Максиминный подход к оценке объема заказа товара в условиях падения спроса

Л. Н. Полякова, В. М. Буре, В. В. Карелин

Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация,
1199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: Полякова Л. Н., Буре В. М., Карелин В. В. Максиминный подход к оценке объема заказа товара в условиях падения спроса // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2018. Т. 14. Вып. 4. С. 352–361. <https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2018.408>

Рассматривается задача выбора оптимальной стратегии поведения торговой фирмы в рамках максиминного подхода. Предполагается, что в результате проведения маркетинговых исследований определено, что в некоторый неизвестный момент времени $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$ произойдет заметное изменение спроса, при этом принимается, что моменты времени τ_1, τ_2 известны. Торговая фирма использует следующую схему оптового заказа товара. Весь заказанный товар делится на две партии, причем первая поступает сразу и должна быть продана в течение некоторого периода времени $[0, T_1]$. Вторая партия товара поставляется в момент времени T , однако на промежутке времени $[T_1, T]$ она продается со скидкой и полностью реализуется. Моменты времени T_1 и T выбираются торговой фирмой из условия максимизации дохода. Необходимость рассмотрения такой схемы оптового заказа связана с тем, что, во-первых, объем складов торговой фирмы ограничен и они не могут вместить весь заказанный объем товара, во-вторых, производитель не может предложить сразу всю заказанную партию товара, так как не весь он может быть произведен в начальный (нулевой) момент времени, когда осуществляется заказ. В момент времени T_1 торговая фирма продаст всю первую партию товара и получит средства, часть которых она выплатит фирме-производителю. В момент времени T завершается полная реализация всего закупленного товара. Выбор моментов времени T_1 и T дает возможность определить объем первой партии заказанного товара и общий объем всего заказанного у производителя товара. Предложена математическая модель, позволяющая осуществить выбор оптимальной стратегии заказа торговой фирмы в условиях возможного падения спроса в некоторый неизвестный момент времени τ из интервала (τ_1, τ_2) , при этом интервал считается известным. Исследована функция минимума со связанными ограничениями. При некоторых предположениях на целевую функцию и многозначное отображение найден вид производной по направлениям.

Ключевые слова: уровень запаса товара, случайный спрос, дефицит товара, скидка, максимин, производная по направлению, многозначное отображение.

Введение. В работе рассматривается модель поведения торговой фирмы, когда предполагаемый спрос на товар носит постоянный характер (константа) на некотором промежутке времени $[0, \tau]$. В момент времени $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$ спрос на товар снижается, сохраняя прежний характер (константа), при этом предполагается, что моменты времени τ_1, τ_2 известны. Торговая фирма использует следующую схему оптового заказа товара. Весь заказанный товар делится на две партии, причем первая поступает сразу и должна быть продана в течение некоторого периода времени $[0, T_1]$. Вторая партия товара поставляется в момент времени T_1 , однако на промежутке времени $[T_1, T]$ она

продается со скидкой и полностью реализуется. Моменты времени T_1 и T выбираются торговой фирмой из условия максимизации дохода. Необходимость изучения такой схемы оптового заказа связана с тем, что, во-первых, склады торговой фирмы имеют ограниченный объем и не могут вместить весь заказанный объем товара, во-вторых, производитель, не может предложить сразу всю заказанную партию товара, так как не весь товар может быть произведен в начальный (нулевой) момент времени, когда осуществляется заказ. В момент времени T_1 торговая фирма полностью продаст первую партию товара и получит средства, часть которых она выплатит фирме-производителю. В момент времени T происходит завершение полной реализации всего закупленного товара. Выбор моментов времени T_1 и T позволяет определить объем первой партии заказанного товара и общий объем всего заказанного у производителя товара. Близкие по постановке задачи рассматривались в работах [1–16].

