Введение в теорию функций комплексной переменной

Методическое пособие для практических занятий

И. М. Архипова, Р. П. Востокова, О. А. Иванов

Санкт-Петербургский государственный университет
2019

Данное пособие предназначено для студентов бакалавриата направления 5014 «Химия» при изучении дисциплины «Физико-химические приложения математических методов» (базовый курс). Пособие содержит необходимый теоретический материал, упражнения теоретического характера для самостоятельного решения, образцы задач, а также индивидуальные задания.

Для полноты изложения приведены также некоторые определения и утверждения о степенных рядах и криволинейных интегралах.

1. Первые определения

Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — некоторое подмножество множества комплексных чисел (далее мы сформулируем основные требования на это множество). Если каждой точке $z \in D$ сопоставлено некоторое комплексное число w, то говорят, что задана функция комплексной переменной $f : D \to \mathbb{C}$ и пишут $w = f(z)$.

Поскольку множество комплексных чисел можно отождествить с плоскостью $\mathbb{R}^2$, то, казалось бы, вместо того, чтобы говорить о функции комплексной переменной, мы можем просто рассматривать отображение $D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, связанное с функцией f посредством равенства

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y). \tag{1}$$

Функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ двух действительных переменных, связанные с функцией f комплексной переменной посредством этого равенства, называются соответственно её *действительной частью* и *мнимой частью*.

К примеру, если $f(z) = z^2$, то $f(x + iy) = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$, поэтому задание этой функции равносильно заданию отображения $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, сопоставляющего точке (x, y) плоскости точку $(x^2 - y^2, 2xy)$.

Упражнение 1. Найдите действительные и мнимые части функций: а) $f_1(z) = z^3$; б) $f_2(z) = z + \dfrac{1}{z}$; в) $f_3(z) = e^z$.

Для функций нескольких действительных переменных, как вы знаете, есть понятие дифференцируемости. Есть оно и для функций комплексной переменной и, как вы вскоре увидите, оно резко отличается от дифференцируемости функций действительных переменных.

Определение. Пусть функция $f : D \to \mathbb{C}$ определена в окрестности точки $z_0 \in D$. Её производной в этой точке называется предел

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}\,.$$

Если этот предел существует, то функция f называется дифференцируемой в этой точке.

Упражнение 2. Докажите, что функция $f(z) = z^2$ дифференцируема в каждой точке и $f'(z) = 2z$.

Теперь рассмотрим функцию, сопоставляющую комплексному числу z комплексно-сопряженное ему число, $f(z) = \overline{z}$.

Упражнение 3. Докажите, что функция $f(z) = \overline{z}$ не дифференцируема ни в одной точке.

Напомним, что множество $D \subset \mathbb{C}$ называется *открытым*, если каждая его точка входит в него с некоторой своей окрестностью. Открытое множество называется *областью*, если любые две его точки можно соединить ломаной, лежащей в этом множестве.

В качестве области определения функций комплексной переменной мы всегда будем брать некоторую область.

Итак, пусть D — область и $f : D \to \mathbb{C}$ — заданная на нем дифференцируемая функция комплексной переменной.

Теорема 1. Если $u(x, y)$ и $v(x, y)$ — действительная и мнимая части дифференцируемой функции f комплексной переменной, то справедливы равенства

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}\,, \tag{2}$$

называемые *условиями Коши–Римана*[1].

Доказательство этой теоремы несложно и поучительно. Предположим вначале, что приращение Δz есть действительное число h. Тогда

$$\lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h, y) + iv(x+h, y) - u(x, y) - iv(x, y)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h} + i \lim_{h\to 0} \frac{v(x+h, y) - v(x, y)}{h} = u_x(x, y) + iv_x(x, y).$$

Теперь предположим, что $\Delta z = ih$, где $h \in \mathbb{R}$. В этом случае мы получим следующий предел:

$$\lim_{h\to 0} \frac{u(x, y+h) + iv(x, y+h) - u(x, y) - iv(x, y)}{ih} =$$
$$= -i \lim_{h\to 0} \frac{u(x, y+h) - u(x, y)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{v(h, y+h) - v(x, y)}{h} = -iu_y(x, y) + v_y(x, y).$$

Поскольку по предположению данная функция является дифференцируемой, то первый предел равен второму, поэтому

$$u_x(x, y) + iv_x(x, y) = -iu_y(x, y) + v_y(x, y),$$

откуда и следуют равенства (2) — условия Коши–Римана.■

Упражнение 4. Проверьте непосредственным вычислением справедливость условий Коши–Римана для функции $f(z) = z^2 + iz$.

Справедливо также утверждение, в определенном смысле обратное теореме 1.

[1] иногда их также называют условиями Даламбера–Эйлера–Коши–Римана.

Теорема 2. Если действительная $u(x,y)$ и мнимая $v(x,y)$ части функции f являются непрерывно дифференцируемыми функциями и удовлетворяют условиям Коши–Римана (2), то функция f является дифференцируемой (как функция комплексной переменной).

Доказательство теоремы 2 не слишком сложно, однако связано с достаточно длинными вычислениями, поэтому приводить его здесь мы не будем.

Упражнение 5. Докажите, что если действительная и мнимая части дифференцируемой функции комплексной переменной являются дважды непрерывно дифференцируемыми[2], то они удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0,$$

т. е. являются так называемыми *гармоническими функциями.*

Условия Коши–Римана показывают, что сама функция комплексной переменной почти однозначно определяется своей действительной или своей мнимой частью. Смысл слова «почти» станет понятен после того, как вы решите следующее упражнение.

Упражнение 6. Восстановите функцию комплексной переменной по ее действительной части $u(x,y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$.

Однако не все так просто. Сейчас будет показано, что НЕ СУЩЕСТВУЕТ определенной на $\mathbb{C} \setminus 0$ функции комплексной переменной, действительной частью которой является функция $u(x,y) = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$.

Доказательство проведем «от противного». Предположим, что такая функция сушествует и пусть $v(x,y)$ — это ее мнимая часть. Из условий Коши–Римана получаем, что

$$v_x = -u_y = -\frac{y}{x^2+y^2} \quad \text{и} \quad v_y = u_x = \frac{x}{x^2+y^2}\,.$$

Рассмотрим вспомогательную функцию $h(t) = v(\cos t, \sin t)$. Найдем её производную

$$h'(t) = v_x(\cos t, \sin t)(-\sin t) + v_y(\cos t, \sin t)\cos t = \sin^2 t + \cos^2 t = 1.$$

По формуле Ньютона–Лейбница $\int_0^{2\pi} h'(t)\,dt = h(2\pi) - h(0) = 0$ в силу 2π-периодичности синуса и косинуса. Однако в силу того, что $h'(t) = 1$, этот интеграл равен 2π. Полученное противоречие и доказывает, что требуемой функции не существует.■

[2] далее вы увидите, что последнее условие является излишним.

Упражнение 7. Докажите, что не существует определенной на $\mathbb{C} \setminus 0$ функции комплексной переменной, производная которой равна $\dfrac{1}{z}$.

Рассмотрим теперь следующий пример.

Пример 1. Обозначим через ℓ отрицательную часть действительной оси, $\ell = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0\}$, и рассмотрим область $D = \mathbb{C} \setminus \ell$. Положим $f(z) = \ln|z| + i \arg z$, считая, что $\arg z \in (-\pi; \pi)$. Покажем, что функция f дифференцируема и $f'(z) = \dfrac{1}{z}$.

Воспользуемся теоремой 2. Действительной частью функции f является функция $u(x, y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2} = \dfrac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)$, которая рассматривалась выше. С мнимой частью все немного хуже. Предположим вначале, что $\operatorname{Re} z > 0$. В этом предположении справедливо равенство $v(x, y) = \arg(x + iy) = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ и

$$v_x = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2 + y^2} = -u_y, \quad v_y = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2} = u_x.$$

Таким образом функция f дифференцируема во всех точках правой полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$.

Теперь рассмотрим верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$, в которой $v(x, y) = \arg(x + iy) = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$. Поскольку

$$v_x = -\frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{y} = -u_y \quad \text{и} \quad v_y = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{x}{y^2} = u_x,$$

то эта функция дифференцируема в каждой точке этой полуплоскости. Случай $\operatorname{Im} z < 0$ мы оставляем в качестве упражнения.

Упражнение 8. Закончите рассмотрение примера 1.

Упражнение 9. Покажите, что для функции f, введенной в примере 1, справедливо соотношение $e^{f(z)} = z$. Таким образом она является обратной к показательной функции и, соответственно, является логарифмической. Эта функция называется *главной ветвью логарифма комплексного числа.*

Из рассмотренных примеров видно, что существование или не существование функции зависит и от вида области, на которой мы хотим, чтобы она была определена. Точные определения — что такое *односвязная область* и что такое *многосвязная область* — нам дать не удастся (это потребовало бы достаточно долгого разговора из той области математики, которая называется *топологией*). Поэтому ограничимся наглядными представлениями. Односвязной областью является круг, многосвязной областью является как круг без какой-то своей точки, так и *кольцо*

$\{z \mid r < |z-a| < R\}$. С наглядной точки зрения область D является многосвязной, если в ней имеется замкнутый контур, такой что ограниченное им подмножество плоскости не лежит целиком в области D.

2. Аналитические функции

Сформулируем одну из основных теорем теории функций комплексной переменной.

