САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

А. З. Веселовская, Н. Б. Шепелявая

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Случайные величины

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Санкт-Петербург
2019

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.171я73

Рецензенты: канд. физ.-мат. наук, доцент С. М. Ананьевский (СПбГУ),
доктор физ.-мат. наук, проф. В. Б. Смирнова (СПбГАСУ)

Рекомендовано к опубликованию
Учебно-методической комиссией по УГСН 01.00.00 «Математика и механика»
С.-Петербургского государственного университета

Веселовская А.З., Шепелявая Н.Б.
Элементы теории вероятностей. Случайные величины: учеб. пособие. – СПб.: СПбГУ, 2019. – 94 с.

В учебном пособии изложены основные сведения о дискретных и непрерывных случайных величинах, а также дается понятие о законе больших чисел и центральной предельной теореме. Материал иллюстрируется примерами, рисунками и разнообразными задачами. Данная работа представляет собой продолжение учебного пособия Веселовской А. З. и Шепелявой Н. Б. «Элементы теории вероятностей. Понятие вероятности».

Пособие предназначено студентам нематематических специальностей, в частности студентам Института философии и филологического факультета СПбГУ.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие базируется на лекциях по теории вероятностей, которые читались авторами на различных факультетах СПбГУ (в виде отдельных курсов или частей общих математических курсов). Предназначается пособие студентам нематематических специальностей, в частности студентам Института философии и филологического факультета СПбГУ. Данная работа представляет собой продолжение учебного пособия «Элементы теории вероятностей. Понятие вероятности» [3], которое используется студентами Института философии в настоящее время.

Мы предполагаем, что читателю знакомы такие понятия как классическое определение вероятности, свойства вероятности, испытания Бернулли, независимость событий. Для удобства читателей в тексте предлагаемой работы даются ссылки как на [3], так и на другую литературу.

Первая глава пособия посвящена дискретным случайным величинам; во второй главе даются начальные сведения о непрерывных распределениях одномерных и двумерных случайных величин; в третьей главе рассматриваются закон больших чисел и центральная предельная теорема. Учитывая, что пособие ориентировано на студентов нематематических специальностей, изложение ведется подробно, в доступной форме, причем акценты сделаны на разъяснение смысла вводимых понятий и касающихся их утверждений. Так, особое внимание уделено математическому ожиданию случайной величины, истории появления этого термина и его связи с «безобидными» играми. В главе 3 подробно излагается суть закона больших чисел и центральной предельной теоремы, а также рассматривается применение центральной предельной теоремы к испытаниям Бернулли.

Материал иллюстрируется примерами, рисунками и задачами с решениями. Предлагаются также задачи для самостоятельного решения, к ним даются ответы и комментарии. Встречающийся в тексте символ • обозначает конец доказательства.

В учебном пособии используется следующая литература (см. список на стр. 93): в главе 1 – [1 - 4; 6; 9], в главе 2 – [1 - 4; 8; 9], в главе 3 – [1; 2; 5; 7; 9].

Художественные иллюстрации к задачам выполнены Еленой Шемяк, за что мы ей очень благодарны.

ГЛАВА 1. ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

§1. Понятие дискретной случайной величины

1. Что такое случайная величина

Рассмотрим случайный эксперимент с пространством элементарных событий Ω. Допустим, есть величина, которая в результате эксперимента принимает различные числовые значения в зависимости от того, какой исход осуществился (причем каждому исходу соответствует только одно число). Иначе говоря, на множестве Ω задана числовая функция.

Определение. Случайной величиной называется функция, заданная на пространстве элементарных событий Ω и принимающая числовые значения.

Замечание. Если множество исходов Ω конечно или счетно, то любая числовая функция, заданная на Ω, является случайной величиной. Если же множество Ω не является конечным или счетным, то случайные величины – это, вообще говоря, не любые функции, заданные на Ω, а удовлетворяющие определенному условию. Мы не приводим определение случайной величины в общем случае, поскольку оно опирается на аксиоматическое определение вероятности и требует достаточно глубоких знаний из области математического анализа. Предлагаем заинтересованным читателям ознакомиться с соответствующим материалом в книге [1], стр. 39-42; 71-72.

В этой главе мы будем предполагать, что множество исходов Ω является конечным или счетным.

Для обозначения случайных величин используют строчные греческие буквы ξ, η,… или заглавные латинские X, Y, …

Пример 1. Бросают игральную кость. Пусть ξ – это выпавшее число. Тогда ξ – это случайная величина, принимающая значения 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Пример 2. Бросают две игральные кости. Пусть η – это сумма выпавших чисел. В этом случае η будет случайной величиной со значениями 2, 3, …, 12.

Пример 3. Подбрасывают монету. Исходу {выпадение герба} сопоставим «1», а исходу {выпадение решетки} сопоставим «0». Тогда получим случайную величину

$$X = \begin{cases} 1, \text{ если выпал герб;} \\ 0, \text{ если выпала решетка.} \end{cases}$$

Примерами случайных величин могут служить количество вызовов, поступающих ежедневно на станцию скорой помощи, количество пожаров, происходящих за сутки в городе N и т.д.

2. Определение дискретной случайной величины

Так как мы рассматриваем случайный эксперимент с конечным или счетным множеством исходов, любая случайная величина, заданная на Ω, будет иметь либо конечное, либо счетное множество значений.

Определение. Случайная величина, принимающая конечное или счетное множество значений, называется дискретной.

В примерах 1–3 (см. п.1 выше) рассмотренные случайные величины являются дискретными.

3. Распределение дискретной случайной величины

Для описания случайной величины недостаточно перечислить ее значения; важны также вероятности, с которыми она принимает эти значения. Приведем пример. Оценка, которую получает студент на экзамене, – это случайная величина с возможными значениями 2, 3, 4, 5. Однако для разных студентов вероятности получить определенную оценку, например 5, могут быть различными, так как зависят от уровня знаний студентов. Еще один пример. Два стрелка стреляют по мишени. За один выстрел каждый из них может выбить 0, 10 или 20 очков. Количество выбитых очков для каждого стрелка является случайной величиной. Пусть ξ_1 – количество очков, выбитых первым стрелком, а ξ_2 – вторым. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 принимают одни и те же значения, но вероятности этих значений для ξ_1 и ξ_2 могут различаться, так как зависят от меткости стрелков.

Для полноты описания случайной величины вводится следующее определение.

Определение. Пусть ξ – дискретная случайная величина. Совокупность значений, которые может принимать эта случайная величина, и вероятностей, с которыми она их принимает, называется *распределением случайной величины* ξ (или *законом распределения случайной величины* ξ).

Распределение дискретной случайной величины удобно записывать в виде таблицы. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – значения случайной величины ξ, а $p_i = \mathrm{P}\{\xi = x_i\}$ – соответствующие вероятности (i=1, 2, …, n). Тогда можно записать распределение ξ в следующем виде:

ξ	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

Пример 1. Бросают игральную кость. Запишем распределение случайной величины ξ, равной количеству выпавших очков:

ξ	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Пример 2. Монету подбрасывают два раза. Пусть ξ – это число выпавших гербов. Найдем распределение случайной величины ξ. Пусть событие {выпадение герба} – это успех. Тогда ξ – это число успехов в двух испытаниях Бер-

нулли с вероятностью успеха $p=\frac{1}{2}$. Случайная величина ξ может принимать значения 0, 1, 2. Вычислим вероятности этих значений. По формуле Бернулли

$$\mathrm{P}\{\xi=0\}=\mathrm{P}_2(0)=q^2=\frac{1}{4};\ \ \mathrm{P}\{\xi=1\}=\mathrm{P}_2(1)=C_2^1pq=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2};$$

$$\mathrm{P}\{\xi=2\}=\mathrm{P}_2(2)=p^2=\frac{1}{4}.$$

Следовательно, распределение случайной величины ξ имеет вид

ξ	0	1	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Пример 3. Для любого случайного эксперимента можно рассмотреть постоянную случайную величину $\xi=c$ (c – фиксированное число). Тогда мы получим следующее распределение:

ξ	c
P	1

Заметим, что во всех рассмотренных примерах сумма вероятностей p_i в распределении случайной величины равна 1. Как показывают приведенные ниже утверждения, это справедливо для любого распределения дискретной случайной величины.

Утверждение 1. Пусть случайная величина ξ имеет распределение

ξ	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

Тогда $\sum_{i=1}^{n} p_i=1$.

Доказательство. События $\{\xi=x_1\}$, $\{\xi=x_2\}$, …, $\{\xi=x_n\}$ образуют полную группу событий (так как в результате эксперимента наступает одно и только одно из этих событий). Тогда (см. [3], §2, п. 5) $\sum_{i=1}^{n} P\{\xi=x_i\}=1$, то есть $\sum_{i=1}^{n} p_i=1$.•

Следующее утверждение приводится без доказательства.

Утверждение 2. Пусть случайная величина ξ принимает счетное множество значений $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$ с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots$ соответственно. Тогда $\sum_{i=1}^{\infty} p_i=1$.

Задача 1. Пусть случайная величина ξ принимает значения 0, 1 и 2 с вероятностями $p_1 = 5c$, $p_2 = 2c$, $p_3 = 3c$ соответственно, где c – некоторое число. Найти c и вычислить $P\{\xi<2\}$, $P\{1\le\xi\le5\}$, $P\{\xi=0,6\}$.

Решение. Запишем распределение случайной величины ξ в виде таблицы:

ξ	0	1	2
P	c	2c	3c

По утверждению 1 имеем: $p_1+ p_2+ p_3 =1$, то есть, 5c+2c+3c=1; c=0,1. Следовательно, ξ имеет распределение

ξ	0	1	2
P	0,5	0,2	0,3

Событие $\{\xi<2\}$ наступает тогда и только тогда, когда $\{\xi=0\}$ или $\{\xi=1\}$, то есть, $\{\xi<2\}=\{\xi=0\}+\{\xi=1\}$. Так как события $\{\xi=0\}$ и $\{\xi=1\}$ несовместны, $P\{\xi<2\}=P\{\xi=0\}+P\{\xi=1\}=0,5+0,2=0,7.$

Аналогично,

$\{1\le\xi\le5\}=\{\xi=1\}+\{\xi=2\}$ и $P\{1\le\xi\le5\}=P\{\xi=1\}+P\{\xi=2\}=0,2+0,3=0,5.$

Поскольку событие $\{\xi=0,6\}$ является невозможным, $P\{\xi=0,6\}=0$.

Задача 2. Из урны, содержащей 4 выигрышных и 16 невыигрышных билетов, наугад выбирают 2 билета. Пусть ξ – число выигрышных билетов среди выбранных. Найти распределение случайной величины ξ.

Решение. Случайная величина ξ может принимать значения 0, 1, 2. Используя комбинаторные формулы, правило умножения и классическое определение вероятности (см. [3], §1, п. 3,4; §3, п.1), получаем

$$P\{\xi=0\}=\frac{C_4^0\cdot C_{16}^2}{C_{20}^2}=\frac{\dfrac{16!}{2!\cdot14!}}{\dfrac{20!}{2!\cdot18!}}=\frac{12}{19};\quad P\{\xi=1\}=\frac{C_4^1\cdot C_{16}^1}{C_{20}^2}=\frac{4\cdot16}{\left(\dfrac{20!}{2!\cdot18!}\right)}=\frac{64}{190}=\frac{32}{95};$$

$$P\{\xi=2\}=\frac{C_4^2\cdot C_{16}^0}{C_{20}^2}=\frac{6}{\left(\dfrac{20!}{2!\cdot18!}\right)}=\frac{6}{190}=\frac{3}{95}.$$

Выпишем распределение случайной величины ξ:

ξ	0	1	2
P	$\frac{12}{19}$	$\frac{32}{95}$	$\frac{3}{95}$

Для контроля правильности вычислений проверим, что сумма вероятностей в таблице распределения равна 1: $\frac{12}{19}+\frac{32}{95}+\frac{3}{95}=\frac{60+32+3}{95}=1.$

Задача 3. Игральную кость бросают 2 раза. Найти распределение разности выпавших чисел (разность берется по абсолютной величине).

Решение. Пусть ξ – разность выпавших чисел. Случайная величина ξ может принимать значения 0, 1, 2, 3, 4, 5. Вычислим вероятность каждого из этих значений. В данном эксперименте 36 равновозможных исходов:

(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6),

(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),

(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6),

(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6),

(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6),

(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6).

Событию $\{\xi=0\}$ благоприятствуют 6 исходов: (1,1), (2,2), …, (6,6), которые расположены на диагонали таблицы исходов. Таким образом, $P\{\xi=0\}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$. Событие $\{\xi=1\}$ состоит из 10 исходов: (1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6), (2,1), (3,2), (4,3), (5,4), (6,5). Значит, $P\{\xi=1\}=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$. Используя приведенную таблицу исходов эксперимента, аналогичным образом получим $P\{\xi=2\}=\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$, $P\{\xi=3\}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$, $P\{\xi=4\}=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$, $P\{\xi=5\}=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$. Итак, распределение случайной величины ξ будет иметь вид

ξ	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$

Контроль правильности вычислений: $\frac{1}{6}+\frac{5}{18}+\frac{2}{9}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{18}=1.$

4. Распределение функции от дискретной случайной величины

Покажем на примере, как находить распределение функции от дискретной случайной величины. Пусть имеется дискретная случайная величина ξ. Для числовой функции f функция $f(\xi)$ – это тоже дискретная случайная величина; ее значения и их вероятности можно найти, исходя из распределения случайной величины ξ.

Пример. Пусть случайная величина ξ имеет распределение

ξ	-2	-1	0	1	2
P	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Найдем распределение случайных величин а) $\eta = 2\xi + 5$; б) $\eta = \xi^2$.

а) Случайная величина $\eta = 2\xi + 5$ будет принимать 5 различных значений: 1, 3, 5, 7, 9. Так как событие $\{\eta = 1\}$ наступает тогда и только тогда, когда наступает событие $\{\xi = -2\}$, получаем $P\{\eta = 1\} = \mathrm{P}\{\xi = -2\} = 0{,}1$. Аналогично,

$\mathrm{P}\{\eta = 3\} = \mathrm{P}\{\xi = -1\} = 0{,}2$ и т.д. В итоге распределение случайной величины η запишется в виде таблицы

η	1	3	5	7	9
P	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

б) Случайная величина $\eta = \xi^2$ будет принимать 3 значения: 0, 1, 4. Вычислим вероятности этих значений.