Список основных обозначений. Приведем список основных обозначений: c — закупочная цена единицы товара у производителя; p ($p > c$) — цена единицы товара для покупателя в магазине торговой фирмы; s — скидка, предоставляемая покупателю при покупке единицы товара, при дефиците товара (товар поставляется покупателю позже); T_1 — момент времени, когда первая партия товара реализована; T — момент времени поступления второй партии товара; τ — момент резкого изменения (падения) спроса, $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$; τ_1, τ_2 — известные константы; h — уровень спроса до момента времени τ ; l — уровень спроса после момента времени τ , $l < h$; Q — общий объем всего заказанного у производителя товара; Q_1 — объем первой партии товара; Q_2 — объем второй партии товара; $Q_1^{\max}$ — максимально возможный объем первой партии товара; $Q_1^{\min}$ — минимально возможный объем первой партии товара; $Q_2^{\max}$ — максимально возможный объем второй партии товара; $Q_2^{\min}$ — минимально возможный объем второй партии товара; $M(t)$ — текущий уровень запаса товара (дефицита товара); $D(t)$ — мгновенный спрос на товар; V — потери, связанные с дефицитом товара в торговой фирме; $TP(T_1; T)$ — усредненный доход торговой фирмы.

Основные результаты. Будем предполагать, что функция спроса на товар имеет следующий вид:

$$D(t) = \begin{cases} h, & t < \tau, \\ l, & t \geq \tau, \end{cases}$$

где τ — момент резкого изменения спроса (случайная величина), $0 \leq l < h$. Таким образом, спрос в момент времени τ падает с уровня h на уровень l .

Текущий уровень запаса $M(t)$ для $t \in [0, \min(\tau, T_1)]$ определяется формулой

$$\frac{dM(t)}{dt} = -D(t) = -h, \quad M(T_1) = 0.$$

Отсюда следует, что для $t \in [0, \min(\tau, T_1)]$ выполняется выражение

$$M(t) = -h \cdot t + Q_1,$$

в котором Q_1 — объем первой партии товара. Из соотношения $M(T_1) = 0$ при условии $\tau > T_1$ получаем $Q_1 = h \cdot T_1$.

В рамках рассматриваемой постановки должно выполняться неравенство

$$Q_1^{(\min)} \leq Q_1 \leq Q_1^{(\max)}.$$

Получаем следующее ограничение на выбор момента времени T_1 :

$$\frac{1}{h} \cdot Q_1^{(\min)} \leq T_1 \leq \frac{1}{h} \cdot Q_1^{(\max)}.$$

Пусть $T_1 \geq \tau$, тогда для $t \in [\tau, T_1]$ выполняется уравнение

$$M(t) = -h \cdot \tau - l \cdot (t - \tau) + Q_1.$$

Из соотношения $M(T_1) = 0$ в рассматриваемом случае находим

$$Q_1 = h \cdot \tau + l \cdot (T_1 - \tau) = l \cdot T_1 + \tau \cdot (h - l).$$

Из неравенства

$$Q_1^{(\min)} \leq Q_1 \leq Q_1^{(\max)}$$

следует, что

$$\frac{1}{l} \cdot Q_1^{(\min)} - \tau \cdot (h - l) \leq T_1 \leq \frac{1}{l} \cdot Q_1^{(\max)} - \tau \cdot (h - l).$$

Нетрудно видеть, что при условии

$$\tau_1 \geq \frac{1}{l} \cdot Q_1^{(\max)}$$

автоматически получается неравенство $T_1 \leq \tau$.

Если выполнено условие

$$\frac{1}{h} \cdot Q_1^{(\min)} \geq \tau_2,$$

то падение спроса неизбежно происходит на промежутке времени $[0, T_1]$, т. е. $T_1 \geq \tau$. Если интервалы (τ_1, τ_2) и $\left(\frac{1}{h} \cdot Q_1^{(\min)}, \frac{1}{h} \cdot Q_1^{(\max)}\right)$ пересекаются, то могут реализоваться оба варианта.