Теорема 3. Если функция f дифференцируема в каждой точке области D, то в окрестности каждой точки $a \in D$ эта функция раскладывается в степенной ряд, т. е. при всех z из некоторого круга $|z-a| < r$ справедливо равенство

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n.$$

Таким образом, всякая дифференцируемая функция комплексной переменной является не только бесконечно дифференцируемой, но даже *аналитической функцией*.

Доказательство этой теоремы основано на технике, которая будет введена в следующем разделе пособия. Пока же мы приведем некоторые примеры и установим некоторые свойства аналитических функций.

Для любого комплексного числа z экспоненциальная функция e^z определяется как сумма ряда

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\,. \tag{3}$$

Однако из этого определения совсем не очевидна справедливость основного функционального соотношения для экспоненты:

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}. \tag{4}$$

Доказательство этого соотношения основано на следующем утверждении из теории рядов. Напомним определение. Ряд $\sum c_n$, где $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, называется *произведением рядов* $\sum a_n$ и $\sum b_n$.

Теорема 4. Если ряды $\sum a_n$ и $\sum b_n$ абсолютно сходятся, то их произведение является сходящимся рядом, сумма которого равна произведению сумм исходных рядов.

Докажем равенство (4). Действительно, так как

$$e^{z_1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n}{n!} \quad \text{и} \quad e^{z_2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_2^n}{n!}\,,$$

то общим членом произведения этих рядов является выражение

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{z_1^k}{k!} \cdot \frac{z_2^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}\, z_1^k z_2^{n-k} = \frac{(z_1+z_2)^n}{n!}\,.$$

Последнее равенство — это формула бинома Ньютона. Таким образом произведением рядов для e^{z_1} и e^{z_2} как раз и является ряд для $e^{z_1+z_2}$. ■

Таким образом функция, определенная равенством (3), есть продолжение обычной показательной функции e^x на все множество комплексных чисел. Посмотрим, как ведет себя эта функция на мнимой оси. Если $z = iy$, где $y \in \mathbb{R}$, то

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos y + i \sin y,$$

откуда, в силу доказанного соотношения (4) следует, что

$$e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x \cos y + i e^x \sin y, \text{ где } x, y \in \mathbb{R}.$$

В частности, $\boxed{e^{\pi i} = -1}$ — это знаменитая *формула Эйлера*, а $e^{2\pi i} = 1$. Следовательно, экспонента является периодической функцией с периодом $2\pi i$.

Тригонометрические функции продолжаются с $\mathbb{R}$ на $\mathbb{C}$ аналогичным образом, а именно

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \quad \text{и} \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}\,. \tag{5}$$

Упражнение 10. Докажите, что $\cos(-z) = \cos z$ и $\sin(-z) = -\sin z$ при всех $z \in \mathbb{C}$.

Упражнение 11. Докажите, что $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ при всех $z \in \mathbb{C}$.

Упражнение 12. Докажите, что

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) \text{ и } \sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) \quad \text{при всех } z \in \mathbb{C},$$
$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1.$$

На множестве действительных чисел часто рассматривают так называемые гиперболические функции. Функция $\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$ называется *гиперболическим косинусом*, функция $\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$ — *гиперболическим синусом*. Естественным образом эти функции продолжаются на $\mathbb{C}$.

Упражнение 13. Докажите, что

$$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1,$$
$$\operatorname{ch}(iz) = \cos z \quad \text{и} \quad \operatorname{sh} z = i \sin z.$$

Таким образом, в множестве комплексных чисел нет никакой разницы между тригонометрическими и гиперболическими функциями. А комплексная экспонента «несет в себе» как показательную, так и тригонометриеские функции.

Другие функции комплексного переменного будут введены в следующем разделе. Сейчас же мы приведем некоторые общие свойства аналитических функций, большинство из которых будут даны без доказательств, поскольку это увели бы нас несколько в сторону от изучаемой темы.

Теорема 5. Сумма степенного ряда является аналитической функцией внутри круга сходимости этого ряда.

Обратите внимание, что здесь есть что доказывать. Пусть $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ при $|z| < r$. Из общих свойств степенных рядов следует, что функция f является бесконечно дифференцируемой в круге $|z| < r$. Однако теорема утверждает, что для всякой точки a в этом круге ряд Тейлора для f в этой точке сходится к этой функции, т. е.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n \quad \text{при } |z-a| < \rho.$$

Теорема 6. Пусть функции f и g являются аналитическими в некоторой области. Тогда их сумма и произведение также являются аналитическими функциями. А если функция g не обращается в нуль в этой области, то и частное $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ — аналитическая функция.

Утверждение про аналитичность суммы аналитических функций очевидно. Утверждение про аналитичность их произведения следует из теоремы 4 о произведении рядов. Для доказательства последнего утверждения достаточно доказать аналитичность функции $\dfrac{1}{g(z)}$.

Для простоты будем считать, что $a = 0$. Пусть $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Так как $g(z) \neq 0$, то $a_0 \neq 0$. Построим ряд $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, произведение которого на ряд для функции $g(z)$ является просто единицей, т. е. рядом $1 + 0 \cdot z + 0 \cdot z^2 + \ldots$ Для этого нужно просто найти последовательность числе $b_0, b_1, \ldots,$

такую, что

$$
\begin{aligned}
&a_0b_0 = 1,\\
&a_0b_1 + a_1b_0 = 0,\\
&a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 = 0,\\
&\dots
\end{aligned}
$$

Таким образом, $b_0 = \dfrac{1}{a_0}$, а далее все значения коэффициентов b_n определяются посредством рекуррентных соотношений. Но, конечно, остается доказать, что построенный ряд имеет ненулевой радиус сходимости.

Как вы увидите, у аналитических функций имеется некоторое сходство с многочленами.

Теорема 7. Пусть функция f аналитична в области D, $a \in D$. Следующие утверждения равносильны:

1) $f^{(n)}(a) = 0$ при всех $n = 0, 1, \dots$;

2) $f(z) = 0$ при всех z из некоторой окрестности точки a;

3) $f(z) = 0$ при всех $z \in D$.

Ясно, что 3) $\Rightarrow$ 1) $\Leftrightarrow$ 2), так что достаточно доказать, что 1) $\Rightarrow$ 3). Приведем схему доказательства. По определению области всякие две ее точки можно соединить ломаной. Поэтому достаточно доказать, что если точки $a, b \in D$ соединены отрезком и $f^{(n)}(a) = 0$ при всех $n = 0, 1, \dots$, то и $f^{(n)}(b) = 0$ при всех $n = 0, 1, \dots$ Введем множество $\mathcal{C}$, состоящее из всех точек c этого отрезка, таких что $f^{(n)}(z) = 0$ при всех $n = 0, 1, \dots$ и всех точек z отрезка с концами в точках a и c. Поскольку все всякая производная функции f является непрерывной функцией, то множество C является замкнутым. Пусть d — наибольшая точка множества C. Если $d = b$, то все доказано. Если $d \neq b$, то, поскольку функция f аналитична, то $f(z) = 0$ в некоторой окрестности точки d, что противоречит максимальности этого числа. ■

Из этой теоремы следует единственность продолжения аналитической функции с круга на произвольную содержащую его область.

Следствие. Пусть функции f и g аналитичны в области D. Если они: а) совпадают в некотором лежащем в D круге, либо б) в некоторой точке этой области совпадают значения этих функций и всех их производных, то $f(z) = g(z)$ при всех $z \in D$. ■

Теорема 8. Пусть f — аналитическая функция, не равная нулю тождественно, и $f(a) = 0$. Тогда найдется такое натуральное число k и такая аналитическая функция f_1, что $f(z) = (z - a)^k f_1(z)$ и $f_1(a) \neq 0$.

Поскольку $f(a) = 0$ и функция f — аналитическая, то имеет место разложение $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-a)^n$, справедливое в некотором круге $|z-a| < r$. Поскольку функция f не тождественно равна нулю, то не все коэффициенты ряда равны нулю. Пусть k — этот номер первого отличного от нуля коэффициента этого ряда. Таким образом,

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n(z-a)^n = (z-a)^k \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k}(z-a)^n.$$

Положим $f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k}(z-a)^n$. Функция f_1 аналитична как сумма сходящегося степенного ряда, при этом $f_1(a) = a_k \neq 0$. ■

Следствие. Пусть f — аналитическая и не тождественно равная нулю функция. Если $f(a) = 0$, то существует круг $|z-a| < r$, такой что, если $0 < |z-a| < r$, то $f(z) \neq 0$. Таким образом ни в одной другой точке этого круга функция в нуль не обращается.

Действительно, по доказанной теореме $f(z) = (z-a)^k f_1(z)$, где функция f_1 аналитична и $f_1(a) \neq 0$. В силу непрерывности функции f_1 она отлична от нуля в некоторой окрестности точки a. Поэтому и $f(z) \neq 0$ при всех $0 < |z-a| < r$. ■

Число k, о котором идет речь в теореме 8, как и в случае многочленов, будем называть *кратностью нуля* аналитической функции.

3. Многозначность функций комплексной переменной

Многие из элементарных функций являются обратными к другим элементарным функциям. К примеру, логарифмическая функция обратна к показательной. В тех случаях, когда исходная функция обратимой не является, можно сузить область ее определения. К примеру, синус не обратим на $\mathbb{R}$, но можно взять функцию $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \to [-1; 1]$, которая уже является обратимой. Пожалуй, самым известным примером является функция $f(x) = \sqrt{x}$, являющаяся обратной к функции $x \mapsto x^2$, область определения которой сужена с $\mathbb{R}$ до $[0; +\infty)$.