Событие $\{\eta = 0\}$ наступает тогда и только тогда, когда наступает событие $\{\xi = 0\}$. Следовательно, $P\{\eta = 0\} = \mathrm{P}\{\xi = 0\} = 0{,}3$. Далее, событие $\{\eta = 1\}$ наступает в том и только в том случае, когда наступает событие $\{\xi = 1 \text{ или } \xi = -1\}$. Поэтому $\mathrm{P}\{\eta = 1\} = \mathrm{P}\{\xi = 1 \text{ или } \xi = -1\}$. Так как события $\{\xi = 1\}$ и $\{\xi = -1\}$ несовместны, $\mathrm{P}\{\xi = 1 \text{ или } \xi = -1\} = \mathrm{P}\{\xi = 1\} + \mathrm{P}\{\xi = -1\} = 0{,}3 + 0{,}2 = 0{,}5$, то есть, $\mathrm{P}\{\eta = 1\} = 0{,}5$. Аналогично рассуждая, получим

$$\mathrm{P}\{\eta = 4\} = \mathrm{P}\{\xi = 2 \text{ или } \xi = -2\} = \mathrm{P}\{\xi = 2\} + \mathrm{P}\{\xi = -2\} = 0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}2.$$

Значит, случайная величина $\eta = \xi^2$ имеет распределение

η	0	1	4
P	0,3	0,5	0,2

Замечание. Рассуждения, приведенные в рассмотренном примере, показывают, что для нахождения распределения случайной величины $\eta = f(\xi)$ можно использовать следующее правило. Сначала в таблице распределения случайной величины ξ каждое ее значение x_i заменяется на $f(x_i)$, а вероятности p_i остаются неизменными. Если все значения $f(x_i)$ различны, то полученная таблица и будет являться распределением случайной величины η (см. п. а) приведенного выше примера). Если же среди значений $f(x_i)$ окажутся одинаковые, то их вероятности надо сложить, а в таблице распределения оставить только одно из одинаковых значений $f(x_i)$, причем с полученной суммарной вероятностью. Так, в п. б) рассмотренного примера можно сначала заменить значения x_i случайной величины ξ на x_i^2, оставляя неизменными соответствующие им вероятности:

x_i^2	4	1	0	1	4
p_i	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Затем, суммируя вероятности одинаковых значений x_i^2, получим распределение случайной величины η:

η	0	1	4
P	0,3	0,5	0,2

5. Независимость двух дискретных случайных величин

Пусть ξ – это дискретная случайная величина со значениями $\{x_i\}$, η – дискретная случайная величина со значениями $\{y_j\}$.

Определение. Случайные величины ξ и η называются независимыми, если для любых значений x_i, y_j события $\{\xi = x_i\}$ и $\{\eta = y_j\}$ независимы, то есть

$$\mathrm{P}\{\xi = x_i, \eta = y_j\} = \mathrm{P}\{\xi = x_i\} \cdot \mathrm{P}\{\eta = y_j\}.$$

Пример. Игральную кость бросают два раза. Пусть ξ – это число, выпавшее при первом бросании, η – число, выпавшее при втором бросании. События $\{\xi = x_i\}$ и $\{\eta = y_j\}$ являются независимыми для всех i, j =1, 2, …, 6 (см. [3], §5, п.3), следовательно, случайные величины ξ и η независимы.

Задача 4. Изделия испытываются при перегрузочных режимах. Для каждого изделия вероятность пройти испытание равна 0,8. Испытания заканчиваются после того, как какое-либо изделие не выдержит испытания. Найти распределение числа испытаний.

Решение. Данный эксперимент мы можем рассматривать как испытания Бернулли с вероятностью успеха 0,8. Пусть ξ – число проведенных испытаний. Случайная величина ξ может принимать значения 1, 2, 3, …, k, … Событие $\{\xi = k\}$ означает, что в первых $k-1$ испытаниях произошел успех, а в k-м испытании – неудача. Тогда $P\{\xi = k\} = 0{,}8^{k-1} \cdot 0{,}2$. Таблица распределения случайной величины ξ запишется в виде

ξ	1	2	3	…	k	…
P	0,2	$0{,}8 \cdot 0{,}2$	$0{,}8^2 \cdot 0{,}2$	…	$0{,}8^{k-1} \cdot 0{,}2$	…

Проверка правильности вычислений:

$$0{,}2 \cdot (1 + 0{,}8 + 0{,}8^2 + \ldots + 0{,}8^{k-1} + \ldots) = 0{,}2 \cdot \frac{1}{1 - 0{,}8} = 1.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1.1.1. Пусть случайная величина ξ имеет распределение

ξ	1	2	3	4	5	6
P	a	$2a$	$3a$	$3a$	$7a^2$	$3a^2$

Найти число a и вычислить $P\{\xi \geq 5\}$, $P\{\xi < 3\}$, $P\{2 < \xi \leq 4{,}5\}$.

Задача 1.1.2. Из урны, содержащей 4 выигрышных и 16 невыигрышных билетов, наугад выбирают 3 билета. Пусть ξ – число выигрышных билетов среди выбранных. Найти распределение случайной величины ξ.

Задача 1.1.3. Имеется кубик, на двух гранях которого изображено число 1, на других двух гранях – число 2 и на остальных гранях – число 3. Кубик подбрасывают 2 раза. Найти распределение случайной величины η, равной сумме выпавших чисел.

§2. Математическое ожидание

Математическое ожидание – это одна из важнейших характеристик случайной величины.

1. Понятие математического ожидания

Рассмотрим случайную величину ξ с конечным множеством значений.

Определение 1. Пусть случайная величина ξ имеет распределение

ξ	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

Математическим ожиданием случайной величины ξ называется число

$$E\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

(сумма значений, умноженных на соответствующие вероятности).

Замечание. Математическое ожидание называют также средним значением случайной величины.

Пример 1. Пусть случайная величина ξ имеет распределение

ξ	1	4	8
P	0,3	0,1	0,6

Найдем математическое ожидание этой случайной величины:

$$E\xi = \sum_{i=1}^{3} x_i p_i = 1 \cdot 0{,}3 \cdot + 4 \cdot 0{,}1 + 8 \cdot 0{,}6 = 5{,}5\,.$$

Пример 2. Рассмотрим случайную величину ξ с распределением

ξ	–1	1
P	0,5	0,5

Тогда $E\xi = (-1) \cdot 0{,}5 + 1 \cdot 0{,}5 = 0$ (рис.1).

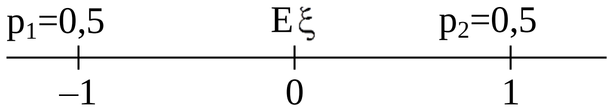


Рис. 1

Теперь рассмотрим еще одну случайную величину η с распределением

η	–1	1
P	0,1	0,9

Тогда $\mathrm{E}\eta = (-1) \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}9 = 0{,}8$ (рис. 2).

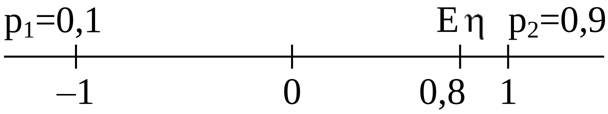


Рис. 2

Заметим, что случайные величины ξ и η принимают одинаковые значения, но имеют разные математические ожидания.

Пояснение. При вычислении математического ожидания каждое значение случайной величины берется с определенным «весом», равным вероятности этого значения. Пусть случайная величина ξ принимает значения $\{x_i\}$ с вероятностями $\{p_i\}$. Поместим в каждую точку x_i числовой прямой груз массой p_i. Тогда математическому ожиданию $\mathrm{E}\xi$ будет соответствовать та точка на прямой, в которой находится центр тяжести описанной системы (см. рис. 1, 2).

Определение 2. Пусть случайная величина ξ принимает счетное множество значений $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$ с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots$ соответственно. В этом случае математическим ожиданием случайной величины ξ называется число $E\xi = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$, если этот ряд сходится абсолютно, то есть, $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p_i < \infty$; в противном случае говорят, что не существует математического ожидания случайной величины ξ.

Задача 1. Пусть случайная величина ξ принимает значения 0, 1 и 2 с вероятностями $p_1 = 5c$, $p_2 = 2c$, $p_3 = 3c$ соответственно, где c – некоторое число. Найти число c; выписать распределение случайной величины ξ; вычислить $P\{\xi < 1{,}8\}$ и $E\xi$.

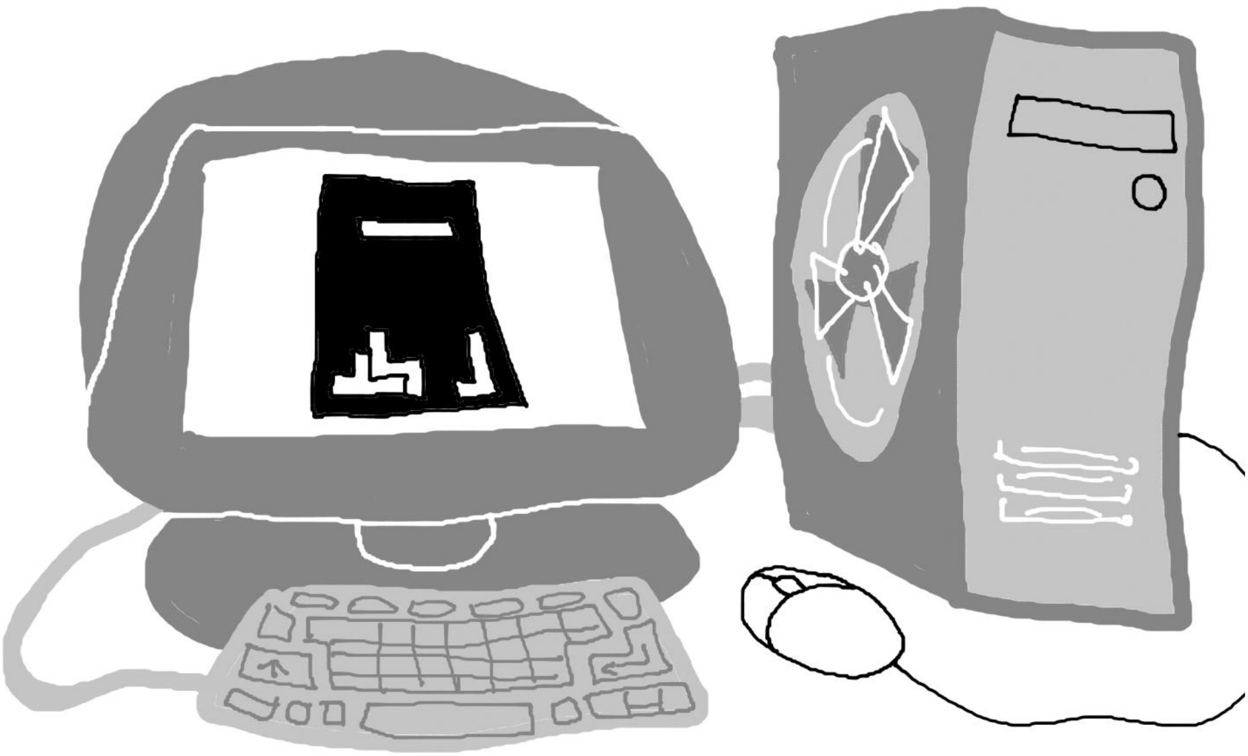
Решение. Так как $\sum_{i=1}^{3} p_i$ должна быть равна 1, получаем $10c = 1$; $c = 0{,}1$. Теперь выпишем распределение ξ:

ξ	0	1	2
P	0,5	0,2	0,3

Далее,

$P\{\xi < 1{,}8\} = P\{\xi = 0\} + P\{\xi = 1\} = 0{,}5 + 0{,}2 = 0{,}7$; $E\xi = 0 \cdot 0{,}5 + 1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}3 = 0{,}8$.

Задача 2. Студент Y ежедневно убивает время, играя в примитивные компьютерные игры. С вероятностью 0.5 он тратит на это 2 часа, с вероятностью 0.35 – 3 часа и с вероятностью 0.15 – 4 часа. Сколько времени в среднем теряет Y за день?



Решение. Пусть ξ – случайная величина, равная потерянному времени. Требуется найти среднее значение, то есть математическое ожидание случайной величины ξ. Выпишем распределение этой случайной величины:

ξ	2	3	4
P	0,5	0,35	0,15

Тогда $E\xi = 2\cdot 0,5 + 3\cdot 0,35 + 4\cdot 0,15 = 2,65$. Поскольку 0,65 часа равно 39 минутам, студент теряет в среднем за день 2 ч. 39 мин.

Задача 3. Среди 100 лотерейных билетов имеется 8 выигрышных, из которых 5 билетов с выигрышами по 100 руб., 2 билета – по 200 руб. и 1 билет с выигрышем в 500 руб. Цена лотерейного билета – 50 руб. Каким будет математическое ожидание прибыли, если приобрести 1 билет?

Решение. Используя классическое определение вероятности, определим вероятности возможных выигрышей. Вероятность выиграть 100 руб. равна 0,05; 200 руб. – 0,02; 500 руб. – 0,01; и вероятность ничего не выиграть – это $1-(0,05+0,02+0,03)=0,92$. Пусть случайная величина ξ – это прибыль участника лотереи. Учитывая стоимость лотерейного билета, запишем распределение ξ:

ξ	50	150	450	-50
P	0,05	0,02	0,01	0,92

Тогда $E\xi = 50\cdot 0,05 + 150\cdot 0,02 + 450\cdot 0,01 - 50\cdot 0,92 = 2,5 + 3 + 4,5 - 46 = -36$. Таким образом, математическое ожидание прибыли отрицательно, то есть, в среднем участник лотереи будет проигрывать 36 руб.

2. Свойства математического ожидания

1) Для любого числа с

$\mathrm{E}c = c$.

(Математическое ожидание постоянной равно этой постоянной.)

Доказательство. Случайная величина $\xi = c$ имеет распределение

ξ	c
P	1

Следовательно, $\mathrm{E}c = c\cdot 1 = c$.•

2) Для любого числа c

$\mathrm{E}(c\xi) = c\mathrm{E}\xi$.

(Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания.)

Доказательство. Для $c=0$ утверждение очевидно. Допустим, $c \neq 0$. Пусть случайная величина ξ имеет распределение

ξ	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
P	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

(для счетного множества значений доказательство проводится аналогично). Тогда случайная величина $c\xi$ будет иметь распределение

$c\xi$	cx_1	cx_2	$\ldots$	cx_n
P	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

,

так как $P\{c\xi = cx_i\} = P\{\xi = x_i\} = p_i$. Отсюда

$$\mathrm{E}(c\xi) = \sum_{i=1}^{n}(cx_i)\,p_i = c\sum_{i=1}^{n} x_i p_i = c\mathrm{E}\xi. \bullet$$

3) Для любых случайных величин ξ и η

$$\mathrm{E}(\xi+\eta) = \mathrm{E}\xi + \mathrm{E}\eta.$$

(Математическое ожидание суммы равно сумме математических ожиданий.)

Доказательство проведем (с целью упрощения изложения) для частного случая, когда каждая из случайных величин принимает два значения. Общий случай рассматривается аналогично.