Далее будем рассматривать только вариант, в котором выполнено условие

$$\frac{1}{h} \cdot Q_1^{(\min)} \geq \tau_2.$$

В этом случае получаем неравенство $T_1 \geq \tau$ и уровень запаса $M(t)$ для $t \in [T_1, T]$ определяется соотношением

$$M(t) = -l \cdot (t - T_1).$$

Уровень запаса при $t = T$ задается равенством

$$M(T) = -l \cdot (T - T_1) + Q_2 = 0,$$

в котором Q_2 — объем второй партии товара. Следовательно,

$$Q_2 = l \cdot (T - T_1).$$

Так как должно выполняться неравенство

$$Q_2^{(\min)} \leq Q_2 \leq Q_2^{(\max)},$$

то получаем ограничение на выбор момента времени T в виде

$$\frac{1}{l} \cdot Q_2^{(\min)} + T_1 \leq T \leq \frac{1}{l} \cdot Q_2^{(\max)} + T_1.$$

Можно видеть, что

$$Q = Q_1 + Q_2 = l \cdot T_1 + \tau \cdot (h - l) + l \cdot (T - T_1) = \tau \cdot (h - l) + lT.$$

Потери, связанные с недопоставкой (дефицитом) товара, на промежутке $[T_1, T]$ определяются выражением

$$V = s \cdot Q_2 = s \cdot l \cdot (T - T_1).$$

В рассматриваемом варианте усредненный доход торговой фирмы находится по формуле

$$TP(\tau, T_1, T) = \frac{1}{T} [(p - c)Q - V] = \frac{1}{T} [(p - c)(\tau(h - l) + lT) - V] \quad (1)$$

при ограничениях

$$\frac{1}{l} \cdot Q_1^{(\min)} - \tau \cdot (h - l) \leq T_1 \leq \frac{1}{l} \cdot Q_1^{(\max)} - \tau \cdot (h - l), \quad (2)$$

$$\frac{1}{l} \cdot Q_2^{(\min)} + T_1 \leq T \leq \frac{1}{l} \cdot Q_2^{(\max)} + T_1. \quad (3)$$

Таким образом, необходимо максимизировать по T_1, T и минимизировать по τ целевую функцию (1) при ограничениях (2), (3).

Сформулируем оптимизационную задачу. Введем функции

$$h_1(\tau, T_1, T) = \frac{1}{l} \cdot Q_1^{(\min)} - \tau \cdot (h - l) - T_1,$$

$$h_2(\tau, T_1, T) = T_1 - \frac{1}{l} \cdot Q_1^{(\max)} + \tau \cdot (h - l), \quad h_3(\tau, T_1, T) = \tau - T_1,$$

$$g_1(T_1, T) = T_1 - T, \quad g_2(T_1, T) = \frac{1}{l} \cdot Q_2^{(\min)} + T_1 - T,$$

$$g_3(T_1, T) = T - \frac{1}{l} \cdot Q_2^{(\max)} - T_1.$$

Образуем множества

$$\mathfrak{T}_1(T_1, T_2) = \{\tau \in \mathbb{R} \mid h_i(\tau, T_1, T) \leq 0, \quad i = 1, \dots, 3\},$$

$$\mathfrak{T}_2 = \{(T_1, T) \in \mathbb{R}^2 \mid g_i(T_1, T) \leq 0, \quad i = 1, \dots, 3\}.$$

Необходимо решить следующую задачу: найти

$$\max_{(T_1, T) \in \mathfrak{T}_2} \min_{\tau \in \mathfrak{T}_1(T_1, T_2)} TP(\tau, T_1, T). \quad (4)$$

Отметим тот факт, что при каждом фиксированном T_1, T целевая функция TP и функции, задающие ограничения h_i , $i = 1, 2, 3$, линейны по τ . В данном случае $\mathfrak{T}_1(T_1, T_2) \subset \mathbb{R}$ есть отрезок или луч на вещественной прямой. Потому задача минимизации функции $TP(\tau, T_1, T)$ на множестве $\mathfrak{T}_1(T_2, T)$ в общем случае — это задача линейного программирования.

Максиминные задачи. Рассмотрим математическую модель задачи (4). Хорошо известно, что функция минимума является негладкой. Введем обозначения:

$$x = (T_1, T) \in \mathbb{R}^2, \quad y = \tau \in \mathbb{R}, \quad f(x, y) = TP(\tau, T_1, T),$$

$$\psi(x) = \mathfrak{T}_1(T_1, T_2) \subset \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \min_{y \in \psi(x)} f(x, y), \quad X = \mathfrak{T}_2.$$

Тогда задача (4) примет вид: найти

$$\max_{x \in X} \min_{y \in \psi(x)} f(x, y) = \max_{x \in X} \varphi(x). \quad (5)$$

Опишем свойства функции $\varphi(x)$ (см., например, [17]).