Но так устроен мир, что для функций комплексной переменной такой прием не проходит. Вспомним определение корня n-ой степени из комплексного числа. Если $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\big(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\big), \text{ где } k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Допустим, что мы выбрали вариант с $k = 0$. Тогда $\sqrt[n]{e^{it}} = e^{it/n}$. Однако, поскольку $e^{2\pi i} = 1$, то само само значение t определено неоднозначно. Можно, конечно, ограничиться значениями $t \in [0; 2\pi)$. Однозначность обеспечена, но полученная функция не будет непрерывной. Действительно, при $t \to 2\pi$ получаем, что

$$\sqrt[n]{e^{it}} \to e^{2\pi i/n} \neq 1 = \sqrt[n]{1}, \text{ хотя } e^{it} \to 1.$$

Словосочетание «многозначная функция» несет в себе внутреннее противоречие, поскольку по определению значение функции определено однозначно. Но будем считать, что первое из двух этих слов не является прилагательным к существительному «функция».

Если $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0$, то положим

$$\operatorname{Ln} z = \ln r + i\varphi$$

и назовем $\operatorname{Ln} z$ *логарифмом комплексного числа* z. Таким образом,

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z,$$

где через $\operatorname{Arg} z$ обозначен произвольный аргумент комплексного числа z. К примеру, $\operatorname{Ln} i = \left\{\frac{\pi i}{2} + 2\pi k i \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Упражнение 14. Покажите, что $e^{\operatorname{Ln} z} = z$ для $z \in \mathbb{C} \setminus 0$.

Определим *степень с произвольным показателем*, положим $u^v = e^{v \operatorname{Ln} u}$ для произвольных $u, v \in \mathbb{C}$.

К примеру,

$$i^i = e^{i \operatorname{Ln} i} = e^{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k}, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Упражнение 15. Покажите, что если $v \in \mathbb{Z}$, то значение степени определено однозначно.

Упражнение 16. Покажите, что $z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{z}$ при $z \in \mathbb{C}$.

4. Криволинейные интегралы. Формула Грина

Напомним некоторые определения. *Путем на плоскости* будем называть отображение $\gamma : [\alpha; \beta] \to \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$, задаваемое парой непрерывных функций $x(t)$ и $y(t)$, где $\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big)$, $t \in [\alpha; \beta]$. Путь называется *простым*, если $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ для любых различных точек $t_1, t_2 \in (\alpha; \beta)$. Если при этом $w\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$, то будем называть его *простым замкнутым путем* или *контуром*.

Далее одним из основных замкнутых путей для нас будет путь, который в комплексной форме задается формулой $\gamma(t) = a + re^{it}$, где $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ и $t \in [0; 2\pi]$. С наглядной точки зрения при движении по этому пути мы проходим окружность радиуса r с центром в точке $a \in \mathbb{C}$.

Путь назвается *гладким*, если функции $x(t)$ и $y(t)$ являются непрерывно дифференцируемыми.

Пусть $p(x,y)$ и $q(x,y)$ — непрерывные функции. Выражение

$$\omega = p(x,y)\,dx + q(x,y)\,dy$$

называется *линейной дифференциальной формой* (что бы это ни означало). Предположим, что путь γ является гладким. *Криволинейным интегралом от формы ω по пути w* называется значение определенного интеграла

$$\oint_\gamma \omega = \int_\alpha^\beta \big(p(x(t),y(t))x'(t) + q(x(t),y(t))y'(t)\big)\,dt. \tag{6}$$

Упражнение 17. Проверьте, что:
а) интеграл от формы $\omega_1 = \dfrac{1}{2}\,(x\,dy - y\,dx)$ по пути $\gamma(t) = (r\cos t, r\sin t)$ равен площади круга радиуса r;
б) интеграл от формы $\omega_2 = \dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$ по тому же пути не зависит от числа r — радиуса окружности.

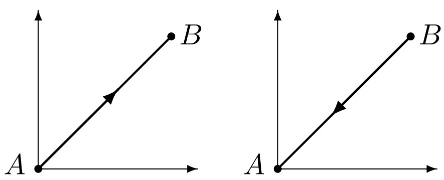
Перед тем, как сформулировать одно техническое утверждение, предлагаем решить следующее упражнение.

Упражнение 18. Вычислите интеграл от формы $\omega = y\,dx$ по путям:
1) $\gamma_1(t) = (t,t)$, $t\in[0;2]$; 2) $\gamma_2(t) = (2\sin t, 2\sin t)$, $t \in \big[0;\frac{\pi}{2}\big]$;
3) $\gamma_3(t) = (2t^2, 2t^2)$, $t\in[0;1]$; 4) $\gamma_4(t) = (2-t, 2-t)$, $t\in[0;2]$.

Решив это упражнение, вы увидите, что

$$\oint_{\gamma_1}\omega = \oint_{\gamma_2}\omega = \oint_{\gamma_3}\omega = -\oint_{\gamma_4}\omega.$$

Ясно, что $\gamma_2(t) = \gamma_1(2\sin t)$, $\gamma_3(t) = \gamma_1(2t^2)$ и $\gamma_4 = \gamma_1(2-t)$. Таким образом, в этой ситуации мы имеем дело с заменой параметра на пути. С геометрической точки зрения первые три пути описывают движения точки по отрезку AB от точки $A(0,0)$ к точке $B(2,2)$ (левый рисунок), тогда как в последнем случае мы движемся по тому же самому отрезку, но уже от точки B к точке A (правый рисунок). В таком случае мы будем говорить о замене параметра, *меняющей ориентацию*.



Теорема 9. Пусть $\gamma : [\alpha; \beta] \to \mathbb{C}$ — некоторый путь, $\varphi : [\alpha_1; \beta_1] \to [\alpha; \beta]$ — непрерывно дифференцируемая функция, производная которой всюду отлична от нуля[3]. Положим $\gamma_1(t) = \gamma\big(\varphi(t)\big)$, $t \in [\alpha_1; \beta_1]$. Тогда для любой дифференциальной формы ω:

1) если $\varphi(\alpha_1) = \alpha$ и $\varphi(\beta_1) = \beta$, то $\oint_{\gamma_1} \omega = \oint_\gamma \omega$;

2) если $\varphi(\alpha_1) = \beta$ и $\varphi(\beta_1) = \alpha$, то $\oint_{\gamma_1} \omega = -\oint_\gamma \omega$.

Упражнение 19. Докажите эту теорему. ■

Сформулируем теперь одно из важных для дальнейшего изложения утверждений. Предварительно введем одно определение, используя в его формулировке наглядные соображения. Пусть $\mathcal{C}$ — кусочно-гладкий замкнутый контур, D — ограниченное им подмножество плоскости. Напомним, что контур — это параметризованный замкнутый путь. Поэтому на контуре задано направление движения в соответствии с заданной параметризацией. Будем говорить, что контур $\mathcal{C}$ *ориентирован положительно*, если при его обходе область D находится слева от него. К примеру, если D — круг, то движение по ограничиващей его окружности должно идти против часовой стрелки, т. е. в положительном направлении.

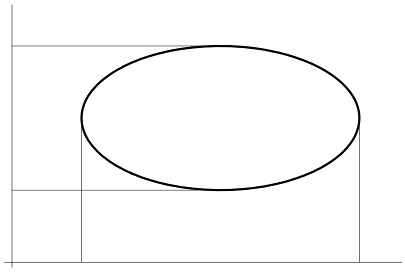
Теорема 10 (формула Грина). Рассмотрим линейную дифференциальную форму $\omega = p\,dx + q\,dy$, в которой функции $p(x,y)$ $q(x,y)$ являются непрерывно дифференцируемыми. Пусть $\mathcal{C}$ — кусочно-гладкий замкнутый контур, D — ограниченное им подмножество плоскости. При этом предполагается, что контур $\mathcal{C}$ положительно ориентирован. Тогда справедлива следующая формула, называемая *формулой Грина*:

$$\oint_{\mathcal{C}} \omega = \int_{\mathcal{C}} (p\,dx + q\,dy) = \iint_D \Big(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\Big)\,dx\,dy\,. \tag{7}$$

Докажем эту формулу в одном частном случае. Из рассуждения будет видно, что по сути дела эта формула есть следствие формулы, выражающей двойной интеграл через повторный интеграл. В общем случае доказательство является просто более техническим.

Предположим, что множество D является выпуклым, к примеру, таким, какое изображено на следующем рисунке.

[3] Вообще-то последнее условие является лишним.



Пусть вертикальными касательными к ограничивающей это множество кривой являются прямые $x = a$ и $x = b$, где $a < b$, горизонтальными касательными — прямые $y = c$ и $y = d$, где $c < d$.

Тогда это множество можно записать в виде

$$D = \big\{(x, y) \mid x \in [a; b], y \in [\varphi_1(x); \varphi_2(x)]\big\},$$

где через $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ обозначены функции, графиками которых соответственно являются нижняя и верхняя дуги, на которые контур $\mathcal{C}$ разбивают точки его касания с указанными вертикальными прямыми. Тогда

$$\begin{aligned} -\iint_D \frac{\partial p(x,y)}{\partial y}\,dx\,dy &= -\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial p(x,y)}{\partial y}\,dy = \\ &= -\int_a^b \big(p(x,\varphi_2(x)) - p(x,\varphi_1(x))\big)\,dx = \\ &= \int_a^b \big(p(x,\varphi_1(x)) - \int_a^b p(x,\varphi_2(x))\big)\,dx = \oint_C p(x,y)\,dx. \end{aligned}$$

Равенство

$$\iint_D \frac{\partial q(x,y)}{\partial x}\,dx\,dy = \oint_C q(x,y)\,dy$$

доказывается аналогичным образом. Вся разница состоит в том, что в этом случае множество D надо представить в виде

$$D = \big\{(x, y) \mid y \in [c; d], x \in [\psi_1(y); \psi_2(y)]\big\},$$

а при переходе от двойного интеграла к повторному внешнее интегрирование проводить по переменной y. ■

Упражнение 20. Докажите формулу Грина (7) в случае, когда множество D является прямоугольником, стороны которого параллельны координатным осям.