Пусть случайные величины ξ и η имеют распределения

ξ	x_1	x_2
P	p_1	p_2

,

η	y_1	y_2
P	q_1	q_2

Тогда случайная величина $\xi+\eta$ будет принимать значения

$$x_1+y_1,\ x_1+y_2,\ x_2+y_1,\ x_2+y_2. \qquad (1)$$

Предположим, все эти значения различны. Введем обозначение:

$$p_{ij} = \mathrm{P}\{\xi = x_i, \eta = y_j\},\ \ i, j = 1,2.$$

Тогда $\mathrm{P}\{\xi+\eta = x_i + y_j\} = \mathrm{P}\{\xi = x_i, \eta = y_j\} = p_{ij}$, и случайная величина $\xi+\eta$ будет иметь распределение

$\xi+\eta$	x_1+y_1	x_1+y_2	x_2+y_1	x_2+y_2
P	p_{11}	p_{12}	p_{21}	p_{22}

Отсюда получаем

$$\mathrm{E}(\xi+\eta) = (x_1+y_1)\,p_{11} + (x_1+y_2)\,p_{12} + (x_2+y_1)\,p_{21} + (x_2+y_2)\,p_{22}. \qquad (2)$$

Заметим, что если среди значений (1) есть одинаковые, то в распределении случайной величины $\xi+\eta$ каждому общему значению будет соответствовать сумма соответствующих вероятностей и формула (2) останется справедливой. Далее, из равенства (2) получаем

$$\mathrm{E}(\xi+\eta) = \big(x_1(p_{11}+p_{12}) + x_2(p_{21}+p_{22})\big) + \big(y_1(p_{11}+p_{21}) + y_2(p_{12}+p_{22})\big). \qquad (3)$$

Теперь докажем, что $p_{11}+p_{12} = p_1$. По формуле сложения вероятностей для несовместных событий

$$p_1 = \mathrm{P}\{\xi = x_1\} = \mathrm{P}\{\xi = x_1, \eta = y_1\} + \mathrm{P}\{\xi = x_1, \eta = y_2\} = p_{11} + p_{12}.$$

Аналогично $p_{21}+p_{22}=p_2$, $p_{11}+p_{21}=q_1$, $p_{12}+p_{22}=q_2$. Тогда из формулы (3) получаем $\mathrm{E}(\xi+\eta)=(x_1p_1+x_2p_2)+(y_1q_1+y_2q_2)=\mathrm{E}\xi+\mathrm{E}\eta$. •

Замечание. Для нескольких случайных величин математическое ожидание суммы также равно сумме математических ожиданий.

Пример. Пусть $\mathrm{E}\xi=1$, $\mathrm{E}\eta=-2$. Найдем математическое ожидание случайной величины $3\xi+5\eta+1$. По свойствам 1–3

$$\mathrm{E}(3\xi+5\eta+1)=\mathrm{E}(3\xi)+\mathrm{E}(5\eta)+\mathrm{E}1=3\mathrm{E}\xi+5\mathrm{E}\eta+1=3\cdot(1)+5\cdot(-2)+1=-6.$$

4) Если случайные величины ξ и η **независимые**, то

$$\mathrm{E}(\xi\eta)=\mathrm{E}\xi\cdot\mathrm{E}\eta.$$

(Математическое ожидание произведения **независимых** случайных величин равно произведению математических ожиданий.)

Доказательство. Для простоты изложения рассмотрим случай, когда каждая из случайных величин принимает два значения. (Общий случай рассматривается аналогично.)

Пусть случайные величины ξ и η имеют распределения

ξ	x_1	x_2
P	p_1	p_2

,

η	y_1	y_2
P	q_1	q_2

Тогда случайная величина $\xi\eta$ будет принимать значения

$$x_1y_1,\ x_1y_2,\ x_2y_1,\ x_2y_2. \qquad (4)$$

Предположим, все эти значения различны. Тогда, учитывая независимость ξ и η, будем иметь:

$$\mathrm{P}\{\xi\eta=x_iy_j\}=\mathrm{P}\{\xi=x_i,\eta=y_j\}=\mathrm{P}\{\xi=x_i\}\cdot\mathrm{P}\{\eta=y_j\}=p_iq_j,\quad i,j=1,2.$$

Отсюда получаем распределение случайной величины $\xi\eta$:

$\xi\eta$	x_1y_1	x_1y_2	x_2y_1	x_2y_2
P	p_1q_1	p_1q_2	p_2q_1	$p_2\,q_2$

Тогда

$$\mathrm{E}(\xi\eta)=x_1y_1p_1q_1+x_1y_2p_1q_2+x_2y_1p_2q_1+x_2y_2p_2q_2. \qquad (5)$$

Заметим, что, если среди значений (4) есть одинаковые, в распределении случайной величины $\xi\eta$ каждому общему значению будет соответствовать сумма соответствующих вероятностей и формула (5) останется справедливой. Теперь рассмотрим

$$\mathrm{E}\xi\cdot\mathrm{E}\eta=(x_1p_1+x_2p_2)(y_1q_1+y_2q_2)=x_1p_1y_1q_1+x_1p_1y_2q_2+x_2p_2y_1q_1+x_2p_2y_2q_2. \quad (6)$$

Замечая, что в правых частях формул (5) и (6) стоят одинаковые выражения, получаем

$$\mathrm{E}(\xi\eta)=\mathrm{E}(\xi)\cdot\mathrm{E}(\eta). \ \bullet$$

Пример. Пусть случайные величины ξ и η независимы и заданы распределениями

ξ	0	4	5
P	0,3	0,5	0,2

,

η	1	6
P	0,2	0,8

Найдем $E(\xi\eta)$. В силу независимости $E(\xi\eta)=E(\xi)\cdot E(\eta)$. Далее, $E\xi=0\cdot 0{,}3+4\cdot 0{,}5+5\cdot 0{,}2=3$; $E\eta=1\cdot 0{,}2+6\cdot 0{,}8=5$. Следовательно, $E\xi\eta=3\cdot 5=15$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1.2.1. Пусть случайная величина ξ принимает значения 1, 2, 3, 4 с вероятностями $p_1 = 4c$, $p_2 = 3c$, $p_3 = 2c$, $p_4 = 10c^2$ соответственно, где c – некоторое число. Найти число c; выписать распределение случайной величины ξ; вычислить $P\{\xi<3{,}5\}$, $P\{1<\xi\le 4\}$ и $E\xi$.

Задача 1.2.2. Пусть $E\xi=3$, $E\eta=-2{,}5$. Найти математическое ожидание случайной величины $7\xi-4\eta+6$.

Задача 1.2.3. В вестибюле факультета установлен автомат для приготовления кофе и прочих напитков. Студент хочет купить кофе за 55 руб. и вставляет в автомат две пятидесятирублевые купюры. Автомат с вероятностью 0,6 дает кофе и 45 руб. сдачи, с вероятностью 0,3 наливает кофе, но сдачи не дает, а с вероятностью 0,1 проглатывает обе купюры, не производя никаких дальнейших действий. Найти среднее значение незаконной прибыли, получаемой автоматом (?) от одного любителя кофе.

Задача 1.2.4. Два баскетболиста поочередно бросают мяч в корзину. Вероятность попадания для первого игрока равна 0.6, для второго – 0,8. Игра прекращается после первого промаха какого-либо из баскетболистов или же когда каждый игрок сделает два броска. Найти математическое ожидание общего количества сделанных бросков.

§3. Безобидная игра

Вначале несколько слов о зарождении теории вероятностей. Основателями теории вероятностей считаются французские ученые XVII в. Паскаль и Ферма. У Паскаля был друг – кавалер де-Мере, страстный игрок в кости. В процессе игры де-Мере сталкивался с различными задачами, которые, будучи не в состоянии решить самостоятельно, предлагал Паскалю. Паскаль решал их, делал обобщения, анализировал. По поводу задач, связанных с азартными играми, завязалась переписка между Паскалем и Ферма. Поскольку игра в кости допускает множество вариантов, появлялись всё новые и новые задачи. Можно заметить, что обычно практика игроков опережала теоретические выводы математиков. Вообще увлечение игрой в кости в Западной Европе в XVI-XVII веках еще задолго до Паскаля и Ферма привело к решению отдельных задач, имеющих отношение к теории игр, но заслугой именно этих ученых является создание общих методов и принципов для решения подобных задач [6]. В качестве примера рассмотрим известную задачу о неоконченной игре, предложенную кавалером де-Мере Паскалю.

Задача «Неоконченная игра» [6].

Два игрока, поставив поровну, начали игру, условившись, что тот, кто раньше выиграет известное число партий, получит всю ставку. По некоторым обстоятельствам игра не могла быть окончена и прекратилась в тот момент, когда первому игроку не хватало до конца одной, а второму двух партий. Спрашивается, как игроки должны поделить ставку между собой?

Паскаль решил задачу таким образом. Первый игрок говорит второму: «Половина ставки принадлежит мне бесспорно, так как даже в том случае, если бы ты выиграл следующую партию, наши шансы на получение целой ставки были бы одинаковы. Что касается второй половины, то шансы наши на ее получение одинаковы, а поэтому разделим ее пополам». Следовательно, первый игрок должен получить три четверти, а второй – одну четверть всей ставки.

Приведем также решение этой задачи, используя правила вычисления вероятностей. Игроки должны поделить ставку пропорционально своим шансам на выигрыш. Второй игрок мог бы получить всю ставку только в том случае, если бы выиграл две партии подряд. Так как для обоих игроков вероятность выиграть партию равна $1/2$, вероятность выиграть две партии подряд равна $1/4$ (такая же, как в случае выпадения двух гербов при двукратном подбрасывании монеты). Таким образом, вероятность выигрыша для второго игрока – $1/4$, а соответственно для первого – $3/4$. Значит, ставка должна быть поделена в отношении 3:1.

Итак, теория вероятностей возникла на основе решения задач, связанных с азартными играми. Понятие «математическое ожидание» также первоначально появилось для обозначения ожидаемой прибыли игрока. Если по условию игры игрок может получить различные суммы прибылей $s_1, s_2, ..., s_n$ с вероятностями $p_1, p_2, ..., p_n$ соответственно, то математическое ожидание прибыли будет равно $s_1 p_1 + s_2 p_2 + ... + s_n\, p_n$ (здесь s_i могут быть любыми числами, в частности, отрицательными или нулями).

Что же такое «безобидная» игра? Рассмотрим игру, в которой участвуют два игрока A и B. Игра состоит из ряда партий, каждая из которых заканчивается выигрышем одного из игроков и соответственно проигрышем другого. Если в каждой партии игрок A с вероятностью p_i получает выигрыш s_i, то при этом игрок B получает выигрыш $-s_i$. Таким образом, при каждом исходе одной партии суммарный выигрыш равен нулю. Пусть для одной партии m_A – это математическое ожидание выигрыша игрока A и, соответственно, m_B – математическое ожидание выигрыша игрока B. Тогда, если

$m_A = s_1 p_1 + s_2 p_2 + ... + s_n\, p_n$, то $m_B = -s_1 p_1 - s_2 p_2 - ... - s_n\, p_n$, то есть, $m_A = -m_B$. Согласно теореме, которая является одним из вариантов закона больших чисел (см. гл. 3, §2), можно утверждать следующее. Если $m_A > 0$, то с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, при достаточно большом числе партий выигрыш игрока A превзойдет любую наперед заданную величину. Если же $m_A < 0$, то $m_B > 0$, и при достаточно большом числе партий можно рассчитывать, что выигрыш игрока B будет сколь угодно велик. Поэтому игра называется *безобидной*, если математическое ожидание выигрыша для каждого игрока равно нулю, то есть $m_A = m_B = 0$.

Пример 1. Игра в «орлянку».

Пусть при выпадении герба игрок A получает от игрока B s руб., а при выпадении решетки – наоборот, игрок В получает от игрока А s руб. Тогда выигрыши ξ_A и ξ_B для игроков А и В будут иметь распределения

ξ_A	s	$-s$
P	*1/2*	*1/2*

,

ξ_B	$-s$	s
P	*1/2*	*1/2*

Следовательно, $m_A = m_B = 0$, а значит, игра – безобидная.

Пример 2. Лотерею можно рассматривать как игру между участником лотереи (А) и устроителем (В). Участие n человек в лотерее соответствует n сыгранным партиям. Как правило, условия лотереи таковы, что $m_A < 0$. Если n достаточно велико, то прибыль игрока В (устроителя) может быть очень большой. Таким образом, лотерея – далеко не безобидная игра.

Пример 3. Игра в рулетку – это также не безобидная игра (в пользу банка).

Задача. Игрок X предлагает игроку Y игру по следующим правилам. Игрок X подбрасывает кубик, на гранях которого изображены числа 1, 2, 3, 4, 6, 8, а Y подбрасывает кубик, на гранях которого изображены числа 1, 2, 3, 4, 5, 7. Если сумма выпавших чисел нечетная, X получает от Y 100 руб.; если же сумма четная, то Y получает от X 100 руб. Является ли такая игра безобидной?

Решение. Пусть ξ_1 – число, выпавшее у игрока X, ξ_2 – число, выпавшее у игрока Y, и пусть $\xi = \xi_1 + \xi_2$. Сумма выпавших чисел будет нечетной, если одно из чисел четное, а другое – нечетное. Введем в рассмотрение события

$A=\{\xi_1-\textit{четное},\ \xi_2-\textit{нечетное}\}$, $B=\{\xi_1-\textit{нечетное},\ \xi_2-\textit{четное}\}$. Тогда $\{\xi-\textit{нечетное}\}=A+B$, а так как события A и B несовместны, $\mathrm{P}\{\xi-\textit{нечетное}\}=P(A)+P(B)$. Далее, ввиду независимости случайных величин ξ_1 и ξ_2 имеем

$$P(A)=P\{\xi_1-\textit{четное}\}\cdot P(\xi_2-\textit{нечетное}\}=\frac{4}{6}\cdot\frac{4}{6}=\frac{4}{9},$$

$$P(B)=P\{\xi_1-\textit{нечетное}\}\cdot P(\xi_2-\textit{четное}\}=\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}=\frac{1}{9}.$$

Следовательно, $\mathrm{P}\{\xi-\textit{нечетное}\}=\frac{4}{9}+\frac{1}{9}=\frac{5}{9}$. Тогда $\mathrm{P}\{\xi-\textit{четное}\}=1-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}$. Пусть η_X и η_Y – выигрыши игроков X и Y соответственно. Случайная величина η_X имеет распределение

η_X	100	–100
P	$\frac{5}{9}$	$\frac{4}{9}$

Отсюда $E\eta_X=\frac{100}{9}\approx 11{,}1$ (руб.). Соответственно $E\eta_Y=-\frac{100}{9}\approx -11{,}1$.

Таким образом, эта игра не безобидная, и при достаточно большом числе сыгранных партий игрок X с большой вероятностью может получить сколь угодно большой выигрыш. Если говорить о среднем выигрыше игрока X в случае 90 сыгранных партий, то он будет равен $\frac{100}{9}\cdot 90=1000$ (руб.)

§4. Дисперсия и моменты случайной величины

1. Понятие дисперсии

Начнем с примера. Пусть случайные величины ξ и η имеют распределения

ξ	–0,01	0,01
P	0,5	0,5

,

η	–100	100
P	0,5	0,5

Тогда $\mathrm{E}\xi=-0{,}01\cdot 0{,}5+0{,}01\cdot 0{,}5=0$, $\mathrm{E}\eta=-100\cdot 0{,}5+100\cdot 0{,}5=0$. Таким образом, $\mathrm{E}\xi=\mathrm{E}\eta$, но случайные величины ξ и η имеют существенное различие: возможные значения ξ находятся близко от ее математического ожидания, а значения η – далеко. Чтобы оценить, как рассеяны (разбросаны) значения случайной величины вокруг ее математического ожидания, вводится числовая характеристика, называемая дисперсией.

