta = \beta$, то из рис. 3.18 видно, что

$$\dot{x} = l\dot{\alpha}, \quad \dot{y} = l\dot{\beta},$$

и в квадратичном приближении получаем

$$T = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) + \frac{1}{2}A(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) + \frac{1}{2}C(\omega^2 + 2\omega\dot{\alpha}\beta)^2.$$

Подставляя значения моментов инерции A и C и отбрасывая постоянный член $\frac{1}{2}C\omega^2$, найдем

$$T = \frac{1}{2}m\left(l^2 + \frac{r^2}{4}\right)(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) + \frac{mr^2}{2}\omega\dot{\alpha}\beta. \quad (3.27)$$

Пренебрегая членами выше второго порядка малости, получим, что деформации пружин равны $L\alpha$ и $L\beta$ и потенциальная энергия силы тяжести P в квадратичном приближении имеет вид:

$$-Pl(1 - \cos \alpha + 1 - \cos \beta) = -\frac{1}{2}Pl(\alpha^2 + \beta^2).$$

Тогда общая потенциальная энергия равна

$$\Pi = \frac{1}{2}(cL^2 - Pl)(\alpha^2 + \beta^2). \quad (3.28)$$

Пользуясь выражениями (3.27) и (3.28), составим уравнения Лагранжа для координаты α :

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} = m\left(l^2 + \frac{r^2}{4}\right)\dot{\alpha} + \frac{mr^2}{2}\omega\beta.$$

Продифференцируем это выражение по времени t , а Π продифференцируем по α . Тогда получим уравнение движения для координаты α . Аналогично получается уравнение движения для β .

Система уравнений принимает вид:

$$\begin{aligned} m \left(l^2 + \frac{r^2}{4} \right) \ddot{\alpha} + \frac{mr^2}{2} \omega \dot{\beta} + (cL^2 - Pl) \alpha &= 0, \\ m \left(l^2 + \frac{r^2}{4} \right) \ddot{\beta} - \frac{mr^2}{2} \omega \dot{\alpha} + (cL^2 - Pl) \beta &= 0. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Положим $\alpha = De^{\lambda t}$, $\beta = Ee^{\lambda t}$. Подставляя эти выражения в уравнения (3.29) и поделив их на $e^{\lambda t}$, получаем

$$\begin{aligned} \left(m \left(l^2 + \frac{r^2}{4} \right) \lambda^2 + (cL^2 - Pl) \right) D + \frac{mr^2}{2} \omega \lambda E &= 0, \\ -\frac{mr^2}{2} \omega \lambda D + \left(m \left(l^2 + \frac{r^2}{4} \right) \lambda^2 + (cL^2 - Pl) \right) E &= 0. \end{aligned}$$

Это система однородных линейных уравнений относительно D и E , определитель которой должен обращаться в нуль, т. е.

$$\begin{vmatrix} m \left(l^2 + \frac{r^2}{4} \right) \lambda^2 + (cL^2 - Pl) & \frac{mr^2}{2} \omega \lambda \\ -\frac{mr^2}{2} \omega \lambda & m \left(l^2 + \frac{r^2}{4} \right) \lambda^2 + (cL^2 - Pl) \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая этот определитель, получаем характеристическое уравнение

$$m^2 \left(l^2 + \frac{r^2}{4} \right)^2 \lambda^4 + \left[2m \left(l^2 + \frac{r^2}{4} \right) (cL^2 - Pl) + \frac{m^2 r^4}{4} \omega^2 \right] \lambda^2 + (cL - Pl)^2 = 0.$$

Это уравнение можно разрешить относительно λ^2 :

$$\begin{aligned} \lambda^2 = \frac{-1}{2m^2 \left(l^2 + \frac{r^2}{4} \right)} \left\{ \left(2m \left(l^2 + \frac{r^2}{4} \right) (cL^2 - Pl) + \frac{m^2 r^4}{4} \omega^2 \right) \pm \right. \\ \left. \pm \frac{m^2 r^4}{4} \omega^2 \sqrt{4m \left(l^2 + \frac{r^2}{4} \right) (cL^2 - Pl) + \frac{m^2 r^2}{4} \omega^2} \right\}. \end{aligned}$$

Если $Pl < cL^2$, то все слагаемые под знаком $\sqrt{\quad}$ положительны, а оба корня λ_1^2 и λ_2^2 отрицательны и различны при любой угловой скорости ω . Это означает, что при $Pl < cL^2$ вертикальное положение оси диска устойчиво в первом приближении при любой угловой скорости ω .

Пусть теперь $Pl > cL^2$. В этом случае первое слагаемое под квадратным корнем становится отрицательным, и для устойчивости угловая скорость ω должна удовлетворять условию

$$\omega > \frac{2}{r^2} \sqrt{gl(4l^2 + r^2) \left(1 - \frac{cL^2}{Pl} \right)}.$$

Если ω удовлетворяет этому условию, то при $cL^2 < Pl$ под знаком корня стоит положительная величина, и оба корня λ_1^2 и λ_2^2 различны и отрицательны, что определяет устойчивость в первом приближении вертикального положения оси диска. Эта устойчивость разрушается при добавлении сил сопротивления (см. [11]).

Задача 3.12

К гибкому валу, установленному в вертикальных опорах, прикреплен горизонтально расположенный ротор массы m , изображенный на рис. 3.19.

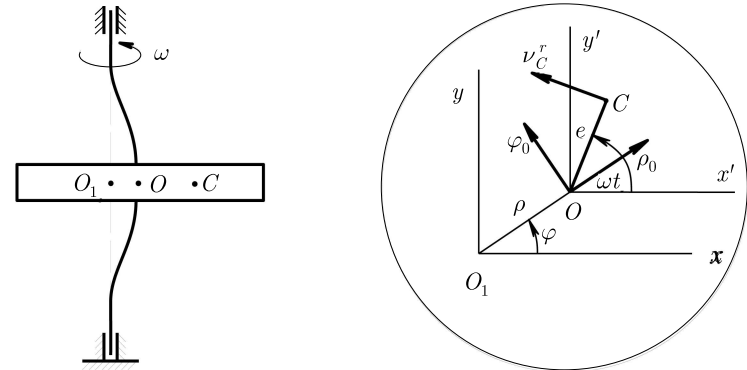


Рис. 3.19

Через точку O проходит ось гибкого упругого вала, жесткость которого на изгиб равна c . Ротор имеет небольшой эксцентриситет $e = OC$, где точка C — центр масс ротора. Масса ротора равна m , а его центральный момент инерции относительно вертикальной оси, проходящей через точку O , равен J . Точки O и C принадлежат ротору. Вал принудительно вращается с постоянной угловой скоростью ω . Неподвижная система координат O_1xy лежит в плоскости ротора. Пренебрегая массой вала и силами сопротивления, определить стационарное движение ротора и устойчивость этого движения.

Решение.

Построим поступательно перемещающуюся систему координат $Ox'y'$, оси которой параллельны осям неподвижной системы Oxy . Угол между отрезком OC и осью x' с точностью до начальной фазы равен ωt . Введем полярные координаты ρ и φ точки O . Проекция скорости этой точки на полярные оси координат ρ_0 , φ_0 определяются равенствами

$$v_{o\rho} = \dot{\rho}, \quad v_{o\varphi} = \rho\dot{\varphi}. \quad (3.30)$$

Из рис. 3.19 видно, что проекции относительной скорости v_C^r центра масс C равны

$$v_{C\rho}^r = -\omega e \sin(\omega t - \varphi), \quad v_{C\varphi}^r = \omega e \cos(\omega t - \varphi). \quad (3.31)$$

Кинетическая энергия ротора определяется известным равенством

$$T = \frac{1}{2}J\omega^2 + m(\mathbf{v}_O \cdot \mathbf{v}_C^r) + \frac{1}{2}mv_O^2. \quad (3.32)$$

Подставляя равенства (3.30) и (3.31) в (3.32) и отбрасывая постоянный член, найдем

$$T = \frac{1}{2}m \{ \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + 2\omega e [-\dot{\rho} \sin(\omega t - \varphi) + \rho\dot{\varphi} \cos(\omega t - \varphi)] \}.$$

Потенциальная энергия упругого вала равна

$$\Pi = \frac{1}{2}c\rho^2.$$

Запишем теперь уравнения Лагранжа для лагранжиана $L = T - \Pi$:

$$\begin{aligned} m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 - \omega^2 e \cos(\omega t - \varphi)) &= -c\rho, \\ m\rho(\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi} - \omega^2 e \sin(\omega t - \varphi)) &= 0. \end{aligned} \quad (3.33)$$

В установившемся движении $\rho = \rho_0 = \text{const} > 0$ и $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 = \text{const}$. Из уравнений (3.33) находим стационарное движение

1) при $c - m\omega^2 > 0$

$$\varphi_0 = \omega t, \quad \dot{\varphi}_0 = \omega, \quad \rho_0 = \frac{e\omega^2 m}{c - m\omega^2},$$

2) при $m\omega^2 - c > 0$

$$\varphi_0 = \omega t + \pi, \quad \dot{\varphi}_0 = \omega, \quad \rho_0 = \frac{e\omega^2 m}{m\omega^2 - c}.$$

Исследуем устойчивость первого из решений. Для этого линеаризуем уравнения Лагранжа в окрестности стационарного решения, положив $\rho = \rho_0 + \varepsilon_1$ и $\varphi = \omega t + \varepsilon_2$. Получим уравнения

$$\begin{aligned} m\ddot{\varepsilon}_1 - m\omega^2\varepsilon_1 - 2m\rho_0\omega\varepsilon_2 + c\varepsilon_1 &= 0 \\ \rho_0\ddot{\varepsilon}_2 + \omega^2\varepsilon_2 + 2\omega\dot{\varepsilon}_1 &= 0 \end{aligned}$$

с характеристическим уравнением

$$\begin{vmatrix} m\lambda^2 - m\omega^2 + c, & -2m\rho_0\omega\lambda \\ 2\omega\lambda, & \rho_0\lambda^2 + \omega^2e \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получаем

$$(m\lambda^2 - m\omega^2 + c)(\rho_0\lambda^2 + \omega^2e) + (2m\rho_0\omega\lambda)(2\omega\lambda) = 0$$

или

$$(m\lambda^2 - m\omega^2 + c)^2 + (2m\omega\lambda)^2 = 0.$$

Отсюда

$$m\lambda^2 - m\omega^2 + c \pm 2m\omega\lambda i = 0,$$

то есть

$$m(\lambda \pm \omega i)^2 + c = 0.$$

Таким образом, получаем значения корней

$$\lambda = i \left(\pm\omega \pm \sqrt{\frac{c}{m}} \right).$$

Все корни являются простыми и мнимыми. Следовательно, стационарное движение устойчиво в первом приближении.

Аналогичным образом исследуется стационарное движение при $m\omega^2 - c > 0$.

Задача 3.13

Найти критическую скорость вращения Ω_{cr} в горизонтальной плоскости верхней шарнирной оси ортогонального двойного маятника, при которой нарушается устойчивость его вертикального положения. Обе шарнирные оси маятника вращаются в горизонтальных плоскостях, будучи взаимно ортогональными, длины звеньев маятника l_1 и l_2 , а концевые точечные массы m_1 и m_2 .

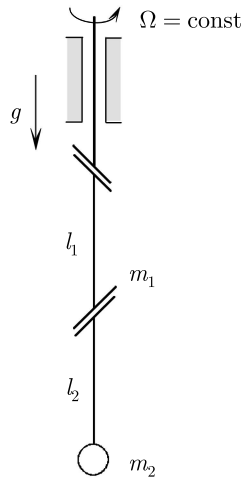


Рис. 3.20

Решение.

Обозначив шарнирные углы относительного поворота звеньев маятника как φ_1 и φ_2 , запишем угловые скорости первого и второго звена

$$\omega_1 = \Omega + \dot{\varphi}_1, \quad \omega_2 = \Omega + \dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2.$$

Связав с первым звеном базис e_1 , орт i_1 которого направлен по оси первого шарнира, орт j_1 — по оси второго шарнира, а орт k_1 — по оси самого звена, запишем компоненты вектора ω_1 в этом базисе:

$$\omega_1 = \dot{\varphi}_1 i_1 + \Omega \sin \varphi_1 j_1 + \Omega \cos \varphi_1 k_1.$$

Задача 3.13

Тогда

$$v_1 = \omega_1 \times l_1 = l_1(\Omega \sin \varphi_1 i_1 - \dot{\varphi}_1 j_1).$$

Вычисление v_2 также сделаем в базисе e_1 , учтя, что

$$\omega_2 = \dot{\varphi}_1 i_1 + (\Omega \sin \varphi_1 + \dot{\varphi}_2) j_1 + \Omega \cos \varphi_1 k_1,$$

$$l_2 = l_2(\sin \varphi_2 i_1 + \cos \varphi_2 k_1).$$

В результате получим

$$\begin{aligned} v_2 = v_1 + \omega_2 \times l_2 = & (l_1 \Omega \sin \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 (\dot{\varphi}_2 + \Omega \sin \varphi_1)) i_1 + \\ & + (-l_1 \dot{\varphi}_1 + l_2 (\sin \varphi_2 \cos \varphi_1 \Omega - \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_2)) j_1 + \\ & + l_2 \sin \varphi_2 (\dot{\varphi}_2 + \Omega \sin \varphi_1) k_1. \end{aligned}$$

Далее находим

$$v_1^2 = l_1^2 (\dot{\varphi}_1^2 + \Omega^2 \sin^2 \varphi_1) \approx l_1^2 (\dot{\varphi}_1^2 + \Omega^2 \varphi_1^2),$$

$$\begin{aligned} v_2^2 \approx & (l_1 \Omega \varphi_1 + l_2 \dot{\varphi}_2 + l_2 \Omega \varphi_1)^2 + (l_2 \Omega \varphi_2 - l_2 \dot{\varphi}_1 - l_1 \dot{\varphi}_1)^2 + \\ & + l_2^2 \Omega^2 \varphi_1^2 = (l_1 + l_2)^2 \dot{\varphi}_1^2 + l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 - \\ & - 2l_2 (l_1 + l_2) \Omega \dot{\varphi}_1 \varphi_2 + 2l_2 (l_1 + l_2) \Omega \dot{\varphi}_2 \varphi_1 + \\ & + (l_1^2 + 2l_2^2 + 2l_1 l_2) \Omega^2 \varphi_1^2 + l_2^2 \Omega^2 \varphi_2^2, \end{aligned}$$

после чего выписываем кинетическую энергию

$$\begin{aligned} T = & \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \\ = & \frac{1}{2} ((m_1 l_1^2 + m_2 (l_1 + l_2)^2) \dot{\varphi}_1^2 + m_2 l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + 2m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + \\ & + 2m_2 (l_1 + l_2) l_2 \Omega (\varphi_1 \dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1 \varphi_2) + \\ & + (m_1 l_1^2 + m_2 (l_1^2 + 2l_2^2 + 2l_1 l_2)) \Omega^2 \varphi_1^2 + m_2 l_2^2 \Omega^2 \varphi_2^2). \end{aligned}$$

Записав выражение для потенциальной энергии

$$\begin{aligned} \Pi = & m_1 g z_1 + m_2 g z_2 = -g((m_1 + m_2) l_1 \cos \varphi_1 + \\ & + m_2 l_2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2) \approx \frac{1}{2} ((m_1 l_1 + m_2 l_1 + m_2 l_2) \varphi_1^2 + m_2 l_2 \varphi_2^2), \end{aligned}$$

приходим к следующим уравнениям возмущенного движения:

$$\begin{cases} (m_1 l_1^2 + m_2 (l_1 + l_2)^2) \ddot{\varphi}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\varphi}_2 - 2m_2 (l_1 + l_2) l_2 \Omega \dot{\varphi}_2 - \\ (m_1 l_1^2 + m_2 (l_1^2 + 2l_2^2 + 2l_1 l_2)) \Omega^2 \varphi_1 + \\ + g(m_1 l_1 + m_2 l_1 + m_2 l_2) \varphi_1 = 0, \\ m_2 l_2^2 \ddot{\varphi}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\varphi}_1 + 2m_2 l_2 (l_1 + l_2) \Omega \dot{\varphi}_1 - m_2 l_2^2 \Omega^2 \varphi_2 + \\ + g m_2 l_2 \varphi_2 = 0. \end{cases}$$

Если обозначить

$$\frac{l_1}{l_2} = \varepsilon, \quad \frac{g}{l_2} = k^2, \quad \frac{\Omega}{k} = \nu, \quad \frac{m_1}{m_2} = \mu$$

и перейти к безразмерному времени $d\tau = kdt$, то система примет вид

$$\begin{cases} (\mu\varepsilon^2 + (1 + \varepsilon)^2)\varphi_1'' + \varepsilon\varphi_2'' - 2\nu(1 + \varepsilon)\varphi_2' + \\ ((\mu + 1)\varepsilon + 1 - \nu^2((\mu + 1)\varepsilon^2 + 2(1 + \varepsilon)))\varphi_1 = 0, \\ \varphi_2'' + \varepsilon\varphi_1'' + 2\nu(1 + \varepsilon)\varphi_1' + (1 - \nu^2)\varphi_2 = 0. \end{cases}$$

Для упрощения задачи положим $\mu = \varepsilon = 1$. Тогда система примет вид

$$\begin{cases} 5\varphi_1'' + \varphi_2'' - 4\nu\varphi_2' + 3\varphi_1(1 - 2\nu^2) = 0, \\ \varphi_2'' + \varphi_1'' + 4\nu\varphi_1' + \varphi_2(1 - \nu^2) = 0. \end{cases}$$

Характеристический определитель этой системы

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} 5p^2 + 3(1 - 2\nu^2), & p^2 - 4\nu p \\ p^2 + 4\nu p, & p^2 + 1 - \nu^2 \end{vmatrix} = \\ = 4p^4 + p^2(8 + 5\nu^2) + 3(1 - 3\nu^2 + 2\nu^4) = 0.$$

Условия устойчивости будут:

- 1) $2\nu^4 - 3\nu^2 + 1 > 0$,
- 2) $(8 + 5\nu^2)^2 - 48(1 - 3\nu^2 + 2\nu^4) > 0$.

Из первого уравнения следует $\nu^2 < 1/2$, тогда как второе дает менее жесткое ограничение $\nu^2 < \frac{112 + \sqrt{112^2 + 16 \cdot 71}}{71} \approx 3.22$.

$$\text{Ответ: } \Omega < \sqrt{\frac{g}{2l_2}}.$$

Задача 3.14

Исследовать устойчивость равновесия плавающего бруса прямоугольного сечения, если его длина значительно превышает размеры поперечного сечения.

Решение.

Ограничиваясь в силу сказанного рамками плоской задачи, заключаем, что брус имеет 3 степени свободы: смещение в горизонтальном x

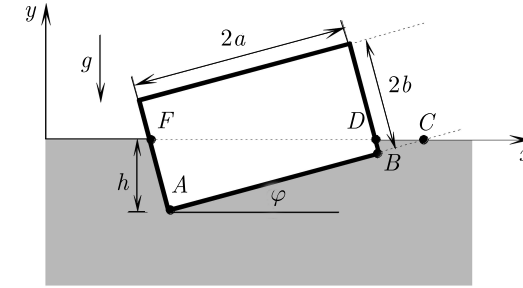


Рис. 3.21

и вертикальном y направлении, а также поворот сечения на угол φ в вертикальной плоскости xy . Жидкость трактуется как потенциальное поле гидростатических сил, не имеющее своих степеней свободы. Тогда брус будет испытывать воздействие двух потенциальных полей — гравитационного и гидростатического — и вопрос о его равновесных положениях и их устойчивости полностью решается посредством анализа суммарной потенциальной энергии системы брус–жидкость $\Pi(q) = \Pi_b(q) + \Pi_l(q)$, где q — столбец обобщенных координат бруса, Π_b и Π_l — энергии сил веса бруса и жидкости. Ясно, что горизонтальному смещению бруса отвечает циклическая координата, которая не войдет в Π и поэтому в статической задаче может быть отброшена. Вертикальная координата, разумеется, не будет циклической, однако ее также можно исключить из анализа, если рассматривать только равнообъемные наклонения бруса по углу φ (т. е. такие наклонения, при которых вертикальный объем жидкости остается постоянным и равным объему в положении равновесия бруса). Этот прием широко используется в задачах статики плавающих тел [8] и он основан на том факте, что для выпуклого плавающего тела всегда имеет место устойчивость по вертикальной координате.

При этих условиях потенциальная энергия бруса и жидкости будет зависеть только от угла φ : $\Pi(\varphi) = \Pi_b(q) + \Pi_l(q)$, где $\Pi_b = P_b y_b$, $\Pi_l = -P_l y_l$, причем P_b — вес бруса, y_b — высота его центра тяжести, P_l — вес вытесненной жидкости, а y_l — высота центра тяжести вытесненного объема жидкости, именуемая центром величины. В по-

ложении равновесия согласно закону Архимеда имеем $\Pi_b = \Pi_l$, и тогда $\Pi = P(y_b - y_l)$. Полагаем, что брус однороден и отношение плотности его материала к плотности жидкости есть ρ . Тогда согласно рис. 3.21 имеем

$$y_b = -h + a \sin \varphi + b \cos \varphi, \quad (3.34)$$

где h — промежуточная переменная, определяемая их условия равнообъемности. Для нахождения y_l составим условие равенства статического момента площади погруженной трапеции ABCD относительно оси x разности статических моментов треугольников ACE и BCE. Учитывая, что плечо статического момента треугольника ACE относительно оси x равно $1/3$ его высоты h и аналогично для треугольника BCD, получаем

$$\frac{h}{3} S_{ACE} - \frac{h - 2a \sin \varphi}{3} S_{BCD} = y_c (S_{ACE} - S_{BCD}), \quad (3.35)$$

где $y_c = -y_l$. Выражая

$$\begin{aligned} S_{ACE} &= \frac{h^2}{\sin 2\varphi}, & S_{BCD} &= \frac{(h - 2a \sin \varphi)^2}{\sin 2\varphi}, \\ S_{ABDE} &= S_{ACE} - S_{BCD} = \frac{2a(h - a \sin \varphi)}{\cos \varphi}, \end{aligned} \quad (3.36)$$

запишем условие равнообъемности

$$hab\rho = S_{ABCD} = \frac{2a(h - a \sin \varphi)}{\cos \varphi},$$

откуда

$$h = a \sin \varphi + 2b\rho \cos \varphi. \quad (3.37)$$

Подставляя выражения (3.36) в равенство (3.35), находим

$$y_c = \frac{h^3 - (h - 2a \sin \varphi)^3}{3[h^2 - (h - 2a \sin \varphi)^2]},$$

откуда после исключения h согласно (3.37) имеем

$$y_c = \frac{12b^2\rho^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi}{12b\rho \cos \varphi}.$$

Используя найденные выражения для $y_c = -y_l$ и y_b (3.34), составим

$$\begin{aligned} \Pi(\varphi) &= P(y_b + y_l) = P \frac{12b^2\rho(1 - \rho) \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi}{12b\rho \cos \varphi} \approx \\ &\approx P \frac{\varphi^2}{2} \left[\frac{a^2}{6b\rho} + b(\rho - 1) \right]. \end{aligned}$$

Отсюда уже нетрудно заключить, что для устойчивости положения равновесия бруса $\varphi = 0$ требуется положительность выражения в квадратной скобке, т. е. требуется, чтобы

$$\frac{a}{b} > \sqrt{6\rho(1 - \rho)}.$$

Это неравенство определяет область устойчивости, которая затемнена на рис. 3.22.

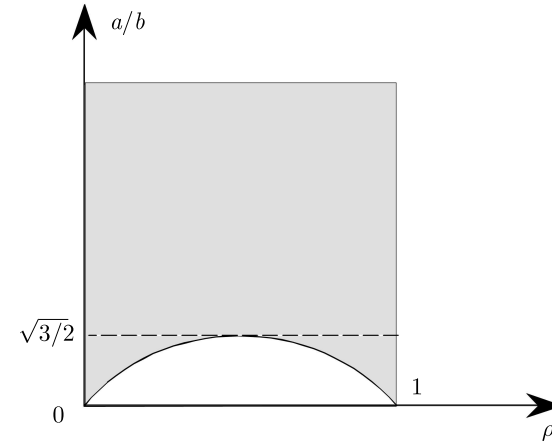


Рис. 3.22

Видно, что при $a < b$ вблизи $\rho = 0$ и $\rho = 1$ устойчиво плавает даже брус, поставленный на «ребро».

Глава 4

Устойчивость по первому приближению

Пусть математическая модель механической системы с n степенями свободы описывается уравнением

$$\dot{q} = f(q),$$

где q — вектор отклонений обобщенных координат от их невозмущенных значений $q_* \equiv 0$, а $f(q)$ — дифференцируемая по q вектор-функция. Разлагая функции $f(q)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $q_* = 0$ и выделяя в этом разложении линейное по q слагаемое, получим систему уравнений возмущенного движения

$$\dot{q} = Aq + U(q), \quad (4.1)$$

где U — вектор нелинейных слагаемых второго и высших порядков по q , а

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial q_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial q_n} \end{bmatrix}_*$$

— матрица производных в точке $q_* = 0$.

Исследование устойчивости положения $q = q_* = 0$ начинается обычно с анализа уравнений первого приближения

$$\dot{q} = Aq, \quad (4.2)$$

представляющих собой систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Как показано в [11], решение $q = q_* = 0$ будет асимптотически устойчиво при любом выборе нелинейных слагаемых U , если все собственные числа матрицы A лежат в открытой левой полуплоскости $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$. При наличии хотя бы одного из собственных чисел матрицы A в правой полуплоскости нулевое решение $q_* = 0$ неустойчиво. Если же спектр матрицы A лежит в замкнутой левой полуплоскости или же весь расположен на мнимой оси, то для суждения об устойчивости решения $q = q_* = 0$ недостаточно уравнений первого приближения и необходимо проводить анализ нелинейных слагаемых $U(q)$. Не занимаясь здесь таким анализом, ограничимся построением критерия асимптотической устойчивости (критерия Гурвица) для системы (4.1). Для этого запишем характеристическое уравнение этой системы

$$|\lambda E - A| = \sum_{i=0}^n a_i \lambda^{n-i} = 0 \quad (4.3)$$

и составим из его коэффициентов a_i матрицу Гурвица

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}.$$

Сформулируем критерий Гурвица: *для того чтобы все корни уравнения (4.3) лежали в открытой левой полуплоскости, необходимо и достаточно, чтобы все главные угловые миноры определителя Гурвица были строго положительны.* Нетрудно показать, что необходимым (но не достаточным) условием расположения корней в левой полуплоскости является условие Стодоль: *все коэффициенты уравнения (4.3) должны быть строго положительны.* Объединение условий Гурвица и Стодоль составляет содержание критерия Лъенара–Шипара: *необходимым и достаточным условием расположения всех корней уравнения (4.3) в открытой левой полуплоскости является положительность всех его коэффициентов, а также положительность половины из определителей Гурвица, начиная с предпоследнего $n - 1$ -го, затем $n - 3$ -го и т. д.* В частности, для характеристического полинома второй степени

условия Стодолы полностью решают вопрос об устойчивости. Однако уже для полинома третьей степени

$$\sum_{i=0}^3 a_i \lambda^{3-i} = 0$$

помимо положительности всех коэффициентов необходима положительность и одного определителя Гурвица:

$$A = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 \\ a_4 & a_3 & a_2 \end{vmatrix} = a_0(a_1 a_2 - a_0 a_3) > 0.$$

Для полинома четвертой степени критерий Лъенара–Шипара есть:

$$a_i > 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - a_0 a_3^2 > 0.$$

Критерием расположения спектра матрицы в замкнутой левой полуплоскости является неотрицательность всех главных угловых миноров определителя Гурвица. В этом случае для выявления устойчивости необходим учет нелинейных слагаемых $U(q)$. Если же они отсутствуют, т. е. исходная система (4.1) линейна, то вопрос об ее устойчивости зависит от соотношения между кратностью критического корня λ_i (лежащего на мнимой оси) и дефектом, то есть разностью между порядком и рангом характеристической матрицы $\lambda_i E - A$. Именно: *линейная система (4.2) неасимптотически устойчива, если дефект равен кратности, и неустойчива, если дефект меньше кратности*. Следует заметить, что если $A = A^T$, то кратность собственного числа матрицы всегда равна дефекту соответствующей характеристической матрицы, так что каждому критическому корню отвечает неасимптотическая устойчивость соответствующего частного решения.