Форма $\omega = p(x,y)\,dx + q(x,y)\,dy$ называется *замкнутой*, если $p_y(x,y) = q_x(x,y)$. Из формулы Грина получаем, что справедливо следующее утверждение.

Следствие. Если ω — замкнутая форма, $\mathcal{C}$ — контур и функции p и q являются непрерывно дифференцируемыми в области D, ограниченной контуром $\mathcal{C}$, то

$$\oint_{\mathcal{C}} \omega = 0. \blacksquare$$

5. Интегралы от комплексно-аналитических функций

Все изложенное в предыдущем разделе имеет непосредственное отношение к функциям комплексного аргумента. Пусть $u(x,y)$ и $v(x,y)$ — действительная и мнимая части дифференцируемой функции f. Под выражением $f(z)\,dz$ мы будем понимать следующую комплекснозначную линейную дифференциальную форму:

$$\omega = f(z)\,dz = (u+iv)(dx + i\,dy) = (u\,dx - v\,dy) + i\,(v\,dx + u\,dy).$$

Упражнение 21. Вычислите интеграл от формы $\dfrac{dz}{z}$ по стандартной единичной окружности, проходимой в положительном направлении (т. е. против часовой стрелки).

Упражнение 22. Докажите, что действительная и мнимая части формы $f(z)\,dz$ являются замкнутыми линейными дифференциальными формами.

Таким образом, если функция f дифференцируема в области, содержащей множество D, ограниченном контуром $\mathcal{C}$, то

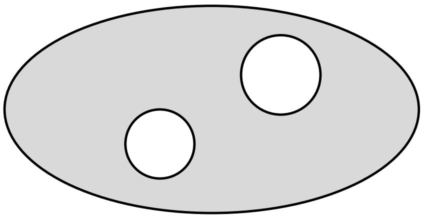
$$\oint_{\mathcal{C}} f(z)\,dz = 0. \tag{8}$$

Важно то, что формула (8) *может быть обобщена* на многосвязные области. Мы сформулируем соответствуюшее утверждение в той форме, которая понадобится нам в дальнейшем.

Теорема 10. Пусть $\mathcal{C}$ — замкнутый контур, проходимый в положительном направлении. Предположим, что внутри множества D', им ограниченного, лежат k непересекающихся кругов. Обозначим через D теоретико-множественную разность множества D' и объединения этих кругов, а через $\mathcal{C}_i$ — граничные окружности, проходимые также в положительном направлении. Предположим, что функция $f(z)$ дифференцируема в некоторой области, содержащей множество D. Тогда имеет место формула

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z)\,dz = \sum_{i=1}^{k} \oint_{\mathcal{C}_i} f(z)\,dz. \tag{9}$$

Множество D, о котором идет речь в теореме, как раз и будет многосвязным. На следующем рисунке изображена такое множество в случае $k = 2$.



Собственно говоря, утверждение этой теоремы, как и формула (8), есть непосредственное следствие обобщения формулы Грина (7) на многосвязные области. В соответствии с введенными ранее обозначениями пусть $-\mathcal{C}_i$ — это с геометрической точки зрения та же самая окружность, но проходимая уже в противоположном направлении, т. е. по часовой стрелке. Однако с точки зрения множества D контур $-\mathcal{C}_i$ является положительно ориентированным, поскольку при его обходе в этом направлении множество D находится слева. Таким образом ориентированной границей множества D является объединение

$$\mathcal{C} \cup \bigcup_{i=1}^{k} (-\mathcal{C}_i),$$

интеграл от формы $f(z)\,dz$ по которому равен нулю. Осталось заметить, что $\oint_{-\mathcal{C}_i} f(z)\,dz = -\oint_{\mathcal{C}_i} f(z)\,dz$. ■

Упражнение 23. Предположим, что функция f дифференцируема в множестве $0 < |z - a| < \rho$. Рассмотрим числа $0 < r_1 < r_2 < \rho$ и обозначим через γ_1 и γ_2 замкнутые контуры, совпадающие с окружностями радиусов r_1 и r_2 с центрами в точке a, проходимыми в положительном направлении. Тогда

$$\oint_{\gamma_1} f(z)\,dz = \oint_{\gamma_2} f(z)\,dz.$$

Упражнение 24. Докажите, что: а) $\oint_{\gamma_r(a)} \dfrac{dz}{z-a} = 2\pi i$; б) если $m > 1$, то $\oint_{\gamma_r(a)} \dfrac{dz}{(z-a)^m} = 0$.

В доказательстве одного из центральных утверждений теории функций комплексной переменной — интегральной формулы Коши — будет использован следующий технический результат.

Теорема 11. Рассмотрим непрерывную функцию $f(z)$ комплексного аргумента и кусочно-гладкую кривую γ на плоскости. Предположим, что $|f(z)| \leqslant m$ во всех точках этой кривой. Справедливо неравенство

$$\left| \oint_{\gamma} f(z)\, dz \right| \leqslant m\,|\gamma|,$$

где через $|\gamma|$ обозначена длина кривой γ.

Несмотря на кажующуюся очевидность этой теоремы доказать ее не очень просто. Вначале мы сформулируем и докажем вспомогательную лемму.

Лемма 12. Рассмотрим комплексно-значную непрерывную функцию $f : [a; b] \to \mathbb{C}$. Справедливо неравенство

$$\left| \int_a^b f(t)\, dt \right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\, dt. \tag{10}$$

Запишем значение интеграла в виде $\int_a^b f(t)\, dt = r \cdot e^{i\varphi}$. где $r = \left| \int_a^b f(t)\, dt \right|$. Тогда

$$\left| \int_a^b f(t)\, dt \right| = e^{-i\varphi} \cdot \int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b e^{-i\varphi} f(t)\, dt.$$

Заметим, что значение интеграла в правой части является действительным числом, а потому он совпадает с интегралом от действительной части подинтегральной функции. Поэтому

$$\left| \int_a^b f(t)\, dt \right| = \int_a^b \operatorname{Re}\left(e^{-i\varphi} f(t)\right)\, dt \leqslant \int_a^b \left|e^{-i\varphi} f(t)\right|\, dt = \int_a^b |f(t)|\, dt. \blacksquare$$

Замечание. Если $f(t) = u(t) + iv(t)$, то неравенство (10) можно переписать в следующей эквивалентной форме:

$$\left(\int_a^b u(t)\, dt \right)^2 + \left(\int_a^b v(t)\, dt \right)^2 \leqslant \left(\int_a^b \sqrt{u^2(t) + v^2(t)}\, dt \right)^2,$$

так что оно совсем не очевидно.

Доказательство теоремы 11. Пусть $w : [a;b] \to \mathbb{C}$ — параметризация пути γ. Для простоты будем считать, что функция w — гладкая (в противном случае надо просто разбить ее область определения на участки, на каждом из которых она будет гладкой). По определению

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(w(t))w'(t)\,dt.$$

В силу неравенства (10) имеем

$$\left|\oint_\gamma f(z)\,dz\right| \leqslant \int_a^b |f(w(t))w'(t)|\,dt \leqslant m\int_a^b |w'(t)|\,dt = m\,|\gamma|. \blacksquare$$

6. Интегральная формула Коши и ее следствия

Начнем с того, что докажем центральное техническое утверждение теории функций комплексной переменной.

Теорема 13. Предположим, что точка a лежит в области, ограниченной контуром $\mathcal{C}$, проходимом в положительном направлении. Пусть функция $f(z)$ является дифференцируемой в этой области. Тогда имеет место формула, называемая *интегральной формулой Коши*:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = f(a). \tag{11}$$

Обозначим через γ_r контур, совпадающий с окружностью радиуса r с центром в точке a, проходимый в положительном направлении. При достаточно малых значениях r он лежит внутри контура $\mathcal{C}$, а потому в силу формулы (9) справедливо равенство

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z-a}\,dz.$$

Поскольку, как мы знаем,

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_r} \frac{1}{z-a}\,dz = 1,$$

то формула (11) равносильна равенству

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_r} \frac{f(a)}{z-a}\,dz.$$

Положим

$$c = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z-a}\,dz - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_r} \frac{f(a)}{z-a}\,dz \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_r} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,dz \right|$$

и докажем, что $c = 0$. Поскольку $\dfrac{f(z)-f(a)}{z-a} \to f'(a)$, то найдется такое число m, что $\left|\dfrac{f(z)-f(a)}{z-a}\right| \leqslant m$ при $|z-a| \leqslant r$ при достаточно малых r. В силу теоремы 12 при всех достаточно малых r имеет место неравенство

$$c = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_r} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,dz \right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\, m \cdot 2\pi r = mr,$$

что возможно только если $c = 0$. ■

Интегральную формулу Коши можно записать следующим образом.

Следствие. Если $|z-a| < r$, то $f(z) = \displaystyle\oint_{\gamma_r} \frac{f(u)}{u-z}\,du$. ■

Теперь мы в состоянии доказать, что дифференцируемая в области D функция комплексной переменной является аналитической, т. е. раскладывается в сходящийся степенной ряд в окрестности любой точки области D.

