Санкт-Петербургский государственный университет
Факультет прикладной математики – процессов управления

Максина А.М.

Алгоритмы решения задач стабилизации нелинейных стационарных систем

Санкт-Петербург 2018

В методическом пособии представлены алгоритмы стабилизации нелинейных стационарных управляемых систем обыкновенных дифференциальных уравнений в различных классах управляющих функций. Рассмотрены вопросы построения стабилизирующих управлений в случаях полной и неполной управляемости, неполной информации о фазовом состоянии объекта, а также дискретности и ограниченности управляющего сигнала.

Методическое пособие направлено на обучение студентов методам построения управляющих функций, гарантирующих стабилизацию для широкого класса нелинейных систем, а также на формирование навыков анализа математических моделей в различных практических задачах.

Предисловие

Создание гибких автономных, помехозащищенных систем управления и их моделирование в реальном времени на различных этапах проектирования, вызванное потребностями современной техники, определило круг математических задач, которые необходимо решать для разработки алгоритмов математического обеспечения как бортовых вычислительных комплексов, так и средств моделирования. Существенное место среди этих задач занимают задачи стабилизации нелинейных стационарных систем, которые связаны с поиском методов построения различных типов управляющих функций, гарантирующих экспоненциальную устойчивость положения равновесия систем обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих поведение объекта управления.

Данное пособие посвящено разработке алгоритмов построения указанных стабилизирующих законов управления.

Пособие состоит из четырех параграфов.

В первом параграфе представлен алгоритм построения синтезирующего управления, гарантирующего стабилизацию нелинейной стационарной системы в случаях полной и неполной управляемости ее линейной части с учетом ограничений на управление.

Во втором параграфе предложен алгоритм построения синтезирующего дискретного управления, обеспечивающего стабилизацию нелинейной стационарной системы с учетом ограничений на управление.

В третьем параграфе разработан конструктивный метод построения синтезирующего управления, гарантирующего стабилизацию нелинейной стационарной системы с учетом неполной информации о фазовом состоянии объекта, а также ограничений на управление.

В четвертом параграфе представлен алгоритм построения управления, гарантирующего стабилизацию нелинейной стационарной системы с учетом неполной информации о фазовом состоянии объекта, дискретности управляющего сигнала и ограничений на управление.

Во всех параграфах найдены достаточно легко проверяемые критерии Калмановского типа, гарантирующие существование решения поставленных задач.

§1. Решение задачи стабилизации нелинейной стационарной системы в классе дифференцируемых управлений

Объектом исследования является нелинейная управляемая стационарная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x,u), \tag{1}$$

$$x = (x^1, \dots, x^n)^T, \quad x \in R^n,$$

$$u = (u^1, \dots, u^r)^T, \quad u \in R^r, \quad r \le n, \quad t \in [0, \infty),$$

$$f \in C^2(R^n \times R^r; R^n), \quad f = (f^1, \dots, f^n)^T, \tag{2}$$

$$f(0,0) = 0, \tag{3}$$

$$\|u\| < C_1, \quad \|x\| < C_2. \tag{4}$$

1^0. *Случай полной управляемости линейной части системы*

Пусть выполнено условие

$$rank\ (B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n, \tag{5}$$

$$A = \left\{ \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(0,0) \right\}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$B = \left\{ \frac{\partial f^i}{\partial u^j}(0,0) \right\}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, r.$$

Задача 1.1 Найти пару функций $x(t)$, $u(t)$, удовлетворяющих системе (1)

и условиям

$$x(0) = x_0, \quad x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n)^T, \quad x(t) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty. \tag{6}$$

Указанную пару функций $x(t)$, $u(t)$ будем называть решением задачи (1), (6).

Справедлива теорема:

Теорема 1.1 *Пусть для правой части системы (1) выполнены условия (2), (3), (5). Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого x_0 : $\|x_0\| < \varepsilon$ существует решение Задачи 1.1, которое может быть получено после решения задачи стабилизации линейной стационарной системы с последующим решением задачи Коши для вспомогательной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (порядки указанных систем совпадают с порядком исходной системы).*

Доказательство. Используя свойства (2), (3) и разлагая правую часть системы (1) в ряд Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, получим систему

$$\dot{x}^i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(0,0)x^j + \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial f^i}{\partial u^j}(0,0)u^j +$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f^i}{\partial x^j \partial x^k}(\tilde{x},\tilde{u})x^j x^k + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{r} \frac{\partial^2 f^i}{\partial x^j \partial u^k}(\tilde{x},\tilde{u})x^j u^k +$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r} \frac{\partial^2 f^i}{\partial u^j \partial u^k}(\tilde{x},\tilde{u})u^j u^k,$$

где
$$\tilde{x} = \theta_i x, \quad \tilde{u} = \theta_i u, \quad \theta_i \in (0,1), \quad i = \overline{1,n}.$$
Введем обозначение
$$\varphi^i(x,u) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 f^i}{\partial x^j \partial x^k}(\tilde{x},\tilde{u})x^j x^k + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial^2 f^i}{\partial x^j \partial u^k}(\tilde{x},\tilde{u})x^j u^k +$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial^2 f^i}{\partial u^j \partial u^k}(\tilde{x},\tilde{u})u^j u^k, \quad i = \overline{1,n}.$$
Тогда система (1) примет вид
$$\dot{x} = Ax + Bu + \varphi(x,u), \tag{7}$$
$$\varphi(x,u) = (\varphi^1, \ldots, \varphi^n)^T.$$

Рассмотрим линейную часть системы (7)
$$\dot{x} = Ax + Bu. \tag{8}$$
Применяя известный алгоритм, найдем управление $u(t)$ вида
$$u(t) = Cx(t), \tag{9}$$
где C – постоянная матрица размерности $[r \times n]$, обеспечивающее экспоненциальную устойчивость системе (8). Это означает, что для решений системы (8), замкнутой управлением (9), имеет место оценка
$$\|x(t)\| \le M\|x_0\|e^{-\lambda t}, \quad M > 0, \quad \lambda > 0. \tag{10}$$
Замкнем систему (7) управлением (9) и запишем полученный результат в виде
$$\dot{x} = (A + BC)x + \varphi(x, Cx). \tag{11}$$
Поскольку функции $\varphi^i(x, Cx)$ являются квадратичными формами по x с переменными коэффициентами, то в области (4) имеет место оценка
$$\|\varphi(x, Cx)\| \le L\|x\|^2, \tag{12}$$
где $L > 0$ – константа. Система (8), замкнутая полученным управлением (9), имеет вид
$$\dot{x} = (A + BC)x \tag{13}$$
и является экспоненциально устойчивой. Пусть $\Phi(t)$, $\Phi(0) = E$ – фундаментальная матрица системы (13). Тогда на основании (10) выполняется оценка
$$\|\Phi(t)\| \le Ke^{-\lambda t}, \quad K > 0, \quad \lambda > 0. \tag{14}$$
Решение системы (11) с начальными данными (6) имеет вид
$$x(t, x_0, 0) = \Phi(t)x_0 + \int_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)\varphi(x, Cx)\, d\tau. \tag{15}$$