В заключение отметим тот частный случай, когда характеристическое уравнение содержит только четные степени λ . Такая ситуация нередко встречается в реальных системах. Примером является биквадратное или бикубическое уравнение. Заменяя $\lambda^2 = \mu$, приходим к полному уравнению половинной степени, корни которого в случае устойчивости должны располагаться на отрицательной вещественной полуоси. Тогда корни $\lambda_i = \pm \sqrt{|\mu_i|}$ будут лежать на мнимой оси, т. е. будут критическими, и условием устойчивости будут соотношения между кратностью и дефектом. Записывая биквадратное уравнение для λ в виде

квадратного для μ

$$\sum_{i=0}^2 a_{2i} \mu^{2-i} = 0, \quad (4.4)$$

закключаем, что условие неасимптотической устойчивости состоит в выполнении трех неравенств:

$$\frac{a_2}{a_0} > 0, \quad \frac{a_4}{a_0} > 0, \quad a_2^2 > 4a_0 a_4,$$

последнее из которых означает положительность дискриминанта уравнения (4.4). Для бикубического уравнения условие неасимптотической устойчивости состоит в выполнении пяти неравенств:

$$\frac{a_2}{a_0} > 0, \quad \frac{a_4}{a_0} > 0, \quad \frac{a_6}{a_0} > 0, \quad a_2 a_4 > a_0 a_6,$$

$$a_4^2(4a_0 a_4 - a_2^2) + 27a_0 a_6^3 + 2a_2 a_6(2a_2^2 - 9a_4 a_0) < 0.$$

В главе 4 представлены задачи об исследованиях устойчивости по первому приближению как для случаев, когда применим критерий Гурвица (4.1–4.4), так и для случаев, когда он неприменим (4.5–4.10).

Задача 4.1

Движение автоматической системы регулирования описывается следующими дифференциальными уравнениями:

$$\begin{aligned} \dot{\psi} - \Omega(\gamma_1 + \gamma_2) &= c_2 \gamma_2, \\ \dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2 + \Omega\psi &= -c_1 \gamma_2, \\ \dot{\gamma}_1 + \Omega\psi &= -k\gamma_1, \end{aligned}$$

где γ_1 , γ_2 и ψ — координаты системы, c_1 , c_2 , k и Ω — положительные параметры системы. Определить, какому условию должны отвечать параметры системы, чтобы движение было асимптотически устойчиво.

Решение.

Перепишем систему уравнений в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Omega\gamma_1 + (\Omega + c_2)\gamma_2 - \dot{\psi} &= 0, \\ \dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2 + c_1\gamma_2 + \Omega\psi &= 0, \\ \dot{\gamma}_1 + k\gamma_1 + \Omega\psi &= 0. \end{aligned}$$

Пусть $\gamma_1 = Ae^{\lambda t}$, $\gamma_2 = Be^{\lambda t}$ и $\psi = Ce^{\lambda t}$. Подставляя эти выражения в уравнения, приведенные выше, и сократив их на $e^{\lambda t}$, получим:

$$\begin{aligned}\Omega A + (\Omega + c_2)B - \lambda C &= 0, \\ \lambda A + (\lambda + c_1)B + \Omega C &= 0, \\ (\lambda + k)A + \Omega C &= 0.\end{aligned}$$

Чтобы эта линейная однородная система алгебраических уравнений относительно A , B и C имела ненулевое решение, ее определитель должен обращаться в нуль, т. е.

$$\begin{vmatrix} \Omega & \Omega + c_2 & -\lambda \\ \lambda & \lambda + c_1 & \Omega \\ \lambda + k & 0 & \Omega \end{vmatrix} = 0$$

или после разложения определителя по степеням λ

$$\sum_{i=0}^3 a_i \lambda^{3-i} = \lambda^3 + (k + c_1)\lambda^2 + (\Omega^2 + kc_1)\lambda + (\Omega^2 c_1 + \Omega^2 k + \Omega c_2 k) = 0,$$

где все параметры системы Ω , c_1 , c_2 и k положительны. Следовательно, чтобы система была асимптотически устойчива, необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$\Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0.$$

Для рассматриваемой задачи это дает

$$\Delta_2 = (k + c_1)(\Omega^2 + kc_1) - (\Omega^2 c_1 + \Omega^2 k + \Omega c_2 k) > 0,$$

что приводит к условию

$$kc_1 + c_1^2 > \Omega c_2.$$

Задача 4.2

На рис. 4.1. изображена схема одноосного прицепа массы m . J — полярный момент инерции прицепа относительно вертикальной оси, проходящей через его центр масс G , v — постоянная скорость тягача и c — жесткость пружины.

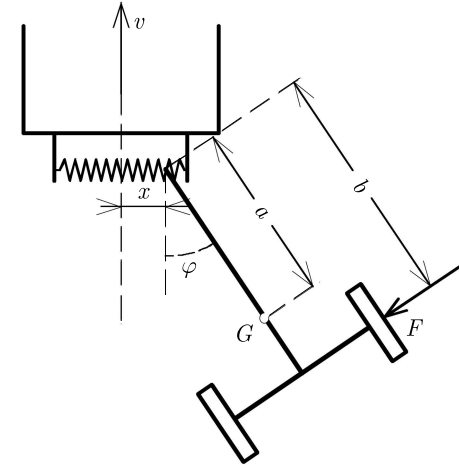


Рис. 4.1

Считая, что колеса прицепа не имеют бокового проскальзывания, составить уравнения движения прицепа и определить условия устойчивости его движения.

Решение.

Составим дифференциальные уравнения движения прицепа. Для этого запишем уравнение моментов относительно вертикальной оси, проходящей через центр масс G прицепа перпендикулярно его плоскости:

$$-J\ddot{\varphi} = -cax \cos \varphi + F(b - a),$$

и уравнение движения центра масс в направлении, параллельном перемещению пружины:

$$m \frac{d^2}{dt^2}(x + a \sin \varphi) = -cx - F \cos \varphi.$$

При малых углах φ эти уравнения принимают вид:

$$\begin{aligned}-J\ddot{\varphi} &= -cax + F(b - a), \\ m\ddot{x} + ma\ddot{\varphi} &= -cx - F.\end{aligned}$$

Исключая F из приведенных выше уравнений, получаем:

$$m(b-a)\ddot{x} + cbx + [ma(b-a) - J]\ddot{\varphi} = 0. \quad (4.5)$$

Так как прицеп не может перемещаться в направлении оси его колес, то налагается следующее условие неголономной связи:

$$\dot{x} \cos \varphi + b\dot{\varphi} + v \sin \varphi = 0$$

или для малых углов:

$$\dot{x} + b\dot{\varphi} + v\varphi = 0. \quad (4.6)$$

Чтобы определить условия устойчивости, рассмотрим характеристическое уравнение для системы дифференциальных уравнений (4.5) и (4.6):

$$\begin{vmatrix} m(b-a)\lambda^2 + cb & [ma(b-a) - J]\lambda^2 \\ \lambda & b\lambda + v \end{vmatrix} = \\ = [m(b-a)^2 + J]\lambda^3 + m(b-a)v\lambda^2 + cb^2\lambda + cbv = 0.$$

Для асимптотической устойчивости все коэффициенты должны быть положительными, т. е.

$$b > a, \quad v > 0. \quad (4.7)$$

Кроме этого условия, также должно выполняться условие Гурвица для кубического полинома, т. е.

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= a_1 a_2 - a_0 a_3 = mcb^2v(b-a) - cbv(m(b-a)^2 + J) = \\ &= cbv[ma(b-a) - J] > 0. \end{aligned}$$

Отсюда получаем дополнительное условие:

$$J < ma(b-a). \quad (4.8)$$

При выполнении условий (4.7) и (4.8) движение прицепа асимптотически устойчиво. Физический смысл этих условий таков: должно выполняться условие статической устойчивости ($v > 0$), центр масс прицепа должен находиться ближе к точке крепления, чем его ось ($b > a$), и радиус инерции прицепа не должен быть очень большим (условие на момент инерции прицепа (4.8)).

Задача 4.3

Двухроторный гироскоп Аншютца¹ с гидравлическим успокоителем широко используется в некоторых странах. Если гироскоп такого типа установлен на корабле, северная составляющая путевой скорости которого постоянна, то дифференциальные уравнения движения гироскопа имеют вид:

$$\dot{x}_1 - \frac{k^2}{U \cos \varphi} x_2 - \frac{k^2}{U \cos \varphi} (1 - \rho) x_3 = X_1, \quad (4.9)$$

$$\dot{x}_2 + U \cos \varphi x_1 = X_2, \quad (4.10)$$

$$\dot{x}_3 + Fx_2 + Fx_3 = X_3.$$

Здесь x_1, x_2 и x_3 — вариации (отклонения) координат компаса от их значений при динамическом равновесии; k — частота собственных колебаний чувствительного элемента (гирисферы); U — угловая скорость вращения Земли; φ — широта, на которой находится корабль; F — коэффициент трения жидкости в гидравлическом успокоителе, $\rho = 1 - \frac{c}{Pl}$; c и Pl — маятниковые моменты жидкого успокоителя и гирисферы соответственно; а X_1, X_2, X_3 — члены высших порядков по x_1, x_2, x_3 и $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3$.

Определить условие асимптотической устойчивости.

Решение.

Запишем уравнения первого приближения, считая $X_1 = X_2 = X_3 = 0$. Мы приходим к следующей системе линейных дифференциальных уравнений (в первом уравнении параметр ρ заменен на его значение $\rho = 1 - \frac{c}{Pl}$):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 - \frac{k^2}{U \cos \varphi} x_2 - \frac{k^2}{U \cos \varphi} \frac{c}{Pl} x_3 &= 0, \\ U \cos \varphi x_1 + \dot{x}_2 &= 0, \\ Fx_2 + \dot{x}_3 + Fx_3 &= 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

¹ В честь немецкого инженера и промышленника, который изобрел этот гироскоп.

Положим $x_1 = Ae^{\lambda t}$, $x_2 = Be^{\lambda t}$ и $x_3 = Ce^{\lambda t}$. Подставляя эти выражения вместо x_k в уравнение (4.9) и сократив на $e^{\lambda t}$, получим:

$$\begin{aligned} \lambda A - \frac{k^2}{U \cos \varphi} B - \frac{k^2}{U \cos \varphi} \frac{c}{Pl} C &= 0, \\ U \cos \varphi A + \lambda B &= 0, \\ FB + (\lambda + F) C &= 0. \end{aligned}$$

Для существования нетривиального решения определитель системы должен обращаться в нуль, т. е.

$$\begin{vmatrix} \lambda & -\frac{k^2}{U \cos \varphi} & -\frac{k^2}{U \cos \varphi} \frac{c}{Pl} \\ U \cos \varphi & \lambda & 0 \\ 0 & F & \lambda + F \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\lambda^3 + F\lambda^2 + k^2\lambda + k^2F \left(1 - \frac{c}{Pl}\right) = 0.$$

Согласно критерию Гурвица необходимо, чтобы все коэффициенты и $\Delta_2 = a_1a_2 - a_0a_3$ были положительны. Это означает, что $c < Pl$. При этом условие $\Delta_2 = Fk^2 - Fk^2 \left(1 - \frac{c}{Pl}\right) = Fk^2 \frac{c}{Pl} > 0$ выполняется автоматически. Таким образом, условием асимптотической устойчивости является $c < Pl$.

Задача 4.4

Гирогоризонткомпас — устройство, которое иногда используется на движущемся корабле для одновременного определения географического меридиана и горизонтальной плоскости. На неподвижном относительно Земли основании дифференциальные уравнения возмущенного движения гирогоризонткомпаса могут быть сведены к двум совершенно аналогичным системам уравнений.

Первая система имеет вид:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + 2b_1\dot{x}_1 + (\nu^2 - \Omega^2)x_1 - 2\Omega\dot{x}_2 &= X_1, \\ \ddot{x}_2 + 2b_2\dot{x}_2 + (\nu^2 - \Omega^2)x_2 + 2\Omega\dot{x}_1 &= X_2. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Здесь x_1 — величина, пропорциональная углу отклонения от плоскости меридиана; x_2 — вариация конструктивного угла (см. [10]); $b_1 > 0$

и $b_2 > 0$ — коэффициенты, характеризующие диссипативные силы; $\nu = \sqrt{g/R} = 0.00124 \text{ 1/c}$ — частота Шулера²; $\Omega = U \sin \varphi$; $U = 7.29 \times 10^{-5} \text{ 1/c}$ — угловая скорость вращения Земли; φ — широта места; а X_1 и X_2 — члены высших порядков по x_1 , x_2 , \dot{x}_1 и \dot{x}_2 .

Во второй аналогичной системе уравнений возмущенного движения x_3 и x_4 определяют угол отклонения от горизонтальной плоскости и вариацию другого конструктивного угла (см. [10]).

Найти условие асимптотической устойчивости движения гирогоризонткомпаса.

Решение.

Положив $X_1 = X_2 = 0$, получим систему первого приближения:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + 2b_1\dot{x}_1 + (\nu^2 - \Omega^2)x_1 - 2\Omega\dot{x}_2 &= 0, \\ 2\Omega\dot{x}_1 + \ddot{x}_2 + 2b_2\dot{x}_2 + (\nu^2 - \Omega^2)x_2 &= 0. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Как обычно, положим $x_1 = Ae^{\lambda t}$ и $x_2 = Be^{\lambda t}$; подставим эти выражения вместо x_1 и x_2 в (4.10) и, сократив на $e^{\lambda t}$, получим:

$$\begin{aligned} (\lambda^2 + 2b_1\lambda + (\nu^2 - \Omega^2))A - 2\Omega\lambda B &= 0, \\ 2\Omega\lambda A + (\lambda^2 + 2b_2\lambda + (\nu^2 - \Omega^2))B &= 0. \end{aligned}$$

Для существования нетривиального решения определитель системы должен равняться нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + 2b_1\lambda + (\nu^2 - \Omega^2) & -2\Omega\lambda \\ 2\Omega\lambda & \lambda^2 + 2b_2\lambda + (\nu^2 - \Omega^2) \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\begin{aligned} \lambda^4 + 2(b_1 + b_2)\lambda^3 + 2((\nu^2 - \Omega^2) + 2b_1b_2 + 2\Omega^2)\lambda^2 + \\ 2(b_1 + b_2)(\nu^2 - \Omega^2)\lambda + (\nu^2 - \Omega^2)^2 &= 0. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Для асимптотической устойчивости рассматриваемой системы (4.10) необходимо и достаточно, чтобы выполнялся критерий Гурвица, а именно:

² Макс Шулер — немецкий ученый, который в 1912 году исследовал период невозмущенных колебаний гироскопического маятника в гирокомпасе.

1. Все коэффициенты уравнения (4.11) должны быть положительными,

$$2. \Delta_3 = a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 > 0.$$

Δ_3 получается следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= 8(b_1 + b_2)^2 ((\nu^2 - \Omega^2) + 2b_1 b_2 + 2\Omega^2) (\nu^2 - \Omega^2) - \\ &\quad - 4(b_1 + b_2)^2 (\nu^2 - \Omega^2)^2 - 4(b_1 + b_2)^2 (\nu^2 - \Omega^2)^2 = \\ &= 4(b_1 + b_2)^2 (\nu^2 - \Omega^2) (2(\nu^2 - \Omega^2) + 4b_1 b_2 + 4\Omega^2 - \\ &\quad - 2(\nu^2 - \Omega^2)) = 16(b_1 + b_2)^2 (\nu^2 - \Omega^2) (b_1 b_2 + \Omega^2). \end{aligned}$$

Если $\nu > \Omega$, то Δ_3 и все коэффициенты уравнения (4.11) положительны и критерий Гурвица выполняется. Таким образом, система (4.10) асимптотически устойчива, и, следовательно, согласно теореме Ляпунова об устойчивости по первому приближению и исходная система при $X_1 \neq 0$ и $X_2 \neq 0$ устойчива.

Задача 4.5

Обозначим моменты инерции твердого тела относительно осей x , y и z через A , B и C соответственно таким образом, что либо $A < C < B$, либо $A > C > B$. Доказать, что перманентное вращение твердого тела относительно оси z неустойчиво.

Решение.

Из уравнений возмущенного движения задачи 1.4 составим уравнения первого приближения:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{B - C}{A} \omega_0 x_2, \\ \dot{x}_2 &= \frac{C - A}{B} \omega_0 x_1, \\ \dot{x}_3 &= 0. \end{aligned}$$

Положим $x_k = D_k e^{\lambda t}$ ($k = 1, 2, 3$) и подставим x_k в эти уравнения. После сокращения на $e^{\lambda t}$ получим:

$$\begin{aligned} D_1 A \lambda + D_2 (C - B) \omega_0 &= 0, \\ D_2 B \lambda + D_1 (A - C) \omega_0 &= 0, \\ D_3 C \lambda &= 0. \end{aligned}$$

Для существования нетривиального решения определитель этой системы линейных однородных уравнений относительно D_k должен обращаться в ноль, т. е.

$$\begin{vmatrix} A\lambda & (C - B)\omega_0 & 0 \\ (A - C)\omega_0 & B\lambda & 0 \\ 0 & 0 & C\lambda \end{vmatrix} = 0$$

или

$$C\lambda (AB\lambda^2 - (C - B)(A - C)\omega_0^2) = 0.$$

Это уравнение имеет один корень, равный нулю, и при $A < C < B$ или $A > C > B$ два вещественных корня:

$$\lambda = \pm \omega_0 \sqrt{\frac{(C - B)(A - C)}{AB}}.$$

Существование положительного корня означает, что вращение твердого тела вокруг оси z , относительно которой момент инерции имеет среднее значение, неустойчиво.

Задача 4.6

К двойному маятнику, изображенному на рис. 4.2, приложена следящая сила P , направленная вдоль оси второго звена. В точке подвеса и втором шарнире имеются спиральные пружины одинаковой жесткости c . Длины маятников и их массы (материальные точки) одинаковы. В нижнем вертикальном положении маятников пружины не деформированы.

Пренебрегая массой стержней, вывести уравнения движения и найти условия устойчивости положения равновесия $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$.

Решение.

В этой задаче сила P неконсервативна, поэтому обобщенные силы следует вычислять по формулам:

$$Q_1 = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1} + Q_{1p}, \quad Q_2 = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_2} + Q_{2p}, \quad (4.15)$$

где Π — потенциальная энергия, создаваемая пружинами и силой тяжести, а Q_{1p} и Q_{2p} — обобщенные силы, создаваемые силой P .

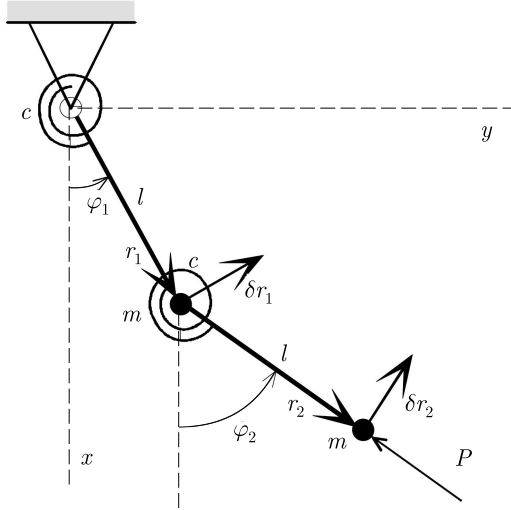


Рис. 4.2

Потенциальная энергия системы имеет вид:

$$\Pi = \frac{c\varphi_1^2}{2} + \frac{c(\varphi_2 - \varphi_1)^2}{2} + 2mgl(1 - \cos \varphi_1) + mgl(1 - \cos \varphi_2).$$

Полагая, что углы φ_1 и φ_2 малы, используем следующие разложения, в которых оставлены члены не выше второго порядка малости:

$$1 - \cos \varphi_1 = \frac{\varphi_1^2}{2}, \quad 1 - \cos \varphi_2 = \frac{\varphi_2^2}{2}.$$

Тогда выражение для Π примет вид:

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2}c\varphi_1^2 + \frac{c(\varphi_2 - \varphi_1)^2}{2} + mgl\varphi_1^2 + mgl\frac{\varphi_2^2}{2} = \\ &= (c + mgl)\left(\varphi_1^2 + \frac{\varphi_2^2}{2}\right) - c\varphi_1\varphi_2. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Чтобы вычислить Q_{1p} и Q_{2p} , рассмотрим элементарную работу силы P на элементарном перемещении точки ее приложения $\delta \mathbf{r}$, где \mathbf{r} —

радиус-вектор точки приложения силы P , а начало этого вектора совпадает с верхней неподвижной точкой. Таким образом, мы имеем:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2,$$

где \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 — векторы, имеющие длину и направление стержней. Следовательно,

$$\delta \mathbf{r} = \delta \mathbf{r}_1 + \delta \mathbf{r}_2.$$

Необходимо учитывать, что $\delta \mathbf{r}_1$ и $\delta \mathbf{r}_2$ ортогональны векторам \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 соответственно. Далее, введем координатную систему в плоскости стержней таким образом, что ось x направлена вертикально вниз, а ось y — горизонтально вправо. Обозначим проекции вектора $\delta \mathbf{r}$ через δx и δy , тогда из последнего равенства получим:

$$\begin{aligned} \delta x &= l(-\sin \varphi_1 \delta \varphi_1 - \sin \varphi_2 \delta \varphi_2), \\ \delta y &= l(\cos \varphi_1 \delta \varphi_1 + \cos \varphi_2 \delta \varphi_2). \end{aligned}$$

Проекции силы P равны $-P \cos \varphi_2$ и $-P \sin \varphi_2$, а ее элементарная работа равна

$$\begin{aligned} \delta A &= P_x \delta x + P_y \delta y = -Pl \cos \varphi_2 (-\sin \varphi_1 \delta \varphi_1 - \\ &\quad \sin \varphi_2 \delta \varphi_2) - Pl \sin \varphi_2 (\cos \varphi_1 \delta \varphi_1 + \cos \varphi_2 \delta \varphi_2) \end{aligned}$$

или, после группировки членов,

$$\delta A = Pl(\cos \varphi_2 \sin \varphi_1 - \sin \varphi_2 \cos \varphi_1) \delta \varphi_1.$$

Отсюда находим:

$$Q_{1p} = Pl \sin(\varphi_1 - \varphi_2), \quad Q_{2p} = 0.$$

Последнее равенство очевидно. Сила P перпендикулярна вектору элементарного перемещения $\delta \mathbf{r}_2$, и поэтому ее работа на этом перемещении равна нулю.

Считая по-прежнему углы φ_1 и φ_2 малыми и пользуясь равенствами (4.12) и (4.13), найдем

$$Q_1 = -2(c + mgl)\varphi_1 + c\varphi_2 - Pl(\varphi_2 - \varphi_1),$$

$$Q_2 = -(c + mgl)\varphi_2 + c\varphi_1.$$

Определим теперь кинетическую энергию системы:

$$\begin{aligned} x_1 &= l \cos \varphi_1, & x_2 &= l \cos \varphi_1 + l \cos \varphi_2, \\ \dot{x}_1 &= -l\dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1, & \dot{x}_2 &= -l(\dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 + \dot{\varphi}_2 \sin \varphi_2), \\ y_1 &= l \sin \varphi_1, & y_2 &= l \sin \varphi_1 + l \sin \varphi_2, \\ \dot{y}_1 &= l\dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1, & \dot{y}_2 &= l(\dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 + \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2), \\ v_1^2 &= l^2 \dot{\varphi}_1^2, & & \\ v_2^2 &= \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 = l^2 (\dot{\varphi}_1^2 + 2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_2^2). \end{aligned}$$

Полагая, что углы φ_1 и φ_2 малы, т. е. $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = 1$, получаем

$$v_2^2 = l^2 (\dot{\varphi}_1^2 + 2\dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_2^2).$$

Таким образом,

$$T = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} m v_2^2 = \frac{1}{2} m l^2 (2\dot{\varphi}_1^2 + 2\dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_2^2).$$

Теперь можно записать уравнения Лагранжа:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_j} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_j} &= Q_j \quad (j = 1, 2), \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} &= m l^2 (2\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2), \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} &= m l^2 (2\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2), \\ \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} &= \frac{\partial T}{\partial \varphi_2} = 0. \end{aligned}$$

После подстановки выражения для Q_1 первое уравнение примет вид:

$$m l^2 (2\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2) + 2(c + mgl)\varphi_1 - c\varphi_2 + Pl(\varphi_2 - \varphi_1) = 0. \quad (4.17)$$

Аналогично составим второе уравнение для φ_2 :

$$m l^2 (\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2) + (c + mg)l\varphi_2 - c\varphi_1 = 0. \quad (4.18)$$

Далее, положим $\varphi_1 = A e^{\lambda t}$, $\varphi_2 = B e^{\lambda t}$. Подставляя эти выражения в (4.14) и (4.15) и поделив результирующие уравнения на $e^{\lambda t}$, получаем два линейных однородных уравнения относительно A и B :

$$\begin{aligned} (2m l^2 \lambda^2 + 2(c + mgl) - Pl) A + (m l^2 \lambda^2 - c + Pl) B &= 0, \\ (m l^2 \lambda^2 - c) A + (m l^2 \lambda^2 + c + mgl) B &= 0. \end{aligned}$$

Определитель этой системы должен обращаться в нуль:

$$\begin{vmatrix} 2m l^2 \lambda^2 + 2(c + mgl) - Pl & m l^2 \lambda^2 - c - Pl \\ m l^2 \lambda^2 - c & m l^2 \lambda^2 + c + mgl \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\lambda^4 + 2I_0 \lambda^2 + I = 0,$$

где

$$2I_0 = \frac{2}{m l^2} (3c + 2mgl - Pl),$$

$$I = \frac{1}{m^2 l^4} (c^2 + 4cmgl + 2m^2 g^2 l^2 - mgl^2 P).$$

Для того чтобы рассматриваемая система была устойчива в первом приближении, необходимо и достаточно, чтобы оба корня последнего уравнения относительно λ^2 были бы вещественны и отрицательны. Это будет только в том случае, если

$$I_0 > 0, \quad I > 0, \quad D = I_0^2 - I > 0$$

(D — дискриминант квадратного уравнения относительно λ^2).

Из первого $I_0 > 0$ и третьего $D > 0$ неравенств находим ограничение для следящей силы P :

$$P < \frac{1}{l} (2c + mgl).$$

Легко показать, что при выполнении этого неравенства будет удовлетворено и второе условие, т. е. $I > 0$. Таким образом, рассматриваемая система будет устойчива в первом приближении относительно φ_1 , φ_2 , $\dot{\varphi}_1$, $\dot{\varphi}_2$ если следящая сила P удовлетворяет неравенству $P < \frac{1}{l} (2c + mgl)$.

Задача 4.7

Найти критическую скорость вращения Ω_{cr} шарнирной оси физического маятника в горизонтальной плоскости, при которой нарушается устойчивость вертикального положения. Длина маятника l , его масса m , а главные центральные моменты инерции суть A_1 , A_2 , A_3 , причем главная ось инерции 3 направлена вдоль оси самого маятника, а ось 1 — вдоль его шарнирной оси. (рис. 4.3).

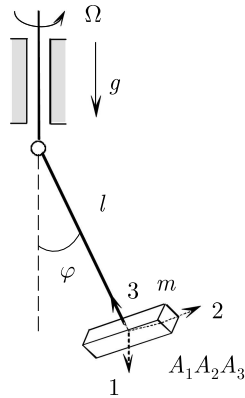


Рис. 4.3

Решение.

Кинетическая энергия маятника есть

$$T = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{1}{2} (A_1\omega_1^2 + A_2\omega_2^2 + A_3\omega_3^2),$$

где v_c — линейная скорость его центра масс, равная $v_c = \omega \times l$, причем ω — вектор абсолютной угловой скорости, имеющей проекции $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ на главные оси инерции 1,2,3. Учитывая, что $\omega = \Omega + \dot{\varphi}$, находим

$$\omega_1 = \dot{\varphi}, \quad \omega_2 = \Omega \sin \varphi, \quad \omega_3 = \Omega \cos \varphi.$$

Вычислив $v_c^2 = l^2 (\dot{\varphi}^2 + \Omega^2 \sin^2 \varphi)$, получим

$$T = \frac{1}{2} (ml^2 + A_1) \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} (ml^2 + A_2) \Omega^2 \sin^2 \varphi + \frac{1}{2} A_3 \Omega^2 \cos^2 \varphi.$$

Учитывая, что потенциальная энергия $\Pi = mgl(1 - \cos \varphi)$, приходим к следующему уравнению движения:

$$\ddot{\varphi} (ml^2 + A_1) + \frac{\Omega^2}{2} \sin 2\varphi (A_3 - A_2 - ml^2) = -mgl \sin \varphi.$$

Проводя его линеаризацию в окрестности $\varphi \equiv 0$, приходим к уравнению

$$\ddot{\varphi} (ml^2 + A_1) + \varphi [mgl + \Omega^2 (A_3 - A_2 - ml^2)] = 0,$$

откуда и следует искомое значение критической угловой скорости

$$\Omega_{cr} = \sqrt{\frac{mgl}{ml^2 + A_2 - A_3}}.$$

При $\Omega > \Omega_{cr}$ вертикальное положение становится неустойчивым и маятник отклоняется. Неустойчивость не возникает при любых значениях Ω , если $ml^2 + A_2 - A_3 < 0$.