Теорема 14. Пусть функция f дифференцируема в области D, $a \in D$ и замкнутый круг радиуса r с центром в точке a содержится в области D. Тогда в открытом круге $|z-a| < r$ справедливо разложение

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k, \text{ где } c_k = \oint_{\gamma_r} \frac{f(u)}{(u-a)^{k+1}}\,du.$$

Здесь, как и ранее, через γ_r обозначен путь по окружности радиуса r с центром в точке a, проходимой в положительном направлении.

Пусть $u \in C_r(a)$ и $|z-a| < r$. Тогда

$$\frac{1}{u-z} = \frac{1}{u-a-(z-a)} = \frac{1}{u-a} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-a}{u-a}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-a)^k}{(u-a)^{k+1}}\,.$$

Заметим, что полученный ряд сходится в круге $|z-a| < r$, так как в этом случае $\left|\frac{z-a}{u-a}\right| < 1$. Поскольку

$$\frac{f(u)}{u-z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-a)^k f(u)}{(u-a)^{k+1}}\,,$$

то из интегральной формулы Коши (точнее, из Следствия к теореме 13) мы получаем, что

$$f(z) = \oint_{\gamma_r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-a)^k f(u)}{(u-a)^{k+1}}\, du.$$

Остается доказать, что интегрирование полученного ряда можно провести почленно, т. е. что

$$\oint_{\gamma_r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-a)^k f(u)}{(u-a)^{k+1}}\, du = \sum_{k=0}^{\infty} (z-a)^k \oint_{\gamma_r} \frac{f(u)}{(u-a)^{k+1}}\, du,$$

откуда и будет следовать утверждение теоремы.

Воспользуемся признаком Вейерштрасса равномерной сходимости ряда: если $|\varphi_n(t)| \leqslant a_n$ при всех $t \in [\alpha;\beta]$ и ряд $\sum a_n$ сходится, то ряд $\sum \varphi_n(t)$ сходится равномерно и, как следствие, $\int_\alpha^\beta \sum \varphi_n(t)\, dt = \sum \int_\alpha^\beta \varphi_n(t)\, dt$. В силу леммы 11 это утверждение верно также и для криволинейных интегралов.

Рассмотрим точку z, где $|z-a| < r$. Выберем число ρ так, чтобы $|z-a| \leqslant \rho < r$. Поскольку функция f непрерывна, то она ограничена на контуре γ_r, пусть $|f(u)| \leqslant m$ при всех $|u-a| = r$. Положим $\varphi_n(u) = \dfrac{f(u)(z-a)^n}{(u-a)^{n+1}}$. Справедливы неравенства

$$|\varphi_n(u)| \leqslant \frac{m|z-a|^n}{|u-a|^{n+1}} \leqslant m\frac{\rho^n}{r^{n+1}}\,.$$

Поскольку $\dfrac{\rho}{r} < 1$, то ряд $\sum m\dfrac{\rho^n}{r^{n+1}}$ сходится, а потому, в силу признака Вейерштрасса, $\oint_{\gamma_r} \sum \varphi_n(t)\, dt = \sum \oint_{\gamma_r} \varphi_n(t)\, dt$. ■

7. Ряды Лорана. Вычеты

Для мотивировки основного понятия рассмотрим следующую ситуацию. Пусть $h(z) = \dfrac{f(z)}{g(z)}$, где функции f и g аналитичны в круге с центром в точке a, при этом $f(a) \neq 0$, $g(a) = 0$ и более функция g в этом круге в нуль не обращается. Пусть m — кратность точки a как нуля функции g. Из утверждений об аналитических функциях следует, что тогда $h(z) = \dfrac{h_1(z)}{(z-a)^m}$, где h_1 — аналитическая функция в этом круге. Если

$$h_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

в рассматриваемом круге, то

$$h(z)=\frac{a_0}{(z-a)^m}+\ldots+\frac{a_{m-1}}{z-a}+a_m+a_{m+1}(z-a)+\ldots$$

при $0<|z-a|<r$. В таком случае точка a называется *полюсом порядка* m функции h, при этом если $m=1$, то полюс называется *простым.*

Рядом Лорана называется ряд вида

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-a)^n=\sum_{n<0}c_n(z-a)^n+\sum_{n\geqslant 0}c_n(z-a)^n.$$

Ясно, что первый из рядов в правой части сходится при $|z-a|>r_1$, тогда как второй — при $|z-a|<r_2$. Если $r_1<r_2$, то рял Лорана сходится в кольце $r_1<|z-a|<r_2$.

Упражнение 25. Разложите функцию $f(z)=\dfrac{1}{z^2-3z+2}$ в ряд Лорана в кольце $1<|z|<2$.

Далее нас более будут интересовать ряды Лорана, сходящиеся в так называемом *проколотом круге* $D'_r(a)=\{z\mid 0<|z-a|<r\}$.

Упражнение 26. Разложите функцию $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ в ряд Лорана, сходящийся в $\mathbb{C}\setminus 0$.

Теорема 15. Всякая функция, являющаяся дифференцируемой в проколотом круге $D'_r(a)=\{z\mid 0<|z-a|<r\}$, разлагается в нем в ряд Лорана.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 14 и потому мы его здесь приводить не будем. ■

Итак, пусть

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-a)^n.$$

Рассмотрим две следующие ситуации.

I. Если среди коэффициентов c_n с $n<0$ только конечное число отлично от нуля, то точка a называется *полюсом* функции f.

II. Если $c_n\neq 0$ для бесконечного числа $n<0$, то a называется *существенной особой точкой* функции f.

Приведем без доказательства следующий результат.

Теорема 16 (Пикар). Если a — существенная особая точка функции f, то для любого положительного числа σ образом проколотого круга $D'_\sigma(a)$

при отображении f является все множество $\mathbb{C}$ за исключением, возможно, одной точки.

Иллюстрацией к этой теореме является следующее упражнение.

Упражнение 27. Докажите, что для любого положительного числа σ образом проколотого круга $D'_\sigma(0)$ при отображении $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ является все множество $\mathbb{C}$ за исключением нуля.

Вычетом функции f в точке a называется коэффициент c_{-1} ряда Лорана этой функции в проколотой окрестности этой точки. Значение вычета обозначается через $\operatorname{Res}(f, a)$.

Упражнение 28. Докажите, что если функция f дифференцируема в точке a, то $\operatorname{Res} f, a = 0$.

Вскоре мы получим формулы для вычисления вычетов, но вначале найдите их по определению.

Упражнение 29. Найдите значения вычетов функций $f_1(z) = \dfrac{1}{z^2 - 1}$ и $f_2(z) = \dfrac{1}{z^2 + 1}$ в их особых точках.

Теорема 17. 1. Если точка a является простым полюсом функции f, то

$$\operatorname{Res}(f, a) = \lim_{z \to a} (z - a) f(z).$$

2. Если точка a является полюсом порядка m функции f, то

$$\operatorname{Res}(f, a) = \lim_{z \to a} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \big((z - a)^m f(z)\big)$$

1. По условию $f(z) = \dfrac{c_{-1}}{z - a} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n = \dfrac{c_{-1}}{z - a} + f_1(z)$, где функция f_1 аналитична в окрестности точки a, поэтому $(z - a) f(z) = c_{-1} + (z - a) f_1(z) \to c_{-1}$ при $z \to a$.

2. В этом случае

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z - a)^m} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z - a} + f_1(z),$$

значит,

$$(z - a)^m f(z) = c_{-m} + \ldots + c_{-1}(z - a)^{m-1} + (z - a)^m f_1(z),$$

откуда

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \big((z - a)^m f(z)\big) = (m - 1)!\, c_{-1} + \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \big((z - a)^m f_1(z)\big).$$

Точка a является нулем функции $g(z) = (z-a)^m f_1(z)$ кратности по меньшей мере m, поэтому $g^{(m-1)}(a) = 0$, в частности, $\lim_{z\to a} g^{(m-1)}(z) = 0$, поэтому

$$\lim_{z\to a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\big((z-a)^m f(z)\big) = (m-1)!\, c_{-1},$$

откуда и следует искомая формула. ■

Упражнение 30. Докажите, что если $f(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$, где $g(a) \neq 0$ и точка a является простым нулем функции h, то $\operatorname{Res}(f,a) = \dfrac{g(a)}{h'(a)}$.

Упражнение 31. Найдите вычеты функции $f(z) = \frac{z}{\sin z}$ во всех ее особых точках.

Роль вычетов видна из следующего утверждения.

Теорема 18. Пусть a — изолированная особая точка функции f (таким образом, f аналитична в некоторой проколотой окрестности этой точки). Тогда для достаточно малых r имеет место равенство

$$\oint_{\gamma_r(a)} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f,a). \tag{12}$$

Для простоты докажем эту теорему для случая, когда особая точка a является полюсом. В таком случае

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-a} + f_1(z),$$

где f_1 — аналитическая функция, следовательно, $\oint_{\gamma_r(a)} f_1(z)\,dz = 0$. Поэтому

$$\oint_{\gamma_r(a)} f(z)\,dz = 2\pi i\, c_{-1} = 2\pi i \operatorname{Res}(f,a)$$

в силу результата упражнения 24.