Оценим норму этого решения

$$\|x(t)\| \leq \|\Phi(t)\| \|x_0\| + \int_0^t \|\Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)\| \|\varphi(x, Cx)\| \, d\tau. \tag{16}$$

Из условий (12), (14) и свойства

$$\|\Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)\| \leq Ke^{-\lambda t} e^{\lambda \tau}$$

получим оценку нормы решения в виде

$$\|x(t)\| \leq Ke^{-\lambda t} \|x_0\| + \int_0^t KLe^{-\lambda t} e^{\lambda \tau} \|x\|^2 \, d\tau. \tag{17}$$

Выберем константу $C_3 : 0 < C_3 < C_2$. Тогда в области

$$\|x\| \leq C_3 \tag{18}$$

справедливо неравенство

$$\|\varphi(x, Cx)\| \leq L\|x\|^2 \leq LC_3\|x\|. \tag{19}$$

Далее с учетом (19) получим

$$\|x(t)\| \leq Ke^{-\lambda t} \|x_0\| + KLC_3 \int_0^t e^{-\lambda t} e^{\lambda \tau} \|x\| \, d\tau. \tag{20}$$

Если ввести обозначение $\eta(t) = e^{\lambda t}\|x(t)\|$, то из (20) следует

$$\eta(t) \leq K\|x_0\| + KLC_3 \int_0^t \eta(\tau) \, d\tau,$$

откуда по лемме получим

$$\|x(t)\| \leq K\|x_0\| e^{-(\lambda - KLC_3)t}. \tag{21}$$

Обозначим $\mu = \lambda - KLC_3$. Выберем $C_3 > 0$ так, чтобы $\mu > 0$. Тогда для всех x_0, принадлежащих области

$$\|x_0\| \leq \frac{C_3}{K} \tag{22}$$

решения системы (1), замкнутой управлением (9), с начальными данными $x(0) = x_0$ экспоненциально убывают и не покидают области (18).

Теперь выберем x_0 так, чтобы выполнялось ограничение (4) на управление $u(t)$. Легко видеть

$$\|u(t)\| = \|Cx(t)\| \leq \|C\| \cdot \|x(t)\| \leq \|C\|Ke^{-\mu t}\|x_0\|.$$

Отсюда при ограничениях на начальные данные

$$\|x_0\| \leq \frac{C_1}{\|C\|K} \tag{22'}$$

следует, что управление $u(t)$ будет удовлетворять ограничению (4). На основании изложенного следует, что в качестве $\varepsilon > 0$ можно взять величину

$$\varepsilon = \min\left\{\frac{C_3}{K}, \frac{C_1}{\|C\|K}\right\}.$$

Теорема доказана.

Описание алгоритма решения Задачи 1.1.

1. Решаем задачу непрерывной стабилизации системы (8).

2. Задаем величину $\lambda > 0$.

3. Строим нормированную в нуле фундаментальную матрицу решений системы (13) $\Phi(t)$ и оцениваем ее норму при $t = 0$. Полученное значение присваиваем константе K.

4. По заданной константе C_2 находим величину L.

5. Выбираем константу $C_3 : 0 < C_3 < C_2$ так, чтобы $\mu > 0$.

6. Из условий (22) и (22$'$) находим допустимые значения x_0.

7. Замыкаем исходную систему управлением (9) и интегрируем ее с начальным условием $x(0) = x_0$. В результате интегрирования получаем соответствующую управляющей функции $u(t)$ функцию изменения фазовых координат $x(t)$.

2^0. *Случай неполной управляемости линейной части системы*

Пусть после аналогичных действий над правыми частями исходной системы (1) мы представили ее в форме (7).

Пусть теперь

$$rank\ (B, AB, \ldots, A^{n-1}B) = m < n, \tag{23}$$

то есть линейная часть системы (7) не является полностью управляемой.

Задача 1.2 Найти пару функций $x(t)$, $u(t)$, удовлетворяющих системе (1) и условиям

$$x(0) = x_0, \quad x_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^n)^T, \quad x(t) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty. \tag{24}$$

Указанную пару функций $x(t)$, $u(t)$ будем называть решением задачи (1), (24).

Рассмотрим линейную часть системы (7) (система (8)) и прежде чем сформулировать теорему, проведем следующие необходимые преобразования.

В системе (8) сделаем замену переменных по формуле

$$x = Sy, \quad S = (s_1, \ldots, s_m, \tilde{s}_{m+1}, \ldots, \tilde{s}_n). \tag{25}$$

Здесь $s_1, \ldots, s_m$ – базис линейной оболочки столбцов матрицы $(B, AB, \ldots, A^{n-1}B)$, а $\tilde{s}_{m+1}, \ldots, \tilde{s}_n$ – его дополнение до базиса пространства R^n. После подстановки (25) получим систему

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ O_2 \end{pmatrix} u. \tag{26}$$

Здесь $y = (y_1, y_2)^T$ – разбиение вектора y на два вектора y_1 и y_2 размерностей m и $n - m$ соответственно; блок A_{11} размерности $[m \times m]$, A_{12} – $[m \times (n - m)]$, A_{22} – $[(n - m) \times (n - m)]$, B_1 – $[m \times r]$, O_{21} и O_2 – матрицы, состоящие из нулевых элементов, размерностей $[(n-m) \times m]$ и $[(n-m) \times r]$ соответственно.

Рассмотрим две подсистемы

$$\dot{y}_1 = A_{11}\, y_1 + B_1\, u, \tag{27}$$

$$\dot{y}_2 = A_{22}\, y_2. \tag{28}$$

Справедлива следующая

Теорема 1.2 *Пусть для правой части системы (1) выполнены условия (2), (3), (23), а также система (28) экспоненциально устойчива (или, что то же самое, собственные числа матрицы A_{22} имеют отрицательные вещественные части). Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого x_0 : $\|x_0\| < \varepsilon$ существует решение Задачи 1.2, которое может быть получено после решения задачи стабилизации линейной стационарной системы с последующим решением задачи Коши для вспомогательной системы обыкновенных дифференциальных уравнений.*

Доказательство. Используя известный алгоритм, найдем управление вида

$$u(t) = Cy_1(t),$$

где C – постоянная матрица размерности $[r \times m]$, обеспечивающее экспоненциальную устойчивость системе (27). Управление $u(t)$ в старых переменных имеет вид

$$u(t) = CS_m^{-1}x(t), \tag{29}$$

где S_m^{-1} – матрица, состоящая из соответствующих первых m строк матрицы S^{-1}. Если замкнуть теперь систему (8) управлением (29), то для ее решений $x(t)$ с начальными данными $x(0) = x_0$ будет иметь место оценка

$$\|x(t)\| \leq M_1\|x_0\|e^{-\lambda t}, \quad M_1 > 0, \quad \lambda > 0. \tag{30}$$

Далее доказательство полностью повторяет доказательство Теоремы 1.1.