Задача 4.8

Исследовать устойчивость вертикального положения двойного ортогонального маятника с точечными массами m_1 и m_2 под действием постоянного следящего момента M , действующего вдоль оси второго звена (см. рис. 4.4).

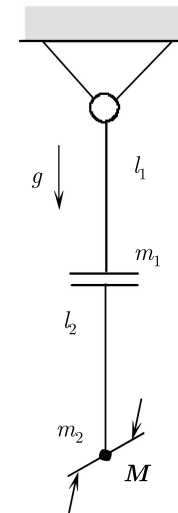


Рис. 4.4

Решение.

Очевидно, имеем $T = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$, где

$$v_1^2 = \dot{\varphi}_1^2 l_1^2, \quad v_2^2 = \dot{\varphi}_1^2 (l_1 + l_2 \cos \varphi_2)^2 + \dot{\varphi}_2^2 l_2^2,$$

$$T = \frac{1}{2}\dot{\varphi}_1^2 (m_1 l_1^2 + m_2 (l_1 + l_2 \cos \varphi_2)^2) + \frac{1}{2}\dot{\varphi}_2^2 m_2 l_2^2.$$

Здесь φ_1 и φ_2 — углы отклонения в шарнирах 1 и 2 соответственно.

Квадратичные аппроксимации потенциальной и кинетической энергии есть:

$$\Pi = -g((m_1 + m_2)l_1 \cos \varphi_1 + m_2 l_2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2) \\ \approx \frac{g}{2}(\varphi_1^2 (m_1 l_1 + m_2 l_1 m_2 l_2) + \varphi_2^2 m_2 l_2)$$

$$T = \frac{1}{2}\dot{\varphi}_1^2 (m_1 l_1^2 + m_2 (l_1 + l_2)^2) + \frac{1}{2}\dot{\varphi}_2^2 m_2 l_2^2.$$

Остается вычислить обобщенные силы, обусловленные моментом M . Составим элементарную работу δA этого момента на приращениях $\delta\varphi_1$ и $\delta\varphi_2$. Так как $M \cdot \delta\varphi_2 \equiv 0$ (в силу их взаимной ортогональности), то имеем $\delta A = M \cdot \delta\varphi_1 = M \sin \varphi_2 \delta\varphi_1$.

В результате система уравнений возмущенного движения будет

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_1 (m_1 l_1^2 + m_2 (l_1 + l_2)^2) + g\varphi_1 (m_1 l_1 + m_2 l_1 + m_2 l_2) = M\varphi_2, \\ \ddot{\varphi}_2 m_2 l_2^2 + g\varphi_2 m_2 l_2 = 0. \end{cases} \quad (4.19)$$

Положим теперь, что между массами m_1 , m_2 и длинами звеньев l_1 и l_2 существует соотношение

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{l_2 - l_1}{l_2 + l_1}.$$

Тогда система (4.16) примет вид

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_1 + k^2 \varphi_1 = \frac{M}{m_1 l_2^2} \varphi_2, \\ \ddot{\varphi}_2 + k^2 \varphi_2 = 0, \end{cases}$$

где $k^2 = \frac{g}{l_2}$, а ее характеристический полином будет

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} p^2 + k^2 - \frac{M}{m_1 l_2^2} & \\ 0 & p^2 + k^2 \end{vmatrix} = (p^2 + k^2)^2 = 0.$$

Наличие критических корней $\pm ik$ двойной кратности при дефекте характеристической матрицы, равном 1 (при $M \neq 0$), говорит о том, что решение $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ неустойчиво.

Задача 4.9

Исследовать устойчивость плоского движения космического аппарата (КА) по круговой орбите вокруг притягивающего центра при постоянном действии радиальной силы тяги.

Решение.

В полярных координатах r, φ уравнения движения КА имеют вид

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F - \frac{\mu m}{r^2}, \quad (4.20) \\ m \frac{d(r^2 \dot{\varphi})}{dt} = 0,$$

где m — масса КА, μ — гравитационный параметр притягивающего центра, F — сила радиальной тяги, вместо которой будем далее рассматривать отвечающее ей ускорение $f = \frac{F}{m}$. Тогда система (4.17) примет вид

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 + \frac{\mu}{r^2} = f, \quad (4.21) \\ r^2 \dot{\varphi} = L = \text{const},$$

где L — интеграл момента количества движения КА, который будем считать неизменным. В качестве невозмущенного движения (НД) выберем равномерное круговое движение КА, когда $r = r_*$, $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_*$ и $L = L_*$. Тогда из первого уравнения (4.18) находим условие связи

$$\dot{\varphi}_* = \sqrt{\frac{\mu}{r_*^3} - \frac{f}{r_*}}, \quad (4.22)$$

которое определяет предельно допустимое значение f . Линеаризуя систему (4.18) близ выбранного НД, получаем

$$\delta\ddot{r} - \dot{\varphi}_*^2 \delta r - \frac{2\mu}{r_*^3} \delta r - 2r_* \dot{\varphi}_* \delta\dot{\varphi}_* = 0, \\ 2r_* \delta r \dot{\varphi}_* + r_*^2 \delta\dot{\varphi}_* = 0.$$

Составляя характеристический определитель этой системы, получаем

$$\begin{vmatrix} p^2 - \dot{\varphi}_*^2 - \frac{2\mu}{r_*^3} & -2r_*\dot{\varphi}_*p \\ 2\dot{\varphi}_* & r_*p \end{vmatrix} = \\ = r_* \left[p^3 + p \left(3\dot{\varphi}_*^2 - \frac{2\mu}{r_*^3} \right) \right] = 0.$$

Двойной нулевой корень (относительно φ) означает, очевидно, неустойчивость по угловой координате φ , характерную для любых орбитальных движений КА. Условие же устойчивости по радиальной координате r сводится с учетом (4.19) к соотношению

$$f < \frac{1}{3} \frac{\mu}{r_*^2}, \quad (4.23)$$

означающему, что величина радиального активного ускорения не должна превышать $1/3$ от местного гравитационного ускорения.

Заметим, что соответствующее уравнение Рауса имеет вид

$$\ddot{r} + \left(3\dot{\varphi}_*^2 - \frac{2\mu}{r_*^3} \right) r = 0.$$

Его нулевое решение устойчиво при выполнении неравенства (4.20).

Задача 4.10

В условиях задачи 1.2 исследовать устойчивость стационарного решения $\vartheta = \vartheta_0 = \text{const}$, $\dot{\psi} = \dot{\psi}_0 = \text{const}$.

Решение.

Полученная система уравнений возмущенного движения (1.15) является нелинейной, так как в правых частях содержатся как линейные, так и квадратичные слагаемые. Если отбросить квадратичные слагаемые, то придем к системе уравнений первого приближения:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\dot{\psi}_0^2 \sin^2 \vartheta_0 x + \dot{\psi}_0 \sin 2\vartheta_0 \dot{y}, \\ \ddot{y} &= -2\dot{\psi}_0 \text{ctg} \vartheta_0 \dot{x}, \end{aligned} \quad (4.24)$$

представляющей собой систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Нетрудно построить характеристический определитель и характеристическое уравнение этой системы

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} p^2 + \dot{\psi}_0^2 \sin^2 \vartheta_0 & -p\dot{\psi}_0 \sin 2\vartheta_0 \\ 2p\dot{\psi}_0 \text{ctg} \vartheta_0 & p^2 \end{vmatrix} \\ = p^4 + p^2 \left(\dot{\psi}_0^2 \sin^2 \vartheta_0 + 4\dot{\psi}_0^2 \cos^2 \vartheta_0 \right) = 0.$$

Видно, что характеристическое уравнение имеет двойной нулевой корень и пару чисто мнимых корней. Для суждения об устойчивости такого критического случая необходимо в общем случае проводить специальное исследование как линейной (4.21), так и нелинейной (1.15) систем. Однако в данной задаче нетрудно доказать неустойчивость возмущенного движения $\vartheta = \vartheta_0$, $\dot{\psi} = \dot{\psi}_0$, исходя из соотношения (1.13). Видно, что если выбрать малые начальные возмущения x_0 и \dot{y}_0 так, чтобы условие (1.13) не нарушилось, то возмущенное движение также окажется коническим. Однако период этого движения будет уже не $\frac{2\pi}{\dot{\psi}_0}$, а $\frac{2\pi}{\dot{\psi}_0 + \dot{y}_0}$. Следовательно, апекс сферического маятника в возмущенном движении будет неуклонно удаляться от апекса в невозмущенном движении, ввиду чего последнее следует признать неустойчивым.

Глава 5

Устойчивость линейных автономных систем

В нормальной форме дифференциальные уравнения возмущенного движения имеют вид

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n, \\ \dots &= \dots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n,\end{aligned}\tag{5.1}$$

где коэффициенты a_{kj} – постоянные вещественные числа.

Случай, когда характеристическое уравнение системы (5.1) имеет простые корни, рассмотрен в главе 4. В этой главе представлены задачи при любой структуре корней характеристического уравнения.

Как и прежде, если вещественные части всех корней характеристического уравнения отрицательны, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво. Если среди корней характеристического уравнения имеется хотя бы один, вещественная часть которого положительна, то невозмущенное движение неустойчиво.

Если некоторые корни характеристического уравнения имеют нулевые вещественные части, а остальные корни имеют отрицательные вещественные части, то:

а) *невозмущенное движение будет устойчивым (не асимптотически), если корням с нулевой вещественной частью отвечают простые элементарные делители [11],*

Задача 5.1

109

б) *невозмущенное движение будет неустойчивым, если хотя бы один корень с нулевой вещественной частью является кратным корнем соответствующего элементарного делителя.*

Задача 5.1

Даны уравнения возмущенного движения:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 + x_2 - x_3, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4, \\ \dot{x}_3 &= 6x_2 - 3x_3 - 3x_4, \\ \dot{x}_4 &= -3x_1 + 3x_2 - 3x_4.\end{aligned}$$

Определить корни характеристического уравнения и исследовать устойчивость системы.

Решение.

Запишем матрицу $A - \lambda E$ для данной задачи:

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 - \lambda & -1 & -2 \\ 0 & 6 & -3 - \lambda & -3 \\ -3 & 3 & 0 & -3 - \lambda \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы имеет четыре корня: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = \lambda_4 = -1$.

Выполняем *элементарные матричные операции*. Прибавив третий столбец ко второму, умножив третий столбец на $(1 - \lambda)$ и прибавив результат к первому столбцу, получаем:

$$A - \lambda E \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ -2 + \lambda & 2 - \lambda & -1 & -2 \\ -3 + 2\lambda + \lambda^2 & 3 - \lambda & -3 - \lambda & -3 \\ -3 & 3 & 0 & -3 - \lambda \end{pmatrix}.$$

Поменяем местами третий и первый столбцы и домножим первый столбец на -1 . Далее, продолжая элементарные преобразования, получим нули вместо всех элементов первого столбца, за исключением первого

элемента:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 - \lambda & -2 + \lambda & -2 \\ 0 & 3 - \lambda & -3 + 2\lambda + \lambda^2 & -3 \\ 0 & 3 & -3 & -3 - \lambda \end{pmatrix}.$$

Затем прибавим второй столбец к третьему:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 & -2 \\ 0 & 3 - \lambda & \lambda(\lambda + 1) & -3 \\ 0 & 3 & 0 & -3 - \lambda \end{pmatrix}.$$

Умножая второй столбец на -1 и вычитая из результата четвертый столбец, получаем

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & -2 \\ 0 & \lambda & \lambda(\lambda + 1) & -3 \\ 0 & \lambda & 0 & -3 - \lambda \end{pmatrix}.$$

Теперь вычтем вторую строку из третьей и из четвертой строки:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & -2 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda + 1) & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 - \lambda \end{pmatrix}.$$

Умножим второй столбец на 2 и четвертый на λ , прибавим четвертый столбец ко второму и поменяем знак четвертого столбца:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -\lambda & \lambda(\lambda + 1) & 1 \\ 0 & -\lambda(\lambda + 1) & 0 & 1 + \lambda \end{pmatrix}.$$

Поделим вторую строку на 2 и вычтем ее из третьей, умножим вторую строку на $(1 + \lambda)$ и вычтем из четвертой:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & \lambda(\lambda + 1) & 0 \\ 0 & -\lambda(\lambda + 1) & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поменяем местами второй и четвертый столбцы, умножим третью строку на $(\lambda + 1)$ и вычтем результат из четвертой строки:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda + 1) & -\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda(\lambda + 1)^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поменяем местами третий и четвертый столбцы и изменим их знак; затем домножим третий столбец на $(\lambda + 1)$ и прибавим результат к четвертому столбцу:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda(\lambda + 1)^2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы получили матрицу в нормальной диагональной форме (каноническая форма Жордана). Корни определителя равны $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -1$ и $\lambda_4 = -1$. Этим корням соответствуют следующие решения в нормальных координатах:

$$z_1 = z_{01}, \quad z_2 = z_{02}, \quad z_3 = z_{03}e^{-t}, \quad z_4 = (z_{04} + z_{03}t)e^{-t}, \quad (5.2)$$

где z_{01} , z_{02} , z_{03} и z_{04} — начальные значения соответствующих координат.

Так как решение (5.2) устойчиво относительно нормальных координат, то решение относительно координат x также устойчиво. (e^{-t} убывает значительно быстрее, чем растет полином.)

Задача 5.2

Даны уравнения возмущенного движения:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 - 2x_2 + x_4, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4, \\ \dot{x}_3 &= 3x_2 - 2x_3 - 2x_4, \\ \dot{x}_4 &= -3x_1 + 6x_2 - x_3 - 4x_4. \end{aligned}$$

Определить корни характеристического уравнения и исследовать устойчивость системы.

Решение.

Найдем матрицу $A - E\lambda$ для данных уравнений:

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 - \lambda & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -2 - \lambda & -2 \\ -3 & 6 & -1 & -4 - \lambda \end{pmatrix}.$$

Умножим последний столбец на $-(1 - \lambda)$ и прибавим его к первому столбцу, затем умножим четвертый столбец на 2 и прибавим его ко второму столбцу. Далее, выполняя элементарные преобразования, получим вместо всех элементов в четвертом столбце нули, за исключением первого элемента:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 - 2\lambda & -1 - \lambda & -1 & 0 \\ 2 - 2\lambda & -1 & -2 - \lambda & 0 \\ 1 - 3\lambda - \lambda^2 & -2 - 2\lambda & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Домножим второй и третий столбцы на -1 , поменяем местами первый и четвертый столбцы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \lambda & 1 & 1 - 2\lambda \\ 0 & 1 & 2 + \lambda & 2 - 2\lambda \\ 0 & 2 + 2\lambda & 1 & 1 - 3\lambda - \lambda^2 \end{pmatrix}.$$

Вычтем вторую строку из четвертой:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \lambda & 1 & 1 - 2\lambda \\ 0 & 1 & 2 + \lambda & 2 - 2\lambda \\ 0 & 1 + \lambda & 0 & -\lambda - \lambda^2 \end{pmatrix}.$$

Вычтем четвертую строку из второй:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 - \lambda + \lambda^2 \\ 0 & 1 & 2 + \lambda & 2 - 2\lambda \\ 0 & 1 + \lambda & 0 & -\lambda - \lambda^2 \end{pmatrix}.$$

Поменяем местами второй и третий столбцы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 - \lambda + \lambda^2 \\ 0 & 2 + \lambda & 1 & 2 - 2\lambda \\ 0 & 0 & 1 + \lambda & -\lambda - \lambda^2 \end{pmatrix}.$$

Умножим второй столбец на $(1 - \lambda + \lambda^2)$ и вычтем его из четвертого столбца:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 + \lambda & 1 & -\lambda - \lambda^2 - \lambda^3 \\ 0 & 0 & 1 + \lambda & -\lambda - \lambda^2 \end{pmatrix}.$$

Умножим вторую строку на $-(2 + \lambda)$ и прибавим ее к третьей строке, и домножим четвертый столбец на -1 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 \\ 0 & 0 & 1 + \lambda & \lambda + \lambda^2 \end{pmatrix}.$$

Умножим третий столбец на $(\lambda + \lambda^2 + \lambda^3)$ и вычтем его из четвертого столбца; домножим четвертый столбец на -1 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \lambda & \lambda^2 + 2\lambda^3 + \lambda^4 \end{pmatrix}.$$

Умножим третью строку на $-(1 + \lambda)$ и прибавим ее к четвертой строке:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2(\lambda + 1)^2 \end{pmatrix}.$$

Матрица $A - \lambda E$ приведена к нормальной диагональной форме. Заметим, что инвариантные множители равны $E_1 = 1$, $E_2 = 1$, $E_3 = 1$ и $E_4 = \lambda^2(\lambda + 1)^2$. Следовательно, матрица $A - \lambda E$ имеет два элементарных делителя: λ^2 и $(\lambda + 1)^2$, с соответствующими корнями: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = \lambda_4 = -1$.

Уравнение возмущенного движения в канонических переменных (см. [11]) состоит из двух блоков Жордана (см.: нормальная форма Жордана (5.40) в [11]):

$$\dot{z}_1 = 0, \quad \dot{z}_2 = z_1, \quad \dot{z}_3 = -z_3, \quad \dot{z}_4 = z_3 - z_4.$$

Отсюда легко получить решение в виде

$$z_1 = z_{01}, \quad z_2 = z_{01}t + z_{02}, \quad z_3 = z_{03}e^{-t}, \quad z_4 = (z_{04} + z_{03}t)e^{-t}.$$

Канонические переменные неустойчивы, так как $z_2 \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$, и, следовательно, исходная система неустойчива.

Задача 5.3

Неоднородные линейные дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -5x_1 + 2x_3 + 2t^3 + 5t^2 + 2t, \\ \dot{x}_2 &= 41x_1 + 5x_2 - 19x_3 - 19t^3 - 41t^2 - 10t + 2, \\ \dot{x}_3 &= 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 3t^3 - 8t^2 - 4t \end{aligned}$$

имеют частное решение:

$$\bar{x}_1 = t^2, \quad \bar{x}_2 = 2t, \quad \bar{x}_3 = -t^3.$$

Определить устойчивость этого решения и построить решение уравнений возмущенного движения в канонических переменных.

Решение.

Устойчивость решения

$$x_1 = t^2, \quad x_2 = 2t, \quad x_3 = -t^3 \quad (5.3)$$

может быть исследована при помощи соответствующих однородных уравнений, т.е. уравнений (см. пример 3 из параграфа 1.3 в [11]):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -5x_1 + 2x_3, \\ \dot{x}_2 &= 41x_1 + 5x_2 - 19x_3, \\ \dot{x}_3 &= 5x_1 + 2x_2 - 3x_3. \end{aligned}$$

Матрица $A - \lambda E$ для этой системы имеет вид:

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} -5 - \lambda & 0 & 2 \\ 41 & 5 - \lambda & -19 \\ 5 & 2 & -(3 + \lambda) \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

Разделим третий столбец на 2 и поменяем местами первый и третий столбцы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -(5 + \lambda) \\ -\frac{19}{2} & 5 - \lambda & 41 \\ -\frac{3 + \lambda}{2} & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Умножим первый столбец на $(5 + \lambda)$ и прибавим к третьему столбцу, третий столбец умножим на -2 . Теперь, за исключением первого, все остальные элементы первого столбца — нули:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 - \lambda & 13 + 19\lambda \\ 0 & 2 & 5 + 8\lambda + \lambda^2 \end{pmatrix}.$$

Поделим второй столбец на 2, умножим его на $-(5 + 8\lambda + \lambda^2)$ и прибавим результат к третьему столбцу:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5 - \lambda}{2} & \frac{(\lambda + 1)^3}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Умножим третью строку на $(5 - \lambda)/2$ и вычтем ее из второй строки; поменяем местами вторую и третью строки:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda + 1)^3 \end{pmatrix}.$$

Матрица (5.3) приведена к нормальной диагональной форме; она содержит три инвариантных множителя

$$E_1 = 1, \quad E_2 = 1, \quad E_3 = (\lambda + 1)^3.$$

Корень $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$ — корень кратности 3 как для инвариантного множителя E_3 , так и для уравнения. Следовательно, дифференциальными уравнениями в канонических переменных являются (см. (5.52) в [11])

$$\dot{z}_1 = -z_1, \quad \dot{z}_2 = z_1 - z_2, \quad \dot{z}_3 = z_2 - z_3.$$

Решение имеет вид

$$z_1 = z_{01}e^{-t}, \quad z_2 = (z_{02} + z_{01}t)e^{-t}, \quad z_3 = \left(z_{03} + z_{02}t + z_{01}\frac{t^2}{2}\right)e^{-t}.$$

Решение устойчиво, следовательно, частное решение (5.2) асимптотически устойчиво.

Глава 6

Влияние структуры сил на устойчивость движения

Если считать, что положение системы определяется s обобщенными координатами q_1, \dots, q_s , то движение ее можно описать уравнениями Лагранжа 2-го рода

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k(q, \dot{q}) \quad (k = 1, \dots, s).$$

Здесь T — кинетическая энергия системы; обобщенные силы Q_k являются функциями координат q и скоростей \dot{q} .

Рассмотрим сначала случай, когда сила Q линейно зависит от радиус-вектора q и скорости \dot{q} изображающей точки:

$$Q = -C_1 q - B_1 \dot{q},$$

где C_1 и B_1 — заданные квадратные матрицы порядка s с постоянными элементами.

Матрицы C_1 и B_1 можно разбить на симметричные C и B и кососимметричные P и G части:

$$C_1 = C + P, \quad B_1 = B + G.$$

Тогда сила Q принимает вид

$$Q = K + R + D + \Gamma,$$

где

$$\mathbf{K} = -C\mathbf{q}, \quad \mathbf{R} = -P\mathbf{q}, \quad \mathbf{D} = -B\dot{\mathbf{q}}, \quad \mathbf{\Gamma} = -G\dot{\mathbf{q}}.$$

Сила $\mathbf{K} = -C\mathbf{q}$ с симметричной матрицей $C = \|c_{kj}\|$ называется *потенциальной* или *консервативной*, а квадратичная форма

$$\Pi = \frac{1}{2} C \mathbf{q} \cdot \mathbf{q} = \frac{1}{2} \sum_k \sum_j c_{kj} q_k q_j$$

равна потенциальной энергии системы.

Квадратичная форма F , составленная с помощью симметричной матрицы $B = \|b_{kj}\|$,

$$F = \frac{1}{2} B \dot{\mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \sum_k \sum_j b_{kj} \dot{q}_k \dot{q}_j,$$

если эта функция неотрицательна, называется *функцией рассеивания* или *диссипативной функцией Релея*; соответствующие силы $\mathbf{D} = -B\dot{\mathbf{q}}$ называются *диссипативными* силами с положительным сопротивлением (или просто *диссипативными* силами). Если квадратичная форма F определено-положительна, то диссипация называется *полной*, если она знакопостоянна — *неполной*. Если функция F может принимать отрицательные значения, то среди составляющих силы $\mathbf{D} = -B\dot{\mathbf{q}}$ имеются *ускоряющие* силы (*силы отрицательного сопротивления*).

Силы $\mathbf{\Gamma} = -G\dot{\mathbf{q}}$, линейно зависящие от скоростей $\dot{\mathbf{q}}$ и имеющие кососимметричную матрицу коэффициентов $G = \|g_{kj}\|$, называются *гироскопическими*.

Силы $\mathbf{R} = -P\mathbf{q}$, линейно зависящие от координат \mathbf{q} с кососимметричной матрицей коэффициентов $P = \|p_{kj}\|$, называются *неконсервативными позиционными* или просто *неконсервативными* (а также *циркуляционными*) силами.

Приведенная классификация линейных сил по их математической структуре удобна для линейных систем. Для общей характеристики сил воспользуемся их физическими свойствами.

Работа потенциальной силы $\mathbf{K}(q)$ не зависит от пути перемещения точки приложения силы. Для этой силы справедливо равенство

$$\mathbf{K}(q) = -\text{grad } \Pi \quad \text{или} \quad K_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \quad (j = 1, \dots, n),$$

где Π — потенциальная энергия.

Для того чтобы некоторая сила $\mathbf{K}(q)$, зависящая от положения изображающей точки M , в односвязной области была потенциальной, необходимо и достаточно, чтобы ее проекции удовлетворяли равенствам

$$\frac{\partial K_j}{\partial q_k} = \frac{\partial K_k}{\partial q_j} \quad (k, j = 1, \dots, s).$$

По определению Томсона и Тета сила $\mathbf{\Gamma}(\dot{q})$ называется *гироскопической*, если мощность (работа) ее тождественно равна нулю, т. е.

$$\mathbf{\Gamma} \cdot \dot{\mathbf{q}} = \sum_{k=1}^s \Gamma_k \dot{q}_k \equiv 0,$$

т. е. гироскопическая сила перпендикулярна скорости $\dot{\mathbf{q}}$ изображающей точки M .

Сила $\mathbf{D}(\dot{q})$, зависящая от скорости $\dot{\mathbf{q}}$ изображающей точки M , называется *диссипативной* силой. Диссипативным силам положительного сопротивления отвечает отрицательная мощность

$$N = \mathbf{D} \cdot \dot{\mathbf{q}} = \sum_{k=1}^s D_k \dot{q}_k \leq 0,$$

а силам отрицательного сопротивления — положительная мощность. Если мощность $N(\dot{q})$ является определено-отрицательной функцией скорости \dot{q}_k , то диссипацию называют *полной*, если мощность $N(\dot{q})$ — просто отрицательная функция скоростей \dot{q}_k , то диссипацию называют *неполной* или *частичной*.

Будем называть любую силу $\mathbf{R}(q)$, зависящую от координат системы q_k , неконсервативной позиционной силой, если она ортогональна радиусу-вектору \mathbf{q} изображающей точки

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{q} = \sum_{k=1}^s R_k q_k \equiv 0.$$

Можно доказать, что

любую непрерывную вместе со своими производными первого порядка силу $\mathbf{Q}(q)$, зависящую только от положения системы, можно разложить на потенциальную и неконсервативную позиционную составляющие

$$\mathbf{Q}(q) = -\text{grad } \Pi + \mathbf{R}(q),$$

где поле \mathbf{R} и потенциальная энергия Π подлежат определению.

Любую непрерывную вместе со своими производными первого порядка силу $Q(\dot{q})$, зависящую только от скоростей системы, можно представить суммой двух сил

$$Q(\dot{q}) = -\text{grad} F + \Gamma,$$

где Γ — гироскопическая сила, а F — некоторая скалярная функция скоростей \dot{q}_k .

Будем считать, что уравнения возмущенного движения относительно величин q и \dot{q} приведены к виду

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} &= -\frac{\partial \Pi}{\partial q_k} + D_k + \Gamma_k + R_k, \\ \frac{dq_k}{dt} &= \dot{q}_k \quad (k = 1, \dots, s). \end{aligned} \quad (6.1)$$

Предполагается, что при $q = 0$ обращаются в нуль потенциальные и неконсервативные позиционные силы, а при $\dot{q} = 0$ обращаются в нуль диссипативные и гироскопические силы.

Кроме уравнений возмущенного движения в форме (6.1) будем рассматривать случай, когда разложения всех сил по степеням q и \dot{q} содержат линейные члены. Для таких систем уравнения возмущенного движения приводятся к виду

$$A\ddot{q} + B_1\dot{q} + C_1q = Q^{(2)}.$$

В этом векторно-матричном уравнении A — определенно-положительная симметричная матрица, B_1 и C_1 — некоторые квадратные матрицы (элементы всех матриц постоянные числа); составляющие вектора $Q^{(2)}$ содержат координаты q_k и скорости \dot{q}_k в степени выше первой.

Или если разобьем матрицы B_1 и C_1 на симметричные и кососимметричные части, то получим

$$A\ddot{q} + B\dot{q} + Gq + Cq + Pq = Q^{(2)}.$$

Ставится задача определения характера устойчивости равновесия системы по структуре действующих сил.

Пусть на систему действуют только потенциальные силы, содержащие линейную часть, а все остальные силы отсутствуют ($D = \Gamma = R =$

$= 0$). Тогда после перехода к нормальным координатам $q = \Lambda z$, (где Λ — матрица преобразований, $\Lambda^T \Lambda = E$, $\Lambda^T C \Lambda = C_0$, где E — единичная, а C_0 — диагональная матрица) получим

$$\ddot{z} + C_0 z = Z$$

или

$$\ddot{z}_k + c_k z_k = Z_k, \quad k = 1, \dots, s,$$

где функции Z_k содержат координаты z_j и скорости \dot{z}_j в степени выше первой.