8. Теорема Коши о вычетах и ее применения

Теорема 19 (теорема Коши о вычетах). Рассмотрим положительно ориентированный контур $\mathcal{C}$, ограничивающий множество D. Пусть функция f аналитична в некоторой области, содержащей D, за исключением конечного числа точек $z_1, z_2, \ldots, z_k$, лежащих в D (но не лежащих на контуре $\mathcal{C}$). Тогда справедливо равенство

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}(f, z_j). \tag{13}$$

Для доказательства надо просто воспользоваться утверждениями теорем 10 и 18. Действительно, выбросив из множества D круги с центрами в точках z_i, мы получим множество, в котором функция f аналитична. Пусть $\mathcal{C}_i$ — положительно ориентированные границы этих кругов. Теорема 10 утверждает, что имеет место равенство

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{k} \oint_{\mathcal{C}_j} f(z)\,dz.$$

Осталось заметить, что в силу теоремы 18 каждое из слагаемых в правой части этого равенства и равно $2\pi i \operatorname{Res}(f, z_j)$. ■

Пример 1. Пусть требуется вычислить интеграл

$$\oint_{|z-2|=1} \frac{z^3}{(z-2)^2}\,dz.$$

Вместо того, чтобы провести непосредственное интегрирование, напишем, что

$$\oint_{|z-2|=1} \frac{z^3}{(z-2)^2}\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{z^3}{(z-2)^2}\,, 2\right).$$

Для поиска вычета воспользуемся формулой теоремы 17. Если $f(z) = \dfrac{z^3}{(z-2)^2}$, то $\dfrac{d}{dz}\big((z-2)^2 f(z)\big) = \big(z^3\big)' = 3z^2$, поэтому вычет равен 12, а искомый интеграл равен $24\pi i$.

Покажем теперь, что основную теорему о вычетах можно использовать для нахождения определенных интегралов от функций действительной переменной.

Пример 2. Рассмотрим интеграл $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\cos x}$ и проделаем в нем следующие преобразования, используя то, что $\cos x = \dfrac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$. Имеем,

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\cos x} = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\frac{1}{2}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)} =$$
$$= \int_0^{2\pi} \frac{2e^{ix}\,dx}{e^{2ix}+4e^{ix}+1} = \frac{1}{i}\oint_{C_1(0)} \frac{2dz}{z^2+4z+1} = 4\pi \operatorname{Res}(f, z_0),$$

где $f(z) = \dfrac{1}{z^2+4z+1}$, а $z_0 = \sqrt{3}-2$ — это единственный из корней знаменателя, лежащий внутри единичного круга с центром в нуле. Так как

$\mathrm{Res}(f, z_0) = \dfrac{1}{2z_0 + 4} = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$, то

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2 + \cos x} = 4\pi \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\,.$$

Проведенные при решении предыдущего примера рассуждения можно обобщить.

Теорема 20. Пусть $R(x, y)$ — рациональная функция двух переменных. Рассмотрим функцию комплексной переменной

$$f(z) = \frac{1}{z}\,R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right).$$

Тогда

$$\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)\,dx = 2\pi \sum_{|a_i|<1} \mathrm{Res}(f, a_i),$$

где a_i — полюса функции f, а суммирование ведется по всем полюсам, лежащим в единичном круге.

Упражнение 32. Докажите эту теорему. ■

Следующий пример связан с нахождением несобственных интегралов.

Пример 3. Вычислим интеграл $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1}$.

Пусть $f(z) = \dfrac{1}{z^4 + 1}$. Проинтегрируем эту функцию по контуру $\mathcal{C}$, состоящему из отрезка $[-r; r]$ действительной оси и верхней полуокружности S_+, построенной на этом отрезке как на диаметре, проходимых в положительном направлении. Таким образом

$$\oint_{\mathcal{S}} f(z)\,dz = \int_{-r}^{r} f(x)\,dx + \oint_{S_+} f(z)\,dz.$$

Ясно, что

$$\int_{-r}^{r} f(x)\,dx \to 2\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1}\,, \text{ а } \oint_{S_+} f(z)\,dz \to 0 \text{ при } r \to \infty.$$

Поэтому по основной теореме о вычетах

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1} = \pi i\big(\mathrm{Res}(f, z_1) + \mathrm{Res}(f, z_2)\big),$$

где $z_1 = \dfrac{1 + i}{\sqrt{2}}$ и $z_2 = \dfrac{-1 + i}{\sqrt{2}}$ — это корни из -1, лежащие в области, ограниченной контуром $\mathcal{C}$. Осталось подсчитать эти вычеты.

Имеем,

$$\operatorname{Res}(f, z_1) = \frac{1}{4z_1^3} = -\frac{z_1}{4} \text{ и } \operatorname{Res}(f, z_1 2) = \frac{1}{4z_2^3} = -\frac{z_2}{4}\,,$$

поэтому искомый интеграл равен

$$\pi i\big(\operatorname{Res}(f, z_1) + \operatorname{Res}(f, z_2)\big) = -\frac{\pi i}{4}\,(z_1 + z_2) = -\frac{\pi i}{4} \cdot i\sqrt{2} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\,.$$

Конечно, этот интеграл можно было найти при помощи методов, рассматривавшихся на 1 курсе. Однако заметим, что первообразной подинтегральной функции является функция

$$\frac{1}{4\sqrt{2}}\,\left(2\operatorname{arctg}(1 + x\sqrt{2}\,) + 2\operatorname{arctg}(x\sqrt{2} - 1) + \ln\frac{1 + x\sqrt{2} + x^2}{1 - x\sqrt{2} + x^2}\right)$$

искать которую достаточно трудоёмко.

Решения упражнений

1. а) Поскольку $(x+iy)^3 = x^3+3ix^2y-3xy^2 = iy^3$, то $u_1(x,y) = x^3-3xy^2$ и $v_1(x,y) = 3xy^2-y^3$. б) Ответ: $u_2(x,y) = x+\dfrac{x}{x^2+y^2}$ и $v_2(x,y) = y-\dfrac{y}{x^2+y^2}$.
в) Из основного свойства экспоненты и формулы Эйлера следует, что

$$e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y),$$

поэтому $u_3(x,y) = e^x\cos y$ и $v_3(x,y) = e^x \sin y$.
2. Действительно, поскольку

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)^2-z^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{2z\,\Delta z+(\Delta z)^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0}(2z+\Delta z) = 2z,$$

то функция $f(z) = z^2$ дифференцируема и $f'(z) = 2z$.
3. Если $f(z) = \overline{z}$, то

$$\frac{\overline{z+\Delta z}-\overline{z}}{\Delta z} = \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}\,.$$

Если число Δz является действительным, то данное отношение равно 1, если же Δz есть чисто мнимое число, то это отношение равно -1. Поэтому не существует предела отношения $\dfrac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$ при $\Delta z \to 0$. Значит, данная функция не дифференцируема (как функция комплексной переменной). Обратите внимание на то, что $f(z) = f(x+iy) = \overline{x+iy} = x-iy$, поэтому действительная и мнимая части этой функции являются бесконечно дифференцируемыми как функции действительных переменных.
4. Поскольку $(x+iy)^2+i(x+iy) = x^2-y^2-y+i(2xy+x)$, то $u(x,y) = x^2-y^2-y$ и $v(x,y) = 2xy+x$. Таким образом, действительно

$$u_x(x,y) = 2x = v_y(x,y) \quad \text{и} \quad u_y(x,y) = -2y-1 = -v_x(x,y).$$

5. Проверим, что действительная часть $u(x,y)$ является гармонической функцией. Имеем,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,,$$

поэтому

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

То, что и мнимая часть является гармонической функцией, проверяется аналогичным образом.

6. Так как $v_x = -u_y = 12x^2 - 4y^3$, то $v(x,y) = 4x^3y - 4xy^3 + g(y)$, где $g(y)$ — некоторая функция. Далее, так как

$$v_y = 4x^3 - 12xy^2 + g'(y) = u_x = 4x^3 - 12xy^2,$$

то $g'(y) = 0$, следовательно $g(y) = c$, где c — некоторая константа. Таким образом

$$f(x+iy) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + i(4x^3y - 4xy^3) + ic = (x+iy)^4 + ic,$$

значит, $f(z) = z^4 + ic$.
7. По условию

$$f'(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{-y}{x^2+y^2}\,.$$

Поскольку $f'(z) = u_x + iv_x = v_y + iv_x$, то

$$v_x = -\frac{y}{x^2+y^2} \quad \text{и} \quad v_y = \frac{x}{x^2+y^2}\,.$$

Как только что было доказано, такой функции не существует.
8. Рассмотрим точки, лежащие в нижней полуплоскости $\operatorname{Im} z < 0$. В этих точках имеет место равенство $v(x,y) = \arg(x+iy) = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$, поэтому вычисления совпадают с вычислениями в последнем разобранном в примере 1 случае.
9. Собственно говоря, доказывать здесь нечего. Представим комплексное число $z \in D$ в тригонометрической форме, $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $\varphi = \arg z \in (-\pi;\pi)$. По определению функции $f(z) = \ln r + i\varphi$, поэтому

$$e^{f(z)} = e^{\ln r + i\varphi} = e^{\ln r}\cdot e^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = z$$

в силу формулы Эйлера.
10. Доказывать реально нечего. Поскольку ряд для косинуса состоит только из четных степеней, то

$$\cos(-z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(-z)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = \cos z.$$

Аналогичным образом доказывается равенство для синуса.
11. Имеем,

$$e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} + i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos z + i\sin z,$$

поскольку $i^{2n} = (-1)^n$, а $i^{2n+1} = (-1)^n i$.