§2. Решение задачи стабилизации в классе дискретных управлений

Объектом исследования является система

$$\dot{x} = f(x, u), \tag{1}$$

$$x = (x^1, \dots, x^n)^T, \quad x \in R^n,$$

$$u = (u^1, \dots, u^r)^T, \quad u \in R^r, \quad r \le n, \quad t \in [0, \infty),$$

$$f \in C^2(R^n \times R^r; R^n), \quad f = (f^1, \dots, f^n)^T, \tag{2}$$

$$f(0,0) = 0, \tag{3}$$

$$rank\ (B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n, \tag{4}$$

$$A = \left\{ \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(0,0) \right\}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$B = \left\{ \frac{\partial f^i}{\partial u^j}(0,0) \right\}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, r,$$

$$\|u\| < C_1. \tag{5}$$

Определение. Управление $u(t)$ называется *дискретным*, если

$$u(t) = u(kh), \quad \forall t \in [kh, (k+1)h], \quad k = 0, 1, \dots,$$

где $h > 0$ – постоянная величина.

Задача 2.1 Найти дискретное управление $u(t)$ так, чтобы решение системы (1) $x(t)$ удовлетворяло условиям

$$x(0) = x_1, \quad x_1 = (x_1^1, \dots, x_1^n)^T, \quad x(t) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty. \tag{6}$$

Указанную пару $x(t)$, $u(t)$ будем называть решением задачи (1), (6).

Теорема 2.1 *Пусть для правой части системы (1) выполнены условия (2),(3),(4). Тогда существуют $\varepsilon > 0$, $h_0 > 0$ такие, что для любых $x_1 : \|x_1\| < \varepsilon$ и для любых $h : 0 < h < h_0$ существует решение Задачи 2.1, которое может быть получено после решения задачи стабилизации линейной стационарной системы и последующим решением задачи Коши для вспомогательной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (порядки указанных систем совпадают с порядком исходной системы).*

Доказательство. Используя свойства (2), (3), систему (1) можно представить в виде

$$\dot{x} = Ax + Bu + \varphi(x, u) + \varphi_1(x, u), \tag{7}$$

$$\varphi(x, u) = (\varphi^1, \dots, \varphi^n)^T,$$

$$\varphi_1(x) = (\varphi_1^1, \dots, \varphi_1^n)^T,$$

$$\varphi^i(x,u) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial^2 f^i}{\partial x^j \partial u^k}(\tilde{x},\tilde{u})x^j u^k + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial^2 f^i}{\partial u^j \partial u^k}(\tilde{x},\tilde{u})u^j u^k, \qquad (8)$$

$$\varphi_1^i(x) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 f^i}{\partial x^j \partial x^k}(\tilde{x},\tilde{u})x^j x^k,$$

$$\tilde{x} = \theta_i x, \quad \theta_i \in (0,1), \quad \tilde{u} = \theta_i u, \quad \theta_i \in (0,1), \quad i = \overline{1,n}.$$

Рассмотрим линейную часть системы (7)

$$\dot{x} = Ax + Bu. \qquad (9)$$

Используя условие (4) и известный алгоритм, найдем управляющую функцию $u(t)$ вида

$$u(t) = Cx(t), \qquad (10)$$

где C – постоянная матрица размерности $[r \times n]$, обеспечивающую экспоненциальную устойчивость системы (9). Наряду с системой (7), рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax + Bu + \varphi(x,u). \qquad (11)$$

Система (11), замкнутая дискретным управлением

$$u = Cx(kh), \quad t \in [kh,(k+1)h], \quad k = 0,1,\ldots, \qquad (12)$$

примет вид

$$\dot{x} = Ax + BCx(kh) + \varphi(x, Cx(kh)). \qquad (13)$$

Введем в рассмотрение функцию $z(t)$

$$z(t) = x(t) - x(kh) = x(t) - x_k, \quad x_k = x(kh), \quad t \in [kh,(k+1)h]. \qquad (14)$$

Решение системы (13) на промежутке $[kh,(k+1)h]$ имеет вид

$$x(t) = e^{A(t-kh)}x_k + e^{At}\int\limits_{kh}^{t} e^{-A\tau}\big(BCx_k + \varphi(x,Cx_k)\big)\,d\tau, \quad t \in [kh,(k+1)h]. \qquad (15)$$

Сделаем в (15) замену независимой переменной t на θ по формуле $t-kh=\theta$. Тогда при $\theta \in [0,h]$ получим

$$x(\theta+kh) = e^{A\theta}x_k + e^{A(\theta+kh)}\int\limits_{0}^{\theta} e^{-A(\tau+kh)}\big(BC + \varphi(x,Cx_k)\big)\,d\tau, \quad \theta \in [0,h]. \qquad (16)$$

Равенство (16) можно записать в виде

$$x(\theta+kh) = x_k + Ae^{A\xi}hx_k + e^{A(\theta+kh)}\int\limits_{0}^{\theta} e^{-A(\tau+kh)}\big(BCx_k + \varphi(x,Cx_k)\big)\,d\tau,$$
$$\theta \in [0,h], \quad \xi \in [0,h]. \qquad (17)$$

Подставив (17) в (14), получим

$$z(\theta+kh)=x(\theta+kh)-x(kh)=Ae^{A\xi}hx_k+$$
$$+e^{A(\theta+kh)}\int\limits_0^\theta e^{-A(\tau+kh)}\big(BCx_k+\varphi(x,Cx_k)\big)\,d\tau,\quad \theta\in[0,h],\quad \xi\in[0,h]. \tag{18}$$

Из (18) следует

$$\|z(\theta+kh)\|\le\|A\|\|e^{A\xi}\|\|x_k\|h+\|e^{A\theta}\|\int\limits_0^\theta\|e^{-A\tau}\|\|BCx_k+\varphi(x,Cx_k)\|\,d\tau,$$
$$\theta\in[0,h],\quad \xi\in[0,h]. \tag{19}$$

Из (2), (8) следует, что в области

$$\|x\|<C_2 \tag{20}$$

справедлива оценка

$$\|\varphi(x,Cx_k)\|<K\|x_k\|. \tag{21}$$

В (20) $C_2>0$ – произвольная константа.

Используя (21), неравенство (19) можно записать в более компактном виде

$$\|z(t)\|\le K_1h\|x_k\|+K_2h\|x_k\|. \tag{22}$$

В (22) константы K_1, K_2 не зависят от промежутка $[kh,(k+1)h]$. С другой стороны согласно (14)

$$\|x_k\|\le\|x(t)\|+\|z(t)\|,\quad t\in[kh,(k+1)h]. \tag{23}$$

Неравенства (22), (23) дают оценку

$$\|z(t)\|\le\frac{(K_1+K_2)h}{1-(K_1+K_2)h}\cdot\|x(t)\|,\quad t\in[kh,(k+1)h]. \tag{24}$$

Система (9), замкнутая стабилизирующим управлением (10), имеет вид

$$\dot{x}=(A+BC)x. \tag{25}$$

В силу экспоненциальной устойчивости системы (25) существует положительно определенная квадратичная форма $V(x)$ [2] такая, что

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(25)}=-\|x\|^2. \tag{26}$$

Производную $V(x)$ в силу системы (13) можно записать в виде

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(13)}=-\|x\|^2-(grad\,V,BCz)+\Big(grad\,V,\varphi\big(x,Cx(kh)\big)-\varphi(x,Cx)\Big)+$$
$$+\big(grad\,V,\varphi(x,Cx)\big). \tag{27}$$

В области (20) справедливы оценки

$$\|grad\, V\| \le K_3\|x\|, \tag{28}$$

$$\|\varphi(x, Cx(kh)) - \varphi(x, Cx)\| \le K_4\|x(kh) - x(t)\|. \tag{29}$$

Используя (27)–(29), получим оценку

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(13)} \le -\|x\|^2 + K_5\|x\|\|z\| + K_6\|x\|\|z\| + K_7\|x\|^3. \tag{30}$$

В (28)–(30) K_i, $i = \overline{3,7}$ – константы, зависящие от области (20).