Числа c_k называются коэффициентами устойчивости системы, а число отрицательных чисел c_k — степенью неустойчивости.

Имеет место правило.

Если определитель матрицы C потенциальных сил исходных уравнений возмущенного движения положителен, то степень неустойчивости системы четная, если $\det C < 0$, то степень неустойчивости системы нечетная.

В монографии [11] приведен ряд теорем, характеризующих влияние неконсервативных позиционных, гироскопических и диссипативных сил на устойчивость равновесия потенциальной системы, а также устойчивость равновесия под действием одних гироскопических и диссипативных сил. Приведем некоторые из них.

Теорема 6.1. (Томсона–Тета–Четаева). *Если неустойчивость изолированного положения равновесия системы при одних потенциальных силах имеет нечетную степень, то гироскопическая стабилизация равновесия невозможна при любых членах, содержащих координаты и скорости в степени выше первой.*

Теорема 6.2. (Вторая теорема Томсона–Тета–Четаева). *Если изолированное положение равновесия системы устойчиво при одних потенциальных силах, то при добавлении произвольных гироскопических и диссипативных сил устойчивость равновесия сохраняется.*

Теорема 6.3. *Равновесие системы, на которую действуют одни гироскопические силы, всегда устойчиво относительно скоростей.*

Для того чтобы равновесие линейной автономной системы, находящейся под действием одних гироскопических сил, было устойчивым относительно координат, необходимо и достаточно, чтобы определитель матрицы гироскопических сил не равнялся нулю.

Теорема 6.4. Если в положении неустойчивого равновесия консервативной системы потенциальная энергия $\Pi(q)$ имеет максимум, определенный наименьшими членами разложения в ряд по степеням q , то при добавлении произвольных неконсервативных позиционных сил и линейных диссипативных сил равновесие останется неустойчивым.

Теорема 6.5. Если линейная система не содержит потенциальных сил, то

- 1) при нечетном числе координат асимптотическую устойчивость нельзя осуществить никакими гироскопическими, диссипативными и ускоряющими силами;
- 2) при четном числе координат для осуществления асимптотической устойчивости необходимо, помимо диссипативных сил, присоединить гироскопические силы.

Теорема 6.6. Если потенциальная энергия системы имеет максимум, то

- 1) при нечетном числе координат и любых нелинейных членах систему нельзя стабилизировать никакими гироскопическими, неконсервативно позиционными, ускоряющими и диссипативными силами;
- 2) при четном числе координат и при условии, что на систему действуют силы сопротивления с полной диссипацией, для стабилизации системы необходимо одновременно присоединить гироскопические и неконсервативно позиционные силы (вне зависимости от нелинейных членов).

Задача 6.1

В условиях задачи 3.12 составить дифференциальные уравнения движения и показать, что они содержат гироскопические силы. Определить степень неустойчивости в отсутствие гироскопических сил и показать, что система может быть стабилизирована гироскопическими силами.

Решение.

1. Уравнения (3.33) в переменных x, y (декартовы координаты точки O) имеют вид

$$\begin{aligned} m\ddot{x} - 2m\omega\dot{y} - m\omega^2(x + e) &= -cx, \\ m\ddot{y} + 2m\omega\dot{x} - m\omega^2y &= -cy. \end{aligned}$$

Возьмем слагаемые, которые содержат производные первой степени, т. е. $2m\omega\dot{y}$ и $2m\omega\dot{x}$. Эти слагаемые приводят к матрице коэффициентов:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2m\omega \\ 2m\omega & 0 \end{pmatrix},$$

которая является кососимметричной, что доказывает, что эти члены являются гироскопическими силами.

2. При отсутствии гироскопических сил коэффициенты обоих уравнений отрицательны $c_1 = c_2 = c - m\omega^2 < 0$, если $m\omega^2 > c$. Следовательно, степень неустойчивости равна 2. То, что гироскопические силы стабилизируют систему, показано в решении задачи 3.12.

Задача 6.2

Даны две неустойчивые потенциальные системы:

$$\begin{aligned} \text{I) } \ddot{q}_1 - q_1 + 2q_2 + 3q_3 &= 0, & \text{II) } \ddot{q}_1 - q_1 + 2q_2 + 3q_3 &= 0, \\ \ddot{q}_2 + 2q_1 + q_2 &= 0, & \ddot{q}_2 + 2q_1 + q_3 &= 0, \\ \ddot{q}_3 + 3q_1 + q_3 &= 0, & \ddot{q}_3 + 3q_1 + q_2 + q_3 &= 0. \end{aligned}$$

Почему системы потенциальны? Почему они неустойчивы? Можно ли стабилизировать их гироскопическими силами?

Решение.

1. Обе системы потенциальны, так как матрицы, содержащие координаты, симметричны.

2. В каждом случае для исследования устойчивости системы можно применить критерий Гурвица.

Для первой системы имеем:

$$\begin{pmatrix} -1 + \lambda^2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 + \lambda^2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 + \lambda^2 \end{pmatrix}.$$

При $\lambda = 0$ определитель этой матрицы равен -14 . На основании критерия Гурвица можно заключить, что первая система неустойчива и не может быть стабилизирована добавлением гироскопических сил, так как степень неустойчивости нечетная.

Для второй системы при $\lambda = 0$ получаем определитель:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 9 > 0.$$

При других λ этот определитель равен:

$$\begin{vmatrix} -1 + \lambda^2 & 2 & 3 \\ 2 & \lambda^2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 + \lambda^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^2(\lambda^4 - 1) + 6 + 6 - 3\lambda^2 - (\lambda^2 - 1) - 4(1 + \lambda^2) = \lambda^4 - 9\lambda^2 + 9.$$

Отрицательный знак перед λ^2 показывает, что система неустойчива, но она может быть стабилизирована добавлением к системе гироскопических сил, так как число неустойчивых координат равно двум. (См. также задачу 3.12; при отсутствии гироскопических сил $-2m\omega\dot{y}$ и $2m\omega\dot{x}$ и при $c < m\omega^2$ система неустойчива. Наличие гироскопических сил сделало систему устойчивой для всех c и ω .)

Задача 6.3

Кинетическая и потенциальная энергии гироскопического маятника равны соответственно:

$$T = \frac{1}{2} J_x (\cos^2 \alpha \dot{\beta}^2 + \dot{\alpha}^2) + \frac{1}{2} J_z (\dot{\varphi} - \dot{\beta} \sin \alpha)^2,$$

$$\Pi = Pl \cos \beta \cos \alpha,$$

где α и β — углы, определяющие положение оси гироскопа относительно неподвижной системы координат (x', y', z') , φ — угол собственного вращения гироскопа, $J_x = J_y$ и J_z — моменты инерции гироскопа в его главных осях (x, y, z) , P — вес гироскопа, а l — расстояние от его центра тяжести до точки подвеса (см. рис. 6.1).

Используя циклический интеграл

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = J_z (\dot{\varphi} - \dot{\beta} \sin \alpha) = H = \text{const},$$

составить уравнения движения оси гироскопа и определить, при каком значении момента количества движения H верхнее положение маятника будет стабилизировано гироскопическими силами.

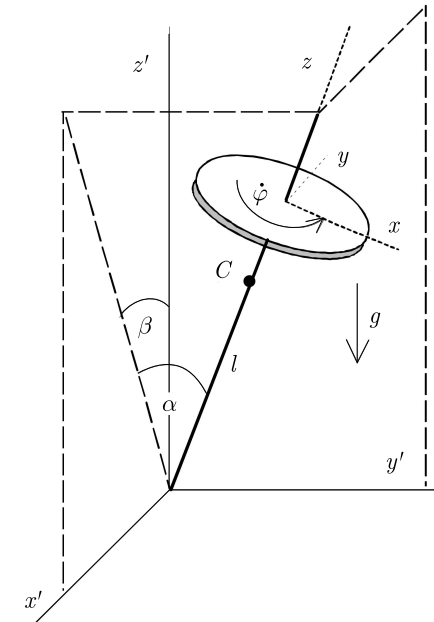


Рис. 6.1

Решение.

Считая углы α и β малыми, запишем кинетическую и потенциальную энергии системы с точностью до членов второго порядка:

$$T = \frac{1}{2} J_x (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) + \frac{1}{2} J_z (\dot{\varphi} - \dot{\beta} \alpha)^2,$$

$$\Pi = -\frac{1}{2} Pl (\alpha^2 + \beta^2),$$

опустив в выражении для Π постоянную величину Pl . Тогда уравнения Лагранжа запишутся в виде:

$$J_x \ddot{\alpha} - H \dot{\beta} - Pl \alpha = 0,$$

$$J_x \ddot{\beta} + H \dot{\alpha} - Pl \beta = 0,$$

$$H = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = J_z (\dot{\varphi} - \dot{\beta} \alpha)$$

с характеристическим уравнением:

$$\begin{vmatrix} J_x \lambda^2 - Pl & -H\lambda \\ H\lambda & J_x \lambda^2 - Pl \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\begin{aligned} J_x^2 \lambda^4 + (H^2 - 2J_x Pl) \lambda^2 + P^2 l^2 &= 0, \\ \lambda^2 &= \frac{-(H^2 - 2J_x Pl) \pm \sqrt{(H^2 - 2J_x Pl)^2 - 4J_x^2 P^2 l^2}}{2J_x^2} = \\ &= \frac{-(H^2 - 2J_x Pl) \pm \sqrt{H^4 - 4H^2 J_x Pl}}{2J_x^2}. \end{aligned}$$

Если $H > 2\sqrt{J_x Pl}$, то под знаком корня стоит положительная величина и оба значения λ^2 вещественны и отрицательны, и, следовательно, верхнее вертикальное положение маятника будет устойчиво в первом приближении.

Задача 6.4

Дифференциальные уравнения гироскопической системы имеют вид:

$$A\ddot{q} + HG\dot{q} + Cq = 0. \quad (6.2)$$

Здесь A , G и C — постоянные квадратные ($n \times n$) матрицы, причем $A = A^T$ — положительно определенная симметричная матрица, составленная из инерционных коэффициентов системы; $G = -G^T$ — кососимметричная матрица гироскопических коэффициентов; $C = C^T$ — симметричная матрица квазиупругих коэффициентов, в спектре которой могут быть как положительные, так и отрицательные собственные числа. Это означает, что состояние равновесия $q \equiv 0$ — статически неустойчиво.

Показать, что посредством выбора достаточно большого значения скалярного параметра H можно добиться гироскопической стабилизации неустойчивого равновесия.

Решение.

Отыскивая решение системы (6.2) в виде

$$q = Qe^{\lambda t},$$

где Q — матрица-столбец искомым комплексных коэффициентов, придем к следующей алгебраической системе:

$$(A\lambda^2 + HG\lambda + C)Q = 0, \quad (6.3)$$

условием разрешимости которой служит обращение в нуль определителя

$$|A\lambda^2 + HG\lambda + C| = 0. \quad (6.4)$$

Нетрудно показать, что получаемое отсюда характеристическое уравнение содержит только четные степени неизвестного параметра λ . Для этого достаточно заменить λ на $-\lambda$, имеем:

$$\Delta(-\lambda) = |A\lambda^2 - HG\lambda + C|.$$

Так как перемена местами столбцов и строк не изменит определитель, имеем:

$$\Delta(-\lambda) = |A^T \lambda^2 - HG^T \lambda + C^T|.$$

Матрицы A и C — симметричны, следовательно, $A^T = A$ и $C^T = C$. Матрица G кососимметричная, поэтому $G^T = -G$ (см. уравнение (5.16) в [11]). Следовательно,

$$\Delta(-\lambda) = |A\lambda^2 + HG\lambda + C| = \Delta(\lambda).$$

Далее, обозначив через Q_s собственный столбец, отвечающий корню λ_s , а \bar{Q}_s — комплексно сопряженный столбец, покажем, что билинейные формы $\bar{Q}_s^T A Q_s = a_s$ и $\bar{Q}_s^T C Q_s = c_s$ вещественны, а форма $\bar{Q}_s^T G Q_s = 2ig_s$ мнима. Действительно, полагая $q = u + iv$, $\bar{q} = u - iv$, находим для произвольной матрицы B

$$\bar{Q}_s^T B Q = (u - iv)^T B (u + iv) = \bar{u}_s^T B u + \bar{v}_s^T B v + i(\bar{u}_s^T B v - \bar{v}_s^T B u),$$

откуда следует, что в случае $B^T = B$ получаем вещественное число (так как выражение в скобке обращается в нуль), в случае же $B = -B^T$ получаем число мнимое. Возвращаясь к уравнению (6.3), домножим его слева на \bar{Q}_s^T и получим для λ_s следующее квадратное уравнение:

$$a_s \lambda_s^2 + 2iH g_s \lambda_s + c_s = 0$$

где, очевидно, $a_s > 0$, а $c_s \neq 0$. Выражая теперь

$$\lambda_s = \frac{iHg_s \pm \sqrt{-H^2g_s^2 - c_s a_s}}{a_s}$$

заключаем, что если $c_s > 0$, то λ_s лежит на мнимой оси. Однако даже и при $c_s < 0$ выбором достаточно большого значения H ($H > \frac{\sqrt{-c_s a_s}}{g_s}$) также можно вывести все множество корней λ на мнимую ось.

Глава 7

Устойчивость неавтономных систем

Пусть вещественные функции $V(x, t)$ определены для всех вещественных t и x_1, \dots, x_n в области

$$t \geq t_0, \quad \sum x_j^2 \leq \mu, \quad (7.1)$$

где t_0 и μ — постоянные ($t_0 \geq 0$, $\mu > 0$), причем μ может быть мало. Считается, что эти функции непрерывны и обращаются в нуль, когда все x_k равны нулю, т. е.

$$V(0, t) = 0.$$

Если в этих условиях для достаточно больших t_0 и достаточно малых μ функция $V \geq 0$ или $V \leq 0$, то функция V называется *знакопостоянной*, соответственно положительной или отрицательной.

Функция V , зависящая явно от времени t , называется знакоопределенной, если существует положительно-определенная, не зависящая от t функция $W(x)$ такая, что в области (7.1) для достаточно малых μ и достаточно больших t_0

$$V(x, t) \geq W(x)$$

или

$$-V(x, t) \geq W(x).$$

Пусть $V(x, t)$ — квадратичная форма

$$V(x, t) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{kj} x_k x_j,$$

где α_{kj} — функции времени t и переменных x_j :

$$\alpha_{kj} = \alpha_{kj}(x, t).$$

Если в области (7.1) для достаточно малых μ и достаточно больших t_0 все главные диагональные миноры матрицы

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11}(x, t) & \cdots & \alpha_{1n}(x, t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1}(x, t) & \cdots & \alpha_{nn}(x, t) \end{pmatrix}$$

удовлетворяют обобщенному критерию Сильвестра:

$$\Delta_1 = \alpha_{11} \geq \delta_1 > 0, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} \geq \delta_n > 0,$$

где $\delta_1, \dots, \delta_n$ — положительные постоянные, то $V(x, t)$ положительно-определенная.

Для отрицательно-определенной функции V , являющейся квадратичной формой, обобщенный критерий Сильвестра имеет вид

$$\Delta_1 \leq -\delta_1 < 0, \quad \Delta_2 \geq \delta_2 > 0, \quad \Delta_3 \leq -\delta_3 < 0, \dots,$$

где $\delta_1, \delta_2, \dots$ — положительные числа.

Если в области (7.1) значения $|V|$ не превосходят некоторого конечного положительного числа, то функция V называется *ограниченной*. Если ограниченная функция V такова, что для любого сколь угодно малого положительного l существует положительное число δ такое, что

$$t \geq t_0, \quad \sum x_k^2 \leq \delta$$

и выполнено неравенство

$$|V| < l,$$

говорят, что функция V имеет *бесконечно малый верхний предел*.

Полная производная функции $V(x, t)$ по времени t в силу уравнений возмущенного движения вычисляется по формуле

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x_1} X_1 + \cdots + \frac{\partial V}{\partial x_n} X_n + \frac{\partial V}{\partial t}.$$

Справедливы следующие теоремы Ляпунова.

Если для дифференциальных уравнений возмущенного движения можно найти знакоопределенную функцию V , производная которой \dot{V} в силу уравнений есть знакпостоянная функция противоположного знака с V или тождественно равна нулю, то невозмущенное движение устойчиво.

Если для дифференциальных уравнений возмущенного движения можно найти знакоопределенную функцию V , допускающую бесконечно малый высший предел, производная которой \dot{V} в силу уравнений является знакоопределенной функцией противоположного знака с V , то невозмущенное движение асимптотически устойчиво.

Если для дифференциальных уравнений возмущенного движения можно найти функцию V , допускающую бесконечно малый высший предел, производная которой \dot{V} в силу уравнений является знакоопределенной функцией, а сама функция V в окрестности нуля переменных $x_k = 0$ при всех $t \geq t_0$ может принимать значения того же знака, что и производная, то невозмущенное движение неустойчиво. И теорема Четаева:

если для дифференциальных уравнений возмущенного движения можно найти функцию V , ограниченную в области $V > 0$, существующую для всех $t \geq t_0$ и в сколь угодно малой окрестности нуля переменных $x_k = 0$, производная которой в силу уравнений была бы определено-положительной функцией в области $V > 0$, то невозмущенное движение неустойчиво.

В качестве примера рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + \alpha(t, x, \dot{x}) \dot{x} + \beta(t, x, \dot{x}) x = 0,$$

где положительные вещественные функции α и β вещественных переменных t, x и \dot{x} определены в области

$$t \geq t_0, \quad x^2 + \dot{x}^2 \leq \mu$$

(t_0, μ — некоторые положительные постоянные),

$$a \leq \alpha(t, x, \dot{x}) \leq A, \quad b \leq \beta(t, x, \dot{x}) \leq B,$$

а a , A , b и B — известные положительные числа. Достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого решения данного уравнения таковы:

$$\begin{aligned} \sqrt{B} - \sqrt{b} &< 2\sqrt{a_1(a - a_1)}, \\ 2\sqrt{b} &> \sqrt{a_1(A - a_1)} - \sqrt{a_1(a - a_1)}. \end{aligned}$$

Здесь

$$0 < \eta < a_1 < a = \inf \alpha,$$

а η — сколь угодно малая положительная постоянная.

Важным классом неавтономных систем являются линейные системы с коэффициентами, периодически зависящими от времени. Исследуем на устойчивость нулевое решение уравнения

$$\dot{\mathbf{x}} = P(t)\mathbf{x}, \quad (7.2)$$

где \mathbf{x} — вектор-функция

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

а $P(t)$ — квадратная матрица

$$P(t) = \begin{pmatrix} p_{11}(t) & \cdots & p_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1}(t) & \cdots & p_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

Будем считать, что матрица $P(t)$ имеет период T , т. е.

$$P(t+T) = P(t).$$

Совокупность n линейно независимых решений уравнения (7.2)

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{x}_n = \begin{pmatrix} x_{1n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix}$$

называется *фундаментальной системой* решений этого уравнения, а матрица

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

— *фундаментальной* матрицей.

Определитель фундаментальной матрицы обозначается

$$\Delta(t) = \det X(t).$$

Справедлива теорема Лиувилля

$$\Delta(t) = \Delta(0) e^{\int_0^t (p_{11} + \cdots + p_{nn}) dt}.$$

Не нарушая общности, можно считать, что

$$X(0) = E. \quad (7.3)$$

Тогда

$$\Delta(T) = e^{\int_0^T (p_{11} + \cdots + p_{nn}) dt}.$$

Обозначим фундаментальную матрицу при $t = T$ через $A = X(T)$, а характеристические числа этой матрицы, удовлетворяющие уравнению

$$\det(A - \rho I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \rho & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \rho & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \rho \end{vmatrix} = 0,$$

через ρ_k .

Справедлива следующая теорема.

Если абсолютные значения всех корней характеристического уравнения меньше единицы, то невозмущенное движение $x_1 = \cdots = x_n = 0$ асимптотически устойчиво.

Если абсолютное значение хотя бы одного из корней характеристического уравнения больше единицы, то невозмущенное движение $x_1 = \cdots = x_n = 0$ неустойчиво.

Если абсолютные значения части корней характеристического уравнения меньше единицы, а абсолютные значения остальных равны единице и при этом среди них нет кратных, то невозмущенное движение $x_1 = \cdots = x_n = 0$ неасимптотически устойчиво.

Заметим, что данная теорема во многом сходна с теоремами Ляпунова об устойчивости по первому приближению для автономных систем. В обоих случаях границы областей устойчивости определяются критическими значениями собственных чисел некоторых матриц: в случае автономных систем — нулевыми значениями вещественных частей

этих чисел, а в случае неавтономных систем — на границе области устойчивости модуль наибольшего по абсолютной величине характеристического числа равен 1.

Приближенный метод исследования устойчивости заключается в следующем. Задав начальные условия вида (7.3), численно определяем значения линейно независимых решений в конце периода T , то есть матрицу $X(T) = A$. Так как процедура численного интегрирования приводит к накоплению ошибки и, как следствие, к потере системой решений линейной независимости, следует обеспечить достаточную точность решения системы, после чего определяем характеристические числа $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ матрицы A . Хорошей проверкой результатов является выполнение равенства

$$\rho_1 \cdots \rho_n = e^{\int_0^T (p_{11} + \dots + p_{nn}) dt}.$$

Если среди характеристических чисел есть $\rho = +1$, то среди решений уравнения есть решение с периодом T . Если среди характеристических чисел есть $\rho = -1$, то среди решений уравнения есть решение с периодом $2T$.

Важным примером уравнений с периодическими коэффициентами является уравнение Матье:

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + (\delta + \varepsilon \cos \tau) x = 0, \quad (7.4)$$

где безразмерное время τ определяется по формуле

$$\frac{2\pi}{T} t = \tau.$$

Для построения областей устойчивости ищем решения периодов 2π и 4π . Четные периодические решения периода 2π ищем в виде

$$x = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\tau.$$

Подставляя это представление в уравнение (7.4) и приравнявая коэффициенты при $\cos k\tau$ нулю, получим уравнение для определения коэффициентов a_k . Условие существования нетривиального решения —

равенство нулю бесконечного определителя

$$\begin{vmatrix} \delta & \varepsilon & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{\varepsilon}{2} & \delta - 1 & \frac{\varepsilon}{2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{\varepsilon}{2} & \delta - 4 & \frac{\varepsilon}{2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{\varepsilon}{2} & \delta - 9 & \frac{\varepsilon}{2} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\varepsilon}{2} & \delta - 16 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}.$$

Это уравнение устанавливает зависимость $\delta = \delta(\varepsilon)$, которая определяет границы области устойчивости. Для получения явного вида указанной зависимости раскроем определитель при фиксированном n . С увеличением n точность приближенного решения $\delta_n = \delta_n(\varepsilon)$ возрастает. Аналогичным способом получают три других уравнения.

Полученные области устойчивости изображены на диаграмме Айнса-Стретта (см. рис. 7.1). Отдельные области неустойчивости смыкаются в точках $\delta = n^2/4$, где n — целое число. Эти точки соответствуют параметрическому резонансу при малых ε .

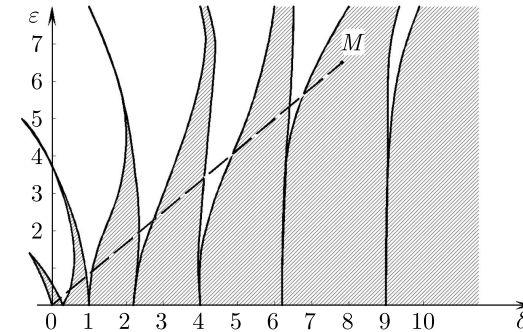


Рис. 7.1

При наличии в системе демпфирования уравнение примет вид

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + 2h \frac{dx}{d\tau} + (\delta + \varepsilon \cos \tau) x = 0.$$

С помощью постановки $x = e^{-h\tau z}$ оно приводится к виду

$$\frac{d^2 z}{d\tau^2} + (\delta - h^2 + \varepsilon \cos \tau) z = 0.$$

Это уравнение совпадает с уравнением Матье, если положить $\delta_1 = \delta - h^2$. В этом случае области неустойчивости уменьшаются, отрываясь в точках $\delta = n^2/4$ от оси абсцисс.

Задача 7.1

Дифференциальное уравнение возмущенного движения имеет вид:

$$\ddot{x} + ax + \left(2 - \sqrt{1 - x^2} \sin^3 t\right) x = 0,$$

где $a = \text{const}$.

Какому условию должно удовлетворять число a , чтобы обеспечить асимптотическую устойчивость системы относительно x и \dot{x} ?

Решение.

В книге [11] рассматривается часто встречающееся в приложениях уравнение (7.23)

$$\ddot{x} + \alpha(t, x, \dot{x})\dot{x} + \beta(t, x, \dot{x})x = 0,$$

в котором даны только постоянные положительные границы изменения вещественных функций α и β :

$$a \leq \alpha(t, x, \dot{x}) \leq A, \quad b \leq \beta(t, x, \dot{x}) \leq B.$$

В частности, доказано, что если $\alpha = a = \text{const}$, то система будет асимптотически устойчива относительно x , \dot{x} при выполнении неравенства

$$a > \sqrt{B} - \sqrt{b}.$$

В задаче 7.1

$$\beta = 2 - \sqrt{1 - x^2} \sin^3 t.$$

Очевидно, что при $B = 3$ (при $x = 0$ и $t = \pi$) и $b = 1$ (при $x = 0$ и $t = \pi/2$). Таким образом, система задачи асимптотически устойчива при $a > \sqrt{3} - 1$.

Задача 7.2

Возмущенное движение определяется следующей системой однородных линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + \sin t \cdot x_2, \\ \dot{x}_2 &= \cos t \cdot x_1 - x_2 - \sin t \cdot x_3, \\ \dot{x}_3 &= \cos t \cdot x_2 - x_3. \end{aligned}$$

Проинтегрировать численно эти уравнения на отрезке времени $[0, 2\pi]$ с начальными условиями:

$$x_{kj} = \begin{cases} 1, & k = j, \\ 0, & k \neq j. \end{cases}$$

Получить фундаментальную матрицу A , найти корни характеристического уравнения. Сделать контрольную проверку и определить устойчивость системы.

Решение.

Эту систему линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами (период равен 2π) следует интегрировать численно, используя любую подходящую программу на промежутке интегрирования $[0, 2\pi]$ с заданными начальными условиями. Далее можно получить матрицу, соответствующую (7.61), и уравнение, подобное (7.64) в [11]. Решая это уравнение, получаем корни характеристического уравнения:

$$\rho_1 = 2.566519 \cdot 10^{-5}, \quad \rho_{2,3} = 0.008405 \pm 0.013532 i.$$

Так как по абсолютной величине эти корни меньше единицы, то система асимптотически устойчива.

Используя

$$\rho_1 \rho_2 \rho_3 = \exp \int_0^{2\pi} \text{Sp}(\mathbf{P}) dt = \exp \int_0^{2\pi} (-3) dt,$$

можно проверить точность результатов. Проверка дает хорошее соответствие:

$$\rho_1 \rho_2 \rho_3 = 6.512428 \cdot 10^{-9}, \quad \exp(-6\pi) = 6.512412 \cdot 10^{-9}.$$

Задача 7.3

Уравнения возмущенного движения имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1^3 + \cos 2t \cdot x_1 x_2^3, \\ \dot{x}_2 &= (1 + \sin^2 t) x_1^2 x_2^2 - 2x_2^5. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Требуется исследовать устойчивость невозмущенного движения $x_1 = x_2 = 0$.

Решение.

Рассмотрим следующую функцию Ляпунова для этой системы:

$$V = \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2).$$

Это положительно определенная функция, не зависящая явно от времени. Ее производная по времени равна

$$\dot{V} = x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2.$$

Подставляя \dot{x}_1 и \dot{x}_2 из уравнений (7.4), получаем:

$$\dot{V} = -x_1^4 + \cos 2t x_1^2 x_2^3 + (1 + \sin^2 t) x_1^2 x_2^3 - 2x_2^6,$$

что после замены $\cos 2t$ на $\cos^2 t - \sin^2 t$ дает:

$$\dot{V} = -x_1^4 + (1 + \cos^2 t) x_1^2 x_2^3 - 2x_2^6. \quad (7.6)$$

Правая часть этого равенства представляет собой квадратичную функцию относительно x_1^2 и x_2^3 . Докажем, что \dot{V} — отрицательно-определенная функция. Для этого воспользуемся критерием Сильвестра. Матрица коэффициентов для переменных x_1^2 и x_2^3 имеет вид:

$$A(x, t) = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} (1 + \cos^2 t) \\ \frac{1}{2} (1 + \cos^2 t) & -2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда имеем:

$$\Delta_1 = a_{11} = -1, \quad \Delta_2 = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = 2 - \frac{1}{4} (1 + \cos^2 t)^2.$$

Таким образом, при $t = \pi n$, $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\Delta_1 \leq \delta_1 = -1 < 0, \quad \Delta \geq \delta_2 = 1 > 0$$

Эти неравенства показывают, что выполнены условия (7.7) в [11], и, таким образом, \dot{V} — отрицательно-определенная функция относительно x_1^2 и x_2^3 , а следовательно, и относительно x_1 и x_2 . Функция V положительно определенная, а ее производная по времени отрицательно-определенная. Следовательно, для системы уравнений (7.1) выполнены все условия теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости.