Рассмотрим случайную величину ξ с математическим ожиданием $E\xi$. Разность $(\xi - E\xi)$ называют отклонением случайной величины ξ от математического ожидания.

Определение. Дисперсией случайной величины ξ называется число

$$D\xi = E(\xi - E\xi)^2$$

(математическое ожидание квадрата отклонения).

2. Формула для вычисления дисперсии

Для вычисления дисперсии бывает удобнее пользоваться не определением дисперсии, а приведенной ниже формулой.

Теорема. $D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2$. (1)

Доказательство. Обозначим $E\xi$ через a. Тогда

$$D\xi = E(\xi - a)^2 = E(\xi^2 - 2a\xi + a^2) = E\xi^2 - 2aE\xi + a^2 = E\xi^2 - 2a^2 + a^2 = E\xi^2 - (E\xi)^2. \bullet$$

Задача 1. Пусть случайная величина ξ имеет распределение

ξ	1	2
P	0,2	0,8

Найти дисперсию.

Решение. Сначала найдем математическое ожидание: $E\xi = 1\cdot 0{,}2 + 2\cdot 0{,}8 = 1{,}8$. Чтобы воспользоваться формулой (1), надо вычислить $E\xi^2$. Случайная величина ξ^2 будет иметь распределение

ξ^2	1	4
P	0,2	0,8

Тогда $E\xi^2 = 1\cdot 0{,}2 + 4\cdot 0{,}8 = 3{,}4$. По формуле (1) получаем

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = 3{,}4 - 1{,}8^2 = 0{,}16.$$

Задача 2. Студент может получить за контрольную работу 5 баллов с вероятностью 0,4; 4 балла – с вероятностью 0,3; 3 – с вероятностью 0,2 и 2 – с вероятностью 0,1. Найти математическое ожидание и дисперсию количества баллов, полученных студентом.

Решение. Пусть ξ – случайная величина, равная количеству баллов, набранных студентом. Выпишем распределение ξ:

ξ	2	3	4	5
P	0,1	0,2	0,3	0,4

Вычислим математическое ожидание: $E\xi = 2\cdot 0{,}1 + 3\cdot 0{,}2 + 4\cdot 0{,}3 + 5\cdot 0{,}4 = 4$. Для вычисления дисперсии запишем распределение ξ^2:

ξ^2	4	9	16	25
P	0,1	0,2	0,3	0,4

Найдем $E\xi^2 = 4\cdot 0{,}1 + 9\cdot 0{,}2 + 16\cdot 0{,}3 + 25\cdot 0{,}4 = 17$. Тогда $D\xi = 17 - 4^2 = 1$.

Задача 3. На пути движения автомобиля два светофора, работающих независимо. Каждый из них с вероятностью 0.4 разрешает и с вероятностью 0.6 запрещает автомобилю дальнейшее движение. Найти распределение, математическое ожидание и дисперсию числа светофоров, пройденных автомобилем до первой остановки.

Решение. Пусть ξ – это число пройденных светофоров. Случайная величина ξ может принимать значения 0, 1, 2. Найдем вероятности этих значений. Событие $\{\xi = 0\}$ означает, что остановка произошла перед первым светофором. Следовательно, $P\{\xi = 0\} = 0{,}6$. Событие $\{\xi = 1\}$ означает, что автомобиль прошел первый светофор, но остановился перед вторым. Поскольку светофоры работают независимо друг от друга, $P\{\xi = 1\} = 0{,}4\cdot 0{,}6 = 0{,}24$. Если же $\{\xi = 2\}$, то есть, автомобиль прошел без остановки оба светофора, то вероятность такого события будет равна $P\{\xi = 2\} = 0{,}4\cdot 0{,}4 = 0{,}16$. Таким образом получаем распределение случайной величины ξ:

ξ	0	1	2
P	0,6	0,24	0,16

Вычисляем математическое ожидание:
$E\xi = 0\cdot 0{,}6 + 1\cdot 0{,}24 + 2\cdot 0{,}16 = 0{,}24 + 0{,}32 = 0{,}56$. Распределение ξ^2 получается из таблицы распределения случайной величины ξ заменой ее значений их квадратами. Тогда $E\xi^2 = 0\cdot 0{,}6 + 1\cdot 0{,}24 + 4\cdot 0{,}16 = 0{,}24 + 0{,}64 = 0{,}88$,
а $D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = 0{,}88 - 0{,}56^2 = 0{,}88 - 0{,}3136 = 0{,}5664$.

Замечание. Математическое ожидание целочисленной случайной величины может оказаться нецелым числом (см. задачи 1, 3).

3. Свойства дисперсии

1) $\mathrm{D}\xi \ge 0$.

(Дисперсия любой случайной величины неотрицательна).

Доказательство. По определению $\mathrm{D}\xi = \mathrm{E}\left(\xi - \mathrm{E}\xi\right)^2$. Все возможные значения случайной величины $\left(\xi - \mathrm{E}\xi\right)^2$ неотрицательны; вероятности значений тоже неотрицательны. Следовательно, $\mathrm{E}\left(\xi - \mathrm{E}\xi\right)^2 \ge 0$. •

2) $\mathrm{D}c = 0$.

(Дисперсия постоянной (константы) равна нулю.)

Доказательство. По определению

$$\mathrm{D}c = \mathrm{E}\left(c - \mathrm{E}c\right)^2 = \mathrm{E}0 = 0. \bullet$$

На рис. 3 показано, что в случае $\xi = c$ нет рассеяния значений, поэтому дисперсия равна нулю.

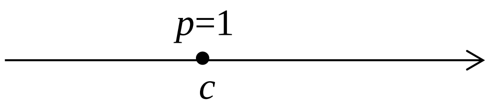


Рис. 3

3) $\mathrm{D}\left(c\xi\right) = c^2 \mathrm{D}\xi$.

(Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, **возводя его в квадрат.**)

Доказательство. По формуле (1)

$$\mathrm{D}\left(c\xi\right) = E(c^2\xi^2) - (E(c\xi))^2 = c^2 E\xi^2 - (cE\xi)^2 = c^2(E\xi^2 - (E\xi)^2) = c^2 D\xi. \bullet$$

4) Если случайные величины ξ и η **независимы**, то

$$\mathrm{D}\left(\xi + \eta\right) = \mathrm{D}\xi + \mathrm{D}\eta.$$

(Дисперсия суммы **независимых** случайных величин равна сумме дисперсий.)

Доказательство. Используя формулу (1) и свойство 4) математического ожидания, получаем

$$\mathrm{D}\left(\xi + \eta\right) = \mathrm{E}\left(\xi + \eta\right)^2 - \left(\mathrm{E}\left(\xi + \eta\right)\right)^2 = \mathrm{E}\left(\xi^2 + 2\xi\eta + \eta^2\right) - \left(\mathrm{E}\xi + \mathrm{E}\eta\right)^2 =$$

$$= \mathrm{E}\xi^2 + 2\mathrm{E}\left(\xi\eta\right) + \mathrm{E}\eta^2 - \left(\left(\mathrm{E}\xi\right)^2 + 2\mathrm{E}\xi \cdot \mathrm{E}\eta + \left(\mathrm{E}\eta\right)^2\right) =$$

$$= \mathrm{E}\xi^2 - \left(\mathrm{E}\xi\right)^2 + \mathrm{E}\eta^2 - \left(\mathrm{E}\eta\right)^2 = \mathrm{D}\xi + \mathrm{D}\eta. \bullet$$

Замечание. Аналогичное утверждение справедливо для нескольких случайных величин: дисперсия суммы попарно независимых случайных величин равна сумме дисперсий.

Следствия.

а) Для любого числа c

$$\mathrm{D}\left(\xi + c\right) = \mathrm{D}\xi.$$

Доказательство. Случайные величины ξ и c независимы (константа не зависит ни от какой случайной величины). Тогда по свойству 4)

$\mathrm{D}(\xi+c)=\mathrm{D}\xi+\mathrm{D}c=\mathrm{D}\xi+0=\mathrm{D}\xi$. •

б) Если случайные величины ξ и η **независимы,** то

$\mathrm{D}(\xi-\eta)=\mathrm{D}\xi+\mathrm{D}\eta$.

(Дисперсия разности **независимых** случайных величин равна **сумме** дисперсий).

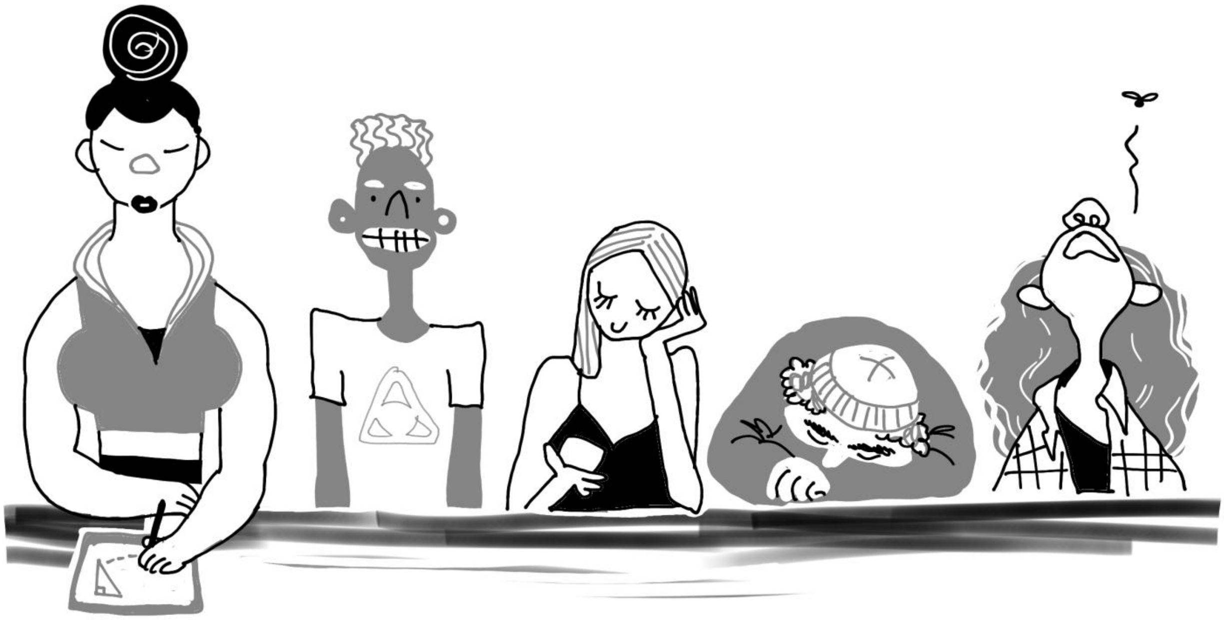
Доказательство. Применяя свойство 4) к независимым случайным величинам ξ и $(-\eta)$, получим

$$D(\xi-\eta)=D(\xi+(-\eta))=D\xi+D(-\eta)=D\xi+(-1)^2 D\eta=D\xi+D\eta. \bullet$$

Пример. Пусть случайные величины ξ и η независимы и пусть $D\xi=2$, $D\eta=5$. Найдем дисперсию случайной величины $D(3\xi-2\eta+6)$. Используя свойства дисперсии, будем иметь

$$\mathrm{D}(3\xi-2\eta+6)=\mathrm{D}(3\xi-2\eta)=\mathrm{D}(3\xi)+\mathrm{D}(2\eta)=9\mathrm{D}\xi+4\mathrm{D}\eta=9\cdot 2+4\cdot 5=38.$$

Задача 4. Пять студентов сдают экзамен. Первый студент может сдать экзамен с вероятностью $p_1=0,9$, 2-й – с вероятностью $p_2=0,6$, 3-й – с вероятностью $p_3=0,7$, 4-й – с вероятностью $p_4=0,8$ и 5-й – с вероятностью $p_5=0,5$. Найти математическое ожидание и дисперсию числа студентов, сдавших экзамен.



Решение. Пусть ξ – случайная величина, равная числу студентов, сдавших экзамен. Тогда $\xi=\sum_{i=1}^{5}\xi_i$, где

$$\xi_i=\begin{cases}1, \text{ если i-й студент сдал экзамен,}\\ 0 \text{ в противном случае; } i=1, 2, ..., 5.\end{cases}$$

Запишем распределение случайной величины ξ_i:

ξ_i	1	0
P	p_i	$1-p_i$

Тогда $E\xi_i = 1\cdot p_i = p_i$; $\mathrm{E}\xi = \sum_{i=1}^{5}\mathrm{E}\xi_i = \sum_{i=1}^{5} p_i = 0,9+0,6+0,7+0,8+0,5=3,5$.

Далее, случайная величина ξ_i^2 имеет такое же распределение, как и ξ_i, значит, $E\xi_i^2 = p_i$, $\mathrm{D}\xi_i = \mathrm{E}\xi_i^2 - \left(\mathrm{E}\xi_i\right)^2 = p_i - p_i^2 = p_i(1-p_i)$. Так как случайные величины ξ_i независимы, по свойству дисперсии

$$D\xi = \sum_{i=1}^{5} D\xi_i = \sum_{i=1}^{5} p_i(1-p_i) = 0,5\cdot 0,5+0,6\cdot 0,4+0,7\cdot 0,3+0,8\cdot 0,2+0,9\cdot 0,1=0,95.$$

4. Среднее квадратическое отклонение

Определение. Число $\sigma = \sqrt{\mathrm{D}\xi}$ называется средним квадратическим отклонением случайной величины ξ.

Таким образом, дисперсия связана со средним квадратическим отклонением равенством $\mathrm{D}\xi = \sigma^2$.

Среднее квадратическое отклонение называют также стандартным отклонением.

5. Моменты случайной величины.

Дадим определения моментов порядка k (k=1,2,…).

1) Моментом (начальным моментом) порядка k случайной величины ξ называется число

$$v_k = \mathrm{E}\xi^k.$$

В частности $v_1 = \mathrm{E}\xi$ (математическое ожидание), $v_2 = \mathrm{E}\xi^2$.

2) Абсолютным моментом порядка k случайной величины ξ называется число $\mathrm{E}\,|\xi|^k$.

3) Центральным моментом порядка k случайной величины ξ называется число

$$\mu_k = \mathrm{E}\left(\xi - \mathrm{E}\xi\right)^k.$$

В частности, $\mu_1 = \mathrm{E}\left(\xi - \mathrm{E}\xi\right) = \mathrm{E}\xi - \mathrm{E}\xi = 0$,

$$\mu_2 = \mathrm{E}\left(\xi - \mathrm{E}\xi\right)^2 = \mathrm{D}\xi.$$

Моменты высших порядков (при k=3,4,…) служат дополнительными числовыми характеристиками случайной величины (наряду с математическим ожиданием и дисперсией).

Замечание. Моменты v_k и μ_k существуют, если конечен абсолютный момент порядка k: $E|\xi|^k < +\infty$. Для случайной величины с конечным множеством значений все моменты существуют.

Задача 5. Случайная величина ξ имеет закон распределения

ξ	–3	0	2
P	0,2	0,3	0,5

Найти $E\xi$, $D\xi$, σ, а также начальный, центральный и абсолютный моменты 3-го порядка случайной величины ξ.