Задача (5) есть задача максимизации функции со связанными ограничениями, и ее решение зависит от свойств многозначного отображения

$$\psi(y) : \mathbb{R} \rightarrow 2^{\mathbb{R}},$$

в котором через $2^{\mathbb{R}}$ обозначено множество всех подмножеств вещественной прямой $\mathbb{R}$.

Основные свойства многозначных отображений. Сформулируем некоторые свойства многозначных отображений [18]. Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ и $Y \subset \mathbb{R}^m$ — некоторые множества. Через 2^Y обозначим совокупность всех непустых подмножеств множества Y .

Многозначное отображение $\psi : X \rightarrow 2^Y$ называется *полу непрерывным сверху в точке* $x \in X$, если из того, что

$$x_n \rightarrow x, \quad x_n \in X, \quad y_n \rightarrow y, \quad y_n \in \psi(x_n),$$

следует $y \in \psi(x)$.

Отображение ψ называется *полу непрерывным сверху*, если оно полу непрерывно сверху в каждой точке $x \in X$.

Многозначное отображение ψ называется *полу непрерывным снизу в точке* $x \in X$, если из того, что для любого $y \in \psi(x)$ и любой последовательности

$$\{x_n\}, x_n \rightarrow x, \quad x_n \in X,$$

вытекает такая последовательность $\{y_n\}$, $y_n \in \psi(x_n)$, что $y_n \rightarrow y$.

Отображение ψ называется *полу непрерывным снизу*, если оно полу непрерывно снизу в каждой точке $x \in X$.

Отображение ψ , полу непрерывное сверху и снизу в каждой точке $x \in X$, называется *непрерывным по Какутани*.

Если отображение ψ полу непрерывно сверху, то для любого $x \in X$ множество $\psi(x)$ замкнуто. Отображение ψ называется *ограниченным*, если оно переводит ограниченные множества в ограниченные, т. е. если X — ограниченное множество, то и множество $\bigcup_{x \in X} \psi(x)$ также ограничено.

Теорема 1 [17]. Пусть отображение $\psi : X \rightarrow 2^Y$ непрерывно по Какутани и ограничено. Тогда, если функция f непрерывна на X , то функция

$$\varphi(x) = \max_{y \in \psi(x)} f(x, y)$$

также непрерывна на X .

Безусловно, эта теорема верна и для функции

$$\varphi(x) = \min_{y \in \psi(x)} f(y).$$

Обозначим через

$$\delta(X, Y) = \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} \|x - y\|.$$

Величина $\delta(X, Y)$ называется *уклонением множества X от множества Y* . Хаусдорфовым расстоянием между выпуклыми множествами X и Y из $\mathbb{R}^n$ называется функция

$$\rho_H(X, Y) = \max\{\rho(X, Y), \rho(Y, X)\}.$$

Отображение ψ называется *непрерывным по Хаусдорфу в точке $x \in X$* , если из соотношения $x_n \rightarrow x$, $x_n \in X$, следует, что

$$\rho_H(\psi(x_n), \psi(x)) \rightarrow 0.$$

Отображение, непрерывное по Хаусдорфу в каждой точке $x \in X$, называется *непрерывным по Хаусдорфу*. Если отображение ψ непрерывно по Хаусдорфу на X , то оно непрерывно там и по Какутани. Если ограниченное отображение ψ непрерывно по Какутани на X , то оно непрерывно и по Хаусдорфу.