Задача 7.4

Исследовать на устойчивость следующие уравнения возмущенного движения:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{\cos^2 t}{\sqrt{1 + \sin^2 t}} x_1^2 - \frac{x_1 x_2^2}{\sqrt{1 + \cos^2 t}}, \\ \dot{x}_2 &= \frac{x_1^2 x_2}{\sqrt{1 + \cos^2 t}} - x_2^2. \end{aligned}$$

Решение.

Рассмотрим положительно-определенную функцию

$$V = \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2).$$

Ее производная по времени в силу уравнений возмущенного движения равна

$$\dot{V} = \frac{\cos^2 t}{\sqrt{1 + \sin^2 t}} x_1^3 - x_2^3.$$

Функция V положительно определенная во всей плоскости x_1, x_2 , а ее производная положительна в смысле Четаева в области $x_1 > 0$, $x_2 < 0$. Таким образом, положение равновесия $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$ неустойчиво по теореме Четаева.

Задача 7.5

Уравнение возмущенного движения имеет вид:

$$\ddot{x} + (k - 2 \cos^2 0.05 t) x = 0. \quad (7.7)$$

Определить, при каких значениях k имеет место параметрический резонанс.

Решение.

Это уравнение можно легко преобразовать в уравнение Матье. Для этого воспользуемся равенством:

$$2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha.$$

Тогда (7.6) представляется в виде:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + (k - 1 - \cos 0.1t) x = 0. \quad (7.8)$$

Теперь введем безразмерное время, положив $\tau = 0.1t$, так что

$$\frac{d\tau}{dt} = 0.1,$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = 0.1 \frac{dx}{d\tau},$$

$$\ddot{x} = 0.01 \frac{d^2 x}{d\tau^2}.$$

Тогда можем записать уравнение (7.6) в виде:

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + (\delta + \varepsilon \cos \tau) x = 0,$$

где

$$\delta = \frac{(k-1)}{0.01}; \quad \varepsilon = -0.01.$$

При малых ε параметрический резонанс имеет место в точках $\delta = \frac{n^2}{4}$.

Эти точки соответствуют $k = 1 + \frac{n^2}{4} 0.01$ ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$).

Глава 8

Устойчивость упругих систем

Анализ устойчивости упругих конструкций является очень важным во многих инженерных областях, таких как кораблестроение, авиа- и ракетостроение, архитектура и гражданское строительство. В данной главе рассматриваются задачи устойчивости упругих конструкций, находящиеся под действием статических нагрузок. Обсудим кратко три основных критерия, обычно используемых для таких исследований¹. Пользуясь этими критериями, можно исследовать устойчивость различных систем и определить критические значения консервативных и неконсервативных сил.

Статический критерий устойчивости.

Смежные формы равновесия.

Метод Эйлера

В классических задачах линейной теории упругости, когда допускаются только бесконечно малые деформации, предполагается, что условия равновесия выполняются за счет сил, действующих на недеформируемую упругую систему. Это допущение, которое существенно для теоремы Кирхгофа [16, 23], ведет к существованию единственного решения такой линейной системы.

Согласно теореме Кирхгофа задача о равновесии любого упругого тела в линейной постановке имеет единственное решение с точностью до перемещения тела как твердого целого. Это решение непрерывно зависит от внешних возмущений (внешних сил и заданных перемещений на границе тела), т. е. является устойчивым. Для справедливости теоремы Кирхгофа достаточно, чтобы потенциальная энергия, накопленная в теле в результате деформаций, была положительно определенной функцией деформаций.

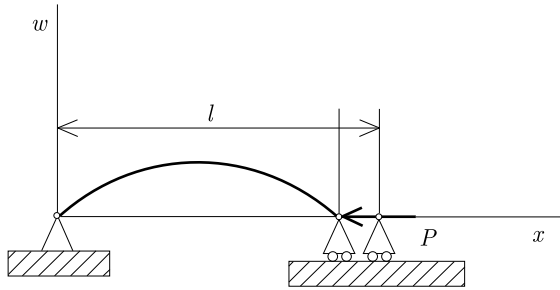
В формулировке задач бифуркации условия равновесия удовлетворяются за счет сил, действующих на деформированную систему. Это приводит к нелинейной постановке задачи в том смысле, что перемещения не являются линейными функциями приложенных внешних сил.

Уравнения бифуркации получаются при рассмотрении вариаций нелинейных уравнений. То есть каждая неизвестная величина x в этих уравнениях заменяется на $x^0 + \delta x$. Здесь x^0 описывает «начальное равновесное состояние». Устойчивость такого начального состояния, удовлетворяющего нелинейной системе уравнений, должна быть исследована. Дополнительные перемещения или вариации δx описывают смежное равновесное состояние, которое бесконечно близко к начальному состоянию. Эти вариации удовлетворяют линейным однородным уравнениям (уравнениям ветвления, выпучивания или бифуркации) и однородным граничным условиям, которые получаются как результат линеаризации изначально нелинейных уравнений относительно δx (см. параграф 1.1 в [11]). Рассматривая нетривиальные решения уравнений бифуркации, можно получить величину критической силы. При таком подходе удобно полагать, что нагрузка меняется пропорционально параметру нагружения $\lambda > 0$. Тогда переменные x_0 описывают первоначальное положение равновесия, а коэффициенты уравнений бифуркации зависят от параметра λ . Таким образом, задача о потере устойчивости сводится к задаче на собственные значения. Наименьшее (положительное) собственное значение принимается за величину критического значения $\lambda = \lambda_*$, соответствующего бифуркации в новое положение равновесия. Такой подход называется *статическим критерием или критерием Эйлера*, так как именно Эйлер впервые применил этот критерий в 1744 году для исследования устойчивости шарнирноопертого сжатого стержня [21].

¹В литературе иногда рассматривается также четвертый критерий, называемый «критерий начальных несовершенств» [5, 19].

Пример 8.1

Пользуясь критерием Эйлера, получить критическую нагрузку потери устойчивости шарнирно опертого стержня при осевом сжатии (рис. 8.1).

**Рис. 8.1**

Длина стержня — l , момент инерции поперечного сечения относительно центральной оси — I , модуль Юнга — E , осевая сила — P .

Решение.

Равновесие стержня описывается уравнением

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} + P \frac{d^2 w}{dx^2} = 0, \quad (8.1)$$

где w — поперечное смещение оси стержня. Граничные условия для шарнирно опертого стержня имеют вид:

$$w(0) = 0, \quad \left. \frac{d^2 w}{dx^2} \right|_{x=0} = 0, \quad w(l) = 0, \quad \left. \frac{d^2 w}{dx^2} \right|_{x=l} = 0.$$

Необходимо определить те значения величины P , при которых уравнение допускает нетривиальные решения.

Общее решение уравнения (8.1) имеет вид:

$$w(x) = A \sin kx + B \cos kx + Cx + D, \quad (8.2)$$

где

$$k^2 = \frac{P}{EI} \quad \text{или} \quad P = EI k^2.$$

Подставляя (8.2) в граничные условия, получаем:

$$B = C = D = 0, \quad \sin kl = 0. \quad (8.3)$$

Наименьшее ненулевое значение kl , удовлетворяющее (8.3), равно π . Следовательно,

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}.$$

Этот подход имеет несколько недостатков. Во-первых, он не отвечает прямо на вопрос об устойчивости упругого тела. Он связан с этим вопросом довольно косвенным образом, поскольку определяет лишь нагрузки (нагрузку), при которых существуют бесконечно близкие смежные положения равновесия. Во-вторых, подход Эйлера не учитывает распределение массы в системе, и в некоторых случаях он может давать неверный результат. Например:

1) когда начальное положение равновесия становится неустойчивым без появления бесконечно близких положений равновесия и система начинает испытывать явление флаттера (см. вторую часть решения задачи 8.1); или

2) когда исследуемое положение равновесия устойчиво и существуют близкие положения равновесия, но они неустойчивы (см. [19]). Для многих неконсервативных систем результаты, полученные на основе статического критерия, оказываются неверными (например, исследование устойчивости стержня под действием осевой сжимающей следящей силы). Тем не менее для консервативных систем этот подход дает верные результаты.

Энергетический критерий устойчивости. Метод Лагранжа–Дирихле

При исследовании устойчивости равновесия упругих систем удобно пользоваться энергетическим критерием. Он основан на теореме Лагранжа–Дирихле, которая утверждает, что если для механической системы под действием статических консервативных сил с идеальными

голономными стационарными связями² потенциальная энергия в положении равновесия достигает строгого минимума (т.е. положительно определена), то это положение устойчиво. Например, чтобы доказать, что система с одной степенью свободы имеет устойчивое положение равновесия, нужно вычислить потенциальную энергию этой системы Π и показать, что $\Pi' = 0$ и $\Pi'' > 0$ в положении равновесия.

Пример 8.2

Исследовать устойчивость изогнутого стержня, рассматриваемого в примере 8.1. Такая форма описывает закритическое состояние стержня.

Решение.

Если один конец стержня может смещаться только в осевом направлении, то главная деформация после потери устойчивости — изгиб. Положим, что стержень нерастяжим вдоль своей продольной оси. Тогда перемещение $w(s)$ равно

$$w(s) = - \int_0^s (1 - \cos \theta) ds,$$

где s — координата вдоль оси (рис. 8.1), $\theta = \frac{dw}{ds}$ — тангенс угла наклона изогнутого стержня. Изгибающий момент равен

$$M = EI \frac{d\theta}{ds},$$

так что потенциальная энергия принимает вид:

$$\Pi = \int_0^l \left(\frac{1}{2} EI \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 - P (1 - \cos \theta) \right) ds.$$

Для малых, но конечных деформаций упругая кривая может быть аппроксимирована первой формой, т.е. $w_1 = \sin \frac{\pi s}{l}$. Тогда решение для

² Работа, совершенная идеальными связями на любом виртуальном перемещении, равна нулю. Голономные связи не зависят от скоростей и ускорений.

изогнутого стержня в первом приближении имеет вид:

$$\theta(s) = c \theta_1(s), \quad \text{где } \theta_1(s) = \cos \frac{\pi s}{l},$$

где c — амплитудный коэффициент. Так как θ мало, имеем:

$$\begin{aligned} \cos \theta &= 1 - \frac{1}{2} \theta^2 + \frac{1}{24} \theta^4 - \dots, \\ 1 - \cos \theta &= \frac{1}{2} \theta^2 - \frac{1}{24} \theta^4 - \dots \end{aligned}$$

Далее:

$$\Pi \simeq \frac{EI \pi^2 c^2}{4l} - \frac{P c^2 l}{4} + \frac{P c^4 l}{64} = \frac{EI}{4l} \left(c^2 - \frac{P c^2}{P_{cr}} + \frac{P c^4}{16 P_{cr}} \right), \quad P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2},$$

и

$$\Pi'_c \simeq \frac{EI}{4l} \left(2c \left(1 - \frac{P}{P_{cr}} \right) + \frac{P}{4 P_{cr}} c^3 \right), \quad (8.4)$$

$$\Pi''_c \simeq \frac{EI}{4l} \left(2 \left(1 - \frac{P}{P_{cr}} \right) + \frac{3P}{4 P_{cr}} c^2 \right).$$

Уравнение (8.4) имеет два корня: $c_1 = 0$, который соответствует недеформированному стержню, и $c_2 = \pm 2\sqrt{2} \sqrt{\frac{P - P_{cr}}{P}}$, который существует только при $P > P_{cr}$ и соответствует форме выпучивания, описываемой первой собственной функцией. При $c = 0$

$$\Pi''_c = \frac{EI}{2l} \left(1 - \frac{P}{P_{cr}} \right).$$

Эта величина положительна только тогда, когда $P < P_{cr}$, т.е. недеформированный стержень устойчив при всех P , меньших чем критическая нагрузка, и неустойчив при всех $P > P_{cr}$. Когда $c^2 = \frac{8(P - P_{cr})}{P}$, то

$$\Pi''_c = \frac{EI}{4l} \left(2 \left(1 - \frac{P}{P_{cr}} \right) + \frac{3P}{4 P_{cr}} \frac{8(P - P_{cr})}{P} \right) \simeq \frac{4EI}{l} \frac{(P - P_{cr})}{P_{cr}}.$$

Эта величина положительна при $P > P_{cr}$, т.е. изогнутый стержень устойчив при всех $P > P_{cr}$. Подробнее эта задача рассмотрена в [1, 5, 14, 19].

Динамический критерий устойчивости. Метод Лагранжа–Ляпунова

Самый общий подход к исследованию устойчивости заключается в том, чтобы рассмотреть свободные колебания упругой системы относительно ее положения равновесия и исследовать возмущение этого движения. Этот метод, называемый *динамическим критерием устойчивости*, был первоначально предложен Лагранжем для консервативных механических систем. Позднее А. М. Ляпунов создал строгую математическую теорию устойчивости движения и дал определение устойчивости равновесия как частного случая движения. Равновесие механической системы считается устойчивым, если при любых малых начальных отклонениях от этого состояния (перемещениях и скоростях) можно сделать сколь угодно малыми отклонения в любой другой момент времени.

Динамический критерий может применяться в любой задаче об устойчивости упругих систем, но следует заметить, что исследование устойчивости возмущенного движения — гораздо более сложная задача, чем задача, соответствующая критерию Эйлера — определение нагрузок, при которых система допускает нетривиальные положения равновесия. Поэтому, если это не необходимо, динамический критерий редко используется при исследовании устойчивости положений равновесия. Важно отметить, однако, что для определенных задач об устойчивости этот метод является единственным надежным. Примерами таких задач могут быть: исследование устойчивости конструкций под действием динамических и неконсервативных нагрузок, устойчивость упругого тела в потоке газа, задачи параметрической устойчивости.

Нагрузка является консервативной, если работа при деформации зависит только от начальных и конечных состояний системы и не зависит от пути деформирования. В частности, силы, постоянные по величине и направлению, являются консервативными. Однако эти силы не охватывают всего класса консервативных нагрузок. Силы гидростатического давления, направление которых зависит от деформации, также консервативны. Заметим, что только динамический критерий гарантирует правильный результат, когда среди сил, действующих на систему, есть неконсервативные силы³.

³Согласно [11] (см. параграф 6.2) сила $\mathbf{R} = -\mathbf{P}\mathbf{q}$, компоненты которой являются линейными функциями обобщенных координат \mathbf{q} , с кососимметричной матрицей коэффициентов $\mathbf{P} = (p_{kj})$ является неконсервативной силой.

Пример 8.3

Применяя динамический критерий, исследовать устойчивость положения равновесия $w = 0$ для свободно опертого стержня при осевом сжатии (рис. 8.1). Стержень имеет погонную плотность материала ρ . (Заметим, что, в отличие от статического критерия, при использовании динамического критерия нужно знать распределение массы системы).

Решение.

Малые свободные колебания стержня около положения равновесия $w = 0$ описываются уравнением:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (8.5)$$

где t — время. Решение уравнения (8.5) имеет вид:

$$w(x, t) = A \sin(\omega t + \alpha) W(x),$$

где A и α могут быть найдены из начальных условий. Положение равновесия устойчиво, если частота ω вещественна. Чтобы найти $W(x)$, рассмотрим уравнение

$$EI \frac{d^4 W}{dx^4} + P \frac{d^2 W}{dx^2} - \rho \omega^2 W = 0 \quad (8.6)$$

с граничными условиями

$$W(0) = 0, \quad \left. \frac{d^2 W}{dx^2} \right|_{x=0} = 0, \quad W(l) = 0, \quad \left. \frac{d^2 W}{dx^2} \right|_{x=l} = 0.$$

Характеристическое уравнение, соответствующее уравнению (8.6), имеет вид:

$$k^4 + \lambda k^2 - \Omega^2 = 0, \quad \lambda = \frac{P}{EI}, \quad \Omega^2 = \omega^2 \frac{\rho}{EI},$$

и решение

$$W(x) = A \sinh k_2 x + B \cosh k_2 x + C \sin k_1 x + D \cos k_1 x, \quad (8.7)$$

где $k_1^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{\lambda^2 + 4\Omega^2} + \lambda)$, а $k_2^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{\lambda^2 + 4\Omega^2} - \lambda)$. Подставляя (8.7) в граничные условия, получаем $B = D = 0$ и

$$\begin{vmatrix} \sinh k_2 l, & \sin k_1 l \\ k_2^2 \sinh k_2 l, & -k_1^2 \sin k_1 l \end{vmatrix} = 0.$$

Наименьшее ненулевое решение этого уравнения равно $k_1 l = \pi$. Заметим, что Ω вещественна, если $\Omega^2 = k_1^2 (k_1^2 - \lambda) \geq 0$, т. е. если $\lambda \leq k_1^2 = \frac{\pi^2}{l^2}$. Тогда критическая нагрузка соответствует наибольшему λ , при котором выполняется последнее неравенство, т. е. $P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$. Положение равновесия устойчиво, если $P < P_{cr}$.

Задача 8.1

По горизонтальной трубке AB течет жидкость, как показано на рис. 8.2. Трубка имеет длину L , модуль упругости E и момент инерции ее поперечного сечения равен I . Скорость потока равна V , за секунду через трубку протекает масса жидкости m . Массой трубки можно пренебречь. Определить устойчивость трубки, если

- 1) оба конца трубки свободно оперты;
- 2) один конец трубки жестко заделан, а другой — свободен.

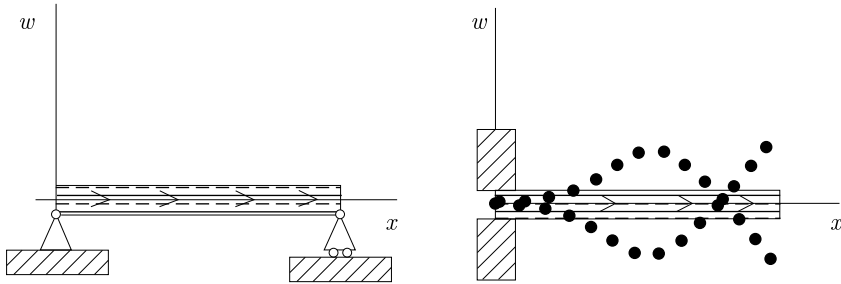


Рис. 8.2

Решение.

Уравнение равновесия трубки записывается в виде [17]

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} + mV \frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \quad (8.8)$$

или

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + K^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = 0,$$

где $K^2 = \frac{mV}{EI}$.

Решение этого уравнения имеет вид:

$$y = A \sin Kx + B \cos Kx + Cx + D.$$

1) Если оба края трубки свободно оперты, то граничные условия имеют вид:

$$y(0) = 0, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{x=0} = 0, \quad y(L) = 0, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{x=L} = 0.$$

Из этих условий следует, что

$$B = 0, \quad C = 0, \quad D = 0$$

и $\sin KL = 0$. Это означает, что критическое значение параметра потока (или массы жидкости, протекающей за секунду) может быть определено из равенства

$$(mV) |_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}.$$

2) Если один край трубки жестко заделан, а другой — свободен, то граничные условия принимают вид:

$$y(0) = 0, \quad \frac{dy}{dx} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{x=L} = 0, \quad \frac{d^3 y}{dx^3} \Big|_{x=L} = 0. \quad (8.9)$$

В этом случае никакое нетривиальное решение уравнения (8.8) не может удовлетворять граничным условиям (8.9). Следовательно, в этом случае следует рассматривать динамическое уравнение возмущенного движения:

$$\frac{m}{V} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + mV \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0$$

или

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{mV}{EI} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{m}{EIV} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0.$$

Разделяя переменные $y(x, t) = X(x)T(t)$, получим:

$$\frac{1}{X} \left(\frac{d^4 X}{dx^4} + K^2 \frac{d^2 X}{dx^2} \right) = -\frac{m}{EIV} \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = \Lambda.$$

Из этих двух уравнений можно заключить, что

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \frac{\Lambda EIV}{m} T = 0, \quad T = A \sin(\omega t + \alpha), \quad \omega^2 = \frac{\Lambda EIV}{m}$$

и

$$\frac{d^4 X}{dx^4} + K^2 \frac{d^2 X}{dx^2} - \Lambda X = 0. \quad (8.10)$$

Характеристическое уравнение для уравнения (8.10) имеет вид:

$$s^4 + K^2 s^2 - \Lambda = 0,$$

его корни равны

$$s_1^2 = \frac{\sqrt{K^4 + 4\Lambda} - K^2}{2}, \quad s_2^2 = -\tilde{s}_2^2 = \frac{\sqrt{K^4 + 4\Lambda} + K^2}{2}. \quad (8.11)$$

Таким образом, решение уравнения (8.10) имеет вид:

$$X(x) = A \sin \tilde{s}_2 x + B \cos \tilde{s}_2 x + C \sinh s_1 x + D \cosh s_1 x.$$

Из граничных условий (8.9) имеем:

$$X(0) = 0, \quad \frac{dX(0)}{dx} = 0, \quad \frac{d^3 X(L)}{dx^3} = 0, \quad \frac{d^2 X(L)}{dx^2} = 0.$$

Используя эти условия, получим:

$$B = -D, \quad A\tilde{s}_2 = -Cs_1$$

и

$$\begin{aligned} Cs_1 (\tilde{s}_2 \sin(\tilde{s}_2 L) + s_1 \sinh(s_1 L)) + \\ + D (\tilde{s}_2^2 \cos(\tilde{s}_2 L) + s_1^2 \cosh(s_1 L)) = 0, \\ s_1 (\tilde{s}_2^2 \cos(\tilde{s}_2 L) + s_1^2 \cosh(s_1 L)) + \\ + D (s_1^3 \sinh(s_1 L) - \tilde{s}_2^3 \sin(\tilde{s}_2 L)) = 0. \end{aligned}$$

Два последних уравнения составляют систему линейных однородных уравнений относительно C и D , определитель которой должен обращаться в нуль, чтобы обеспечить существование нетривиального решения, т. е. характеристическое уравнение принимает вид:

$$\begin{aligned} s_1^4 + \tilde{s}_2^4 + 2s_1^2 \tilde{s}_2^2 \cos(\tilde{s}_2 L) \cosh(s_1 L) - \\ - s_1 \tilde{s}_2 (s_1^2 - \tilde{s}_2^2) \sinh(s_1 L) \sin(\tilde{s}_2 L) = 0. \end{aligned}$$

Из соотношений (8.11) имеем:

$$s_1^4 + \tilde{s}_2^4 = K^4 + 2\Lambda, \quad s_1^2 \tilde{s}_2^2 = \Lambda, \quad \tilde{s}_2^2 - s_1^2 = K^2.$$

С учетом этих соотношений характеристическое уравнение преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} F(K, \Lambda) = K^4 + 2\Lambda + 2\Lambda \cos \tilde{s}_2 L \cosh s_1 L + \\ + \sqrt{\Lambda} K^2 \sinh s_1 L \sin \tilde{s}_2 L = 0 \end{aligned}$$

или в безразмерном виде:

$$F(\bar{K}, \bar{\Lambda}) = \bar{K}^2 + 2\bar{\Lambda} + 2\bar{\Lambda} \cos \bar{s}_2 \cosh \bar{s}_1 + \sqrt{\bar{\Lambda}} \bar{K} \sinh \bar{s}_1 \sin \bar{s}_2 = 0.$$

Здесь

$$\bar{s}_2 = \tilde{s}_2 L, \quad \bar{s}_1 = s_1 L,$$

$\bar{\Lambda}$ — безразмерный частотный параметр, а безразмерный параметр \bar{K} связан с параметром потока формулой

$$\bar{\Lambda} = \Lambda L^4 = \omega^2 \frac{mL^4}{EIV}, \quad \bar{K} = K^2 L^2 = \frac{mVL^2}{EI}.$$

Зависимость \bar{K} от частотного параметра $\bar{\Lambda}$ показана на рис. 8.3.

В предельной точке N ($\bar{K}_{cr} \simeq 20.19$) первая и вторая частоты системы сливаются, и при $\bar{K} > \bar{K}_{cr}$ система становится неустойчивой. Следовательно, критический параметр потока равен

$$(mV)|_{cr} \simeq \frac{20.19EI}{L^2}.$$

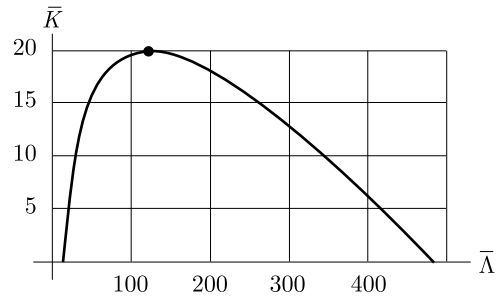


Рис. 8.3

Задача 8.2

Применяя динамический критерий, исследовать устойчивость положения равновесия $w = 0$ невесомого стержня, находящегося под действием осевой следящей силы. Стержень закреплен у основания, а наверху имеет массу m (рис. 8.4).

Решение.

Состояние стержня описывается дифференциальным уравнением

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (8.12)$$

с граничными условиями

$$w = w' = 0 \quad \text{при } x = 0; \quad w'' = 0, \quad EI w''' = m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad \text{при } x = l.$$

Решение уравнения будем искать в виде:

$$w(x, t) = f(x) \sin(\lambda t + \varepsilon), \quad (8.13)$$

где λ — частота колебаний, $f(x)$ и ε — неизвестные. Подставляя (8.13) в (8.12), получаем

$$f^{IV} + k^2 f'' = 0, \quad k^2 = \frac{P}{EI}.$$

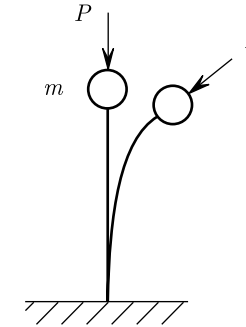


Рис. 8.4

Решение этого уравнения имеет вид:

$$f(x) = A + Bx + C \cos kx + D \sin kx.$$

Подставляя решение в граничные условия, получаем характеристическое уравнение, из которого следует:

$$\lambda^2 = \frac{k^3 EI}{ml^3} \frac{1}{\sin kl - kl \cos kl}.$$

Тогда перемещение стержня описывается соотношением:

$$w(x, t) = C(\tan kl - kx + \sin kx - \tan kl \cos kx) \sin(\lambda t + \varepsilon).$$

Когда величина λ имеет вещественное значение, стержень совершает колебания около положения равновесия $w = 0$, в противном случае он отклонится от этого положения. Поэтому система устойчива, если

$$\frac{k^3 EI}{ml^3} \frac{1}{\sin kl - kl \cos kl} \geq 0.$$

Положим $z = kl$. Неравенство

$$\sin z \geq z \cos z$$

выполняется при $0 \leq z \leq 4.493$. Критическая нагрузка соответствует наибольшему значению z , при котором выполняется приведенное выше неравенство, т. е.

$$P_{cr} = \frac{20.19EI}{l^2}.$$

При $P \leq P_{cr}$ система устойчива.

Задача 8.3

Круглая пластина имеет радиус R и нагружена таким образом, что вектор усилий имеет на контуре радиальную компоненту интенсивностью $-T_0$. Пластина жестко закреплена по краям. Используя теорию пластин фон Кармана, исследовать устойчивость пластины, пользуясь критерием Эйлера в предположении, что деформация осесимметрична и нет действующих объемных сил.

Решение.