Из (24), (30) следует

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(13)} \le -\|x\|^2 + \left(\frac{K_5(K_1+K_2)h}{1-(K_1+K_2)h} + \frac{K_6(K_1+K_2)h}{1-(K_1+K_2)h}\right)\|x\|^2 + K_7\|x\|^3. \tag{31}$$

Выберем константу C_3: $0 < C_3 < C_2$ и $h_0 > 0$ так, чтобы было выполнено неравенство

$$\frac{K_5(K_1+K_2)h_0}{1-(K_1+K_2)h_0} + \frac{K_6(K_1+K_2)h_0}{1-(K_1+K_2)h_0} + K_7C_3 < 1 \tag{32}$$

Тогда $\forall h : 0 < h \le h_0$ оценка (31) в области

$$\|x\| < C_3 \tag{33}$$

примет вид

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(13)} \le -\gamma\|x\|^2, \quad \gamma > 0. \tag{34}$$

Производная функции $V(x)$ в силу исходной системы (7) имеет вид

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(7)} = \left.\frac{dV}{dt}\right|_{(13)} + \big(grad\, V, \varphi_1(x)\big). \tag{35}$$

Оценивая правую часть (35) в области (33), по аналогии с (28) с учетом (34) получим

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(7)} \le -\gamma\|x\|^2 + K_8\|x\|^3. \tag{36}$$

Выберем константу C_4: $0 < C_4 < C_3$ так, чтобы

$$K_8C_4 < \gamma. \tag{37}$$

Тогда в области

$$\|x\| < C_4 \tag{38}$$

справедливо неравенство

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(7)} \le -\gamma_1\|x\|^2, \quad \gamma_1 > 0. \tag{39}$$

С другой стороны согласно [2], функция $V(x)$ является квадратичной формой, которая находится после решения уравнения Ляпунова (26), и для нее справедлива оценка

$$\alpha_1\|x\|^2 \le V(x) \le \alpha_2\|x\|^2. \tag{40}$$

Константы α_1, α_2 определяются матрицей квадратичной формы $V(x)$. Из (39), (40) получим

$$\frac{d\,ln\,V}{dt} \le -\frac{\gamma_1}{\alpha_2}. \tag{41}$$

Интегрируя (41) на промежутке $[0,t]$, получим

$$V(x) \le V(x_1)e^{-\frac{\gamma_1}{\alpha_2}t}. \tag{42}$$

Окончательно условия (40) и (42) дают оценку

$$\|x(t,0,x_1)\| \le \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}\|x_1\|e^{-\frac{\gamma_1}{2\alpha_2}t}, \quad t \in [0,\infty). \tag{43}$$

Пусть

$$\|x_1\| < C_4\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}, \tag{44}$$

$$\|x_1\| < \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\frac{C_1}{\|C\|}. \tag{45}$$

Выберем

$$\varepsilon = \min\left\{C_4\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}, \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\frac{C_1}{\|C\|}\right\}.$$

Тогда из оценок (43) – (45) следует, что решение системы (7) не покидает области (38) и удовлетворяет ее граничным условиям (6), а соответствующее ему управление (12) удовлетворяет ограничению (5). Теорема доказана.

Описание алгоритма решения Задачи 2.1.

1. Решение задачи непрерывной стабилизации системы (9).

2. По заданной константе C_2 находим величину K.

3. Используя матрицы A и B, матрицу коэффициентов усиления стабилизирующего управления, полученного в п.1, находим константы K_1, K_2.

4. В области (20) находим константы K_3, K_4, K_5, K_6, K_7.

5. Выбираем константы C_3 и h_0, удовлетворяющие неравенству (32).

6. По выбранным h_0, C_3 находим константу γ.

7. Из условия (37) находим константу C_4.

8. По выбранному C_4 находим константу γ_1.

9. Решение уравнения Ляпунова дает матрицу квадратичной формы $V(x)$. Далее находим минимальное и максимальное собственные числа этой матрицы, которые соответствуют числам α_1 и α_2.

10. Используя полученные в предыдущих процедурах константы α_1, α_2, C_3 и $\|C\|$, из условий (45) находим допустимые значения x_1.

11. Замыкаем исходную систему управлением (12) с шагом дискретности $0 < h \le h_0$ и интегрируем ее с начальным условием $x(0) = x_1$, удовлетворяющим неравенствам (44) – (45), на достаточно большом промежутке времени. В результате интегрирования получаем искомую управляющую

функцию $u(kh)$ и соответствующую ей функцию изменения фазовых координат $x(t)$.

Замечание 2.1 Нетрудно видеть, что предложенный в работе алгоритм можно использовать в случае, когда условие (6) имеет вид

$$x(0) = x_0, \quad \|x(\hat{t})\| < \varepsilon_0, \tag{46}$$

где $\varepsilon_0 > 0$ – произвольное число, $\hat{t}$ – заранее неизвестный момент времени.

Задача 2.2 Найти функции $x(t)$, $u(kh)$, удовлетворяющие системе (1) и условиям

$$x(0) = x_0, \quad \|x(\hat{t})\| < \varepsilon_0, \tag{47}$$

где $\varepsilon_0 > 0$ – произвольное число, $\hat{t}$ – заранее неизвестный момент времени. Нетрудно видеть, что решение Задачи 2.1 на промежутке $[0, \hat{t}]$ дает решение Задачи 2.2 при $\hat{t}$, удовлетворяющем условию

$$\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}\|x_0\|e^{-\frac{\gamma_1}{2\alpha_2}\hat{t}} \le \varepsilon_0. \tag{48}$$

§3. Решение задачи стабилизации с учетом неполной информации о фазовом состоянии объекта

Объектом исследования является управляемая система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x, u), \tag{1}$$

$$x = (x^1, \dots, x^n)^T, \quad x \in R^n,$$

$$u = (u^1, \dots, u^r)^T, \quad u \in R^r, \quad r \leq n, \quad t \in [0, \infty),$$

$$f \in C^2(R^n \times R^r; R^n), \quad f = (f^1, \dots, f^n)^T, \tag{2}$$

$$f(0, 0) = 0, \tag{3}$$

$$rank\ (B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n, \tag{4}$$

$$A = \left\{ \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(0, 0) \right\}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$B = \left\{ \frac{\partial f^i}{\partial u^j}(0, 0) \right\}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, r,$$

$$\|u\| < C. \tag{5}$$

Предположим, что доступен измерению вектор $y(t) \in R^m$, $m \leq n$, связанный с фазовым вектором x уравнением

$$y(t) = g(x(t)), \tag{6}$$

где

$$g \in C^2(R^n; R^m), \quad g = (g^1, \dots, g^m)^T, \tag{7}$$

$$rank\{T^T, A^T T^T, \dots, A^{T n-1} T^T\} = n, \tag{8}$$

$$T = \{\frac{\partial g}{\partial x}(0)\}_{[m \times n]}.$$

Задача 3.1 Используя результаты измерения $y(t)$, найти непрерывное управление $u(t)$ так, чтобы решения системы (1) удовлетворяли условиям

$$x(0) = x_0, \quad x(t) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty. \tag{9}$$