12. Как было только что доказано, $e^{iz} = \cos z + i \sin z$. Поэтому (в силу результата упражнения 10) $e^{-iz} = \cos z + i \sin z$. Сложив эти равенства, мы получим, что $e^{iz} + e^{-iz} = 2\cos z$, а вычтя их, получим, что $e^{iz} - e^{-iz} = 2i \sin z$. Перемножив эти равенства, мы получим, что

$$1 = e^{iz}e^{-iz} = (\cos z + i \sin z)(\cos z - i \sin z) = \cos^2 z - (i \sin z)^2 = \cos^2 z + \sin^2 z.$$

13. Действительно,

$$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = \frac{1}{4}\left(e^{2z} + 2 + e^{-2z}\right) - \frac{1}{4}\left(e^{2z} - 2 + e^{-2z}\right) = 1.$$

Два других равенства следуют из равенств предыдущего упражнения.

14. Поскольку для любого из значений $\operatorname{Arg} z$ справедливо равенство

$$e^{i \operatorname{Arg} z} = \frac{z}{|z|}, \text{ то } e^{\operatorname{Ln} z} = e^{\ln|z|} \cdot \frac{z}{|z|} = |z| \cdot \frac{z}{|z|} = z.$$

15. Пусть $v = k \in \mathbb{Z}$, $\varphi_1, \varphi_2 \in \operatorname{Arg} z$. Поскольку тогда $\varphi_2 = \varphi_1 + 2\pi\ell$, то

$$e^{k \ln|u| + ik\varphi_2} = e^{k \ln|u| + ik\varphi_1 + i2\pi k\ell} = e^{k \ln|u| + ik\varphi_1}$$

в силу того, что $2\pi i$ есть период экспоненты. Таким образом, результат вычисления степени в данном случае не зависит от выбора значения аргумента комплексного числа u.

16. По определению степени получаем, что

$$z^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\ln|z|}{n} + i\frac{\operatorname{Arg} z}{n}} = \sqrt[n]{|z|}\bigl(\cos\frac{\operatorname{Arg} z}{n} + \sin\frac{\operatorname{Arg} z}{n}\bigr) = \sqrt[n]{z}\,.$$

17. По определению интеграла от формы по пути (формула (6)) имеем:

$$\oint_\gamma \omega_1 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \bigl(r\cos t \cdot r\cos t - r\sin t \cdot (-r\sin t)\bigr)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2\,dt = \pi r^2,$$

$$\oint_\gamma \omega_2 = \int_0^{2\pi} \frac{r\cos t \cdot r\cos t - r\sin t \cdot (-r\sin t)\,dt}{r^2\cos^2 t + r^2\sin^2 t} = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

18. Имеем,

$$\oint_{\gamma_1} \omega = \int_0^2 t \cdot 1\,dt = 2,$$

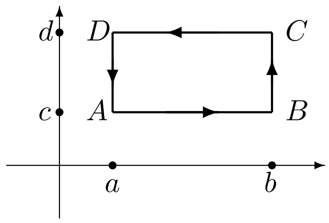
$$\oint_{\gamma_2} \omega = \int_0^{\pi/2} 2\sin t \cdot 2\cos t\,dt = \int_0^{\pi/2} 2\sin 2t\,dt = -\cos 2t\Big|_0^{\pi/2} = 2,$$

$$\oint_{\gamma_3} \omega = \int_0^1 2t^2 \cdot 4t\,dt = \int_0^1 8t^3\,dt = 2$$

$$\oint_{\gamma_4} \omega = \int_0^2 (t-2)\,dt = 2 - 4 = -2.$$

19. Убедитесь в том, что равенства, указанные в формулировке теоремы, непосредственно следуют из формулы замены переменной в определенном интеграле.

20. Рассмотрим прямоугольник $ABCD$, обозначения — на рисунке. Его граница состоит из четырех отрезков, которые мы обходим в указанном на рисунке направлении. Таким образом, параметризации этих отрезков имеют следующий вид: AB : (t, c), $t \in [a; b]$: BC : (b, t), $t \in [c; d]$; CD : $(a + b - t, d)$, $t \in [a; b]$; DA : $(a, (c + d - t))$, $t \in [c; d]$. В результате мы получим кусочно-гладкий контур $\mathcal{C}$, совпадающий с границей прямоугольника $ABCD$.



Теперь перейдем к повторным интегралам в данном двойном интеграле:

$$\iint_{ABCD} \Big(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\Big)\, dx\, dy = -\int_a^b dx \int_c^d \frac{\partial p}{\partial y}\, dy + \int_c^d dy \int_a^b \frac{\partial q}{\partial x}\, dx =$$
$$= -\int_a^b \big(p(x, d) - p(x, c)\big)\, dx + \int_c^d \big(q(b, y) - p(a, y)\big)\, dy =$$
$$= \int_a^b p(x, c)\, dx \int_c^d q(b, y)\, dy - \int_a^b p(x, c)\, dx - \int_c^d q(a, y)\, dy =$$
$$= \oint_{\mathcal{C}} \big(p(x, y)\, dx + q(x, y)\, dy\big),$$

что и требовалось доказать.

21. Поскольку

$$\frac{dz}{z} = \frac{\overline{z}\, dz}{|z|^2} = \frac{(x - iy)(dx + i\, dy)}{x^2 + y^2} = \frac{x\, dx + y\, dy}{x^2 + y^2} + i\, \frac{x\, dy - y\, dx}{x^2 + y^2}$$

и параметризация единичной окружности задается функциями $x = \cos t$ и $y = \sin t$, где $t \in [0; 2\pi]$, то

$$\oint_\gamma \frac{dz}{z} =$$
$$= \int_0^{2\pi} \big(\cos t(-\sin t) + \sin t \cos t\big)\, dt + i \int_0^{2\pi} \big(\cos t \cos t - \sin t(-\sin t)\big)\, dt = 2\pi i.$$

Обратите внимание на то, что вычисления будут значительно короче, если использовать комплексную параметризацию окружности, не переходя к параметризации действительными функциями. Действительно, если $z = e^{it}$, $t \in [0; 2\pi]$, то

$$\oint_\gamma \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}}\, dt = 2\pi i.$$

22. Собственно говоря, доказывать здесь нечего, поскольку равенства $u_y = -v_x$ и $v_y = u_x$ являются условиями Коши–Римана, которые выполнены в силу того, что функция f является дифференцируемой (как функция комплексного аргумента).

23. Пусть D — это кольцо, заданое неравенствами $r_1 \leqslant |z-a| \leqslant r_2$. Искомое равенство есть прямое следствие формулы (9).

24. Проще всего провести вычисления в комплексной форме, введя параметризацию $w(t) = a + re^{it}$, $t \in [0; 2\pi]$. Тогда

$$\oint_{\gamma_r(a)} \frac{dz}{z-a} = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it}}\, dt = \int_0^{2\pi} i\, dt = 2\pi i,$$

а при $m > 1$

$$\oint_{\gamma_r(a)} \frac{dz}{(z-a)^m} = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{r^m e^{imt}}\, dt = \frac{i}{r^{m-1}} \int_0^{2\pi} e^{i(1-m)t}\, dt =$$
$$= \frac{1}{(1-m)r^{m-1}}\, e^{i(1-m)t}\Big|_0^{2\pi} = 0.$$

25. Заметим прежде всего, что

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2} = \frac{1}{(z-1)(z-2)} \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}\,.$$

В круге $|z| < 2$ справедливо разложение

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{2^n} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}\,.$$

При $|z| > 1$ справедливо разложение

$$\frac{1}{z-1} = \frac{\frac{1}{z}}{1 - \frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{z^{n+1}}\,.$$

Поэтому

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n,$$

где $c_n=-1$ при $n<0$ и $c_n=-\frac{1}{2^{n+1}}$ при $n\geqslant 0$.

26. Из ряда Тейлора для экспоненты непосредственно следует, что

$$e^{\frac{1}{z}}=\sum_{n=0}^{i} nfty\frac{1}{n!\,z^n}\,,$$

при этом полученный ряд сходится при всех $z\in\mathbb{C}\setminus 0$.

27. Рассмотрим уравнение $e^{\frac{1}{z}}=w$, где $w\neq 0$. Тогда, как мы знаем, $\frac{1}{z}=\ln|w|+i\operatorname{Arg}w$. По условию должно выполняться неравенство $|z|<\sigma$, т. е. $\frac{1}{|z|}>\frac{1}{\sigma}$. Осталось заметить, что число $\operatorname{Arg}w$ определено с точностью до $2\pi i$, поэтому, взяв число $k\mathbb{N}$ достаточно большим, мы получим, что $|\ln|w|+i\arg w+2\pi ik|>\frac{1}{\sigma}$.

28. Поскольку функция f разлагается в ряд Тейлора в окрестности точки a, то $\operatorname{Res}(f,a)=c_{-1}=0$.

29. Особыми точками функции f_1 являются точки $z_1=1$ и $z_2=-1$. Воспользуемся разложением

$$f_1(z)=\frac{1}{z^2-1}=\frac{1}{2}\big(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+1}\big).$$

Ясно, что вычет суммы двух функций равен сумме вычетов этих функций. Вторая из дробей дифференцируема в точке $z_1=1$, поэтому

$$\operatorname{Res}(f_1,1)=\operatorname{Res}(\frac{1}{2(z-1)}\,,1)=\frac{1}{2}\,.$$

Аналогичным образом получим, что $\operatorname{Res}(f_1,-1)=-\frac{1}{2}$. Приведем значения вычетов второй функции: $\operatorname{Res}(f_2,i)=-\frac{i}{2}$ и $\operatorname{Res}(f_2,-i)=\frac{i}{2}$.