Дифференциальные уравнения этой задачи таковы:

$$D \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dW}{dr} \right) \right) \right\} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r T_r \frac{dW}{dr} \right);$$

$$\frac{1}{Eh} r \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r^2 T_r) \right) = -\frac{1}{2} \left(\frac{dW}{dr} \right)^2. \quad (8.14)$$

Граничные условия, соответствующие пластине, показанной на рис. 8.5, имеют вид:

$$\frac{dT_r(0)}{dr} = 0; \quad \frac{dW(0)}{dr} = 0;$$

$$T_r(R) = -T_0; \quad W|_{r=R} = 0; \quad \frac{dW}{dr} \Big|_{r=R} = 0. \quad (8.15)$$

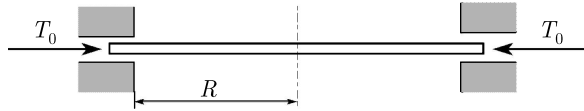


Рис. 8.5

Уравнения (8.14) учитывают симметрию задачи. Заметим, что

$$T_r = \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr}, \quad (8.16)$$

и система (8.14) принимает вид:

$$D \left\{ r \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dW}{dr} \right) \right) \right\} = \frac{d\Phi}{dr} \frac{dW}{dr};$$

$$\frac{1}{Eh} r \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\Phi}{dr} \right) \right) = -\frac{1}{2} \left(\frac{dW}{dr} \right)^2. \quad (8.17)$$

Введем безразмерные величины:

$$\xi = \frac{r}{R}; \quad \lambda^2 = \frac{R^2 T_0}{D} = \frac{12(1-\nu^2)R^2 T_0}{h^3 E};$$

$$q(\xi) = \left(\frac{hE}{T_0} \right)^{1/2} \frac{1}{R\xi} \frac{dW(\xi R)}{d\xi}; \quad p(\xi) = 1 + \frac{1}{R^2 T_0} \frac{1}{\xi} \frac{d\Phi(\xi R)}{d\xi}. \quad (8.18)$$

С учетом формул (8.18) система (8.17) примет вид:

$$\frac{1}{\xi^3} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^3 \frac{dq}{d\xi} \right) + \lambda^2 (1-p)q = 0; \quad \frac{1}{\xi^3} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^3 \frac{dp}{d\xi} \right) = -\frac{1}{2} q^2 \quad (8.19)$$

с граничными условиями

$$\frac{dq(0)}{d\xi} = 0; \quad \frac{dp(0)}{d\xi} = 0; \quad q(1) = 0; \quad p(1) = 0. \quad (8.20)$$

Заметим, что

$$q^0 \equiv 0; \quad p^0 \equiv 0 \quad (8.21)$$

является решением (тривиальным) системы (8.19), (8.20) для всех значений λ . Мы хотим найти те значения λ , для которых существуют нетривиальные решения, соответствующие изогнутым состояниям пластины. Линеаризация системы (8.19) вблизи решения (8.21) дает:

$$\frac{1}{\xi^3} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^3 \frac{dq}{d\xi} \right) + \lambda^2 q = 0; \quad p = 0. \quad (8.22)$$

Нетривиальные решения линеаризованной задачи суть:

$$\bar{q}_n = \frac{C}{\xi} J_1(\lambda_n \xi), \quad (8.23)$$

где J_1 — функция Бесселя первого рода первого порядка, C — произвольная постоянная, а λ_n — корни уравнения

$$J_1(\lambda_n) = 0. \quad (8.24)$$

Наименьшим корнем уравнения (8.24) является $\lambda_1 = 3.831706$, и соответствующая нагрузка равна

$$T_{0cr} = 14.68197 \frac{D}{R^2}. \quad (8.25)$$

Таким образом, точка ($q = 0$, $p = 0$, $\lambda_1 = 3.831706$) определяет точку бифуркации системы (9). Так как λ_1 — простое собственное число (геометрическая и алгебраическая кратности равны единице), следовательно, система (8.19) также имеет точку ($q = 0$, $p = 0$, $\lambda_1 = 3.831706$) как точку бифуркации; то есть по критерию Эйлера существует потеря устойчивости при $\lambda > \lambda_1$.

Задача 8.4

Исследовать устойчивость упругой пластины, помещенной в жесткий цилиндр (см. рис. 8.6) и прикрепленной к жесткой трубе O_1O_2 , которая вращается вокруг своей геометрической оси с постоянной угловой скоростью ω .

Решение.

Опуская подробности, напишем решение для компоненты напряжения σ_{rr}^0 в тривиальном положении:

$$\sigma_{rr}^0 = \rho_0 \omega^2 R^2 \left(\frac{1+\nu}{8} - \frac{3+\nu}{8} \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right). \quad (8.26)$$

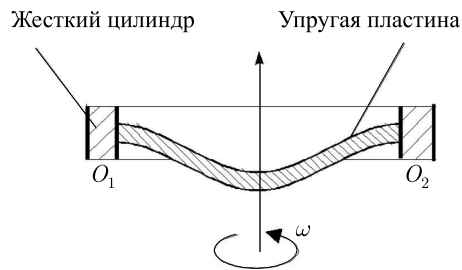


Рис. 8.6

Дифференциальное уравнение заданного движения получается, если предположить, что W — функция от r и времени t . Тогда

$$D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial W}{\partial r} \right) \right) \right\} = -\rho_0 h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r h \sigma_{rr}^0 \frac{\partial W}{\partial r} \right) \quad (8.27)$$

при условии, что

$$W(R, t) = 0; \quad \frac{\partial W}{\partial r}(R, t) = 0. \quad (8.28)$$

При записи уравнения (8.27) мы воспользовались тем фактом, что $T_r = h \sigma_{rr}^0$ и что единственной распределенной силой является сила инерции, т. е. $q_3 = -\rho_0 h (\partial^2 W / \partial t^2)$. Введем теперь безразмерные величины

$$\lambda = \frac{\rho_0 \omega^2 R^4}{E h^3}; \quad y = \frac{W}{R}; \quad x = \frac{r}{R}; \quad \tau = t \sqrt{\frac{D}{h \rho_0 R^4}}. \quad (8.29)$$

Подставляя формулы (8.26) и (8.29) в соотношения (8.27) и (8.28), мы получим

$$\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial y}{\partial x} \right) \right) \right\} + \frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} - 12(1-\nu^2) \lambda \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \left(\frac{1+\nu}{8} - \frac{3+\nu}{8} x^2 \right) \frac{\partial y}{\partial x} \right) = 0 \quad (8.30)$$

и

$$y(1, \tau) = 0; \quad \frac{\partial y}{\partial x}(1, \tau) = 0. \quad (8.31)$$

Для решения краевой задачи (8.30) и (8.31) воспользуемся методом Галеркина. При этом мы предполагаем:

$$y(x, \tau) = \sum_{j=0}^N C_j R_j(x) \exp(i\Omega\tau), \quad (8.32)$$

где C_j — постоянные, R_j — заданные функции, а частота Ω должна быть определена. Из формулы (8.32) следует, что при вещественных значениях Ω имеет место устойчивость. Возьмем R_i в виде

$$R_i = (1 - 2x^2 + x^4) x^{2i} \quad (8.33)$$

и $N = 5$ в формуле (8.32). Подставляя решение (8.32) в уравнение (8.30) и умножая результат на $xR_i(x)$, после интегрирования получаем:

$$\sum_{i=0}^N C_i (A_{ij} - \Omega^2 B_{ij}) = 0, \quad (8.34)$$

где

$$A_{ij} = \int_0^1 \left\{ \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left\{ x \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x \frac{dR_i}{dx} \right) \right) \right\} - \right. \\ \left. - 12(1 - \nu^2) \lambda \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x \left(\frac{1 + \nu}{8} - \frac{3 + \nu}{8} x^2 \right) \frac{dR_i}{dx} \right) \right\} R_j(x) dx;$$

$$B_{ij} = \int_0^1 R_i R_j x dx. \quad (8.35)$$

Нетривиальные постоянные C_i существуют, если выполняется следующее уравнение:

$$|A_{ij} - \Omega^2 B_{ij}| = 0. \quad (8.36)$$

Из условия (8.36) численные значения Ω^2 определяются через λ . В случае граничных условий (8.26) критическое значение λ (значение, при котором $\Omega = 0$) при $\nu = 0.3$ оказывается равным

$$\lambda_{cr} = 38.8533. \quad (8.37)$$

Сделаем замечание, касающееся анализа собственных форм, использованного в этом примере. Условие $\lambda < \lambda_{cr}$ гарантирует, что по первой форме колебаний пластина не будет колебаться с увеличивающейся амплитудой и что при $\lambda > \lambda_{cr}$ по крайней мере при одном начальном условии (соответствующем первой форме) пластина будет колебаться с увеличивающейся амплитудой и, следовательно, будет неустойчива. Остается, однако, показать, что все решения системы (8.30)–(8.31) могут быть получены в виде (8.32) и что ряд (8.32) сходится. В технических приложениях это обычно опускается, и значение (8.37) берется в качестве критической безразмерной скорости вращения.

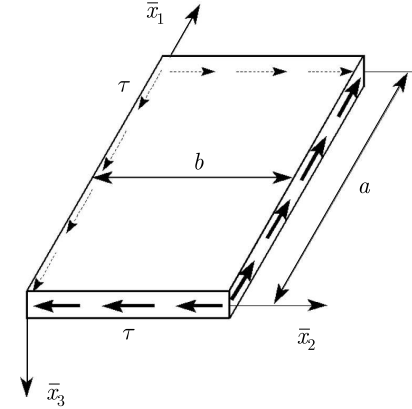


Рис. 8.7

Задача 8.5

Исследовать устойчивость прямоугольной пластины со сдвиговыми напряжениями интенсивности τ (на единицу длины стороны пластины) по всем своим сторонам (см. рис. 8.7).

Считаем, что пластина шарнирно опята по всем сторонам, так что граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} W(0, x_2) = \frac{\partial^2 W(0, x_2)}{\partial x_1^2} = 0; & \quad W(a, x_2) = \frac{\partial^2 W(a, x_2)}{\partial x_1^2} = 0; \\ W(x_1, 0) = \frac{\partial^2 W(x_1, 0)}{\partial x_2^2} = 0; & \quad W(x_1, b) = \frac{\partial^2 W(x_1, b)}{\partial x_2^2} = 0. \end{aligned} \quad (8.38)$$

Решение.

Воспользуемся энергетическим критерием для анализа устойчивости. Потенциальная энергия внутренних сил равна (см. [5])

$$\Pi^i = \frac{1}{2} D \int_A \int \{ (\nabla^2 W)^2 - (1 - \nu) L(W, W) \} dA, \quad (8.39)$$

где A — поверхность пластины и

$$\begin{aligned} \nabla^2 W &= \frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2}, \\ L(W, W) &= 2 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right). \end{aligned} \quad (8.40)$$

Работа внешних сил состоит из работы сдвиговых усилий τ на перемещениях границ пластины. Потенциальная энергия равна этой работе с отрицательным знаком. Можно показать, что (см. [5]) потенциальная энергия равна

$$\Pi^o = -\tau \int_A \int \left\{ \frac{\partial W}{\partial x_1} \frac{\partial W}{\partial x_2} \right\} dA. \quad (8.41)$$

Следовательно, для полной потенциальной энергии системы мы имеем

$$\Pi = \frac{1}{2} D \int_A \int \left\{ (\nabla^2 W)^2 - (1 - \nu) L(W, W) - \tau \frac{\partial W}{\partial x_1} \frac{\partial W}{\partial x_2} \right\} dA. \quad (8.42)$$

Используем метод Ритца, чтобы найти критическое значение τ . Для этого мы ищем решение W в виде:

$$W = \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 A_{mn} \sin \frac{m\pi x_1}{a} \sin \frac{n\pi x_2}{b}, \quad (8.43)$$

где A_{mn} — постоянные. Функция (8.43) удовлетворяет граничным условиям (8.38). Подставляя формулу (8.43) в интеграл (8.42) и дифференцируя результат по A_{mn} (необходимое условие минимума Π), получаем:

$$\begin{aligned} \pi^4 D \frac{ab}{4} A_{11} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 - \frac{32}{9} \tau A_{22} &= 0, \\ \frac{32}{9} \tau A_{11} - 4\pi^4 D ab A_{22} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 &= 0, \\ A_{12} = A_{21} &= 0. \end{aligned} \quad (8.44)$$

Пусть

$$\alpha = \frac{a}{b}; \quad \lambda = \frac{\pi^4 D}{32\alpha\tau b^2}. \quad (8.45)$$

С учетом замен (8.45) условие существования нетривиального решения уравнения (8.44) принимает вид:

$$\left| \frac{\lambda}{\alpha^2} (1 + \alpha^2)^2 - \frac{4}{9} - \frac{16\lambda}{\alpha^2} (1 + \alpha^2)^2 \right| = 0. \quad (8.46)$$

Из уравнения (8.46) следует, что

$$\lambda = \pm \frac{\alpha^2}{9(1 + \alpha^2)^2}, \quad (8.47)$$

и критическое сдвиговое усилие (на единицу длины стороны пластины) равно

$$\tau_{cr} = \frac{9\pi^4 D (1 + \alpha^2)^2}{32b\alpha^3 b^2}. \quad (8.48)$$

Мы завершаем этот пример двумя комментариями. Во-первых, значение (8.48) может быть уточнено, если использовать больше членов в разложении (8.43). Это приводит к более сложным системам, чем (8.44). Во-вторых, мы должны доказать, что $\Pi(A_{mn}, \lambda)$ имеет минимум при $\lambda = \lambda_{cr}$. Мы опускаем этот анализ.

Задача 8.6

Для пластины, показанной на рис. 8.8, шарнирно опертой по всем сторонам, используя теорию пластин фон Кармана, определить критическую нагрузку q согласно критерию Эйлера.

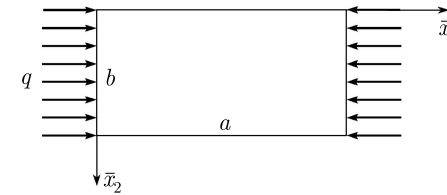


Рис. 8.8

Решение.

Уравнения равновесия пластины для малых деформаций, наложенных на тривиальное положение, при котором пластина плоская и на-

гружена по краям нагрузкой q , дают

$$D\nabla^4 W + q \frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} = 0.$$

Граничные условия для этого уравнения суть:

$$\begin{aligned} W = 0; \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} = 0 \quad \text{при } x_1 = 0 \text{ и } x_1 = a, \\ W = 0; \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} = 0 \quad \text{при } x_2 = 0 \text{ и } x_2 = b. \end{aligned} \quad (8.49)$$

Ищем решение задачи в виде:

$$W = C \sin \frac{m\pi x_1}{a} \sin \frac{n\pi x_2}{b}, \quad (8.50)$$

где C — постоянная, а m и n — целые числа. Подставляя (8.50) в уравнение равновесия получаем

$$q = \frac{D\pi^2}{b^2} \left(\frac{mb}{a} + \frac{n^2 a}{mb} \right)^2. \quad (8.51)$$

Критическая нагрузка тогда определяется следующим образом:

$$q_{cr} = \min_{m,n} \left(\frac{D\pi^2}{b^2} \left(\frac{mb}{a} + \frac{n^2 a}{mb} \right)^2 \right). \quad (8.52)$$

Полный бифуркационный анализ, показывающий, что уравнения пластин фон Кармана имеют точку бифуркации для сжимающей нагрузки (8.52), представлен в [22].

Задача 8.7

Критическая нагрузка осевого сжатия для цилиндрической оболочки средней длины, т. е., при $\sqrt{h/R} < L/R < \sqrt{R/h}$, где h — толщина оболочки, L — длина оболочки и R — ее радиус, может быть получена на основе уравнений пологих оболочек. Для цилиндрической оболочки с начальными несовершенствами формы \tilde{w} эти уравнения имеют

вид ([7])

$$\begin{aligned} \Delta^2 w - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - L(\tilde{w} + w, \Phi) = 0, \\ \Delta^2 \Phi + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2}L(w, w) + L(\tilde{w}, w) = 0. \end{aligned} \quad (8.53)$$

Здесь w — нормальный прогиб, Φ — функция усилий,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad L(u, v) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y},$$

x и y координаты в осевом и в окружном направлении соответственно. Безразмерные величины связаны с размерными (со знаком *) соотношениями

$$w = \frac{w^* c}{h}, \quad \tilde{w} = \frac{\tilde{w}^* c}{h}, \quad (x, y) = \frac{(x^*, y^*) \sqrt{c}}{\sqrt{hR}}, \quad \Phi = \frac{\Phi^* c^2}{Eh^3},$$

где E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона и $c^2 = 12(1 - \nu^2)$. Осевое усилие T , связанное с параметром нагрузки, определяется формулами

$$T = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad T = \frac{T^* Rc}{Eh^2}.$$

1) Определить критическую нагрузку в случае шарнирного опирания краев (не принимая во внимание граничные условия в окружном направлении).

2) Для цилиндрической оболочки с осесимметричными несовершенствами формы $\tilde{w} = \xi \cos x$ определить точку бифуркации в неосесимметричное состояние с «квадратными» волнами (длины волн в окружном и осевом направлениях равны).

Решение.

1) Представим функцию усилий в виде $\Phi = \frac{T y^2}{2} + \Phi_a$, где усилие T описывает основное состояние оболочки, Φ_a — дополнительная функция усилий. Затем линеаризуем систему (8.53) при $\tilde{w} = 0$:

$$\Delta^2 w - \frac{\partial^2 \Phi_a}{\partial x^2} - T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \Delta^2 \Phi_a + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

или

$$\Delta^4 w - \Delta^2 \frac{\partial^2 \Phi_a}{\partial x^2} - T \Delta^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \Delta^2 \Phi_a = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

и

$$\Delta^4 w - T \Delta^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0. \quad (8.54)$$

Предположим сначала, что форма потери устойчивости оболочки осесимметрична, тогда уравнение (8.54) упрощается:

$$\frac{d^8 w}{dx^8} - T \frac{d^6 w}{dx^6} + \frac{d^4 w}{dx^4} = 0. \quad (8.55)$$

Ищем решение этого уравнения в виде:

$$w = W \sin \frac{\pi n x^*}{L} = W \sin \lambda x, \quad \text{где} \quad \lambda = \frac{\pi n \sqrt{hR}}{L\sqrt{c}},$$

n — число волн в осевом направлении и

$$w(0) = w(L) = \frac{d^2 w(0)}{dx^2} = \frac{d^2 w(L)}{dx^2}.$$

Подставляя это решение в уравнение (8.55), получим:

$$W(\lambda^8 + T\lambda^6 + \lambda^4) = 0 \quad \text{или} \quad T = -(\lambda^2 + \lambda^{-2}).$$

Таким образом, безразмерная критическая нагрузка ($\min |T|$) равна -2 при $\lambda = 1$. В размерных переменных

$$T_{cr} = \frac{Eh^2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}R}.$$

Допустим теперь, что форма потери устойчивости неосесимметрична, т. е. $w = W \sin(px + \alpha) \sin(qy + \beta)$, где α и β могут быть равны 0, или π . Тогда после подстановки этой формы в уравнение (8.54) получим:

$$W((p^2 + q^2)^4 + T(p^2 + q^2)^2 p^2 + p^4) = 0$$

или

$$-T = f(p, q) = \frac{(p^2 + q^2)^2}{p^2} + \frac{p^2}{(p^2 + q^2)^2}.$$

Нас интересует наименьшее собственное значение, следовательно:

$$T_{cr} = -2 \quad \text{при} \quad p^2 + q^2 = p. \quad (8.56)$$

Таким образом, согласно классической теории оболочек существует бесконечно много форм потери устойчивости, длины волн которых характеризуются параметрами p и q в осевом и окружном направлениях соответственно. Эти параметры должны удовлетворять соотношению $p^2 + q^2 = p$. Например, пара $(p, q) = (1, 0)$ определяет осесимметричную форму потери устойчивости.

Эксперименты показывают [27], что при потере устойчивости реальных цилиндрических оболочек обычно образуется неосесимметричный прогиб, у которого длины волн в осевом и окружном направлении близки друг другу. Форма потери устойчивости с «квадратными» волнами $p \approx q$ наиболее чувствительна к начальным несовершенствам ([18, 24]).

2) Рассмотрим теперь цилиндрическую оболочку с начальным осесимметричным прогибом $\tilde{w} = \xi \cos x$. Определим нагрузку, при которой будет происходить бифуркация в неосесимметричное состояние с равными длинами волн в осевом и в окружном направлении. В этом случае докритический осесимметричный прогиб оболочки w_0 может быть определен из уравнения:

$$\frac{d^4 w_0}{dx^4} - T \frac{d^2 (w_0 + \tilde{w})}{dx^2} - \frac{d^2 \Phi_0}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^4 \Phi_0}{dx^4} + \frac{d^2 w_0}{dx^2} = 0$$

или

$$\frac{d^4 w_0}{dx^4} - T \frac{d^2 w_0}{dx^2} + w_0 = -T \frac{d^2 \tilde{w}}{dx^2}, \quad w_0 = \frac{-T\xi}{T+2} \cos x.$$

Для неосесимметричных компонент функции прогиба w_1 и функции усилий Φ_1 из (8.53) получим

$$\Delta^2 w_1 - T \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} \left(\frac{2\xi}{2+T} \right) \cos x - \frac{T\xi}{2+T} \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} = 0, \quad (8.57)$$

$$\Delta^2 \Phi_1 + \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \left(\frac{2\xi}{2+T} \right) \cos x = 0. \quad (8.58)$$

Согласно (8.56), если форма потери устойчивости имеет равные длины волн в осевом и в окружном направлениях, то $p = q = 1/2$, и мы можем искать форму потери устойчивости в виде $w = W_1 \cos \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2}$. В ([18, 24]) показано, что низшая критическая нагрузка соответствует именно этой форме. Из уравнения (8.58)

$$\Phi_1 = F_1 \cos \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2} + F_3 \cos \frac{3x}{2} \cos \frac{y}{2} + \dots, \quad F_1 \simeq W_1 \left(1 - \frac{\xi}{2+T} \right).$$

Подставляя эту функцию в уравнение (8.57), получим:

$$\frac{1}{4} W_1 \left(1 + T + 1 - \frac{2\xi}{2+T} + \frac{T\xi}{2(2+T)} \right) = 0$$

или, принимая во внимание, что при $|\xi| \ll 1$ величина T близка к значению классической критической нагрузки -2 :

$$2 + T - \frac{3\xi}{2+T} = 0, \quad \text{или} \quad T = -2 + \sqrt{3\xi}.$$

Следовательно, если амплитуда начального осесимметричного несовершенства равна ξ , то величина критической нагрузки уменьшается на $\sqrt{3\xi}$, или, в размерных переменных,

$$T_{cr} = \frac{Eh^2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}R} \left(1 - \frac{3^{3/4}(1-\nu^2)^{1/4}\xi_*^{1/2}}{2h^{1/2}} \right), \quad \text{где} \quad \xi = \frac{\xi_* c}{h}.$$

Глава 9

Частотный метод исследования устойчивости

Рассмотрим линейную неоднородную систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_\alpha}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{\alpha j} x_j + b_\alpha u, \quad (\alpha = 1, \dots, n), \quad (9.1)$$

$$\sigma = \sum_{j=1}^n c_j x_j,$$

где $a_{\alpha j}$, b_α , c_j – постоянные коэффициенты, u – некоторая заданная функция времени.

Будем называть функции u и σ соответственно *входом* и *выходом* системы.

Заменим в системе (9.1) формально оператор d/dt на p , получим

$$px_\alpha = \sum_{j=1}^n a_{\alpha j} x_j + b_\alpha u, \quad (\alpha = 1, \dots, n),$$

$$\sigma = \sum_{j=1}^n c_j x_j.$$

Исключив из этих равенств переменные x_1, \dots, x_n и выразив σ через u , придем к формуле

$$\sigma = W(p)u, \quad (9.2)$$

где

$$W(p) = \frac{Q_m(p)}{Q_n(p)}. \quad (9.3)$$

Здесь $Q_m(p)$ и $Q_n(p)$ – полиномы относительно p степени m и n соответственно. Очевидно, $m < n$ и $Q_n(p)$ является характеристическим многочленом однородной системы, получающейся из (9.1) при $u = 0$. Дробно-рациональная функция $W(p)$ называется *передаточной функцией* системы (9.1) от входа u к выходу σ .

Можно показать, что передаточная функция не изменяется при линейном преобразовании системы.

Если в передаточную функцию (9.3) подставить $p = i\omega$, где $i = \sqrt{-1}$, а ω – вещественное число, то получим функцию $W(i\omega)$, называемую *частотной характеристикой* системы (9.1).

Комплексная функция $W(i\omega)$ может быть представлена в виде

$$W(i\omega) = u(\omega) + iv(\omega).$$

На плоскости (u, v) при изменении ω конец вектора $W(i\omega)$ описывает кривую, представляющую собой *годограф* частотной характеристики (она называется также *амплитудно-фазовой характеристикой* системы).

Положив в системе (9.1) $u = -k\sigma$, где k – постоянная, получим однородную систему

$$\dot{x}_\alpha = \sum_{j=1}^n a_{\alpha j} x_j - kb_\alpha \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (\alpha = 1, \dots, n), \quad (9.4)$$

которую, в отличие от *разомкнутой* системы, называют *замкнутой*. Об асимптотической устойчивости системы (9.4) можно судить по поведению частотной характеристики.

На плоскости (u, v) построим вектор \mathbf{R} , выходящий из точки $(-1/k, 0)$ и оканчивающийся в точке $(u(\omega), v(\omega))$, лежащей на годографе частотной характеристики. При изменении ω угол θ между вектором и осью абсцисс будет меняться.

Критерий Найквиста утверждает, что для асимптотической устойчивости замкнутой системы (9.4) необходимо и достаточно, чтобы приращение $\Delta\theta$ угла θ при изменении ω от 0 до $+\infty$ равнялось нулю.

Частотные характеристики абсолютной устойчивости систем с непрерывной нелинейностью

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \frac{dx_\alpha}{dt} &= \sum_{j=1}^n a_{\alpha j} x_j + b_\alpha u \quad (\alpha = 1, \dots, n), \\ u &= -\varphi(\sigma), \\ \sigma &= \sum_{j=1}^n c_j x_j, \end{aligned} \quad (9.5)$$

где $\varphi(\sigma)$ – непрерывная функция, удовлетворяющая при $\sigma \neq 0$ условию

$$0 < \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma} < k \leq +\infty, \quad (9.6)$$

а $a_{\alpha j}$, b_α , c_j – постоянные коэффициенты.

Отличие системы (9.5) от (9.4) заключается в том, что (9.5) получается из системы (9.4) путем замыкания через ее нелинейное звено:

$$u = -\varphi(\sigma).$$

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. (некритический случай)

Пусть выполнены следующие условия:

- 1) нелинейная функция $\varphi(\sigma)$ удовлетворяет условию (9.6);
- 2) все полюсы $W(p)$ имеют отрицательные вещественные части;
- 3) существует такое вещественное число ϑ , что при всех $\omega \geq 0$ выполнено частотное условие

$$\frac{1}{k} + \operatorname{Re} [(1 + i\omega\vartheta)W(i\omega)] \geq 0. \quad (9.7)$$

Тогда система (9.4) абсолютно устойчива.

Теорема 2. (критический случай одного нулевого полюса)

Предположим, что выполнены следующие требования:

- 1) нелинейная функция $\varphi(\sigma)$ удовлетворяет условию (9.6);
- 2) передаточная функция $W(p)$ имеет один нулевой полюс, а остальные ее полюсы (если $n > 1$) имеют отрицательные вещественные части;

3) $\rho = \lim_{p \rightarrow 0} pW(p) > 0$, и существует такое вещественное число ϑ , что при всех $\omega \geq 0$ выполнено частотное условие (9.7).

Тогда система (9.5) абсолютно устойчива.

Теорема 3. (критический случай двух нулевых полюсов)

Пусть выполнены следующие условия:

1) функция $\varphi(\sigma)$ удовлетворяет неравенству (9.6) при $k = \infty$ и соотношению

$$\int_0^{\pm\infty} \varphi(\sigma) d\sigma = \infty.$$

2) передаточная функция $W(p)$ имеет два нулевых полюса, а остальные ее полюсы (если $n > 2$) имеют отрицательные вещественные части;

3)

$$\alpha = \lim_{p \rightarrow 0} p^2 W(p) > 0,$$

$$\rho = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{d}{dp} [p^2 W(p)] > 0,$$

$$\pi(\omega) = \omega \operatorname{Im} W(i\omega) < 0 \quad \text{для всех } \omega > 0,$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \pi(\omega) < 0.$$

Тогда система (9.5) абсолютно устойчива.

Задача 9.1

Дифференциальные уравнения, задающие движение гироскопического креновыравнивателя, имеют вид:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = -\vartheta - \sigma,$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = \vartheta + \sigma - \varphi(\sigma),$$

где ϑ — угол крена объекта, σ — величина, пропорциональная углу поворота внутреннего кольца карданного подвеса гироскопа, $\varphi(\sigma)$ — функция, которая описывает закон изменения корректирующего момента, удовлетворяющая следующим условиям:

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(\sigma)\sigma > 0 \quad \text{при } \sigma \neq 0, \quad \int_0^{\infty} \varphi(\sigma) d\sigma = \infty.$$

Задача 9.1

Исследовать устойчивость системы.

Решение.