Теорема 3.1 *Пусть для системы (1) и уравнения измерителя (6) выполнены условия (2)–(4), (7), (8). Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что для всех $x_0 \in R^n$, удовлетворяющих неравенству $\|x_0\| < \varepsilon$, существует решение Задачи 3.1, которое может быть получено после решения задачи непрерывной стабилизации линейной стационарной системы и построения матрицы асимптотического наблюдателя типа Люенбергера.*

Доказательство. Будем искать уравнение асимптотического наблюдателя в виде

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y(t) - g(\hat{x}(t))), \quad \hat{x} = (\hat{x}^1, \dots, \hat{x}^n)^T. \tag{10}$$

В уравнении (10) K – неизвестная постоянная матрица размерности $[n\times m]$, подлежащая определению. Используя свойства (2), (3), (7), системы (1) и (10) можно представить в виде

$$\dot{x} = Ax + Bu + \varphi(x,u) + \varphi_1(x,u), \tag{11}$$

$$\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^n)^T, \quad \varphi_1 = (\varphi_1^1, \dots, \varphi_1^n)^T, \tag{12}$$

$$\varphi^i = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial^2 f^i}{\partial x^j \partial u^k}(\tilde{x},\tilde{u})x^j u^k + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial^2 f^i}{\partial u^j \partial u^k}(\tilde{x},\tilde{u})u^j u^k, \tag{13}$$

$$\varphi_1^i = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 f^i}{\partial x^j \partial x^k}(\tilde{x},\tilde{u})x^j x^k,$$

$$\tilde{x} = \theta_i x, \quad \tilde{u} = \theta_i u, \quad \theta_i \in (0,1) \quad i = 1, \dots n,$$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + KT(x(t) - \hat{x}(t)) + K(g_1(x(t)) - g_1(\hat{x}(t))), \tag{14}$$

$$g_1 = (g_1^1, \dots, g_1^m),$$

$$g_1^i = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^2 g^i}{\partial x^j \partial x^k}(\tilde{\tilde{x}})x^j x^k, \tag{15}$$

$$\tilde{\tilde{x}} = \bar{\theta}_i x, \quad \bar{\theta}_i \in (0,1), \quad i = 1, \dots, m.$$

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{16}$$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + KT(x - \hat{x}), \tag{17}$$

Будем искать постоянные матрицы $M_{r\times n}$, $K_{n\times m}$ так, чтобы система (16), (17), замкнутая управлением

$$u(t) = M\hat{x}(t), \tag{18}$$

была экспоненциально устойчивой.

Сделаем замену переменной $\hat{x}$ на δ по формуле

$$\hat{x} - x = \delta. \tag{19}$$

Тогда в новых переменных x, δ система (16), (17), замкнутая управлением (18), примет вид

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + BM & BM \\ O_1 & A - KT \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \delta \end{pmatrix}. \tag{20}$$

В (20) O_1 – матрица, состоящая из нулевых элементов, размерности $[n \times n]$. Используя известный алгоритм непрерывной стабилизации линейных стационарных систем, найдем матрицу M, при которой спектр матрицы $A + BM$ лежит в левой полуплоскости. Чтобы подобрать матрицу K, гарантирующую расположение спектра матрицы $A - KT$ в левой полуплоскости, достаточно по упомянутому алгоритму найти матрицу K такую, чтобы спектр матрицы $-A^T + T^T K^T$ лежал в правой полуплоскости. Тогда из свойства произведения фундаментальных матриц исходной и сопряженной систем будет следовать, что спектр матрицы $A - KT$ лежит в левой полуплоскости. Отсюда и из структуры матрицы системы (20) следует экспоненциальная устойчивость системы (20) при выбранных матрицах M и K. С другой стороны, согласно замене (19), получим экспоненциальную устойчивость системы (16), (17), замкнутой управлением (18). Для удобства дальнейших рассуждений запишем ее в виде одного уравнения

$$\dot{\xi} = P\xi, \tag{21}$$

где

$$\xi = (x, \hat{x})^T, \quad P = \begin{pmatrix} A & BM \\ KT & A - KT + BM \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим систему (10), (11), замкнутую управлением (18),

$$\dot{x} = Ax + BM\hat{x} + \varphi(x, M\hat{x}) + \varphi_1(x, M\hat{x}), \tag{22}$$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + BM\hat{x} + K(y(t) - g(\hat{x}(t))). \tag{23}$$

По аналогии с системой (16), (17) ее можно записать в виде одного уравнения

$$\dot{\xi} = Q\xi + \bar{\varphi}(\xi, \xi) + \bar{\varphi}_1(\xi, \xi). \tag{24}$$

Здесь

$$Q = \begin{pmatrix} A & BM \\ O & A + BM \end{pmatrix},$$

$$\bar{\varphi} = (\varphi(\Gamma_1\xi, M\Gamma_2\xi), K(g(\Gamma_1\xi) - g(\Gamma_2\xi)))^T, \tag{25}$$

$$\bar{\varphi}_1 = (\varphi_1(\Gamma_1\xi, M\Gamma_2\xi), 0, \ldots, 0)^T_{2n\times 1},$$

$$\Gamma_1 = (E, 0)_{n\times 2n}, \quad \Gamma_2 = (0, E)_{n\times 2n}.$$

Здесь O – матрица с нулевыми элементами размерности $[n \times n]$. Наряду с системой (24) рассмотрим систему

$$\dot{\xi} = Q\xi + \bar{\varphi}(\xi, \xi). \tag{26}$$

В силу экспоненциальной устойчивости системы (21), существует положительно определенная квадратичная форма $V(\xi)$ [2] такая, что

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(21)} = -\|\xi\|^2. \tag{27}$$

После несложных рассуждений нетрудно видеть, что производную $V(\xi)$ в силу системы (26) можно записать так

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(26)} = -\|\xi\|^2 + (grad\, V, \Gamma_3\xi) + \big(grad\, V, \bar{\varphi}(\xi, \xi)\big), \tag{28}$$