30. По доказанной формуле

$$\operatorname{Res}(f,a)=\lim_{z\to a}(z-a)f(z)=\lim_{z\to a}\frac{(z-a)g(z)}{h(z)}=\lim_{z\to a}g(z)\cdot\lim_{z\to a}\frac{z-a}{h(z)-h(a)}=\frac{g(a)}{h'(a)}\,.$$

31. Особыми точками этой функции являются точки $z_k=\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. Применив результат предыдущего упражнения, получим, что

$$\operatorname{Res}(f,\pi k)=\frac{\pi k}{\cos\pi k}=(-1)^k\pi k.$$

То, что $\operatorname{Res}(f,0)=0$, совсем не случайность. Дело в том, что нуль является так называемой *устранимой* особой точкой, поскольку $\sin z = zg(z)$, где функция g аналитична и $g(0)\neq 0$. Поэтому $\dfrac{z}{\sin z}=\dfrac{1}{g(z)}$ — аналитическая функция в окрестности нуля.

32. Имеем,

$$\int_0^{2\pi} R(\cos x,\sin x)\,dx = \int_0^{2\pi} R\left(\frac{1}{2}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right),\frac{1}{2i}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)\right)\,dx =$$

$$= \frac{1}{i}\int_0^{2\pi}\frac{ie^{ix}}{e^{ix}}\,R\left(\frac{1}{2}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right),\frac{1}{2i}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)\right)\,dx =$$

$$= \frac{1}{i}\int_{C_1(0)} f(z)\,dz = 2\pi\sum_{|a_i|<1}\operatorname{Res}(f,a_i)$$

в силу основной теоремы о вычетах.

Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Найдите значение функции, записав ответ в алгебраической форме.

1. $\cos(1-i)$	2. $\sin(1+i)$	3. $\operatorname{sh}(-3-i)$
4. $\operatorname{Ln}(-2i)$	5. $\operatorname{ch}\dfrac{3\pi i}{4}$	6. $\operatorname{Ln}\dfrac{i-1}{\sqrt{2}}$
7. $\cos(i\ln 3)$	8. $\sin(2-3i)$	9. $\operatorname{sh}(1+2i)$
10. $\ln(-i)$	11. $e^{\ln 2+\frac{3\pi i}{4}}$	12. $\operatorname{Ln}(\sqrt{3}+i)$
13. $\operatorname{Ln}(\sqrt{2}-i\sqrt{2})$	14. $e^{\frac{\pi i}{2}-\ln 2}$	15. $\cos\left(\frac{\pi}{4}-i\ln 4\right)$

Задание 2. Изобразите линию (область) на плоскости, заданную уравнением (неравенством).

1. $\operatorname{Im}\dfrac{1}{1-z}=\dfrac{1}{4}$	2. $\operatorname{Re}\dfrac{1}{z+i}=\dfrac{1}{8}$	3. $\operatorname{Re}((1+i)z)\leqslant 1$
4. $\lvert z\rvert>\operatorname{Re}z+1$	5. $\operatorname{Re}\dfrac{z-1}{z+1}=1$	6. $\operatorname{Im}\dfrac{z-1}{z+6}=7$
7. $\lvert z-1\rvert+\lvert z+1\rvert<4$	8. $1<\lvert z-1-2i\rvert<5$	9. $\lvert z+1\rvert-\lvert z\rvert=1$
10. $\operatorname{Re}\dfrac{1}{z-i}<\dfrac{1}{2}$	11. $\operatorname{Im}\dfrac{1}{z+1}>\dfrac{1}{4}$	12. $\lvert z\rvert>1+\operatorname{Im}z$
13. $\arg\dfrac{z-i}{z+1}=0$	14. $\operatorname{Re}((1+i)z)=\sqrt{2}$	15. $\operatorname{Re}\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{9}$

Задание 3. Проверьте непосредственным вычислением выполнение условий Коши–Римана для следующих функций.

1. $(z+1)e^{2z}$	2. $\dfrac{z+2}{z-i}$	3. $\operatorname{ch}3z$	4. $\sin(iz)$	5. $\dfrac{z+2}{z-2}$
6. $(z-1)e^{z}$	7. $\operatorname{sh}\dfrac{z}{2}$	8. $(1+i)e^{2z}$	9. $\dfrac{z-4}{z+4}$	10. $\operatorname{ch}4z$
11. $(z+2)e^{3z}$	12. $\operatorname{sh}(z+i)$	13. $\dfrac{1}{i}\operatorname{ch}5z$	14. z^2e^{z}	15. $(z+2i)e^{-z}$

Задание 4. а) Убедитесь, что данная функция является гармонической. б) Восстановите аналитическую функцию по ее заданной действительной — $u(x,y)$ — или мнимой — $v(x,y)$ — части.

1. $u(x,y) = x^3 - 3xy^2 + 2x,\ f(i) = i$
2. $v(x,y) = 3x^2y + 2y - y^3,\ f(1) = 3$
3. $v(x,y) = 4xy + 3y,\ f(-1) = -1$
4. $u(x,y) = 2x^2 - 2y^2 + 3x,\ f(i) = -2 + 3i$
5. $v(x,y) = x^3 - 2xy^2 + 2y,\ f(1) = 2 + i$
6. $u(x,y) = 1 - y - 4xy,\ f(1) = 1 + 3i$
7. $u(x,y) = x^3 - 3xy^2 - x^2 + y^2 - 2x,\ f(1) = -2$
8. $v(x,y) = x^2 + 2xy - y^2 + x,\ f(-1) = i$
9. $v(x,y) = 3x^2y - y^3 - 2xy + y,\ f(1) = 1$
10. $u(x,y) = x^2 + x - 2xy - y^2,\ f(1) = 2 + i$
11. $u(x,y) = y^3 - 3x^2y + 2x,\ f(i) = 1 + 2i$
12. $v(x,y) = x^2 - 2xy + 2y - y^2,\ f(i) = 2 + i$
13. $u(x,y) = 1 + 2x - 2xy - x^2 + y^2,\ f(i) = 2 + i$
14. $u(x,y) = x^3 - 3xy^2 - x^2 + y^2 + x,\ f(i) = 1$
15. $u(x,y) = 3x^2y - y^3 - 2xy - 2y,\ f(0) = 0$

Задание 5. а) Разложите функцию в ряд Лорана в проколотой окрестности указанной точки и найдите область его сходимости. б) Найдите вычет заданной функции в этой точке.

1. $\frac{z}{z^2 - 5z + 6},\ z_0 = 2$	2. $\frac{z-2}{z^2 + 5z + 6},\ z_0 = -3$	3. $\frac{1}{z^2 - 9},\ z_0 = \infty$
4. $\frac{z+1}{z^2 - 3z + 2},\ z_0 = 1$	5. $\frac{z}{z^2 + 1},\ z_0 = -i$	6. $\frac{z}{z^2 + 3z + 2},\ z_0 = -1$
7. $\frac{z^2}{(z+1)(z-2)},\ z_0 = -1$	8. $\frac{z+2}{z^2 + z},\ z_0 = -1$	9. $\frac{z+2}{z^2 + 5z + 4},\ z_0 = 1$
10. $\frac{z}{z^2 + 5z + 4},\ z_0 = -4$	11. $\frac{1}{z(z+1)(z+2)},\ z_0 = 0$	12. $\frac{1}{z^3 - 3z^2 + 2z},\ z_0 = 0$
13. $\frac{1}{z^3 - 3z^2 + 2z},\ z_0 = \infty$	14. $\frac{z-2}{z^2 - 5z + 4},\ z_0 = 4$	15. $\frac{2z+1}{z^2 - 3z + 2},\ z_0 = 2$

Задание 6. Вычислите интеграл, воспользовавшись теоремой Коши о вычетах.

1. $\displaystyle\oint_{\|z-1\|=2} \frac{\sin 3z\,dz}{z\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}$	2. $\displaystyle\oint_{\|z-1\|=3} \frac{e^{iz}\,dz}{(z-\pi)^4}$
3. $\displaystyle\oint_{\|z\|=\frac{1}{2}} \frac{e^{2z}\,dz}{z^2(z^2-4)}$	4. $\displaystyle\oint_{\|z-2i\|=2} \frac{dz}{z^2+9}$
5. $\displaystyle\oint_{\|z-2\|=1} \frac{z^2 dz}{(z+1)(z-2)^2}$	6. $\displaystyle\oint_{\|z-1\|=2} \frac{z\,dz}{(z-1)(z+2)^2}$
7. $\displaystyle\oint_{\|z-i\|=4} \frac{z\,dz}{(z-1)(z+2)}$	8. $\displaystyle\oint_{\|z\|=2} \frac{\cos z\,dz}{z^3}$
9. $\displaystyle\oint_{\|z\|=3} \frac{5e^z\,dz}{(z-1)(z+2)}$	10. $\displaystyle\oint_{\|z+1\|=\frac{1}{2}} \frac{\sin iz\,dz}{(z-2)(z+1)^3}$
11. $\displaystyle\oint_{\|z-2\|=3} (3z+1)e^{\frac{1}{z-2}}dz$	12. $\displaystyle\oint_{\|z-1\|=1} (z^2+z+1)\cos\frac{2z}{z-1}\,dz$
13. $\displaystyle\oint_{\|z+2\|=1} (z^2+2z-1)\sin\frac{z}{z+2}\,dz$	14. $\displaystyle\oint_{\|z-i\|=1} \frac{(2z+1)\,dz}{e^{3z}+1}$
15. $\displaystyle\oint_{\|z\|=3} \frac{(z+i)\,dz}{e^{2z}+1}$	