Найдем передаточную функцию (от «входа» $-\varphi$ к «выходу» σ):

$$\begin{aligned} p\vartheta &= -\vartheta - \sigma, \\ p\sigma &= \vartheta + \sigma - \varphi. \end{aligned}$$

Исключим ϑ из первого уравнения:

$$(p+1)\vartheta = -\sigma, \quad \vartheta = -\frac{\sigma}{p+1},$$

что после подстановки во второе уравнение дает:

$$p\sigma = -\frac{\sigma}{p+1} + \sigma - \varphi$$

или

$$(p^2 + p)\sigma = -\sigma + p\sigma + \sigma - (p+1)\varphi.$$

Следовательно,

$$\sigma = -\frac{p+1}{p^2}\varphi, \quad W(p) = \frac{p+1}{p^2}.$$

Мы имеем критический случай двух нулевых полюсов. Применяя теорему 3 из параграфа 9.4 [11], получаем:

$$\alpha = \lim_{p \rightarrow 0} p^2 \frac{p+1}{p^2} = 1 > 0,$$

$$\rho = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{d}{dp} \left(p^2 \frac{p+1}{p^2} \right) = 1 > 0.$$

Тогда

$$W(i\omega) = \frac{i\omega + 1}{-\omega^2}, \quad \operatorname{Im} W(i\omega) = -\frac{1}{\omega}$$

и

$$\pi(\omega) = \omega \left(-\frac{1}{\omega} \right) = -1 < 0.$$

Таким образом, данная система абсолютно устойчива.

Задача 9.2

Движение гироскопической системы, которая управляет ориентацией космического корабля в плоскости тангажа, описывается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} a\dot{u} + Hv &= 0, \\ b\dot{v} - Hu + \varepsilon v &= \varphi(\sigma), \\ \dot{\sigma} &= u. \end{aligned}$$

Здесь H — момент количества движения гироскопа относительно его оси вращения, σ — угол тангажа, $v = \dot{\beta}$, где β — угол прецессии гироскопа, ε — коэффициент вязкого трения, a и b — главные моменты инерции, $\varphi(\sigma)$ — нелинейная характеристика управляющего момента, удовлетворяющая следующим условиям (см. рис. 9.1 и (9.13) из [11]):

$$\varphi(0) = 0, \quad 0 < \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma} < k \leq +\infty, \quad \sigma \neq 0.$$

Определить условия абсолютной устойчивости.

Решение.

Найдем передаточную функцию (от «входа» $-\varphi$ к «выходу» σ):

$$\begin{aligned} apu + Hv &= 0, \\ bpv - Hu + \varepsilon v &= \varphi, \\ p\sigma &= u. \end{aligned}$$

Исключим u и v из первого и третьего уравнений:

$$u = p\sigma, \quad v = -\frac{ap}{H}u = -\frac{ap^2}{H}\sigma,$$

что после подстановки во второе уравнение дает:

$$-\frac{abp^3}{H}\sigma - H p\sigma - \frac{a\varepsilon p^2}{H}\sigma = \varphi$$

или

$$\sigma = -\frac{H}{abp^3 + a\varepsilon p^2 + H^2 p}\varphi,$$

$$W(p) = \frac{H}{abp^3 + a\varepsilon p^2 + H^2 p}.$$

Мы имеем критический случай одного нулевого полюса.

Применяя теорему 2 из параграфа 9.4 [11], получаем:

$$\rho = \lim_{p \rightarrow 0} pW(p) = \frac{1}{H} > 0,$$

$$W(i\omega) = \frac{H}{-a\varepsilon\omega^2 + i\omega(H^2 - ab\omega^2)} = H \frac{-a\varepsilon\omega^2 + i\omega(ab\omega^2 - H^2)}{a^2\varepsilon^2\omega^4 + \omega^2(H^2 - ab\omega^2)^2}.$$

Теперь проверим частотное условие (9.14) в [11]:

$$\frac{1}{k} + \operatorname{Re}((1 + i\omega\vartheta)W(i\omega)) \geq 0.$$

При $\frac{1}{Hk} = \mu$ это условие принимает вид:

$$\begin{aligned} &\mu \left(a^2\varepsilon^2\omega^4 + \omega^2(H^2 - ab\omega^2)^2 \right) + \\ &\operatorname{Re}((1 + i\omega\vartheta)(-a\varepsilon\omega^2 + i\omega(ab\omega^2 - H^2))) \geq 0 \end{aligned}$$

или

$$\mu a^2\varepsilon^2\omega^4 + \mu a^2b^2\omega^6 - 2\mu H^2ab\omega^4 + \mu H^4\omega^2 - a\varepsilon\omega^2 + \vartheta H^2\omega^2 - \vartheta ab\omega^4 \geq 0.$$

Поделив на ω^2 и обозначив $\omega^2 = t$, имеем:

$$\mu a^2b^2t^2 + (\mu a^2\varepsilon^2 - 2\mu H^2ab - \vartheta ab)t + \mu H^4 + \vartheta H^2 - a\varepsilon \geq 0.$$

Далее найдем дискриминант

$$\begin{aligned} D &= (\mu a^2\varepsilon^2 - 2\mu H^2ab - \vartheta ab)^2 - 4\mu a^2b^2(\mu H^4 + \vartheta H^2 - a\varepsilon) = \\ &\mu^2 a^4 \varepsilon^4 + 4\mu^2 H^4 a^2 b^2 + \vartheta^2 a^2 b^2 - 4\mu^2 H^2 a^3 b \varepsilon^2 - 2\mu \vartheta a^3 b \varepsilon^2 \\ &+ 4\mu H^2 \vartheta a^2 b^2 - 4\mu^2 H^4 a^2 b^2 - 4H^2 \mu \vartheta a^2 b^2 + 4\mu a^3 b^2 \varepsilon = \\ &a^2 b^2 \vartheta^2 - 2\mu a^3 b \varepsilon^2 \vartheta + \mu a^3 \varepsilon (\mu a \varepsilon^3 + 4b^2 - 4\mu H^2 b \varepsilon) < 0. \end{aligned}$$

Необходимо найти такое ϑ , что $D < 0$. Здесь D — квадратный полином по ϑ , так что $D \rightarrow \infty$ при $|\vartheta| \rightarrow \infty$. Если $\Delta > 0$, найдется вещественное ϑ , при котором $D < 0$. Теперь вычисляем

$$\Delta = 4\mu^2 a^6 b^2 \varepsilon^4 - 4a^2 b^2 (\mu^2 a^4 \varepsilon^4 + 4\mu a^3 b^2 \varepsilon - 4\mu^2 H^2 a^3 b \varepsilon^2) > 0,$$

откуда

$$4\mu^2 H^2 a^3 b \varepsilon^2 - 4\mu a^3 b^2 \varepsilon > 0$$

или

$$\frac{1}{kH} H^2 \varepsilon > b.$$

Таким образом, мы получили следующее достаточное условие абсолютной устойчивости:

$$H\varepsilon > kb,$$

для нелинейностей, удовлетворяющих условию (9.13) в [11], т.е. $0 <$

$$< \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma} < k \text{ при } \sigma \neq 0, \varphi(0) = 0.$$

Легко проверить, что условие

$$H\varepsilon \geq kb \quad (9.8)$$

необходимо для абсолютной устойчивости в секторе (9.6). Действительно, если положить $\varphi(\sigma) = \lambda\sigma$, то будем иметь линейную систему, характеристический полином которой

$$abp^3 + a\varepsilon p^2 + H^2 p + H\lambda$$

удовлетворяет условию Гурвица при $a\varepsilon H^2 > abH\lambda$, т.е. $H\varepsilon > b\lambda$. Если условие (9.8) не выполняется, то существует такое $\lambda \in (0, k)$, что $H\varepsilon < b\lambda$, и линейная система не является асимптотически устойчивой.

Задача 9.3

Система регулирования паровой турбины с гидравлическим усилителем, в котором обратная связь осуществляется с помощью подвижной буквы при учете ее трения о неподвижный корпус, в упрощающих условиях описывается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \dot{\zeta} &= \eta_2, \\ \eta &= \zeta + \varphi(\eta_2), \\ \tau_1 \dot{\eta}_1 + \eta_1 &= -\eta, \\ \tau_2 \dot{\eta}_2 + \eta_2 &= \eta_1. \end{aligned}$$

Второе уравнение описывает работу промежуточного усилителя; ζ , η_1 , η_2 и η — переменные параметры, которые описывают состояние

системы; τ_1 и τ_2 — относительные постоянные времени; $\varphi(\eta_2)$ — характеристика силы трения, которая удовлетворяет условию:

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(\eta_2)\eta_2 > 0 \quad \text{при} \quad \eta_2 \neq 0.$$

Определить условие абсолютной устойчивости.

Решение.

Найдем передаточную функцию (от «входа» $-\varphi$ к «выходу» η_2):

$$p\zeta = \eta_2, \quad (\tau_1 p + 1)\eta_1 = -\zeta - \varphi(\eta_2), \quad (\tau_2 p + 1)\eta_2 = \eta_1.$$

Исключая ζ и η_1 , получаем:

$$(\tau_1 p + 1)(\tau_2 p + 1)\eta_2 = -\frac{\eta_2}{p} - \varphi$$

или

$$\eta_2 = -\frac{p}{\tau_1 \tau_2 p^3 + (\tau_1 + \tau_2)p^2 + p + 1} \varphi,$$

откуда

$$W(p) = \frac{p}{\alpha p^3 + \beta p^2 + p + 1},$$

где $\alpha = \tau_1 \tau_2$ и $\beta = \tau_1 + \tau_2$. В примере 1 параграфа 9.5 в [11] показано, что эта передаточная функция удовлетворяет частотному условию (9.7) $\tau_1 + \tau_2 > \tau_1 \tau_2$.

Задача 9.4

Система регулирования паровой турбины с двумя последовательно включенными усилителями и паровым объемом при наличии нелинейного трения в поршне пружинного сервомотора с проточным золотником описывается уравнениями:

$$\begin{aligned} \dot{\zeta} &= -\pi, \\ \psi_\eta \dot{\eta} &= \zeta - \eta, \\ \dot{\xi} &= \varphi(\sigma), \quad \sigma = \eta - \xi, \\ \psi_\pi \dot{\pi} + \pi &= \xi. \end{aligned}$$

В этих уравнениях ζ , η , ξ и π — относительные координаты машины, предварительного усилителя, сервомотора и давления пара соответственно, а ψ_η и ψ_π — относительные положительные постоянные

времени предварительного усилителя и парового объема. Нелинейное трение удовлетворяет условиям:

$$\varphi(0) = 0 \quad \text{при} \quad \sigma \neq 0, \quad \varphi(\sigma)\sigma > 0, \quad \int_0^\infty \varphi(\sigma)d\sigma = +\infty.$$

Определить область абсолютной устойчивости.

Решение.

Найдем передаточную функцию (от «входа» $-\varphi$ к «выходу» σ). Для этого в системе

$$\begin{aligned} p\zeta = -\pi, \quad \psi_\eta p\eta = \zeta - \eta, \quad p\xi = \varphi, \\ (\psi_\pi p + 1)\pi = \xi, \quad \sigma = \eta - \xi \end{aligned}$$

исключим все переменные, кроме σ и φ :

$$\begin{aligned} \xi = \frac{\varphi}{p}, \quad \pi = \frac{\xi}{\psi_\pi p + 1} = \frac{\varphi}{p(\psi_\pi p + 1)}, \\ \eta = \frac{\zeta}{\psi_\eta p + 1} = -\frac{\pi}{p(\psi_\eta \varphi + 1)} = -\frac{\varphi}{p^2(\psi_\pi p + 1)(\psi_\eta p + 1)}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\sigma = \eta - \xi = -\left(\frac{1}{p^2(\nu p^2 + \mu p + 1)} + \frac{1}{p}\right)\varphi,$$

где $\nu = \psi_\eta\psi_\pi$ и $\mu = \psi_\eta + \psi_\pi$.

Следовательно,

$$W(p) = \frac{\nu p^3 + \mu p^2 + p + 1}{p^2(\nu p^2 + \mu p + 1)},$$

и мы имеем критический случай двух нулевых полюсов. Применяя теорему 9.2, получим:

$$\alpha = \lim_{p \rightarrow 0} p^2 W(p) = 1 > 0,$$

и

$$\rho = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{d}{dp} (p^2 W(p)) = \frac{1 - \mu}{(1)^2} = 1 - \mu > 0.$$

Итак, должно выполняться условие

$$\mu < 1 \quad (\text{или } \psi_\pi + \psi_\nu < 1). \quad (9.9)$$

Последовательно вычисляя

$$W(i\omega) = -\frac{1 - \mu\omega^2 + i\omega(1 - \nu\omega^2)}{\omega^2(1 - \nu\omega^2 + i\omega\mu)}$$

и

$$\begin{aligned} \text{Im } W(i\omega) &= -\frac{1}{\omega^2} \frac{(1 - \mu\omega^2)(-\mu\omega) + \omega(1 - \nu\omega^2)^2}{(1 - \nu\omega^2)^2 + \omega^2\mu^2} \\ &= \frac{1}{\omega} \frac{\mu(1 - \mu\omega^2) - (1 - \nu\omega^2)^2}{(1 - \nu\omega^2)^2 + \omega^2\mu^2}, \end{aligned}$$

получаем

$$\pi(\omega) = \omega \text{Im } W(i\omega) = \frac{\mu(1 - \mu\omega^2) - (1 - \nu\omega^2)^2}{(1 - \nu\omega^2)^2 + \omega^2\mu^2}.$$

Условие

$$\pi(\omega) < 0$$

после замены $\omega^2 = t$ запишется в виде:

$$\mu - \mu^2 t - (1 - \nu t)^2 < 0$$

или

$$\nu^2 t^2 + (\mu^2 - 2\nu)t + 1 - \mu > 0. \quad (9.10)$$

Так как $\mu^2 - 2\nu = (\psi_\pi + \psi_\eta)^2 - 2\psi_\pi\psi_\eta = \psi_\pi^2 + \psi_\eta^2 > 0$, то из условия (9.9) следует, что условие (9.10) выполняется для всех $t \geq 0$.

Также в силу (9.9) имеем:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \pi(\omega) = \frac{\mu - (1)^2}{(1)^2} = \mu - 1 < 0.$$

Таким образом, по теореме 2 (9.9) является достаточным условием абсолютной устойчивости системы.

Задача 9.5

Работа некорректируемого гиросtabilизатора с принудительным вращением карданного подвеса и трением в оси прецессии описывается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_1 &= -\nu\sigma_1 + \mu v + \sigma_2, \\ \dot{\sigma}_2 &= -\sigma_1 - \varphi(\sigma_2), \\ \dot{v} &= \sigma_2.\end{aligned}$$

Здесь σ_1 , σ_2 и v — относительные координаты гиросtabilизатора, ν и μ — постоянные положительные параметры, а нелинейная функция $\varphi(\sigma_2)$ удовлетворяет условиям:

$$\varphi(0) = 0 \quad \text{для} \quad \sigma_2 \neq 0, \quad \varphi(\sigma_2)\sigma_2 > 0.$$

Определить, при каких условиях гиросtabilизатор абсолютно устойчив.

Решение.

Найдем передаточную функцию (от «входа» $-\varphi$ к «выходу» σ_2):

$$\begin{aligned}(p + \nu)\sigma_1 &= \mu v + \sigma_2, \\ p\sigma_2 &= -\sigma_1 - \varphi(\sigma_2), \\ pv &= \sigma_2.\end{aligned}$$

Исключаем v и σ_1 :

$$v = \frac{\sigma_2}{p}, \quad \sigma_1 = \frac{\mu\sigma_2}{(p + \nu)p} + \frac{\sigma_2}{p + \nu} = \frac{p + \mu}{p(p + \nu)}\sigma_2.$$

Находим

$$p\sigma_2 = -\frac{p + \mu}{p(p + \nu)}\sigma_2 - \varphi(\sigma_2)$$

или

$$\sigma_2 = -\frac{p(p + \nu)}{p^3 + p^2\nu + p + \mu}\varphi$$

и

$$W(p) = \frac{p(p + \nu)}{p^3 + p^2\nu + p + \mu}.$$

Пусть $\nu > \mu$, тогда выполнено условие Гурвица для знаменателя функции $W(p)$ и имеет место некритический случай. Применяя теорему 9.1 при $k = \infty$, $\vartheta = 0$, получим:

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} W(i\omega) &= \operatorname{Re} \frac{\nu\omega i - \omega^2}{\mu - \nu\omega^2 + i\omega(1 - \omega^2)} = \\ &= \frac{\nu\omega^4 - \mu\omega^2 + \nu\omega^2(1 - \omega^2)}{(\mu - \nu\omega^2)^2 + \omega^2(1 - \omega^2)^2} \geq 0.\end{aligned}$$

Это условие выполняется при $(\nu - \mu)\omega^2 \geq 0$, т. е. при $\nu > \mu$.

Таким образом, неравенство $\nu > \mu$ является условием абсолютной устойчивости.

Глава 10

Задачи для самостоятельного решения

К главе 1

1.1. К аперку обращенного математического маятника массой m прикреплена пружина жесткости c , сохраняющая горизонтальное положение при любых отклонениях маятника (рис. 10.1). Исследовать равновесие системы, считая усилие в пружине пропорциональным ее удлинению.

Ответ: при любом $P = mg$ система имеет устойчивое положение равновесия $\varphi = \pi$. Положение $\varphi = 0$ устойчиво при $P < cl$. Положение равновесия $\varphi = \pm \arccos \frac{P}{cl}$ существует при $P < cl$ и всегда неустойчиво.

1.2. К поршню кривошипно-шатунного механизма приложена сила P , направленная к оси вращения кривошипа (см. рис. 10.2). Шатун имеет массу M и длину b , кривошип — массу m и длину l .

Полагая, что сам кривошип связан с осью вращения посредством торсиона жесткости c , ненапряженному состоянию которого отвечает $\varphi = 0$, составить уравнение первого приближения.

Ответ:

$$\frac{(M + m)l^2}{3} \ddot{\varphi} + \left(c - Pl - \frac{Pl^2}{b} \right) \varphi = 0.$$

1.3. Два абсолютно жестких однородных стержня находятся в горизонтальной плоскости и поддерживаются в прямолинейном положении двумя спиральными пружинами жесткости c_1 и c_2 (см. рис. 10.3).

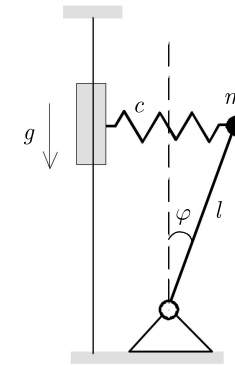


Рис. 10.1

Длины стержней — l_1 и l_2 , массы — m_1 и m_2 . К концу второго стержня приложена «мертвая» сила P , действующая вдоль вертикали. Составить уравнения первого приближения возмущенного движения относительно вертикального положения. (Момент инерции стержня массы m и длины l относительно центра равен $J = \frac{ml^2}{12}$.)

Ответ:

$$\left(\frac{m_1}{3} + m_2 \right) l_1^2 \ddot{\varphi}_1 + \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \ddot{\varphi}_2 + (c_1 + c_2 - Pl_1) \varphi_1 - c_2 \varphi_2 = 0,$$

$$\frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \ddot{\varphi}_1 + \frac{1}{3} m_2 l_2^2 \ddot{\varphi}_2 - c_2 (\varphi_1 - \varphi_2) - Pl_2 \varphi_2 = 0.$$

1.4. Сохраняя условия предыдущей задачи, составить уравнения первого приближения возмущенного движения относительно вертикаль-

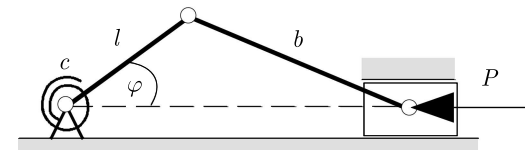


Рис. 10.2

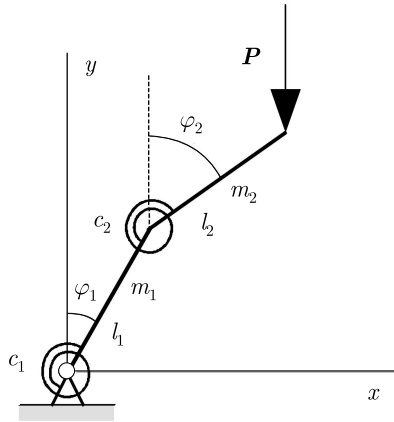


Рис. 10.3

ного положения, если приложенная сила P является «следящей» (см. рис. 10.4).

Ответ:

$$\left(\frac{m_1}{3} + m_2\right) l_1^2 \ddot{\varphi}_1 + \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \ddot{\varphi}_2 + (c_1 + c_2 - Pl_1) \varphi_1 + (Pl_1 - c_2) \varphi_2 = 0,$$

$$\frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \ddot{\varphi}_1 + \frac{1}{3} m_2 l_2^2 \ddot{\varphi}_2 - c_2 (\varphi_1 - \varphi_2) = 0.$$

К главе 2

2.1. Для задачи 4.7 главы 4 получить достаточное условие устойчивости вертикального положения физического маятника. В качестве функции Ляпунова использовать обобщенный интеграл энергий $H = T_2 - T_0 + \Pi = \text{const}$.

Ответ: функция Ляпунова в квадратичном приближении имеет вид:

$$V = \frac{1}{2} (ml^2 + A_1) \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} [mgl - \Omega^2 (ml^2 + A_2 - A_3)] \varphi^2.$$

В данной задаче достаточное условие устойчивости $mgl > \Omega^2 (ml^2 + A_2 - A_3)$ совпадает с условием устойчивости по первому приближению (см. решение задачи 4.7).

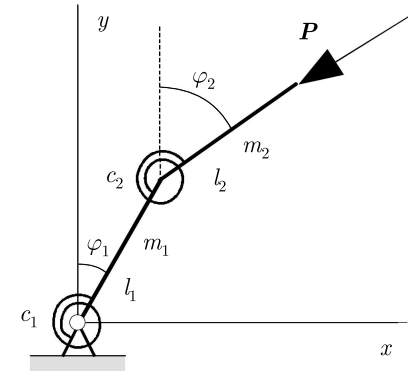


Рис. 10.4

2.2. Для задачи 3.11 главы 3 получить достаточное условие устойчивости вертикального положения оси АВ вращающегося диска. В качестве функции Ляпунова использовать обобщенный интеграл энергий $H = T_2 - T_0 + \Pi = \text{const}$.

Ответ: функция Ляпунова в квадратичном приближении имеет вид:

$$V = \frac{m}{2} \left(l^2 + \frac{r^2}{4} \right) (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) + \frac{1}{2} (cL^2 - Pl) (\alpha^2 + \beta^2).$$

В данной задаче достаточное условие устойчивости $Pl < cL^2$ не зависит от скорости вращения диска ω и соответствует лишь части области устойчивости в пространстве параметров, определяемой условием устойчивости по первому приближению (см. решение задачи 3.11).

2.3. Для задачи 3.10 главы 3 получить достаточные условия устойчивости положений относительного равновесия тела. В качестве функции Ляпунова использовать обобщенный интеграл энергий $H = T_2 - T_0 + \Pi = \text{const}$.

Ответ: функция Ляпунова имеет вид:

$$V(\dot{\varphi}, \varphi) = (A + Mh^2) \frac{\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{\omega^2}{2} (B \sin^2 \varphi + C \cos^2 \varphi) + Mgh(1 - \cos \varphi).$$

В окрестности положения равновесия $\varphi_* = 0$ функция Ляпунова в квадратичном приближении относительно $\psi = \varphi_* - \varphi$ имеет вид:

$$V(\dot{\psi}, \psi) = \frac{1}{2}(A + Mh^2)\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}[Mgh - (B - C)\omega^2]\psi^2,$$

откуда следует достаточное условие устойчивости $Mgh > (B - C)\omega^2$.

В окрестности положения равновесия $\varphi_* = \pi$ функция Ляпунова в квадратичном приближении относительно $\psi = \varphi_* - \varphi$ имеет вид:

$$V(\dot{\psi}, \psi) = \frac{1}{2}(A + Mh^2)\dot{\psi}^2 - \frac{1}{2}[Mgh + (B - C)\omega^2]\psi^2,$$

откуда следует достаточное условие устойчивости $Mgh < (C - B)\omega^2$.

В окрестности положения равновесия $\varphi_* = \arccos \frac{Mgh}{(B-C)\omega^2}$, которое существует при выполнении условия $\left| \frac{Mgh}{(B-C)\omega^2} \right| \leq 1$, функция Ляпунова в квадратичном приближении относительно $\psi = \varphi_* - \varphi$ имеет вид:

$$V(\dot{\psi}, \psi) = \frac{1}{2}(A + Mh^2)\dot{\psi}^2 + \left(-\frac{g^2 h^2 M^2}{2(B-C)\omega^2} + \frac{B-C}{2}\omega^2 \right) \psi^2,$$

откуда следует достаточное условие устойчивости $B > C$.

В данной задаче достаточные условия устойчивости совпадают с условиями устойчивости по первому приближению (см. решение задачи 3.10).

2.4. Для задачи 3.13 главы 3 получить достаточное условие устойчивости вертикального положения ортогонального двойного маятника при $m_1 = m_2 = m$ и $l_1 = l_2 = l$. В качестве функции Ляпунова использовать обобщенный интеграл энергий $H = T_2 - T_0 + \Pi = \text{const}$.

Ответ: функция Ляпунова в квадратичном приближении имеет вид:

$$V = \frac{ml^2}{2}(5\dot{\varphi}_1^2 + 2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_2^2) + \left(\frac{3mgl}{2} - 6\Omega^2 ml^2 \right) \varphi_1^2 + \left(\frac{mgl}{2} - \Omega^2 ml^2 \right) \varphi_2^2.$$

В данной задаче достаточное условие устойчивости $4\Omega^2 < g$ соответствует лишь части области устойчивости в пространстве параметров, определяемой условием устойчивости по первому приближению (см. решение задачи 3.13).

К главе 3

3.1. Шарнирный двухзвенник лежит на боковой поверхности гладкого горизонтального цилиндра диаметра D (см. рис. 10.5).

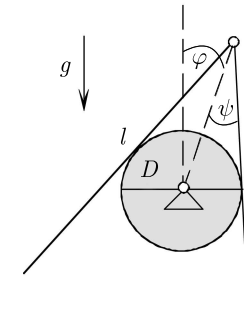


Рис. 10.5

Найти положения равновесия и исследовать их устойчивость, если длина каждого звена равна l .

Ответ: всегда устойчивое положение равновесия $\varphi = 0$ и положение $l \tan^3 \psi_* = D(1 + \tan^2 \psi_*)$, устойчивое при $l > 2D$.

3.2. Шарнирный двухзвенник лежит на гладкой прямоугольной опоре шириной a (см. рис. 10.6).

Найти положения равновесия и исследовать их устойчивость, если длины звеньев равны l .

Ответ: всегда устойчивое положение равновесия $\alpha_* = \beta_* = \arccos \sqrt[3]{\frac{a}{l}}$.

3.3. Исследовать устойчивость вертикального равновесия двух одинаковых маятников длины l и массы m , связанных пружиной жесткости c , если один из них является обращенным (см. рис. 10.7). Пружина соединяет маятники на высоте a от нижнего шарнира.

Ответ: положение равновесия устойчиво при $2a > l + \frac{mg}{c}$.

3.4. Найти условия устойчивости положения равновесия однородного полуцилиндра радиуса r на неподвижном полуцилиндре радиу-

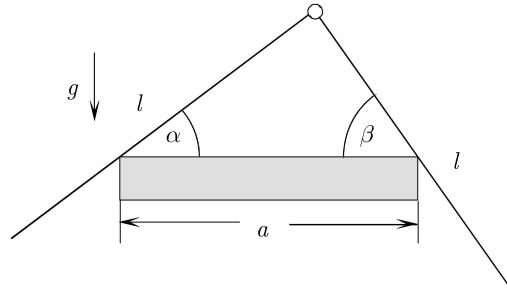


Рис. 10.6

са R , считая, что его обкатывание происходит без проскальзывания (см. рис. 10.8).

Ответ: положение равновесия устойчиво при $r < \frac{4R}{3\pi-4}$.

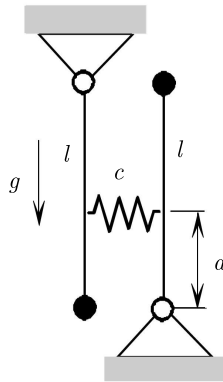


Рис. 10.7

3.5. Найти условия устойчивости положения равновесия однородного полушария радиуса r на неподвижном полушарии радиуса R , считая, что обкатывание происходит без проскальзывания (см. рис. 10.9).

Ответ: положение равновесия устойчиво при $r < \frac{3R}{5}$.