Решение. 1) $E\xi = (-3)\cdot 0,2 + 0\cdot 0,3 + 2\cdot 0,5 = 0,4$;

2) $D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2$; $E\xi^2 = 9\cdot 0,2 + 0\cdot 0,3 + 4\cdot 0,5 = 3,8$; $D\xi = 3,8 - 0,4^2 = 3,64$;

3) $\sigma = \sqrt{D\xi} = \sqrt{3,64} \approx 1,908$;

4) $\nu_3 = E\xi^3 = (-27)\cdot 0,2 + 0\cdot 0,3 + 8\cdot 0,5 = -5,4 + 4 = -1,4$;

5) $\mu_3 = E(\xi - 0,4)^3 = -3,4^3\cdot 0,2 - 0,4^3\cdot 0,3 + 1,6^3\cdot 0,5 \approx -5,832$;

6) $E|\xi|^3 = 27\cdot 0,2 + 0\cdot 0,3 + 8\cdot 0,5 = 9,4$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1.4.1. Предположим, случайные величины ξ и η независимы и известны их дисперсии: $D\xi = 3$, $D\eta = 1$. Найти дисперсию случайной величины $(4\xi - \eta - 11)$.

Задача 1.4.2. Студент X опаздывает на лекцию по математике на 2 мин. с вероятностью 0,3; на 4 мин. – с вероятностью 0,5 и на 5 мин. – с вероятностью 0,2. Найти среднее значение и дисперсию времени отсутствия студента X на лекции.

Задача 1.4.3. По условиям игры игрок может выиграть 5 долларов с вероятностью 0.6, может проиграть 7 долларов с вероятностью 0.3 и может выиграть 1 доллар с вероятностью 0.1. Найти математическое ожидание и дисперсию выигрыша.

Задача 1.4.4. Какой суп сварит бабушка на обед – неизвестно: с вероятностью 0.5 это может быть грибной суп, с вероятностью 0.2 – борщ и с вероятностью 0.3 – уха. Приготовление грибного супа занимает у бабушки 1 час, борща – 45 мин., ухи – 50 мин. Найти среднее значение и дисперсию времени, затраченного бабушкой на приготовление супа.

Задача 1.4.5. Школьнику на олимпиаде предлагают решить 3 задачи. Он может решить первую задачу с вероятностью 0.5, вторую задачу – с вероятностью 0.6 и третью – с вероятностью 0.9. За решение первой задачи дается 2 балла, за решение второй – 1 балл и за решение третьей – 1 балл. Найти среднее значение и дисперсию количества баллов, набранных школьником.

§5. Биномиальное распределение. Распределение Пуассона

1. Биномиальное распределение

1.1 **Определение.** Случайная величина ξ имеет биномиальное распределение с параметрами n и p, если она принимает значения 0, 1, 2, …, n, а соответствующие им вероятности определяются формулой

$P\{\xi=m\}=C_n^m p^m q^{n-m}$, где 0<p<1, q=1–p, m=0, 1, 2, …, n.

Говорят также, что случайная величина ξ распределена по биномиальному закону.

1.2. Запись биномиального распределения в виде таблицы.

Пусть случайная величина ξ распределена по биномиальному закону с параметрами n и p. Тогда, учитывая, что $C_n^0 = C_n^n = 1$, можно записать распределение случайной величины ξ в следующем виде:

ξ	0	1	2	…	n
P	q^n	$C_n^1 pq^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	…	p^n

Пример. Записать биномиальное распределение с параметрами n=3, $p = \frac{1}{3}$.

Пусть ξ – случайная величина, распределенная по биномиальному закону с параметрами n=3, $p = \frac{1}{3}$. Тогда ξ может принимать значения 0, 1, 2, 3. Найдем вероятности этих значений:

$$P\{\xi = 0\} = q^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}; \qquad P\{\xi = 1\} = C_3^1 pq^2 = 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9};$$

$$P\{\xi = 2\} = C_3^2 p^2 q = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}; \qquad P\{\xi = 3\} = p^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}.$$

Запишем полученное распределение в виде таблицы:

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}$

1.3. Распределение числа успехов в *n* испытаниях Бернулли.

Пусть ξ – это число успехов в *n* испытаниях Бернулли с вероятностью успеха p. Тогда ξ может принимать значения 0, 1, 2, …, n. По формуле Бернулли $P\{\xi = m\} = P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$. Следовательно, случайная величина ξ имеет биномиальное распределение с параметрами n и p.

2. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределенной по биномиальному закону

Теорема. Пусть случайная величина ξ имеет биномиальное распределение с параметрами n и p. Тогда $E\xi = np$, $D\xi = npq$, где q=1–p.

Доказательство. Так как математическое ожидание и дисперсия случайной величины зависят только от распределения этой случайной величины, можно считать, что ξ – это число успехов в n испытаниях Бернулли с вероятностью успеха p. Докажем, что тогда $E\xi = np$, $D\xi = npq$.

Рассмотрим случайные величины

$$\xi_i = \begin{cases} 1, \text{ если в i-м испытании произошел успех,} \\ 0, \text{ если в i-м испытании произошла неудача}, \end{cases} \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Можно сказать, что ξ_i – это число успехов в испытании с номером *i*. Выпишем распределение случайной величины ξ_i:

ξ_i	0	1
P	q	p

Тогда $E\xi_i = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$ для всех $i=1, 2, \ldots n$.

Далее, $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$, так как в правой части равенства число слагаемых, равных единице, – это и есть число успехов в n испытаниях. Отсюда

$$E\xi = E\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E\xi_i = np.$$

Чтобы вычислить дисперсию случайной величины ξ, вычислим сначала $D\xi_i$. По формуле для вычисления дисперсии $D\xi_i = E\xi_i^2 - \left(E\xi_i\right)^2$. Запишем распределение случайной величины ξ_i^2:

ξ_i^2	0	1
P	q	p

(совпадает с распределением ξ_i).

Тогда $E\xi_i^2 = E\xi_i = p$, следовательно, $D\xi_i = p - p^2 = p(1-p) = pq$. Так как испытания независимы, то случайные величины ξ_i будут попарно независимы. Тогда $D\xi = D\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right) = \sum_{i=1}^{n} D\xi_i = \sum_{i=1}^{n} pq = npq$. •

Задача 1. Два шахматиста играют 5 партий.

Вероятность выиграть для шахматиста А равна 0.3, для шахматиста В –

0.6, и вероятность сыграть вничью равна 0.1. Найти математическое ожидание и дисперсию числа партий, сыгранных вничью.

Решение. Пусть ξ – число партий, сыгранных вничью. Серию из 5 партий можно рассматривать как 5 испытаний Бернулли, успехом в которых будем считать ничью. Значит, случайная величина ξ имеет биномиальное распределение с параметрами n=5 и p=0,1. Следовательно, $E\xi = np = 5\cdot 0{,}1 = 0{,}5$; $D\xi = npq = 5\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9 = 0{,}45$.

Задача 2. При стрельбе из орудия вероятность попадания в цель p=0,6. Произведено 10 выстрелов. Найти математическое ожидание и дисперсию общего числа попаданий.

Решение. Пусть ξ – это общее число попаданий, то есть число успехов в 10 испытаниях Бернулли с вероятностью успеха p=0,6. Тогда

$$E\xi = np = 10\cdot 0{,}6 = 6; \quad D\xi = npq = 10\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4 = 2{,}4.$$

Задача 3. Лифт останавливается на пяти этажах. В лифт садятся 6 пассажиров, каждый из которых может выйти на любом из пяти этажей с равной вероятностью. Найти математическое ожидание и дисперсию числа пассажиров, которые выйдут на последнем этаже.

Решение. Так как каждый из пассажиров может выйти на последнем этаже с вероятностью 0.2, мы имеем 6 испытаний Бернулли с вероятностью успеха p=0,2. Тогда случайная величина ξ, равная числу пассажиров, которые выйдут на последнем этаже, будет иметь биномиальное распределение с параметрами n=6 и p=0,2. Следовательно,

$E\xi = np = 6 \cdot 0,2 = 1,2$; $D\xi = npq = 6 \cdot 0,2 \cdot 0,8 = 0,96$.

3. Распределение Пуассона

<u>3.1.</u> **<u>Определение</u>.** Случайная величина η имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda > 0$, если она принимает значения 0, 1, 2, …, а соответствующие им вероятности определяются формулой

$$P\{\eta = m\} = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \ \mathrm{m} = 0, 1, 2, \dots .$$

Говорят также, что случайная величина η распределена по закону Пуассона.

<u>3.2. Примеры случайных величин, распределенных по закону Пуассона.</u>

а) Пусть случайная величина η равна количеству α-частиц, зарегистрированных счетчиком во время радиоактивного распада. Тогда η будет распределена по закону Пуассона с параметром λ, который характеризует интенсивность распада.

б) Количество опечаток на одной странице книги – это случайная величина, распределенная по закону Пуассона, причем параметр λ является характеристикой наборщика.

в) Булочки пекут из теста, в котором перемешан изюм. Количество изюминок, попавших в одну булочку, – это случайная величина, распределенная по закону Пуассона. Параметр λ зависит от концентрации изюма в тесте.

Задача 4. Количество изюминок, попавших в одну булочку, имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda = 10$. Найти вероятность того, что в булочку попало не менее трех изюминок.

Решение. Пусть η обозначает количество изюминок в булочке. Тогда

$$P\{\eta\geq 3\}=1-P\{\eta\leq 2\}=1-\left(P\{\eta=0\}+P\{\eta=1\}+P\{\eta=2\}\right)=$$

$$=1-\left(\frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda}+\frac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda}+\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}\right)=1-e^{-10}\left(1+10+50\right)=1-61e^{-10}\approx 0{,}9972.$$

Замечание. Для вычисления значений $P\{\eta=m\}=\dfrac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$, а также значений $P\{\eta\leq m\}$ можно использовать таблицы для распределения Пуассона. Можно также воспользоваться соответствующей статистической функцией, представленной в EXCEL.

4. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределенной по закону Пуассона

Теорема. Пусть случайная величина η распределена по закону Пуассона с параметром λ. Тогда $E\eta=\lambda$ и $D\eta=\lambda$.

Доказательство. Используя определение математического ожидания, получим

$$E\eta=\sum_{m=0}^{\infty}mP\{\eta=m\}=\sum_{m=0}^{\infty}m\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda^m}{(m-1)!}e^{-\lambda}=$$

$$=\lambda e^{-\lambda}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=\lambda e^{-\lambda}e^{\lambda}=\lambda.$$

Аналогично вычисляется дисперсия случайной величины η:

$$D\eta=E\eta^2-(E\eta)^2=E\eta^2-\lambda^2;$$

$$E\eta^2=\sum_{m=0}^{\infty}m^2P\{\eta^2=m^2\}=\sum_{m=1}^{\infty}m^2P\{\eta=m\}=\sum_{m=1}^{\infty}m^2\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}=\lambda\sum_{m=1}^{\infty}m\frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!}e^{-\lambda}=$$

$$=\lambda\sum_{m=1}^{\infty}(m-1)\frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!}e^{-\lambda}+\lambda\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!}e^{-\lambda}=\lambda\sum_{k=0}^{\infty}k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}+\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=$$

$$=\lambda E\eta+\lambda e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=\lambda^2+\lambda;$$

$$D\eta=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda.\ \bullet$$

Задача 5. В среднем на одну страницу корректуры приходится одна опечатка. Найти вероятность того, что на выбранной наугад странице не меньше трех опечаток.

Решение. Случайная величина η, равная количеству опечаток на одной странице, распределена по закону Пуассона. В соответствии с условием, $E\eta=1$, то есть, параметр распределения Пуассона $\lambda=1$. Используя таблицу значений $P\{\eta\leq m\}$ для распределения Пуассона при $\lambda=1$ и $m=2$, получаем

$$P\{\eta\geq 3\}=1-P\{\eta\leq 2\}\approx 1-0{,}9197=0{,}0803.$$

5. Связь распределения Пуассона с биномиальным распределением

Пусть случайная величина ξ имеет биномиальное распределение с параметрами *n* и *p*, причем *n* велико, а *p* мало, и пусть случайная величина η распределена по закону Пуассона с параметром $\lambda = np$. Выпишем приближенную формулу для вычисления вероятности $P_n(m)$ появления *m* успехов в *n* испытаниях Бернулли при больших *n* и малых *p*:

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \text{ где } \lambda = np.$$

Эта формула следует из теоремы Пуассона [1]; ее рекомендуется применять при $\lambda = np \le 10$ [9].

Таким образом,

$$\mathrm{P}\{\xi = m\} = C_n^m p^m q^{n-m} = P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} = \mathrm{P}\{\eta = m\},$$

то есть, при больших *n* и малых *p* биномиальное распределение приближается распределением Пуассона с параметром $\lambda = np$.

Замечание. Если *n* велико, но $np > 10$, для нахождения $P\{\xi = m\}$ можно использовать приближенную формулу (которая следует из локальной теоремы Муавра-Лапласа):

$$P\{\xi = m\} \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x),$$

где $x = \dfrac{m - np}{\sqrt{npq}}$, а функция $\varphi(x)$ определяется формулой $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ и называется функцией Гаусса. Для нахождения ее значений используются таблицы (в том числе и электронные).

Задача 6. Найти вероятность того, что в партии из 200 изделий окажется более трех бракованных, если в среднем бракованные изделия оставляют 1%.

Решение. В соответствии с условием задачи вероятность брака для данных изделий $p = 0{,}01$. Пусть ξ – число бракованных изделий в партии. Случайная величина ξ имеет биномиальное распределение с параметрами *n*=200 и *p*=0,01. Так как $np = 200 \cdot 0{,}01 = 2 < 10$, можно использовать приближенную формулу $\mathrm{P}\{\xi = m\} \approx \mathrm{P}\{\eta = m\}$, где η – случайная величина, распределенная по закону Пуассона с параметром $\lambda = np = 2$. Тогда

$$\mathrm{P}\{\xi > 3\} = 1 - \mathrm{P}\{\xi \le 3\} \approx 1 - \mathrm{P}\{\eta \le 3\}.$$

Используя таблицу значений $\mathrm{P}\{\eta \le m\}$ для распределения Пуассона при $\lambda = 2$ и $m = 3$, получаем $\mathrm{P}\{\eta \le 3\} \approx 0{,}8571$ и окончательно имеем

$$\mathrm{P}\{\xi > 3\} \approx 1 - \mathrm{P}\{\eta \le 3\} \approx 0{,}8571.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1.5.1. За рассматриваемый период времени среднее число ошибочных соединений, приходящееся на одного телефонного абонента, равно 8.

Какова вероятность, что для данного абонента число ошибочных соединений будет больше 3?

Задача 1.5.2. Аппаратура содержит 2000 одинаково надежных элементов, вероятность отказа для каждого из которых равна p= 0,0005. Какова вероятность отказа аппаратуры, если он наступает при отказе хотя бы одного из элементов?

Задача 1.5.3. Магазин получил 1000 бутылок минеральной воды. Вероятность того, что при перевозке бутылка окажется разбитой, равна 0,003. Найти вероятность того, что магазин получит а) разбитых бутылок менее двух; б) хотя бы одну разбитую бутылку.