Пусть на открытом множестве $X \subset \mathbb{R}^n$ задано многозначное отображение

$$\psi: X \rightarrow 2^{\mathbb{R}^m}.$$

Зафиксируем $x_0 \in X$, $t \in \mathbb{R}^n$, $t \neq 0_n$. Выберем $y_0 \in \psi(x_0)$ и положим, что

$$\gamma(x_0, y_0, t) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid \exists \alpha_0 > 0, y_0 + \alpha y \in \psi(x_0 + \alpha t) \quad \forall \alpha \in [0, \alpha_0]\}.$$

Замыкание множества $\gamma(x_0, y_0, t)$ обозначим через $\Gamma(x_0, y_0, t)$ и назовем *множеством возможных направлений в точке $y_0 \in \psi(x_0)$* . Рассмотрим многозначное отображение вида

$$\psi(x) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid h(x, y) \leq 0\},$$

где $h(x, y)$ — полунепрерывная снизу функция, определенная на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Пусть в точке $z_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ у функции $h(z) = h(x, y)$ существует производная по любому направлению $g = (t, q) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, т. е. существует предел

$$h'(z_0, g) = h'(x_0, y_0, t, q) = \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{h(x_0 + \alpha t, y_0 + \alpha q) - h(x_0, y_0)}{\alpha}.$$

Тогда

$$h(x_0 + \alpha t, y_0 + \alpha q) - h(x_0, y_0) = \alpha h'(z_0, g) + o(\alpha, g),$$

где $\frac{o(\alpha, g)}{\alpha} \rightarrow 0$ при $\alpha \downarrow 0$. Примем, что

$$\gamma_1(x_0, y_0, t) = \{q \in \mathbb{R}^m \mid h'(x_0, y_0, t, q) \leq 0\},$$

$$\gamma_-(x_0, y_0, t) = \{q \in \mathbb{R}^m \mid h'(x_0, y_0, t, q) < 0\}.$$

Пусть точка (x_0, y_0) такова, что $h(x_0, y_0) = 0$.

Лемма 1 [19]. *Справедливо включение*

$$\gamma(x_0, y_0, t) \subset \gamma_1(x_0, y_0, t).$$

Будем говорить, что для функции $h(x, y)$ в точке (x_0, y_0) по направлению t выполнено *условие регулярности*, если уравнение

$$\Gamma(x_0, y_0, t) = \gamma_1(x_0, y_0, t).$$

Лемма 2. *Если замыкание множества $\gamma_-(x_0, y_0, t)$ совпадает с множеством $\gamma_1(x_0, y_0, t)$, то в точке (x_0, y_0) по направлению t выполнено условие регулярности.*

Лемма 3. Пусть равенство

$$h'(x_0, y_0, t, q) = h_1(x_0, y_0, t) + h_2(x_0, y_0, q),$$

причем $h_2(x_0, y_0, q)$ является сублинейным функционалом от q . Тогда если существует такое q_0 , что $h_2(x_0, y_0, q_0) < 0$, то замыкание множества $\gamma_-(x_0, y_0, t)$ совпадает с множеством $\gamma_1(x_0, y_0, t)$.

Зафиксируем $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}^n$, $t \neq 0_n$. Если для любой сходящейся последовательности $\{y_k\}$ такой, что

$$y_k \rightarrow y_0, \quad y_k \in \psi(x_0 + \alpha_k t), \quad \alpha_k \rightarrow +0,$$

справедливо представление $y_k = y_0 + \alpha_k q_k + o(\alpha_k)$, где $q_k \in \Gamma(x_0, y_0, t)$, $\alpha_k q_k \rightarrow 0_m$, $y_0 \in \psi(x_0)$, то говорят, что многозначное отображение ψ допускает аппроксимацию первого порядка в точке x_0 по направлению t .

Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = \max_{y \in \psi(x)} f(x, y),$$

в которой $f(x, y)$ определена и непрерывна вместе с $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ и $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, отображение ψ непрерывно по Хаусдорфу и в точке x_0 допускает аппроксимацию первого порядка по направлению t .

При этих предположениях имеет место теорема о дифференцируемости функции φ по направлению t .

Теорема 2 [18]. Функция φ дифференцируема в точке x_0 по направлению t и

$$\varphi'(x_0, t) = \sup_{y_0 \in R(x_0)} \sup_{q \in \Gamma(x_0, y_0, t)} \left[\left\langle \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}, q \right\rangle + \left\langle \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, t \right\rangle \right],$$

где $R(x_0) = \{y \in \psi(x_0) \mid \varphi(x_0) = f(x_0, y)\}$; $\Gamma(x_0, y_0, t)$ — множество возможных направлений в точке $y_0 \in \psi(x_0)$.