где

$$\Gamma_3 = \begin{pmatrix} O & O \\ -KT & KT \end{pmatrix}.$$

В области

$$\|\xi\| < C_1 \tag{29}$$

справедлива оценка
$$\|grad\, V\| \leq \gamma_1 \|\xi\|. \tag{30}$$
Используя (28) и (30), получим неравенство
$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(26)} \leq -\|\xi\|^2 + \gamma_2\|\xi\|^2 + \gamma_3\|\xi\|^3. \tag{31}$$
В (30) и (31) γ_i, $i = \overline{1,3}$ – положительные константы, зависящие от области (29). Выберем константу $0 < C_2 < C_1$ так, чтобы было выполнено
$$\gamma_2 + \gamma_3 C_2 < 1. \tag{32}$$
Тогда оценка (31) в области
$$\|\xi\| < C_2 \tag{33}$$
примет вид
$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(26)} \leq -\gamma_4\|\xi\|^2, \quad \gamma_4 > 0. \tag{34}$$
Производную функции $V(\xi)$ в силу системы (24) можно записать так
$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(24)} = \left.\frac{dV}{dt}\right|_{(26)} + \big(grad\, V, \bar{\varphi}_1(\xi,\xi)\big). \tag{35}$$
Оценивая правую часть (35) в области (33), с учетом (34), (13), (25) получим
$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(24)} \leq -\gamma_4\|\xi\|^2 + \gamma_5\|\xi\|^3. \tag{36}$$
Здесь $\gamma_5 > 0$ – константа. Выберем константу C_3: $0 < C_3 < C_2$ так, чтобы
$$\gamma_5 C_3 < \gamma_4. \tag{37}$$
Тогда в области
$$\|\xi\| < C_3 \tag{38}$$
на основании (37) имеет место неравенство
$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(24)} \leq -\gamma_6\|\xi\|^2, \quad \gamma_6 > 0. \tag{39}$$
С другой стороны, согласно [2], функция $V(\xi)$ является квадратичной формой, которая находится после решения уравнения Ляпунова (27), и для нее справедлива оценка
$$\alpha_1\|\xi\|^2 \leq V(\xi) \leq \alpha_2\|\xi\|^2. \tag{40}$$
Константы $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ определяются матрицей квадратичной формы $V(\xi)$. Из (39), (40) следует
$$V(\xi) \leq V(\xi_0)e^{-\frac{\gamma_6}{\alpha_2}t}, \quad \xi_0 = (x(0), \hat{x}(0))^T, \quad t \in [0; +\infty). \tag{41}$$
Окончательно условия (40), (41) дают оценку
$$\|\xi(t,0,\xi_0)\| \leq \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}\|\xi_0\|e^{-\frac{\gamma_6}{2\alpha_2}t}, \quad t \in [0, +\infty). \tag{42}$$

Пусть

$$\begin{aligned} \|\xi_0\| &< C_3\sqrt{\tfrac{\alpha_1}{\alpha_2}}, \\ \|\xi_0\| &< \sqrt{\tfrac{\alpha_1}{\alpha_2}}\tfrac{C}{\|M\|}. \end{aligned} \tag{43}$$

Положим

$$\varepsilon = \min\left\{C_3\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}, \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\frac{C}{\|M\|}\right\}.$$

Тогда из оценок (42), (43) следует, что решение системы (24) не покидает области (38) и удовлетворяет условиям (9), а соответствующее ему управление (18) удовлетворяет ограничению (5). Теорема доказана.

§4. Решение задачи стабилизации с учетом неполной информации о фазовом состоянии объекта в классе дискретных управлений

Объектом исследования является управляемая система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x, u), \tag{1}$$

$$x = (x^1, \ldots, x^n)^T, \quad x \in R^n,$$

$$u = (u^1, \ldots, u^r)^T, \quad u \in R^r, \quad r \leq n, \quad t \in [0, \infty),$$

$$f \in C^2(R^n \times R^r; R^n), \quad f = (f^1, \ldots, f^n)^T, \tag{2}$$

$$f(0,0) = 0, \tag{3}$$

$$rank\ (B, AB, \ldots, A^{n-1}B) = n, \tag{4}$$

$$A = \left\{ \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(0,0) \right\}, \quad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$B = \left\{ \frac{\partial f^i}{\partial u^j}(0,0) \right\}, \quad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, r,$$

$$\|u\| < C. \tag{5}$$

Предположим, что в некоторые дискретные моменты времени $t = kh$, $h > 0$,

$k = 0, 1, ...$ доступен измерению вектор $y(kh) \in R^m$, $m \leq n$, связанный с фазовым вектором x уравнением

$$y(kh) = g(x(kh)), \tag{6}$$

где

$$g \in C^2(R^n; R^m), \quad g = (g^1, \ldots, g^m)^T, \tag{7}$$

$$rank\{T^T, A^T T^T, \ldots, A^{Tn-1} T^T\} = n, \tag{8}$$

$$T = \{\frac{\partial g}{\partial x}(0)\}_{[m \times n]}.$$

Определение. Управление $u(t)$ называется дискретным, если

$$u(t) = u(kh), \quad t \in [kh, (k+1)h), \quad k = 0, 1, ..., \quad h > 0.$$

Задача 4.1 Используя результаты измерения $y(kh)$, $k = 0, 1, \ldots$, $h > 0$, найти дискретное управление $u(t)$ так, чтобы решения системы (1) удовлетворяли условиям

$$x(0) = x_0, \quad x(t) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty. \tag{9}$$

Теорема 4.1 *Пусть для системы (1) и уравнения измерителя (6) выполнены условия (2)–(4), (7), (8). Тогда существуют $\varepsilon > 0$, $h_0 > 0$ такие, что для всех $x_0 \in R^n$, $h > 0$, удовлетворяющих неравенствам*

$$\|x_0\| < \varepsilon, \quad 0 < h < h_0$$

существует решение Задачи 4.1, которое может быть получено после решения задачи непрерывной стабилизации линейной стационарной системы и построения матрицы асимптотического наблюдателя типа Люенбергера.

Доказательство. Будем искать уравнение асимптотического наблюдателя в виде

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y(kh) - g(\hat{x}(kh))), \quad \hat{x} = (\hat{x}^1, \ldots, \hat{x}^n)^T. \tag{10}$$

В уравнении (10) K – неизвестная постоянная матрица размерности $[n \times m]$, подлежащая определению. Используя свойства (2), (3), (7), системы (1) и (10) можно представить в виде

$$\dot{x} = Ax + Bu + \varphi(x, u) + \varphi_1(x, u), \tag{11}$$

$$\varphi = (\varphi^1, \ldots, \varphi^n)^T, \quad \varphi_1 = (\varphi_1^1, \ldots, \varphi_1^n)^T, \tag{12}$$

$$\varphi^i = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial^2 f^i}{\partial x^j \partial u^k}(\tilde{x}, \tilde{u})x^j u^k + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial^2 f^i}{\partial u^j \partial u^k}(\tilde{x}, \tilde{u})u^j u^k, \tag{13}$$

$$\varphi_1^i = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 f^i}{\partial x^j \partial x^k}(\tilde{x}, \tilde{u})x^j x^k,$$

$$\tilde{x} = \theta_i x, \quad \tilde{u} = \theta_i u, \quad \theta_i \in (0, 1), \quad i = 1, \ldots n,$$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + KT(x(kh) - \hat{x}(kh)) + K(g_1(x(kh)) - g_1(\hat{x}(kh))), \tag{14}$$

$$g_1 = (g_1^1, \ldots, g_1^m),$$

$$g_1^i = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^2 g^i}{\partial x^j \partial x^k}(\tilde{\tilde{x}})x^j x^k, \tag{15}$$

$$\tilde{\tilde{x}} = \bar{\theta}_i x, \quad \bar{\theta}_i \in (0, 1), \quad i = 1, \ldots, m.$$

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{16}$$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + KT(x - \hat{x}), \tag{17}$$

Будем искать постоянные матрицы $M_{r \times n}$, $K_{n \times m}$ так, чтобы система (16), (17), замкнутая управлением

$$u(t) = M\hat{x}(t), \tag{18}$$

была экспоненциально устойчивой.