§6. Функция распределения

1. Понятие функции распределения

Дискретная случайная величина задается своим распределением. Однако, случайные величины, которые не являются дискретными, невозможно задать перечнем значений и вероятностей (см. замечание, приведенное в [3], стр.19). Существует общий способ задания любой случайной величины – с помощью функции распределения.

Пусть ξ – это любая случайная величина. Возьмем произвольное число x и рассмотрим событие $\{\xi<x\}$={в результате эксперимента случайная величина

ξ принимает значение меньше $x\}$. Вероятность этого события $P\{\xi < x\}$ зависит от x, то есть является функцией от x.

Определение. Функцией распределения случайной величины ξ называется функция $F(x) = P\{\xi < x\}$, $x \in (-\infty, +\infty)$.

2. Функция распределения дискретной случайной величины

2.1. Пример построения функции распределения.

Пусть случайная величина ξ имеет распределение

ξ	1	4	8
P	0,3	0,1	0,6

Найдем функцию распределения и построим ее график.

а) При $x \le 1$ $\quad F(x) = P\{\xi < x\} = 0$.

б) При $1 < x \le 4$ $\quad F(x) = P\{\xi < x\} = P\{\xi = 1\} = 0{,}3$.

в) При $4 < x \le 8$ $\quad F(x) = P\{\xi < x\} = P\{\xi = 1 \text{ или } \xi = 4\} =$

$= P\{\xi = 1\} + P\{\xi = 4\} = 0{,}3 + 0{,}1 = 0{,}4$.

г) При $x > 8$ $\quad F(x) = P\{\xi < x\} = 1$.

Мы получили ступенчатую функцию $F(x)$ со скачками в точках 1, 4, 8, причем величина каждого скачка равна вероятности соответствующего значения (рис. 4).

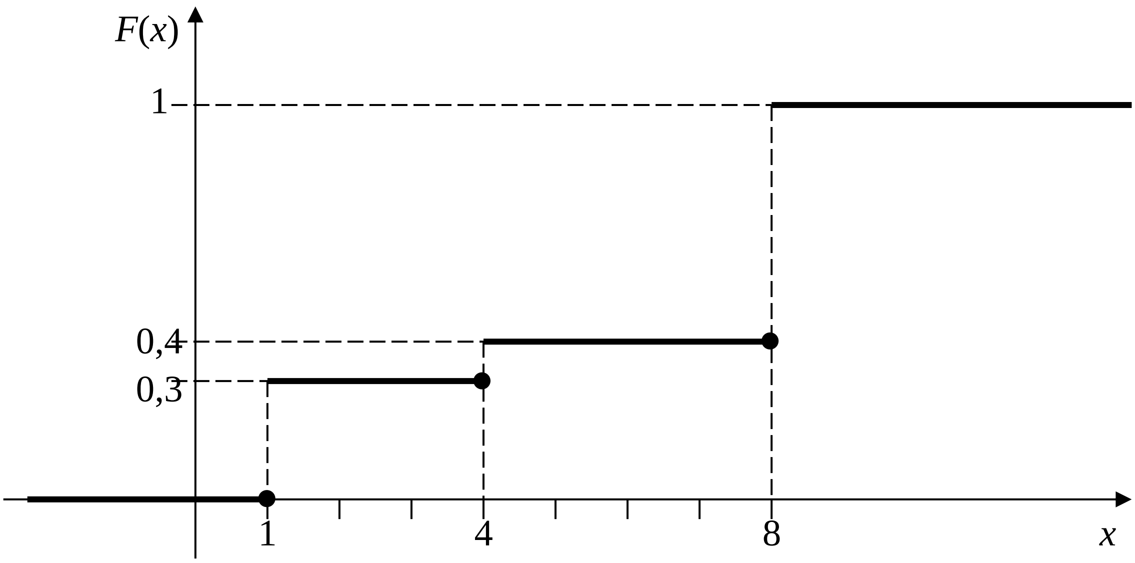


Рис. 4

2.2. Общий случай для случайных величин с конечным множеством значений.

Пусть ξ – это дискретная случайная величина с распределением

ξ	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

,

где $x_1 < x_2 < ... < x_n$.

Функция распределения случайной величины ξ строится аналогично примеру, рассмотренному в п. 2.1. Мы получим ступенчатую функцию $F(x)$, для которой $F(x)=0$ при $x \le x_1$, в точках $x_1, x_2, ..., x_n$ будут скачки, равные $p_1, p_2, ..., p_n$ соответственно, $F(x)=1$ при $x > x_n$.

Замечание. Для дискретной случайной величины со счетным множеством значений функция распределения – это ступенчатая функция с бесконечным числом скачков.

3. Свойства функции распределения

Все перечисленные ниже свойства справедливы для функции распределения любой случайной величины.

1) $0 \le F(x) \le 1$ для всех x.

Доказательство. По определению $F(x) = \mathrm{P}\{\xi < x\}$, а по свойству вероятности $0 \le P\{\xi < x\} \le 1$. •

2) $F(x)$ – неубывающая функция, то есть $F(x_1) \le F(x_2)$, если $x_1 < x_2$.

Доказательство. Пусть $x_1 < x_2$. Рассмотрим событие

$\{\xi < x_2\} = \{\xi < x_1\} + \{x_1 \le \xi < x_2\}$. Так как события $\{\xi < x_1\}$ и $\{x_1 \le \xi < x_2\}$ несовместны, $\mathrm{P}\{\xi < x_2\} = \mathrm{P}\{\xi < x_1\} + \mathrm{P}\{x_1 \le \xi < x_2\}$, то есть,

$$F(x_2) = F(x_1) + P\{x_1 \le \xi < x_2\}. \qquad (*)$$

Учитывая, что вероятность любого события неотрицательна, получаем $F(x_2) \ge F(x_1)$. •

3) $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$.

(Здесь используются обозначения: $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x)$, $F(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$).

Доказательство проведем для частного случая, когда случайная величина принимает конечное множество значений. Рассмотрим случайную величину ξ со значениями $x_1, x_2, ..., x_n$, где $x_1 < x_2 < ... < x_n$. Тогда $F(x) = 0$ для всех $x \le x_1$, следовательно, $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, то есть $F(-\infty) = 0$. Аналогично $F(x) = 1$ для всех $x > x_n$, значит, $F(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$. •

4. Вероятность попадания случайной величины в промежуток [*a, b*)

Пусть ξ – это произвольная случайная величина. Рассмотрим событие $\{a \le \xi < b\}$={в результате эксперимента случайная величина ξ принимает значение, которое принадлежит промежутку $[a; b)$}. Из формулы (*) (см. выше) при $x_1 = a$, $x_2 = b$ получается формула для вероятности попадания случайной величины в промежуток $[a; b)$:

$$\mathrm{P}\{a \le \xi < b\} = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ – это функция распределения случайной величины ξ.

Таким образом, по функции распределения $F(x)$ можно определить не только $P\{\xi < x\}$, то есть вероятность попадания случайной величины в промежуток $(-\infty;\, x)$ для любого x, но и вероятность попадания случайной величины в любой промежуток $[a;\, b)$.

Пример. Рассмотрим функцию распределения случайной величины ξ из примера в п. 2.1 (рис. 4). По графику $F(x)$ найдем вероятности следующих событий:

а) $\mathrm{P}\{\xi \in (-\infty; 2)\} = \mathrm{P}\{\xi < 2\} = F(2) = 0{,}3$;

б) $\mathrm{P}\{\xi < 10\} = F(10) = 1$;

в) $\mathrm{P}\{1 \le \xi < 3\} = F(3) - F(1) = 0{,}3 - 0 = 0{,}3$;

г) $\mathrm{P}\{\xi \in [4; 8)\} = F(8) - F(4) = 0{,}4 - 0{,}3 = 0{,}1$.

§7. Совместное распределение двух дискретных случайных величин. Коэффициент корреляции

1. Определение совместного распределения

Рассмотрим упорядоченную пару двух дискретных случайных величин $(\xi,\, \eta)$. Такую пару называют двумерной дискретной случайной величиной.

Пусть случайная величина ξ принимает значения $x_1, x_2, ..., x_n$, а случайная величина η принимает значения $y_1, y_2, ..., y_k$. Обозначим через p_{ij} вероятность того, что одновременно наступают события $\{\xi = x_i\}$ и $\{\eta = y_j\}$, то есть

$p_{ij} = P\{\xi = x_i, \eta = y_j\}$, где $i=1, 2, \ldots, n$; $j=1, 2, \ldots, k$.

Совокупность значений $\{x_i\}$, $\{y_j\}$ и вероятностей $\{p_{ij}\}$ называется совместным распределением случайных величин ξ и η (или распределением двумерной случайной величины $(\xi,\, \eta)$).

Совместное распределение дискретных случайных величин удобно записывать в виде таблицы:

$\xi \backslash \eta$	y_1	y_2	…	y_k
x_1	p_{11}	p_{12}	…	p_{1k}
x_2	p_{21}	p_{22}	…	p_{2k}
…	…	…	…	…
x_n	p_{n1}	p_{n2}	…	p_{nk}

Табл. 1

Замечание. Для дискретных случайных величин со счетным множеством значений совместное распределение определяется аналогично.

2. Нахождение распределения каждой из случайных величин по их совместному распределению

Утверждение. Пусть совместное распределение случайных величин ξ и η задается табл. 1. Тогда

1) для всех i=1, 2, …, n

$$P\{\xi = x_i\} = \sum_{j=1}^{k} p_{ij}$$

($\sum_{j=1}^{k} p_{ij}$ – это сумма вероятностей, стоящих в i-ой строке табл.1);

2) для всех j=1, 2, …, k

$$P\{\eta = y_j\} = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}$$

($\sum_{i=1}^{n} p_{ij}$ – это сумма вероятностей, стоящих в j-ом столбце табл.1).

Доказательство. Для простоты изложения рассмотрим случай, когда каждая из случайных величин принимает два значения (общий случай рассматривается аналогично). Пусть ξ и η имеют совместное распределение

ξ \ η	y_1	y_2
x_1	p_{11}	p_{12}
x_2	p_{21}	p_{22}

Табл. 2

Событие $\{\xi = x_1\}$ можно записать в виде суммы двух несовместных событий:

$$\{\xi = x_1\} = \{\xi = x_1, \eta = y_1\} + \{\xi = x_1, \eta = y_2\}.$$

Тогда $\mathrm{P}\{\xi = x_1\} = \mathrm{P}\{\xi = x_1, \eta = y_1\} + \mathrm{P}\{\xi = x_1, \eta = y_2\} = p_{11} + p_{12}$.

Таким образом, вероятность события $\{\xi = x_1\}$ равна сумме вероятностей в первой строке табл. 2. Точно так же получаем, что вероятность события $\{\xi = x_2\}$ будет равна сумме вероятностей во второй строке табл. 2. Продолжая аналогично рассуждать, будем иметь

$\mathrm{P}\{\eta = y_1\} = p_{11} + p_{21}$ (это сумма вероятностей в первом столбце таблицы)

и $\mathrm{P}\{\eta = y_2\} = p_{12} + p_{22}$ (это сумма вероятностей во втором столбце таблицы). •

Итак, если совместное распределение случайных величин ξ и η задано табл. 1, то эти случайные величины будут иметь распределения

ξ	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

, где $p_i = \sum_{j=1}^{k} p_{ij}$;

η	y_1	y_2	…	y_k
P	q_1	q_2	…	q_k

, где $q_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}$.

Следствие. $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} p_{ij} = 1$ (сумма всех вероятностей p_{ij} в совместном распределении равна 1).

Доказательство. $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} p_{ij} = \sum_{i=1}^{n} p_i$, а $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, так как это сумма вероятностей в распределении случайной величины ξ. ●

Задача 1. Дано совместное распределение случайных величин ξ и η:

ξ \ η	0	1	–1
1	0,3	0,2	0,1
–1	0,1	0,05	0,25

Найти распределение случайной величины ξ и распределение случайной величины η.

Решение. Для случайной величины ξ

$$P\{\xi=1\} = P\{\xi=1, \eta=0\} + P\{\xi=1, \eta=1\} + P\{\xi=1, \eta=-1\} = 0{,}3 + 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}6;$$

$$P\{\xi=-1\} = 0{,}1 + 0{,}05 + 0{,}25 = 0{,}4.$$

Следовательно, ξ имеет распределение

ξ	1	–1
P	0,6	0,4

Аналогично вычисляем вероятности значений для случайной величины η (берем из таблицы совместного распределения суммы вероятностей по столбцам) и получаем распределение η:

η	0	1	–1
P	0,4	0,25	0,35

Задача 2. Монету подбрасывают 3 раза. Пусть ξ – число выпадений герба, η – число выпадений решетки. Записать совместное распределение случайных величин ξ и η.

Решение. Каждая из случайных величин ξ и η может принимать значения 0, 1, 2, 3. Так как $\xi + \eta = 3$, то в таблице совместного распределения ξ и η отличными от нуля будут только те вероятности $P\{\xi=k, \eta=m\}$, для которых $k+m=3$. Считая успехом выпадение герба и пользуясь формулой Бернулли, получаем

$\mathrm{P}\{\xi=0,\eta=3\}=\mathrm{P}_3(0)=q^3=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8};\quad \mathrm{P}\{\xi=1,\eta=2\}=\mathrm{P}_3(1)=C_3^1pq^2=3\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8};$

$\mathrm{P}\{\xi=2,\eta=1\}=\mathrm{P}_3(2)=C_3^2p^2q=3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8};\ \mathrm{P}\{\xi=3,\eta=0\}=\mathrm{P}_3(3)=p^3=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}.$

Следовательно, совместное распределение случайных величин ξ и η запишется следующим образом:

$\xi \backslash \eta$	0	1	2	3
0	0	0	0	$\frac{1}{8}$
1	0	0	$\frac{3}{8}$	0
2	0	$\frac{3}{8}$	0	0
3	$\frac{1}{8}$	0	0	0

Задача 3. Дано совместное распределение случайных величин ξ и η:

$\xi \backslash \eta$	1	3
1	0,2	0,3
–1	0,4	0,1

Найти распределение случайной величины $\xi+\eta$.

Решение. Аналогично рассуждению, использованному для нахождения распределения функции от случайной величины (см. замечание в п.4 §1 главы 1), составим вначале вспомогательную таблицу, в которую для каждой пары значений случайных величин (ξ,η) вписаны сумма $\xi+\eta$ и соответствующая вероятность:

$\xi+\eta$	1+1	1+3	–1+1	–1+3
P	0,2	0,3	0,4	0,1

или

$\xi+\eta$	2	4	0	2
P	0,2	0,3	0,4	0,1

Теперь запишем таблицу, в которой каждое значение случайной величины $\xi+\eta$ присутствует только один раз, причем для одинаковых значений, оказавшихся в предыдущей таблице, соответствующие им вероятности складываются:

$\xi+\eta$	0	2	4
P	0,4	0,3	0,3

Эта таблица и является распределением случайной величины $\xi+\eta$.

3. Ковариация. Коэффициент корреляции

3.1. Определения.

Определение 1. Ковариацией случайных величин ξ и η называется число $\operatorname{cov}(\xi,\eta)=\mathrm{E}\left((\xi-\mathrm{E}\xi)(\eta-\mathrm{E}\eta)\right)$.