Пусть функция φ имеет вид

$$\varphi(x) = \min_{y \in \psi(x)} f(x, y).$$

В таком случае, используя эту теорему, имеем следующее.

Теорема 3. Функция φ дифференцируема в точке x_0 по направлению t и

$$\varphi'(x_0, t) = - \inf_{y_0 \in R(x_0)} \inf_{q \in \Gamma(x_0, y_0, t)} \left[\left\langle \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}, q \right\rangle + \left\langle \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, t \right\rangle \right], \quad (6)$$

здесь $R(x_0) = \{y \in \psi(x_0) \mid \varphi(x_0) = f(x_0, y)\}$, $\Gamma(x_0, y_0, t)$ — множество возможных направлений в точке $y_0 \in \psi(x_0)$.

Формула (6) позволяет найти направления возрастания функции φ .

Заключение. В статье представлен вариант, в котором выполнено неравенство

$$\frac{1}{h} \cdot Q_1^{(\min)} \geq \tau_2.$$

Во всех остальных вариантах рассмотрение может быть проведено аналогично. Исследована функция минимума со связанными ограничениями. При некоторых

предположениях на целевую функцию и многозначное отображение найден вид производной по направлениям.

Литература

1. Буре В. М., Карелин В. В., Буре А. В. Оценка объема заказа товара при возможном падении спроса // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2018. Т. 14. Вып. 3. С. 252–260. doi: org/10.21638/11702/spbu10.2018.306
2. Буре В. М., Карелин В. В., Полякова Л. Н., Ягольник И. В. Моделирование процесса заказа для кусочно-линейного спроса с насыщением // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2017. Т. 13. Вып. 2. С. 138–146.
3. Bure V. M., Karelin V. V., Myshkov S. K., Polyakova L. N. Determination of order QUANTITY with piecewise-linear demand function with saturation // Intern. Journal of Applied Engineering Research. 2017. Vol. 12, N 18. P. 7857–7862.
4. Giri B. C., Sharma S. Optimal ordering policy for an inventory system with linearly increasing demand and allowable shortages under two levels trade credit financing // Oper. Res. Intern. Journal. 2016. Vol. 16. P. 25–50.
5. Aggarwal S. P., Jaggi C. K. Ordering policies of deteriorating items under permissible delay in payments // J. Oper. Res. Soc. 1995. Vol. 46, N 5. P. 658–662.
6. Dave U. Letters and viewpoints on economic order quantity under conditions of permissible delay in payments // J. Oper. Res. Soc. 1985. Vol. 46, N 5. P. 1069–1070.
7. Chen S. C., Teng J. T., Skouri K. Economic production quantity models for deteriorating items with up-stream full trade credit and down-stream partial trade credit // Intern. J. Prod. Econ. 2013. Vol. 155. P. 302–309.
8. Giri B. C., Sharma S. An integrated inventory model for a deteriorating item with allowable shortages and credit linked wholesale price // Optim. Lett. 2015. Vol. 37. P. 624–637. doi: 10.1007/s11590-014-0810-2
9. Goyal S. K. Economic order quantity under conditions of permissible delay in payments // J. Oper. Res. Soc. 1985. Vol. 36(4). P. 335–338.
10. Huang Y. F. Optimal retailer's ordering policies in the EOQ model under trade credit financing // J. Oper. Res. Soc. 2003. Vol. 54(9). P. 1011–1015.
11. Huang Y. F., Hsu K. H. An EOQ model under retailer partial trade credit policy in supply chain // Intern. J. Prod. Econ. 2008. Vol. 112(2). P. 655–664.
12. Jamal A. M. M., Sarker B. R., Wang S. An ordering policy for deteriorating items with allowable shortages and permissible delay in payment // J. Oper. Res. Soc. 1997. Vol. 48(8). P. 826–833.
13. Khanra S., Ghosh S. K., Chaudhuri K. S. An EOQ model for a deteriorating item with time dependent quadratic demand under permissible delay in payment // Appl. Math. Comput. 2011. Vol. 218(1). P. 1–9.
14. Khanra S., Mandal B., Sarkar B. An inventory model with time dependent demand and shortages under trade credit policy // Econ. Model. 2013. Vol. 35. P. 349–355.
15. Maihami R., Abadi I. N. K. Joint control of inventory and its pricing for non-instantaneously deteriorating items under permissible delay in payments and partial backlogging // Math. Comp. Model. 2012. Vol. 55(5–6). P. 1722–1733.
16. Bure V. M., Karelin V. V., Polyakova L. N. Probabilistic model of terminal services // Appl. Math. Sci. 2016. Vol. 10(39). P. 1945–1952.
17. Макаров В. Л., Рубинов А. М. Математическая теория экономической динамики и равновесия. М.: Наука, 1973. 336 с.
18. Демьянов В. Ф. Минимакс: дифференцируемость по направлениям. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1974. 112 с.
19. Полякова Л. Н. О множестве возможных направлений в задачах со связанными ограничениями // Вестн. Ленингр. ун-та. 1984. № 1. С. 32–37.