Сделаем замену переменной $\hat{x}$ на δ по формуле

$$\hat{x} - x = \delta. \tag{19}$$

Тогда в новых переменных x, δ система (16), (17), замкнутая управлением (18), примет вид

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + BM & BM \\ O_1 & A - KT \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \delta \end{pmatrix}. \tag{20}$$

В (20) O_1 – матрица, состоящая из нулевых элементов размерности $[n \times n]$. Используя известный алгоритм непрерывной стабилизации линейных стационарных систем, найдем матрицу M, при которой спектр матрицы $A + BM$ лежит в левой полуплоскости. Чтобы подобрать матрицу K, гарантирующую расположение спектра матрицы $A - KT$ в левой полуплоскости, достаточно по упомянутому алгоритму найти матрицу K такую, чтобы спектр матрицы $-A^T + T^T K^T$ лежал в правой полуплоскости. Тогда из свойства произведения фундаментальных матриц исходной и сопряженной систем будет следовать, что спектр матрицы $A - KT$ лежит в левой полуплоскости. Отсюда и из структуры матрицы системы (20) следует экспоненциальная устойчивость системы (20) при выбранных матрицах M и K. С другой стороны, согласно замене (19), получим экспоненциальную устойчивость системы (16), (17), замкнутой управлением (18). Для удобства дальнейших рассуждений запишем ее в виде одного уравнения

$$\dot{\xi} = P\xi, \tag{21}$$

где

$$\xi = (x, \hat{x})^T, \quad P = \begin{pmatrix} A & BM \\ KT & A - KT + BM \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим систему (10), (11), замкнутую дискретным управлением

$$u(t) = M\hat{x}(kh), \quad t \in [kh, (k+1)h), \quad k = 0, 1, \dots . \tag{22}$$

По аналогии с системой (16), (17) ее можно записать в виде одного уравнения

$$\dot{\xi} = Q\xi + R\xi(kh) + \bar{\varphi}(\xi, \xi(kh)) + \bar{\varphi}_1(\xi, \xi(kh)). \tag{23}$$

Здесь

$$Q = \begin{pmatrix} A & O \\ O & A \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} O & BM \\ O & BM \end{pmatrix},$$

$$\bar{\varphi} = (\varphi(\Gamma_1\xi, M\Gamma_2\xi(kh)), K(g(\Gamma_1\xi(kh)) - g(\Gamma_2\xi(kh))))^T, \tag{24}$$

$$\bar{\varphi}_1 = (\varphi_1(\Gamma_1\xi, M\Gamma_2\xi(kh)), 0, \dots, 0)^T_{2n\times 1},$$

$$\Gamma_1 = (E, 0)_{n\times 2n}, \quad \Gamma_2 = (0, E)_{n\times 2n},$$

Здесь O – матрица с нулевыми элементами размерности $[n \times n]$. Наряду с системой (23) рассмотрим систему

$$\dot{\xi} = Q\xi + R\xi(kh) + \bar{\varphi}(\xi, \xi(kh)). \tag{25}$$

Введем в рассмотрение функцию $z(t)$

$$z(t) = \xi(t) - \xi(kh) = \xi(t) - \xi_k, \quad \xi_k = \xi(kh), \quad t \in [kh, (k+1)h]. \tag{26}$$

Решение системы (25) на промежутке $[kh,(k+1)h]$, $k=0,1,\ldots$ имеет вид

$$\xi(t)=e^{Q(t-kh)}\xi_k+e^{Qt}\int_{kh}^{t}e^{-Q\tau}(R\xi_k+\bar{\varphi}(\xi,\xi_k))\,d\tau. \tag{27}$$

Сделаем в (27) замену переменной t на θ по формуле $t-kh=\theta$. Тогда при $\theta\in[0,h]$ получим

$$\xi(\theta+kh)=e^{Q\theta}\xi_k+e^{Q(\theta+kh)}\int_{kh}^{\theta+kh}e^{-Q(\tau+kh)}(R\xi_k+\bar{\varphi}(\xi,\xi_k))\,d\tau. \tag{28}$$

Равенство (28) можно записать в виде

$$\begin{gathered}\xi(\theta+kh)=\xi_k+Qe^{Q\tilde{t}}h\xi_k+e^{Q(\theta+kh)}\int_{kh}^{\theta+kh}e^{-Q(\tau+kh)}(R\xi_k+\bar{\varphi}(\xi,\xi_k))\,d\tau,\\ \theta\in[0,h],\quad \tilde{t}\in[0,h].\end{gathered} \tag{29}$$

Подставив (29) в (26), получим

$$\begin{aligned}z(\theta+kh)&=\xi(\theta+kh)-\xi(kh)=\\ &=Qe^{Q\tilde{t}}h\xi_k+e^{Q(\theta+kh)}\int_{kh}^{\theta+kh}e^{-Q(\tau+kh)}(R\xi_k+\bar{\varphi}(\xi,\xi_k))\,d\tau,\\ &\theta\in[0,h],\quad \tilde{t}\in[0,h].\end{aligned} \tag{30}$$

Из (30) следует

$$\begin{gathered}\|z(\theta+kh)\|\le\|Q\|\|e^{Q\tilde{t}}\|\|\xi_k\|h+\|e^{Q\theta}\|\int_{kh}^{\theta+kh}\|e^{-Q\tau}\|\|R\xi_k+\bar{\varphi}(\xi,\xi_k)\|\,d\tau,\\ \theta\in[0,h],\quad \tilde{t}\in[0,h].\end{gathered} \tag{31}$$

На основании (2), (7), (12), (24) в области

$$\|\xi\|<C_1 \tag{32}$$

существует константа L такая, что

$$\|\bar{\varphi}(\xi,\xi_k)\|\le L\|\xi_k\|. \tag{33}$$

В (32) $C_1>0$ – произвольное число.

Используя (33), неравенство (31) можно записать в более компактном виде

$$\|z(t)\|\le L_1h\|\xi_k\|+L_2h\|\xi_k\|,\quad t\in[kh,(k+1)h]. \tag{34}$$

Константы L_1, L_2 в неравенстве (34) не зависят от номера промежутка $[kh,(k+1)h]$.