Для вычисления ковариации можно использовать формулу $\operatorname{cov}(\xi,\eta)=\mathrm{E}(\xi\eta)-\mathrm{E}\xi\mathrm{E}\eta$.

Действительно, по свойствам математического ожидания

$$\mathrm{E}\left((\xi-\mathrm{E}\xi)(\eta-\mathrm{E}\eta)\right)=\mathrm{E}\left(\xi\eta-(\mathrm{E}\xi)\eta-(\mathrm{E}\eta)\xi+\mathrm{E}\xi\mathrm{E}\eta\right)=$$

$$=\mathrm{E}(\xi\eta)-\mathrm{E}\xi\mathrm{E}\eta-\mathrm{E}\eta\mathrm{E}\xi+\mathrm{E}\xi\mathrm{E}\eta=\mathrm{E}(\xi\eta)-\mathrm{E}\xi\mathrm{E}\eta.$$

Определение 2. Коэффициентом корреляции случайных величин ξ и η называется число

$$\rho(\xi,\eta)=\frac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{\mathrm{D}\xi\mathrm{D}\eta}}.$$

3.2. Свойства коэффициента корреляции.

Следующие свойства приводим без доказательства:

1) $-1\le\rho(\xi,\eta)\le 1$, причем $|\rho(\xi,\eta)|=1$ тогда и только тогда, когда случайные величины ξ и η линейно зависимы, то есть $\eta=a\xi+b$;

2) если случайные величины ξ *и* η независимы, то $\rho(\xi,\eta)=0$.

Замечание. Коэффициент корреляции характеризует степень линейной зависимости случайных величин. Чем больше по модулю коэффициент корреляции, тем ближе к линейной будет зависимость между этими случайными величинами.

Задача 4. Дано совместное распределение случайных величин ξ и η:

$\xi \backslash \eta$	0	2
0	0,2	0,1
1	0,3	0,4

Найти коэффициент корреляции этих случайных величин.

Р е ш е н и е. Для вычисления коэффициента корреляции надо найти $\operatorname{cov}(\xi,\eta)$ и дисперсии случайных величин ξ и η. Далее, $\operatorname{cov}(\xi,\eta)=\mathrm{E}(\xi\eta)-\mathrm{E}\xi\cdot\mathrm{E}\eta$ (см. п. 3.1). Следовательно, достаточно найти $\mathrm{E}\xi, \mathrm{E}\eta$, $\mathrm{D}\xi$, $\mathrm{D}\eta$ и $\mathrm{E}(\xi\eta)$.

1) Нахождение $\mathrm{E}\xi$ и $\mathrm{D}\xi$.

Сначала по таблице совместного распределения найдем распределение случайной величины ξ:

ξ	0	1
P	0,3	0,7

Отсюда $E\xi = 0 \cdot 0{,}3 + 1 \cdot 0{,}7 = 0{,}7$.

Для нахождения $D\xi$ запишем распределение случайной величины ξ^2:

ξ^2	0	1
P	0,3	0,7

Тогда $E\xi^2 = 0{,}7$; $D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = 0{,}7 - (0{,}7)^2 = 0{,}21$.

2) Нахождение $E\eta$ и $D\eta$.

Выпишем распределение случайной величины η (по таблице совместного распределения):

η	0	2
P	0,5	0,5

Тогда $E\eta = 0 \cdot 0{,}5 + 2 \cdot 0{,}5 = 1$. Теперь запишем распределение случайной величины η^2:

η^2	0	4
P	0,5	0,5

Отсюда $E\eta^2 = 2$; $D\eta = E\eta^2 - (E\eta)^2 = 2 - 1 = 1$.

3) Нахождение $E(\xi\eta)$.

Чтобы найти $E(\xi\eta)$, по таблице совместного распределения для каждой пары значений (x_i, y_j) случайных величин ξ и η вычислим произведение $x_i \cdot y_j$, умножим его на вероятность этой пары p_{ij} и сложим полученные числа:

$$E(\xi\eta) = 0 \cdot 0 \cdot 0{,}2 + 0 \cdot 2 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0 \cdot 0{,}3 + 1 \cdot 2 \cdot 0{,}4 = 0{,}8.$$

4) Нахождение $\operatorname{cov}(\xi,\eta)$ и $\rho(\xi,\eta)$.

Подставим полученные результаты вычислений в соответствующие формулы:

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = E(\xi\eta) - E\xi E\eta = 0{,}8 - 0{,}7 \cdot 1 = 0{,}1;$$

$$\rho(\xi,\eta) = \frac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi D\eta}} = \frac{0{,}1}{\sqrt{0{,}21 \cdot 1}} = \frac{0{,}1}{\sqrt{0{,}21}} \approx 0{,}2182.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1.7.1. Дано совместное распределение случайных величин ξ и η:

$\xi \backslash \eta$	–3	1	2
0	0,1	0,2	0,4
–2	0,05	0,15	0,1

Найти распределение случайной величины ξ и распределение случайной величины η.

Задача 1.7.2. Дано распределение случайной величины ξ:

ξ	–1	0	1	2
P	0,25	0,25	0,25	0,25

Найти ковариацию случайных величин ξ и ξ^2.

Задача 1.7.3. Дано совместное распределение случайных величин ξ и η:

ξ \ η	–1	0	2
0	0	0,3	0,2
1	0,1	0,3	0,1

Найти коэффициент корреляции этих случайных величин.

ГЛАВА 2. НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

§1. Плотность распределения

1. Определение

Пусть $F(x)$ – это функция распределения случайной величины ξ. Если существует неотрицательная функция $f(y)$ такая, что функция $F(x)$ для всех x представима в виде

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(y)dy,$$

то $f(y)$ называется плотностью распределения случайной величины ξ. В этом случае говорят, что ξ – это непрерывная случайная величина (ξ имеет непрерывное распределение).

Таким образом, непрерывная случайная величина – это случайная величина, имеющая плотность.

Пример ([1], стр.79). Однородная проволока длиной один метр растягивается за концы и разрывается. Пусть ξ – случайная величина, равная расстоянию от точки разрыва до левого конца. Согласно геометрическому определению вероятности

$$P\{x_1 \le \xi < x_2\} = \frac{mes(x_1; x_{2)}}{mes(0;1)} = x_2 - x_1 \text{ для любых } 0 \le x_1 \le x_2 \le 1.$$

Функция распределения $F(x) = P\{\xi < x\}$ этой случайной величины имеет вид

$$F(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x \le 0, \\ x & при \quad 0 < x \le 1, \\ 1 & при \quad x > 1. \end{cases}$$

Рассмотрим функцию

$$f(y)=\begin{cases} 0 & при \quad y \le 0, \\ 1 & при \quad 0 < y \le 1, \\ 0 & при \quad y > 1. \end{cases}$$

Очевидно, в данном примере $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy$. Это и означает непрерывность случайной величины ξ, причем функция $f(y)$ является плотностью распределения. этой случайной величины.

2. Свойства плотности распределения

1) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)dy = 1.$

Доказательство.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)dy = \lim_{x\to+\infty}\int_{-\infty}^{x} f(y)dy = \lim_{x\to+\infty} F(x) = F(+\infty) = 1. \bullet$$

2) Выражение вероятности попадания непрерывной случайной величины в промежуток [a; b) через плотность распределения.

Пусть ξ – это непрерывная случайная величина с плотностью распределения $f(y)$. Тогда

$$\mathrm{P}\{a \le \xi < b\} = \int_a^b f(y)dy.$$

Доказательство. Используя выражение вероятности $\mathrm{P}\{a \le \xi < b\}$ через функцию распределения (см. гл.1, §6), а также свойства интегралов, получим

$$\mathrm{P}\{a \le \xi < b\} = F(b) - F(a) = \int_{-\infty}^{b} f(y)dy - \int_{-\infty}^{a} f(y)dy = \int_a^b f(y)dy. \bullet$$

Геометрическая интерпретация.

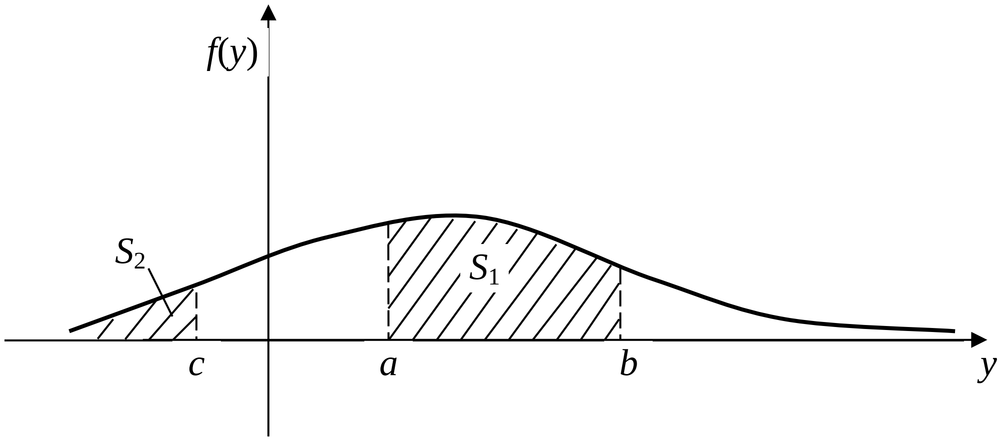


Рис. 5

На рис.5 изображен график плотности распределения $f(y)$ непрерывной случайной величины ξ. Вся площадь под графиком равна $\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)dy = 1$. Учитывая связь между определенным интегралом и площадью, можно выразить вероятности попадания случайной величины в заданные промежутки через соответствующие площади:

$$\mathrm{P}\{a \le \xi < b\} = \int_a^b f(y)dy = S_1;$$

$$\mathrm{P}\{\xi < c\} = F(c) = \int_{-\infty}^{c} f(y)dy = S_2.$$

Замечания.

Приведем три утверждения, относящихся к непрерывным распределениям и вытекающим из свойств интегралов.

1) Если плотность распределения f непрерывна в окрестности точки x, то $F'(x) = f(x)$.

2) Если функция распределения $F(x)$ случайной величины ξ дифференцируема при всех x, то $F'(x)$ будет плотностью распределения случайной величины ξ.

3) Пусть функция распределения $F(x)$ случайной величины ξ дифференцируема при всех x за исключением нескольких фиксированных точек x_1, x_2, …, x_k. Тогда случайная величина ξ будет иметь непрерывное распределение с плотностью $f(x)$, где $f(x)=F'(x)$ при x, не совпадающих с точками x_1, x_2, …, x_k, а значения $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_k)$ могут быть произвольными.

3. Вероятность попадания непрерывной случайной величины в фиксированную точку

Пусть ξ – непрерывная случайная величина. Тогда для любой точки x $\mathrm{P}\{\xi=x\}=0$, то есть вероятность попасть в фиксированную точку равна нулю. Не приводя строгого доказательства, дадим некоторые пояснения.

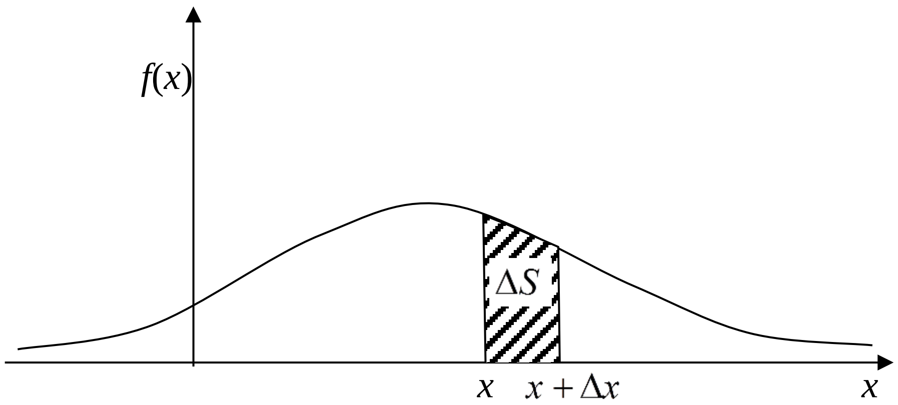


Рис. 6

Используя геометрическую интерпретацию плотности, имеем
$\mathrm{P}\{x\le\xi<x+\Delta x\}=\Delta S$ (рис. 6).

Далее, $\Delta S \xrightarrow[\Delta x\to 0]{} 0$, а $\mathrm{P}\{x\le\xi<x+\Delta x\} \xrightarrow[\Delta x\to 0]{} \mathrm{P}\{\xi=x\}$. Следовательно, $\mathrm{P}\{\xi=x\}=0$.

Таким образом, для непрерывной случайной величины ξ
$\mathrm{P}\{a\le\xi<b\}=\mathrm{P}\{a<\xi<b\}=\mathrm{P}\{a\le\xi\le b\}=\mathrm{P}\{a<\xi\le b\}$.

Задача. Непрерывная случайная величина ξ задана плотностью распределения

$$f(y)=\begin{cases} 0 & при \quad y<0, \\ ay & при \quad 0\le y\le 3, \\ 0 & при \quad y>3. \end{cases}$$

Найти число a и $P\{1 \le \xi \le 4\}$.

Решение. По первому свойству плотности $\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,dy = 1$. Найдем значение a, при котором данное условие будет выполнено. Для заданной плотности получим, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,dy = \int_{-\infty}^{0} 0dy + \int_{0}^{3} aydy + \int_{3}^{+\infty} 0dy = a\frac{3^2}{2} = \frac{9a}{2} = 1.$$

Следовательно $a = \frac{2}{9}$. Так как случайная величина ξ непрерывная, согласно п. 3 $P\{1 \le \xi \le 4\} = P\{1 \le \xi < 4\}$, а по второму свойству плотности

$$\mathrm{P}\{1 \le \xi < 4\} = \int_{1}^{4} f(y)dy = \int_{1}^{3} \frac{2}{9} ydy + \int_{3}^{4} 0dy = \frac{2}{9}\left(\frac{3^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right) = \frac{8}{9}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 2.1.1. Непрерывная случайная величина ξ задана плотностью распределения

$$f(y) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad y \le 0 \text{ или } y > 5, \\ a & \text{при} \quad 0 < y \le 2, \\ \frac{a}{2} & \text{при} \quad 2 < y \le 3, \\ \frac{a}{4} & \text{при} \quad 3 < y \le 5. \end{cases}$$

Найти число a и $\mathrm{P}\{1{,}5 \le \xi \le 4{,}5\}$.

Задача 2.1.2. Непрерывная случайная величина ξ задана плотностью распределения

$$f(y) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad y < 0, \\ ay^2 & \text{при} \quad 0 \le y \le 3, \\ 0 & \text{при} \quad y > 3. \end{cases}$$

Найти число a и $P\{\xi > 2\}$.

§2. Функция распределения непрерывной случайной величины

Пусть ξ – непрерывная случайная величина с функцией распределения $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy$. Тогда $F(x)$ – непрерывная функция (это следует из свойств интегралов). Кроме того, $F(x)$, будучи функцией распределения, обладает всеми свойствами, указанными в §6 главы 1. Пример графика функции распределения непрерывной случайной величины изображен на рис. 7.