Статья поступила в редакцию 28 августа 2018 г.

Статья принята к печати 25 сентября 2018 г.

Контактная информация:

Полякова Людмила Николаевна — д-р физ.-мат. наук, проф.; lnpol07@mail.ru

Буре Владимир Мансурович — д-р техн. наук, проф.; vlb310154@gmail.com

Карелин Владимир Витальевич — канд. физ.-мат. наук, доц.; vlkarelin@mail.ru

Maximin approach in estimating of the goods order volume under condition of falling demand

L. N. Polyakova, V. M. Bure, V. V. Karelin

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Polyakova L. N., Bure V. M., Karelin V. V. Maximin approach in estimating of the goods order volume under condition of falling demand. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2018, vol. 14, iss. 4, pp. 352–361. <https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2018.408> (In Russian)

The paper considers the problem of choosing the optimal strategy of behaviour trading company in the maximin approach. Suppose that as a result of marketing research, it was determined that in some unknown moment of time there would be a noticeable change demand, the time points are known. It is assumed that the trading company uses the following wholesale order schemegoods. All ordered goods are divided into two parts, with the first batch goods arrive immediately, and it must be sold within a certain period $[0, T_1]$. The second batch of goods is shipped at time T , however, the interval of time $[T_1, T]$ the second batch of goods are sold at a discount and a full not implemented. The times T_1 and T are was chosen by the trading company from the condition of maximizing income. The need to consider such a scheme wholesale order due to the fact that, firstly, the warehouses of a trading company have limited volume and cannot accommodate the entire volume of goods ordered and secondly, the manufacturer cannot offer all the ordered batch goods, since not all goods can be produced in the initial (zero) point in time when order is made. At time T_1 the trading company will fully sell the first batch of goods and receive funds, part of which she will pay to the manufacturer company. At time T there is a completion of the full realization of all purchased goods. Selection of moments time T_1 and T allows for trade company to determine the volume of the first batch of ordered goods and the total amount of all goods ordered from the manufacturing company. In work, a mathematical model is suggested that allows making the best choice order strategy for a trading company under the condition of falling demand at some unknown time from the interval. It is assumed that the interval is known. The minimum function with compelled constraints is investigated. Under some assumptions on the objective function and multi-valued mapping, the form of the derivative in directions is found.

Keywords: stock level, random demand, shortage of goods, discount, maximin, directional derivative, multi-valued mapping.

References

1. Bure V. M., Karelin V. V., Bure A. V. Ocenka ob'ema zakaza tovara pri vozmozhnom padenii sprosa [Evaluation of the volume of ordering of goods while possible demand drop]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2018, vol. 14, iss. 3, pp. 252–260. doi: [org/10.21638/11702/spbu10.2018.306](https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2018.306) (In Russian)
2. Bure V. M., Karelin V. V., Polyakova L. N., Yagolnik I. V. Modelirovanie processa zakaza dlya kusочно-linejnogo sprosa s насыщением [Modeling of the ordering process for piecewise-linear demand with saturation]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2017, vol. 13, iss. 2, pp. 138–146. (In Russian)
3. Bure V. M., Karelin V. V., Myshkov S. K., Polyakova L. N. Determination of order QUANTITY with piecewise-linear demand function with saturation. *Intern. Journal of Applied Engineering Research*, 2017, vol. 12, no. 18, pp. 7857–7862.
4. Giri B. C., Sharma S. Optimal ordering policy for an inventory system with linearly increasing demand and allowable shortages under two levels trade credit financing. *Oper. Res. Intern. Journal*, 2016, vol. 16, pp. 25–50.