С другой стороны, согласно (26)

$$\|\xi_k\|\le\|\xi(t)\|+\|z(t)\|,\quad t\in[kh,(k+1)h]. \tag{35}$$

Неравенства (34), (35) дают оценку

$$\|z(t)\| \leq \frac{(L_1+L_2)h}{1-(L_1+L_2)h}\|\xi(t)\|, \quad t \in [kh,(k+1)h]. \tag{36}$$

В силу экспоненциальной устойчивости системы (21), существует положительно определенная квадратичная форма $V(\xi)$ [2] такая, что

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(21)} = -\|\xi\|^2. \tag{37}$$

После несложных рассуждений нетрудно видеть, что производную $V(\xi)$ в силу системы (25) можно записать так

$$\begin{gathered}\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(25)} = -\|\xi\|^2 - (grad\,V, Rz) + (grad\,V, \Gamma_3 z)+ \\ +\Big(grad\,V, \bar{\varphi}_2\big(\xi,\xi(kh)\big) - \bar{\varphi}_2(\xi,\xi)\Big) + \big(grad\,V, \bar{\varphi}_2(\xi,\xi)\big),\end{gathered} \tag{38}$$

где

$$\Gamma_3 = \begin{pmatrix} O & O \\ -KT & KT \end{pmatrix},$$

$$\begin{gathered}\bar{\varphi}_2(\xi,\xi(kh)) = \Big(\varphi(\Gamma_1\xi, M\Gamma_2\xi(kh)), K(g_1(\Gamma_1\xi(kh)) - g_1(\Gamma_2\xi(kh)))\Big)^T, \\ \bar{\varphi}_2(\xi,\xi) = \Big(\varphi(\Gamma_1\xi, M\Gamma_2\xi), K(g_1(\Gamma_1\xi) - g_1(\Gamma_2\xi))\Big)^T.\end{gathered} \tag{39}$$

В области (32) справедливы оценки

$$\|grad\,V\| \leq \gamma_1\|\xi\|, \tag{40}$$

$$\|\bar{\varphi}_2(\xi,\xi(kh)) - \bar{\varphi}_2(\xi,\xi)\| \leq \gamma_2\|\xi(kh)-\xi\| = \gamma_2\|z\|. \tag{41}$$

Используя (38)–(41), получим неравенство

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(25)} \leq -\|\xi\|^2 + \gamma_3\|\xi\|\|z\| + \gamma_4\|\xi\|\|z\| + \gamma_5\|\xi\|^3. \tag{42}$$

В (42) γ_i, $i=\overline{1,5}$ – положительные константы, зависящие от области (32). Из (36), (38), (42) следует

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(25)} \leq -\|\xi\|^2 + \left(\frac{\gamma_3(L_1+L_2)h}{1-(L_1+L_2)h} + \frac{\gamma_4(L_1+L_2)h}{1-(L_1+L_2)h}\right)\|\xi\|^2 + \gamma_5\|\xi\|^3. \tag{43}$$

Выберем константы $C_2 > 0$, $h_0 > 0$: $0 < C_2 < C_1$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{\gamma_3(L_1+L_2)h_0}{1-(L_1+L_2)h_0} + \frac{\gamma_4(L_1+L_2)h_0}{1-(L_1+L_2)h_0} + \gamma_5 C_2 < 1. \tag{44}$$

Тогда для всех $h: 0 < h < h_0$ оценка (43) в области

$$\|\xi\| < C_2 \tag{45}$$

примет вид

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(25)} \le -\gamma_6\|\xi\|^2, \quad \gamma_6 > 0. \tag{46}$$

Производную функции $V(\xi)$ в силу системы (23) можно записать так

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(23)} = \left.\frac{dV}{dt}\right|_{(25)} + \big(grad\,V, \bar{\varphi}_1\big). \tag{47}$$

Оценивая правую часть (47) в области (45), с учетом (46), (45), (24), (13) получим

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(23)} \le -\gamma_6\|\xi\|^2 + \gamma_7\|\xi\|^3. \tag{48}$$

Здесь $\gamma_7 > 0$ – константа. Выберем константу C_3: $0 < C_3 < C_2$ так, чтобы

$$\gamma_7 C_3 < \gamma_6. \tag{49}$$

Тогда в области

$$\|\xi\| < C_3 \tag{50}$$

на основании (49) имеет место неравенство

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(23)} \le -\gamma_8\|\xi\|^2, \quad \gamma_8 > 0. \tag{51}$$

С другой стороны, согласно [2], функция $V(\xi)$ является квадратичной формой, которая находится после решения уравнения Ляпунова (37), и для нее справедлива оценка

$$\alpha_1\|\xi\|^2 \le V(\xi) \le \alpha_2\|\xi\|^2. \tag{52}$$

Константы $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ определяются матрицей квадратичной формы $V(\xi)$. Из (51), (52) следует

$$V(\xi) \le V(\xi_0)e^{-\frac{\gamma_8}{\alpha_2}t}, \quad \xi_0 = (x(0), \hat{x}(0))^T, \quad t \in [0; +\infty). \tag{53}$$

Окончательно условия (52), (53) дают оценку

$$\|\xi(t,0,\xi_0)\| \le \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}\|\xi_0\|e^{-\frac{\gamma_8}{2\alpha_2}t}, \quad t \in [0, +\infty). \tag{54}$$

Пусть

$$\begin{gathered} \|\xi_0\| < C_3\sqrt{\tfrac{\alpha_1}{\alpha_2}}, \\ \|\xi_0\| < \sqrt{\tfrac{\alpha_1}{\alpha_2}}\tfrac{C}{\|M\|}. \end{gathered} \tag{55}$$

Положим

$$\varepsilon = \min\left\{C_3\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}, \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\frac{C}{\|M\|}\right\}.$$

Тогда из неравенств (54), (55) следует, что решение системы (23) не покидает области (50) и удовлетворяет условиям (9), а соответствующее ему управление (22) удовлетворяет ограничению (5). Теорема доказана.

Замечание 4.1 Повторяя дословно доказательство Теоремы 4.1, нетрудно убедиться, что в качестве асимптотического наблюдателя можно принять уравнение

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = f(\hat{x}, u) + KT(g(x) - g(\hat{x})).$$

Задача 4.2 Используя результаты измерителя (6), найти пару функций $x(t)$, $u(t)$, удовлетворяющие системе (1) и условиям

$$x(0) = 0, \quad \|x(t')\| < \varepsilon_1,$$

где $\varepsilon_1 > 0$ – произвольное число, t' – заранее неизвестный момент времени.

Замечание 4.2 Очевидно, что решение Задачи 4.1 на промежутке $[0, t']$ дает решение Задачи 4.2 при t', удовлетворяющему условию

$$\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}\|\xi_0\|e^{-\frac{\gamma_8}{2\alpha_2}t'} < \varepsilon_1.$$

Литература

1. *Калман Р., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем. М., 1971. 398 с.
2. *Барбашин Е.А.* Введение в теорию устойчивости. М.: Мир. 1967. 223 с.
3. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М., 1959. 211 с.
4. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. М., 1968. 450 с., 475 с.
5. *Зубов В. И.* Лекции по теории управления. М., 1975. 494 с.
6. *Квитко А. Н.* Решение задачи управления движением центра масс летательного аппарата // Вестн. С.-Петербург. ун-та, 1999, вып. 3. Сер. 1. С. 76–81.
7. *Квитко А.Н., Демидова А.М.* Решение граничной задачи для квазилинейных управляемых нестационарных систем. // Вестник СПбГУ. Серия 10, вып. 1, 2006 г. С. 140-147.
8. *Квитко А.Н., Демидова А.М.* Алгоритм решения граничной задачи для нелинейной управляемой системы с учётом случайных возмущений. // Вестник СПбГУ. Серия 10, вып. 3, 2007 г. С. 115-122.