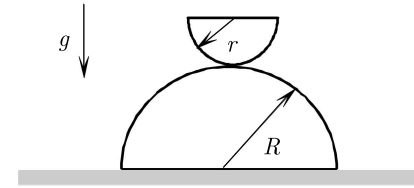


Рис. 10.8

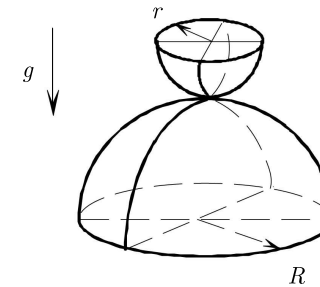


Рис. 10.9

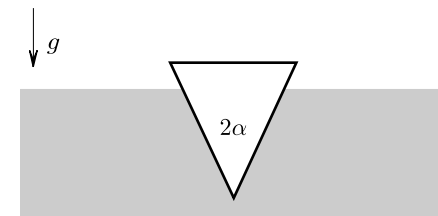


Рис. 10.10

3.6. Длинный однородный брус с симметричным треугольным сечением изготовлен из материала с плотностью ρ и имеет угол при вершине 2α (см. рис. 10.10). Найти условия устойчивости его вертикального положения равновесия в жидкости с плотностью 1.

Ответ: положение равновесия устойчиво при $\rho > \cos^4 \alpha$.

К главе 4

4.1. Исследовать устойчивость нижнего положения равновесия сферического маятника длиной l , несущего точечную массу m и нагруженного постоянным крутящим моментом M , направленным вдоль местной вертикали (см. рис. 10.11).

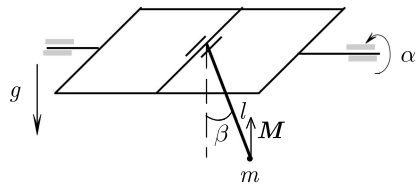


Рис. 10.11

Ответ: положение равновесия неустойчиво при $M \neq 0$.

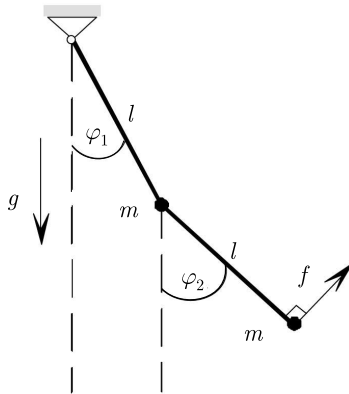


Рис. 10.12

4.2. Исследовать устойчивость нижнего положения равновесия двойного маятника, к вершине которого приложена следящая сила $f =$

$= F \sin(\varphi_2 - \varphi_1)$, направленная перпендикулярно оси второго звена (см. рис. 10.12).

Длины звеньев равны l , точечные массы — m .

Ответ: положение равновесия устойчиво при $F < 2mg$.

4.3. Исследовать устойчивость симметричного положения равновесия доски, лежащей на двух противоположно вращающихся валах, если между доской и валами действуют силы сухого трения (см. рис. 10.13).

Ответ: равновесие устойчиво, если силы трения «сжимают» доску, и неустойчиво, если «растягивают».

4.4. Исследовать устойчивость верхнего положения равновесия ортогонального гироскопического маятника, если длины звеньев равны l , масса диска — m , его полярный и экваториальный моменты инерции равны соответственно C и A , а скорость равномерного вращения — Ω (см. рис. 10.14).

Ответ: $A\Omega > \sqrt{mgl}(\sqrt{(ml^2 + C)2} + \sqrt{4ml^2 + C})$.

К главе 5

5.1. Исследовать устойчивость нулевого решения системы

$$\dot{X} = AX,$$

где

а)

$$A = \begin{pmatrix} 12 & -3 & -2 & -4 \\ 4 & -1 & 0 & -2 \\ 16 & -4 & -3 & -5 \\ 16 & -4 & -3 & -5 \end{pmatrix},$$

б)

$$A = \begin{pmatrix} 12 & -3 & -2 & -4 \\ 16 & -4 & -2 & -6 \\ 16 & -4 & -3 & -5 \\ 16 & -4 & -3 & -5 \end{pmatrix},$$

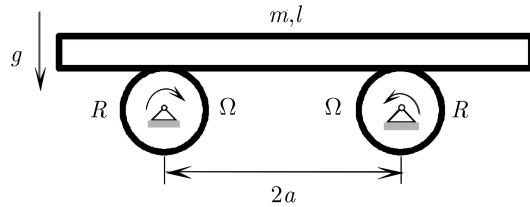


Рис. 10.13

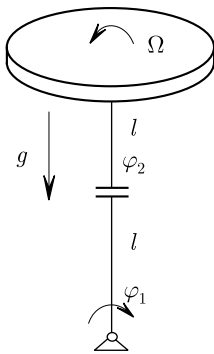


Рис. 10.14

в)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 8 & 10 \\ -13 & -20 & -32 & -40 \\ 9 & 13 & 20 & 25 \end{pmatrix},$$

г)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

д)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

е)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

ж)

$$A = \begin{pmatrix} -17 & -2 & -46 & 6 \\ 29 & 5 & 71 & -8 \\ 4 & 0 & 13 & -2 \\ -8 & -4 & -7 & -1 \end{pmatrix},$$

Ответ:

а) неустойчиво,

б) неустойчиво,

в) неустойчиво,

г) неустойчиво,

д) устойчиво,

е) неустойчиво,

ж) устойчиво, причем решение имеет вид

$$x_1(t) = -10C_2 \sin(t) - 15C_3 \sin(t) + 35C_4 \sin(t) + C_1(\cos(t) + 38 \sin(t)),$$

$$x_2(t) = C_2(\cos(t) - 31 \sin(t)) + 111C_1 \sin(t) - 41C_3 \sin(t) + 100C_4 \sin(t),$$

$$x_3(t) = C_3(\cos(t) - 34 \sin(t)) + 97C_1 \sin(t) - 28C_2 \sin(t) + 85C_4 \sin(t),$$

$$x_4(t) = 32C_1 \sin(t) - 10C_2 \sin(t) - 10C_3 \sin(t) + C_4(\cos(t) + 27 \sin(t))$$

К главе 6

6.1. В задаче 1.2 определить величину критической нагрузки.

Ответ: $P_* = \frac{cb}{l(l+b)}$.6.2. В задаче 1.3 определить форму потери устойчивости и величину критической нагрузки при $c_1 = c_2 = c$ и $l_1 = l_2 = l$.

Ответ: $P_* = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \frac{c}{l}$. При этом система переходит в новое положение равновесия $\varphi_1 = \varphi_2 \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

6.3. В задаче 1.4 определить форму потери устойчивости и величину критической нагрузки при $c_1 = c_2 = c$ и $l_1 = l_2 = l$.

Ответ: $P_* = \frac{2c}{5l}(9 - \sqrt{7})$. При этом система переходит в движение.

6.4. На равномерно вращающейся с угловой скоростью Ω оси подвешен с вязким трением $F_f = F(\Omega - \dot{\varphi})$ математический маятник длины l и массы m (маятник Фроуда). Силы трения, отличные от трения об ось, пропорциональны угловой скорости маятника $F_r = b\dot{\varphi}$. Исследовать влияние сил трения на устойчивость положения равновесия маятника.

Ответ: положение равновесия определяется равенством

$$mgl \sin \varphi_0 = F(\Omega).$$

При $b + F'(\Omega) < 0$ нижнее положение равновесия маятника становится неустойчивым («отрицательное трение»).

6.5. На краю диска радиуса R , равномерно вращающегося с угловой скоростью Ω в горизонтальной плоскости, оперт обращенный сферический маятник длины l и массой апекса m (см. рис. 10.15).

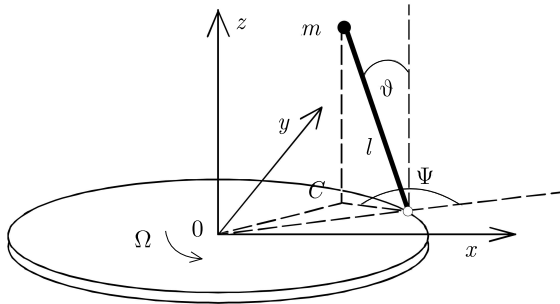


Рис. 10.15

Найти положения равновесия маятника и определить степень их неустойчивости. Возможна ли гироскопическая стабилизация неустойчивых положений равновесия?

Ответ: положения равновесия определяются равенством

$$\Psi = 0, \quad \Omega^2 \sin \vartheta_* \cos \vartheta_* - \Omega^2 \rho \cos \vartheta_* + k^2 \sin \vartheta_* = 0.$$

Возможны 2, 3 или 4 положения равновесия. Устойчиво, однако, только одно положение равновесия в области $\pi \leq \vartheta_* < \frac{3\pi}{2}$. Степень неустойчивости остальных положений равновесия четная (равная 2), однако их гироскопическая стабилизация невозможна.

К главе 7

7.1. Возмущенное движение определяется следующей системой однородных линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + \sin t \cdot x_2, \\ \dot{x}_2 &= \cos t \cdot x_1 - x_2 - \sin t \cdot x_3, \\ \dot{x}_3 &= \cos t \cdot x_2 + ax_3. \end{aligned}$$

При каких значениях параметра a нулевое решение будет устойчивым.

Ответ: $a < -0.134$.

7.2. Возмущенное движение определяется следующей системой однородных линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + \sin t \cdot x_2, \\ \dot{x}_2 &= \cos t \cdot x_1 + ax_2 - \sin t \cdot x_3, \\ \dot{x}_3 &= \cos t \cdot x_2 - x_3. \end{aligned}$$

При каких значениях параметра a нулевое решение будет устойчивым.

Ответ: $a < 1/2$.

7.3. Возмущенное движение определяется следующей системой однородных линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= ax_1 + \sin t \cdot x_2, \\ \dot{x}_2 &= \cos t \cdot x_1 - x_2 - \sin t \cdot x_3, \\ \dot{x}_3 &= \cos t \cdot x_2 - x_3. \end{aligned}$$

При каких значениях параметра a нулевое решение будет устойчивым.

Ответ: $a < -0.134$.

7.4. Возмущенное движение определяется следующей системой однородных линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= ax_1 + \sin 2t \cdot x_2, \\ \dot{x}_2 &= \cos 2t \cdot x_1 - x_2 - \sin t \cdot x_3, \\ \dot{x}_3 &= \cos t \cdot x_2 - x_3.\end{aligned}$$

При каких значениях параметра a нулевое решение будет устойчивым.

Ответ: $a < -0.204$.

7.5. Возмущенное движение определяется следующей системой однородных линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\frac{1}{2}x_1 + \sin t \cdot x_2 + ax_3, \\ \dot{x}_2 &= -x_2, \\ \dot{x}_3 &= ax_1 + \cos t \cdot x_2 - x_3.\end{aligned}$$

При каких значениях параметра a нулевое решение будет устойчивым.

Ответ: $|a| < \sqrt{2}/2$.

К главе 8

8.1. Исследовать устойчивость тонкого кольца, сжатого радиальными усилиями q (q — сила, приходящаяся на единицу длины окружности), постоянно направленными по нормали к изогнутой линии кольца (см. рис. 10.16).

Момент инерции поперечного сечения кольца — J , радиус кольца — R , модуль Юнга — E .

Ответ: дифференциальное уравнение этой задачи имеет вид

$$EJ \frac{d^3 \varkappa}{ds^3} + \left(qR + \frac{EJ}{R^2} \right) \frac{d\varkappa}{ds} = 0, \quad \varkappa = \frac{d^2 w}{ds^2} + \frac{w}{R^2},$$

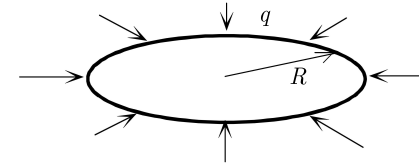


Рис. 10.16

где \varkappa — изменение кривизны кольца, w — нормальный прогиб, s — длина дуги. Критическая нагрузка равна $q_* = \frac{3EJ}{R^3}$.

8.2. В случае, если кольцо нагружено радиальными усилиями, создаваемыми при помощи тросов, собранных в узел, нагрузка q всегда направлена к центру кольца (см. рис. 10.17).

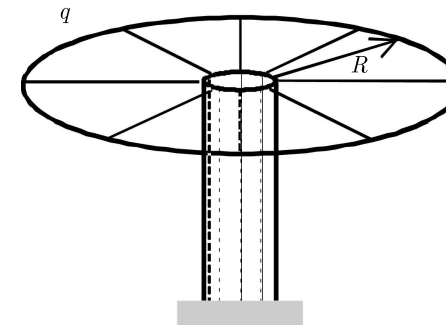


Рис. 10.17

Найти критическое значение нагрузки кольца в этом случае.

Ответ: дифференциальное уравнение этой задачи имеет вид

$$EJ \frac{d^3}{ds^3} \left(\frac{d^2 w}{ds^2} + \frac{w}{R^2} \right) + \left(qR + \frac{EJ}{R^2} \right) \frac{d}{ds} \left(\frac{d^2 w}{ds^2} + \frac{w}{R^2} \right) + \frac{q}{R} \frac{dw}{ds} = 0.$$

Критическая нагрузка равна $q_* = \frac{9EJ}{2R^3}$.

8.3. Исследовать устойчивость кольцевой пластины толщины h с модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона $\nu = 0.3$, если по ее внешнему и внутреннему контурам, радиусы которых равны R и $R/2$ соответственно, действуют усилия одинаковой интенсивности $-T$ (см. рис. 10.18). Предполагается, что деформация осесимметрична. Края пластины шарнирно закреплены.

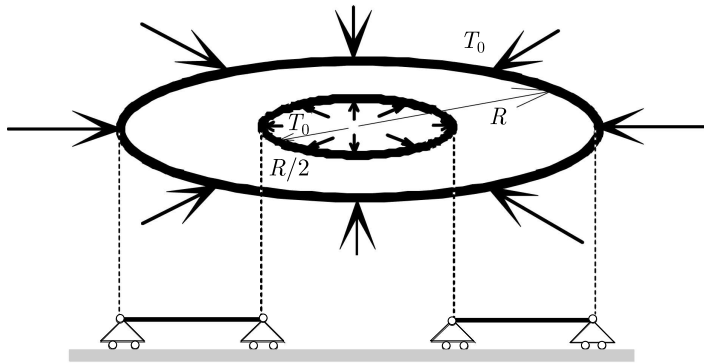


Рис. 10.18

Ответ: $T = 3.752 \frac{Eh^3}{R^2}$.

8.4. Сохраняя условия предыдущей задачи, исследовать устойчивость пластины, если внешний край закреплен шарнирно, а внутренний край может смещаться свободно в направлении оси пластины, но при этом не поворачивается (см. рис. 10.19). (Граничные условия на этом краю имеют вид $\frac{dw}{dr} = 0$, $R_r = \frac{d^3w}{dr^3} + \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) = 0$.)

Ответ: $T = 0.926 \frac{Eh^3}{R^2}$.

8.5. Сферическая оболочка радиуса R , толщины h с модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν находится под действием равномерного давления q (см. рис. 10.20).

В этом случае докритические усилия во всех нормальных сечениях оболочки равны $T_1 = T_2 = -\frac{qR}{2}$, радиальное перемещение $w_0 = \frac{qR^2}{2Eh}(1-\nu)$. Определить величину критической нагрузки.

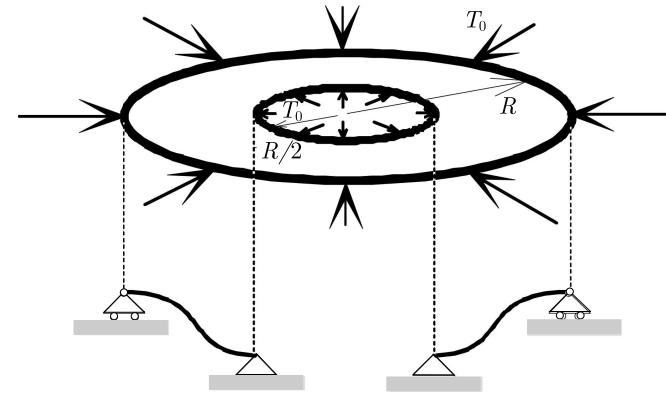


Рис. 10.19

Ответ: дифференциальное уравнение этой задачи имеет вид

$$\frac{D}{h} \Delta^3 w + \frac{qR}{2h} \Delta^2 w + \frac{E}{R^2} \Delta w = 0,$$

где $D = \frac{Eh}{12(1-\nu^2)}$. Критическая нагрузка равна $q_* = \frac{2E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \left(\frac{h}{R} \right)^2$.

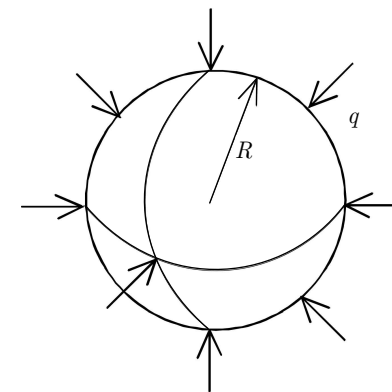


Рис. 10.20

Литература

- [1] Алфутов Н. А. *Основы расчета на устойчивость упругих систем.* — М.: Машиностроение, 1991. — 311 с.
- [2] Болотин В. В. *Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости.* — М.: Наука, 1961. — 340 с.
- [3] Бутенин Н. В., Лунц Я. Л., Меркин Д. Р. *Курс теоретической механики. Т. 2.* — М.: Наука, 1985. — 496 с.
- [4] Бутенин Н. В., Лунц Я. Л., Меркин Д. Р. *Курс теоретической механики: В 2 томах.* — Лань, 2002. — 736 с.
- [5] Вольмир А. С. *Устойчивость деформируемых систем.* — М.: Наука, 1967. — 984 с.
- [6] Гантмахер Ф. Р. *Теория матриц.* — М.: Наука, 1988. — 552 с.
- [7] Доннелл Л. Г. *Балки, пластины и оболочки.* — М.: Наука, 1982. — 568 с.
- [8] Ильгамов М. А. *Статические задачи гидроупругости.* — Казань, 1994. — 208 с.
- [9] Ла-Салль Ж., Лефшец С. *Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова.* Перев. с англ. — М.: Мир, 1964. — 168 с.
- [10] Меркин Д. Р. *Гироскопические системы.* — М.: Наука, 1974. — 344 с.
- [11] Меркин Д. Р. *Введение в теорию устойчивости движения. 3-е изд.* — М.: Наука, 1987. — 304 с.
- [12] Меркин Д. Р. *Введение в теорию устойчивости движения. 4-е изд.* — М.: Лань, 2003. — 304 с.
- [13] Меркин Д. Р., Бауэр С. М., Смирнов А. Л. *Задачи по теории устойчивости.* — Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. — 128 с.
- [14] Пановко Я. Г., Губанова И. И. *Устойчивость и колебания упругих систем. Современные концепции, парадоксы и ошибки.* — М.: Наука, 1987. — 352 с.
- [15] Рубановский В. Н., Самсонов В. А. *Устойчивость стационарных движений в примерах и задачах: Учеб. пособие для ин-тов и вузов.* — М.: Наука, 1988. — 303 с.
- [16] Трусделл К. *Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред.* — М.: Мир, 1975. — 592 с.
- [17] Феодосьев В. И. *Десять лекций-бесед по сопротивлению материалов.* — М.: Наука, 1975. — 176 с.
- [18] Хатчинсон Дж., Койтер Б. Т. *Теория послекритического поведения конструкций // Механика. Сб. переводов.* — 1971. — № 4. — С. 129–149.
- [19] Циглер Г. *Основы теории устойчивости конструкций.* — М.: Мир, 1971. — 112 с.
- [20] Четаев Н. Г. *Устойчивость движения.* — Л.-М.: Наука, 1946.
- [21] Эйлер Л. *Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума либо минимума. Приложение 1: Об упругих кривых.* — М.: Гостехиздат, 1934.
- [22] Chow S. N. and Hale J. K. *Methods of Bifurcation Theory.* — New York: Springer, 1996. — 525 p.
- [23] Kirchhoff G. *Vorlesungen über mathematische Physik. Mechanik.* — Leipzig, 1877. — 312 p.
- [24] Koiter W. T. *The effect of axisymmetric imperfections on the buckling of cylindrical shells under axial compression, (Mechanics) // Proc. Kon. Ned. Ak. Wet.* 1963, B66. pp. 265–279.
- [25] Merkin D. R. *Introduction to the Theory of Stability.* — NY, Springer-Verlag, 1996. — 304 p.
- [26] Merkin D. R., Afagh F. F., Bauer S. M., Smirnov A. L. *Problems in theory of stability.* — St. Petersburg University Press, 2000. — 116 p.
- [27] Yamaki N., Otomo K., Matsuda K. *Experiments on the Postbuckling Behavior of the Circular Cylindrical Shells under Compression. // Experimental Mechanics.* 1975. N 1. pp. 23–28.

Поскольку в некоторых главах по сравнению с первым изданием задачника изменились номера задач, приведем таблицу соответствий номеров задач текущего (II) и первого изданий (I).

II	I	II	I	II	I	II	I	II	I
1.1	1.2	2.1	2.1	3.1	3.1	4.1	4.3	8.1	8.1
1.2	—	2.2	2.2	3.2	3.4	4.2	4.4	8.2	8.2
1.3	1.3	2.3	1.1	3.3	—	4.3	4.6	8.3	8.3
1.4	1.4	2.4	2.3	3.4	3.3	4.4	4.7	8.4	8.4
1.5	1.5	2.5	2.4	3.5	—	4.5	4.1	8.5	8.5
1.6	1.6			3.6	3.2	4.5	4.5	8.6	8.6
				3.7	3.7	4.7	—	8.7	8.8
				3.8	3.8	4.8	—		
				3.9	3.10	4.9	—		
				3.10	3.5	4.10	—		
				3.11	3.6				
				3.12	3.9				
				3.13	—				
				3.14	—				

Предметный указатель

- Бифуркация 143
— энергии 37
— точка 158, 164
- Вариация функции вторая 38
— первая 37
- Вектор напряжений 156
- Вращение перманентное 34, 36, 38, 96
— собственное 22
— установившееся 20, 22
- Вход системы 169
- Выход системы 169
- Гидравлический успокоитель 93
- Гирогоризонткомпас 94
- Гирокомпас 93, 95
- Гироскоп 21, 70, 124, 172
- Гироскопический креновыравниватель 172
- Гиростабилизатор 180
- Гиросфера 93
- Движение возмущенное 10
— невозмущенное 9
— неустановившееся 12
— установившееся 12
- Делители элементарные 113
- Интеграл моментов 37
— циклический 23, 68, 124
- энергии 37
- Карданный подвес 172, 180
- Квадратичная форма 38
— матрица коэффициентов 38
- Координата нормальная 111
— циклическая 25, 68
- Космический корабль 174
- Коэффициент вязкого трения 174
— инерции 126
— периодический 137
- Критерий Гурвица 94–96, 123, 181
— Найквиста 170
— Сильвестра 29, 31, 32, 38, 54, 139
— Эйлера 142–145, 148, 156, 158, 163
— динамический 148, 149, 154
— статический 143
— энергетический 145
- Матрица кососимметричная 123, 126
— фундаментальная 137
- Маятник гироскопический 95, 124
— двойной 18, 97
- Метод Галеркина 159
— Лагранжа 148
— Ритца 162

- Множитель инвариантный 113, 115
- Момент корректирующий 172
— маятниковый 93
— управляющий 174
- Момент инерции 96
— главный 36
— относительно оси 71
— полярный 90
- Паровой объем 177
- Переменные канонические 114
- Перемещение виртуальное 146
- Пластина граничные условия 156
— теория фон Кармана 156, 163, 164
- Плоскость тангажа 174
- Полос 173, 174, 178
- Преобразование элементарное матричное 109
- Прицеп одноосный 90
- Работа внешних сил 162
— элементарная 99
- Резонанс параметрический 140
- Связка интегралов 35–37
- Связь голономная 146
— идеальная 146
— неголономная 92
— обратная 176
- Сервомотор 177
- Сила взаимодействия проводников 45
- гидростатического давления 148
- диссипативная 95, 119
- консервативная 118, 148
- неконсервативная 97, 148
- обобщенная 97
- объемная 156
- потенциальная 118
- распределенная 159
- следящая 97, 154
- трения 177
- трения нелинейная 177
- Силы гироскопические 118, 122, 124
— диссипации 118
- неконсервативные позиционные 118
- ускоряющие 118
- Система автономная 9
— гироскопическая 174
— замкнутая 170
— консервативная 145
— маятников 52
— неавтономная 9
— потенциальная 123
— разомкнутая 170
— регулирования 176
- Случай Эйлера–Пуансо 20
- Смежные положения равновесия 145
- Степень неустойчивости 122, 123
- Теорема Гурвица 123
— Кирхгофа 142, 143

- Лагранжа–Дирихле 145
- Ляпунова об асимптотической устойчивости 139
- Ляпунова об устойчивости 31–33, 35
- Четаева 140
- Теорема Ляпунова о неустойчивости 30
- Теорема Четаева 30
- Томсона–Тета–Четаева теорема 121
- Томсона–Тета–Четаева теорема 121
- Турбина паровая 176, 177
- Угол прецессии 174
— собственного вращения 22, 124
— тангажа 174
- Уравнение Матье 140
— дискриминант 175
— характеристическое 126
- Уравнения Лагранжа 19
— Эйлера 20
— бифуркационные 143
— ветвления 143
— возмущенного движения 12
— нормальная форма 12
— оболочек с несовершенствами 164
— первого приближения 12
— пологих оболочек 164
— тела с неподвижной точкой 20, 36
- Усилие сдвига 163
- Усилитель 176
- Условие частотное 175
- Устойчивость абсолютная 174, 176
— асимптотическая 11, 92, 136
— в большом 31
— в первом приближении 101, 126
— в целом 11, 31
— параметрическая 148
— пластины круглой 156, 158
— — прямоугольной 161
— по первому приближению 96
— равновесия 43, 148
— ротора 77
— стационарного движения 43
— стержня 144
— условная 11
— цилиндрической оболочки 164
- Флаттер 145
- Форма каноническая Жордана 111
— нормальная Жордана 114
— нормальная диагональная 111, 113
- Функция Бесселя 158
— Ляпунова 27, 31, 138
- Рауса 69
— бесконечно малый высший предел 130
— диссипативная Релея 118
— знакопеременная 27, 32
— знакостоянная 129
— квадратичная 139
— определено-отрицательная 27
— определено-положительная 27
— отрицательная 27

- отрицательно определенная 31
 - передаточная 170, 173, 174, 177, 178, 180
 - положительная 27
 - положительно определенная 31
 - усилий 165
- Характеристика частотная 170
- Частота Шулера 95
- Эллипсоид инерции 34

*Д. Р. Меркин, С. М. Бауэр,
А. Л. Смирнов, Б. А. Смольников*

ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

*Дизайнер М. В. Ботя
Технический редактор А. В. Ширококов
Компьютерная верстка Д. П. Вакуленко
Корректор З. Ю. Соболева*

Подписано в печать 23.03.2007. Формат $60 \times 84^{1/16}$.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 10,25. Уч. изд. л. 10,34.
Гарнитура Таймс. Бумага офсетная №1. Тираж ??? экз. Заказ №
НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
<http://rcd.ru> E-mail: borisov@rcd.ru Тел./факс: (+73412) 500-295

Уважаемые читатели!

Интересующие Вас книги нашего издательства можно заказать через наш Интернет-магазин Mathesis: <http://shop.rcd.ru>

а также заказать по электронной почте subscribe@rcd.ru

Книги также можно приобрести в наших представительствах:

МОСКВА

Физико-технологический институт РАН,
Нахимовский проспект, д. 36/1, к. 307, тел.: 129-53-49

Институт машиноведения им. А. А. Благонравова РАН
ул. Бардина, д. 4, корп. 3, к. 414, тел.: 135-54-37

ИЖЕВСК

Удмуртский государственный университет
ул. Университетская, д. 1, корп. 4, 2 эт., к. 211, тел./факс: (3412) 500-295

Также книги можно приобрести:

МОСКВА

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
ГЗ (1 эт.), Физический ф-т (1 эт.), Гуманитарный ф-т (0 и 1 эт.),
Биологический ф-т (1 эт.).

Российский государственный университет нефти и газа им. И.М.Губкина
ГЗ (3-4 эт.), книжные киоски фирмы «Аргумент».

Магазины:

МОСКВА:

«Дом научно-технической книги»
Ленинский пр., 40. тел.: 137-06-33

«Московский дом книги»
ул. Новый Арбат, 8. тел.: 290-45-07

«Библиоглобус»
м. «Лубянка», ул. Мясницкая, 6. тел.: 928-87-44

ДОЛГОПРУДНЫЙ:

Книжный магазин «Физматкнига»
новый корп. МФТИ, 1 эт. тел.: 409-93-28

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ:

«Санкт-Петербургский дом книги»
Невский проспект, 28

Издательство СПбГУ, Магазин №1
Университетская набережная, 7/9