5. Aggarwal S. P, Jaggi C. K. Ordering policies of deteriorating items under permissible delay in payments. *Oper. Res. Intern. Journal*, 1995, vol. 46, no. 5, pp. 658–662.
6. Dave U. Letters and viewpoints on economic order quantity under conditions of permissible delay in payments. *J. Oper. Res. Soc.*, 1985, vol. 46, no. 5, pp. 1069–1070.
7. Chen S. C, Teng J. T., Skouri K. Economic production quantity models for deteriorating items with up-stream full trade credit and down-stream partial trade credit. *Intern. J. Prod. Econ.*, 2013, vol. 155, pp. 302–309.
8. Giri B. C., Sharma S. An integrated inventory model for a deteriorating item with allowable shortages and credit linked wholesale price. *Optim. Lett.*, 2015, vol. 37, pp. 624–637. doi: 10.1007/s11590-014-0810-2
9. Goyal S. K. Economic order quantity under conditions of permissible delay in payments. *J. Oper. Res. Soc.*, 1985, vol. 36(4), pp. 335–338.
10. Huang Y. F. Optimal retailer's ordering policies in the EOQ model under trade credit financing. *J. Oper. Res. Soc.*, 2003, vol. 54(9), pp. 1011–1015.
11. Huang Y. F., Hsu K. H. An EOQ model under retailer partial trade credit policy in supply chain. *Intern. J. Prod. Econ.*, 2008, vol. 112(2), pp. 655–664.
12. Jamal A. M. M., Sarker B. R., Wang S. An ordering policy for deteriorating items with allowable shortages and permissible delay in payment. *J. Oper. Res. Soc.*, 1997, vol. 48(8), pp. 826–833.
13. Khanra S., Ghosh S. K., Chaudhuri K. S. An EOQ model for a deteriorating item with time dependent quadratic demand under permissible delay in payment. *Appl. Math. Comput.*, 2011, vol. 218(1), pp. 1–9.
14. Khanra S., Mandal B., Sarkar B. An inventory model with time dependent demand and shortages under trade credit policy. *Econ. Model.*, 2013, vol. 35, pp. 349–355.
15. Maihami R., Abadi I. N. K. Joint control of inventory and its pricing for non-instantaneously deteriorating items under permissible delay in payments and partial backlogging. *Math. Comp. Model.*, 2012, vol. 55(5–6), pp. 1722–1733.
16. Bure V. M., Karelin V. V., Polyakova L. N. Probabilistic model of terminal services. *Appl. Math. Sci.*, 2016, vol. 10(39), pp. 1945–1952.
17. Makarov V. L., Rubinov A. M. *Matematicheskaya teoriya ehkonomicheskoy dinamiki i ravnovesiya* [Mathematical theory economic dynamics and balance]. Moscow, Nauka Publ., 1973, 336 p. (In Russian)
18. Demyanov V. F. *Minimaks: differenciruemost' po napravleniyam* [Minimax: differentiability in directions]. Leningrad, Leningrad State University Publ., 1974, 112 p. (In Russian)
19. Polyakova L. N. O mnozhestve vozmozhnyh napravlenij v zadachah so svyazannymi ogranicheniyami [On the set of possible directions in problems with related restrictions]. *Vestnik of Leningrad University*, 1984, no. 1, pp. 32–37. (In Russian)

Received: August 28, 2018.

Accepted: September 25, 2018.

Author's information:

Ludmila N. Polyakova — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor; lnpol07@mail.ru

Vladimir M. Bure — Dr. Sci. in Technics, Professor; vlb310154@gmail.com

Vladimir V. Karelin — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor; vlkarelin@mail.ru