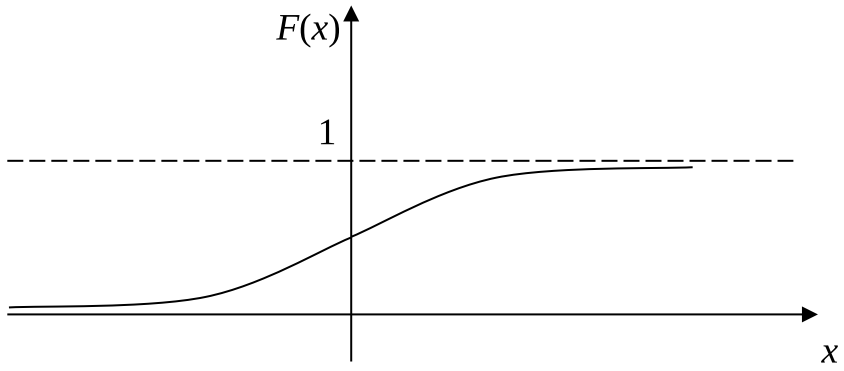


Рис. 7

Задача. Непрерывная случайная величина ξ задана плотностью распределения

$$f(y)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad y \le 1, \\ \dfrac{y-1}{2} & \text{при} \quad 1<y\le 3, \\ 0 & \text{при} \quad y>3. \end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x)$.

Решение. Функция распределения выражается через плотность распределения формулой $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(y)dy$. В зависимости от промежутка, в котором находится переменная x, получим:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} 0dy=0, \qquad \text{если } x\le 1;$$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{1} 0dy+\int_{1}^{x}\frac{y-1}{2}dy=\frac{(x-1)^2}{4}, \qquad \text{если } 1<x\le 3;$$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{1} 0dy+\int_{1}^{3}\frac{y-1}{2}dy+\int_{3}^{x} 0dy=1, \qquad \text{если } x>3.$$

Таким образом,

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\le 1, \\ \dfrac{(x-1)^2}{4} & \text{при } 1<x\le 3, \\ 1 & \text{при } x>3. \end{cases}$$

Можно заметить, что на интервалах $(-\infty;1), (1;3), (3;+\infty)$ выполнено равенство $F'(x)=f(x)$, что является иллюстрацией к замечанию 1) п. 1 §1.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 2.2.1. Найти функцию распределения $F(x)$ непрерывной случайной величины X, если ее плотность

$$f(y)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad y\le 0, \\ \frac{2}{9}y & \text{при} \quad 0<y\le 3, \\ 0 & \text{при} \quad y>3. \end{cases}$$

Задача 2.2.2. Непрерывная случайная величина ξ задана плотностью распределения

$$f(y)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad y\le 2, \\ \frac{y-2}{2} & \text{при} \quad 2<y\le 4, \\ 0 & \text{при} \quad y>4. \end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x)$ этой случайной величины и

$P\{1 \le \xi \le 3{,}5\}$.

§3. Математическое ожидание, дисперсия и моменты непрерывной случайной величины

Пусть случайная величина ξ имеет непрерывное распределение с плотностью $f(y)$.

1. Определение

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины ξ называется число

$$\mathrm{E}\xi=\int_{-\infty}^{+\infty} yf(y)dy, \text{ если } \int_{-\infty}^{+\infty}|y|\, f(y)dy<+\infty.$$

В противном случае говорят, что не существует математического ожидания.

Замечание 1. Приведем без доказательства следующее утверждение. Если случайная величина ξ задана плотностью $f(y)$, то математическое ожидание случайной величины $g(\xi)$, где g – непрерывная функция, вычисляется по формуле

$$E\left(g(\xi)\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)f(y)dy \quad (\text{если } \int_{-\infty}^{+\infty}|g(y)|f(y)dy<+\infty).$$

Задача 1. Найти математическое ожидание непрерывной случайной величины ξ, если ее плотность

$$f(y)=\begin{cases} 0 & при \quad y\le 0,\\ \dfrac{2}{9}y & при \quad 0<y\le 3,\\ 0 & при \quad y>3. \end{cases}$$

Решение. Вычислим математическое ожидание, используя определение:

$$\mathrm{E}\xi=\int_{-\infty}^{+\infty} yf(y)dy=\int_{-\infty}^{0}0dy+\int_{0}^{3}\frac{2}{9}y^2dy+\int_{3}^{+\infty}0dy=\frac{2}{9}\cdot\frac{3^3}{3}=2.$$

2. Дисперсия непрерывной случайной величины

Дисперсия случайной величины определяется формулой

$\mathrm{D}\xi=\mathrm{E}(\xi-\mathrm{E}\xi)^2=E\xi^2-(\mathrm{E}\xi)^2$ (см. гл. 1, §4).

С учетом замечания 1, приведенного выше, дисперсия непрерывной случайной величины будет выражаться через плотность распределения следующим образом:

$$\mathrm{D}\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}(y-E\xi)^2 f(y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}y^2 f(y)dy-\left(\int_{-\infty}^{+\infty}yf(y)dy\right)^2.$$

Замечание 2. Для непрерывной случайной величины математическое ожидание и дисперсия обладают теми же свойствами, что и для дискретной случайной величины (см. гл. 1, §2, 4).

Задача 2. Найти дисперсию непрерывной случайной величины ξ, если ее плотность

$$f(y)=\begin{cases} 0 & при \quad y\le 0,\\ \dfrac{2}{9}y & при \quad 0<y\le 3,\\ 0 & при \quad y>3. \end{cases}$$

Решение. В задаче 1 пункта 1 уже было вычислено математическое ожидание данной случайной величины: $\mathrm{E}\xi=2$. Вычислим $E\xi^2$:

$$\mathrm{E}\xi^2=\int_{-\infty}^{+\infty}y^2 f(y)dy=\int_{-\infty}^{0}0dy+\int_{0}^{3}y^2\cdot\frac{2}{9}y\,dy+\int_{3}^{+\infty}0dy=\frac{2}{9}\cdot\frac{3^4}{4}=\frac{9}{2}.$$

Отсюда $\mathrm{D}\xi=E\xi^2-(\mathrm{E}\xi)^2=\dfrac{9}{2}-4=0{,}5.$

Задача 3. Найти математическое ожидание и дисперсию непрерывной случайной величины ξ**,** если задана ее функция распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x\le 1,\\ 1-\dfrac{1}{x^3} & при \quad x>1. \end{cases}$$

Решение. Поскольку функция $F(x)$ дифференцируема при всех x за исключением точки $x=1$, согласно замечанию 3) п.1 §1 случайная величина ξ будет иметь плотность распределения $f(x)$, где $f(x)=F'(x)$ при всех x, не равных 1, а значение $f(1)$ можно положить равным, например, нулю. Таким образом,

$$f(x)=\begin{cases} 0 \quad при \quad x\le 1, \\ \left(1-\dfrac{1}{x^3}\right)'=\dfrac{3}{x^4} \quad при \quad x>1. \end{cases}$$

Используя формулы для вычисления $E\xi$ и $E\xi^2$, получаем

$$\mathrm{E}\xi=\int_{-\infty}^{+\infty} yf(y)dy=\int_{-\infty}^{1} 0dy+\int_{1}^{+\infty} y\cdot\frac{3}{y^4}dy=\int_{1}^{+\infty}\frac{3}{y^3}dy=-\frac{3}{2y^2}\bigg|_1^{+\infty}=0-\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2},$$

$$\mathrm{E}\xi^2=\int_{-\infty}^{+\infty} y^2f(y)dy=\int_{-\infty}^{1} 0dy+\int_{1}^{+\infty} y^2\cdot\frac{3}{y^4}dy=\int_{1}^{+\infty}\frac{3}{y^2}dy=-\frac{3}{y}\bigg|_1^{+\infty}=0-(-3)=3.$$

Отсюда $\mathrm{D}\xi=\mathrm{E}\xi^2-(\mathrm{E}\xi)^2=3-\left(\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{3}{4}.$

3. Моменты непрерывной случайной величины

Определения начального, абсолютного и центрального моментов порядка k были даны в гл. 1, §4. Для непрерывной случайной величины соответствующие моменты будут выражаться через плотность распределения следующим образом:

$$\nu_k=\mathrm{E}\xi^k=\int_{-\infty}^{+\infty} y^k f(y)dy$$ – начальный момент порядка k,

$$\mu_k=\mathrm{E}(\xi-\mathrm{E}\xi)^k=\int_{-\infty}^{+\infty}(y-\mathrm{E}\xi)^k f(y)dy$$ – центральный момент порядка k,

$$\mathrm{E}|\xi|^k=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|^k f(y)dy$$ – абсолютный момент порядка k.

Заметим, что $\nu_1=\mathrm{E}\xi$, $\mu_2=\mathrm{D}\xi$, а формула для нахождения дисперсии принимает вид $\mu_2=\nu_2-(\nu_1)^2$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 2.3.1. Непрерывная случайная величина ξ задана плотностью распределения

$$f(y)=\begin{cases} 0 & при \quad y\le 1, \\ y-\dfrac{1}{2} & при \quad 1<y\le 2, \\ 0 & при \quad y>2. \end{cases}$$

Найти $E\xi$ и $D\xi$.

Задача 2.3.2. Непрерывная случайная величина ξ задана плотностью распределения

$$f(y)=\begin{cases} y+1 & при \quad -1\le y\le 0, \\ 1-y & при \quad 0<y\le 1, \\ 0 & при \quad |y|>1. \end{cases}$$

Найти $E\xi$ и $D\xi$.

Задача 2.3.3. Непрерывная случайная величина ξ задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x\le 0, \\ x^3 & при \quad 0<x\le 1, \\ 1 & при \quad x>1. \end{cases}$$

Найти $E\xi$ и $D\xi$.

§4. Нормальное распределение

1. Определение

Случайная величина ξ имеет нормальное распределение, если ее плотность распределения определяется формулой

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad x\in(-\infty;+\infty),$$

где a и σ – некоторые параметры (a – любое число, $\sigma>0$).

Будем использовать обозначение $\xi\in N(a,\sigma)$, что означает: случайная величина ξ имеет нормальное распределение с параметрами a и σ.

Замечание. Говорят также, что случайная величина ξ распределена по нормальному закону. Нормальное распределение называют также гауссовским.

2. Вероятностный смысл параметров a и σ в нормальном распределении

Пусть случайная величина ξ имеет нормальное распределение с параметрами a и σ. Тогда $E\xi=a$, $D\xi=\sigma^2$ (доказательство не приводим). Таким образом, параметр a – это математическое ожидание случайной величины ξ, а параметр σ – это среднее квадратическое отклонение.

Задача 1. Нормально распределенная случайная величина ξ задана плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{0,5\pi}}\, e^{-\frac{x^2-6x+9}{0,5}}$$

Найти $E\xi$ и $D\xi$.

Решение. Приведем выражение для плотности к виду $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}}$,

а именно

$$f(x) = \frac{1}{0,5\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-3)^2}{2\cdot(0,5)^2}}.$$

В данном случае параметр $a = 3$, следовательно, $E\xi=3$. Соответственно $\sigma = 0,5$; отсюда получаем $D\xi=(0,5)^2 = 0,25$.

3. Стандартное нормальное распределение

Нормальное распределение с параметрами a=0 и σ=1 называется стандартным. В соответствии с введенным выше обозначением, запись $\xi\in N(0,1)$ будет означать, что случайная величина ξ имеет стандартное нормальное распределение.

Найдем плотность стандартного нормального распределения. Для этого подставим a=0 и σ=1 в формулу плотности нормального распределения (см. п. 1). Получится функция $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$. Таким образом, плотностью стандартного нормального распределения является функция Гаусса

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}.$$

График функции Гаусса изображен на рис. 8.

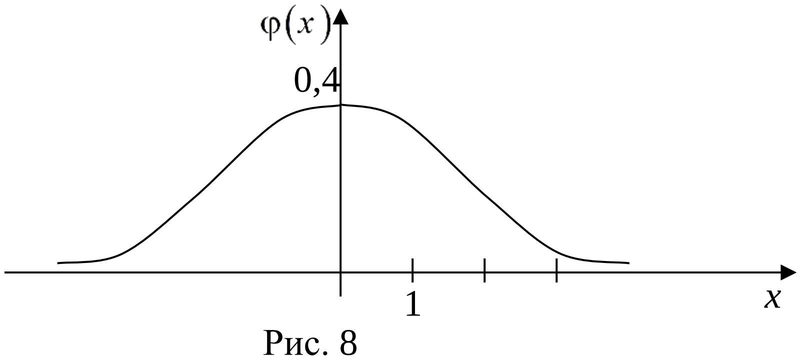


Рис. 8

Функция $\varphi(x)$ обладает следующими свойствами: она непрерывна, является четной (график симметричен относительно оси y), $\varphi(x)\to 0$ при $x\to\pm\infty$,

$\varphi(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\approx 0{,}4$ (значение в точке максимума), $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,dx=1$ (вся площадь под графиком равна 1).

Если $\xi\in N(0{,}1)$, то $E\xi=0$, $D\xi=1$ (см. п. 2).

Найдем функцию стандартного нормального распределения. Обозначим ее $F_0(x)$. Тогда

$$F_0(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}\varphi(t)\,dt=\int\limits_{-\infty}^{0}\varphi(t)\,dt+\int\limits_{0}^{x}\varphi(t)\,dt.$$

Так как функция $\varphi(t)$ четная,

$$\int\limits_{-\infty}^{0}\varphi(t)\,dt=\int\limits_{0}^{+\infty}\varphi(t)\,dt=\frac{1}{2}.$$

Введем в рассмотрение функцию Лапласа $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{x}e^{-t^2/2}dt=\int\limits_{0}^{x}\varphi(t)\,dt$, $x\in R$. Тогда получим

$$F_0(x)=\frac{1}{2}+\Phi(x),$$ где $\Phi(x)$ – функция Лапласа.

Замечания.

1) Имеются таблицы значений функции $\Phi(x)$ для $0\le x\le 4$; для x>4 $\Phi(x)\approx 0{,}5$ (с точностью до четырех знаков после запятой); для x<0 можно использовать те же таблицы, учитывая, что $\Phi(-x)=-\Phi(x)$, то есть функция $\Phi(x)$ – нечетная.
2) В некоторых таблицах вместо функции Лапласа $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{x}e^{-t^2/2}dt$ приведены значения функции $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{x}e^{-t^2/2}dt$, которую также обозначают $\Phi(x)$ и называют функцией Лапласа. Надо иметь в виду, что значения второй функции в 2 раза больше значений первой.

4. График плотности нормального распределения для любых значений a и σ

График плотности нормального распределения с параметрами a и σ будет симметричным относительно прямой $x=a$; чем меньше σ, тем больше максимальное значение плотности и тем круче график в окрестности точки a.

В качестве примера рассмотрим плотность нормального распределения с параметрами a=3 и $\sigma=\frac{1}{2}$:

$$f(x)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-3)^2}{2\cdot\frac{1}{4}}}=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-2(x-3)^2}.$$

График этой функции изображен на рис. 9. (Максимальное значение плотности $f(x)$ равно $f(3)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\approx 0{,}8$.)

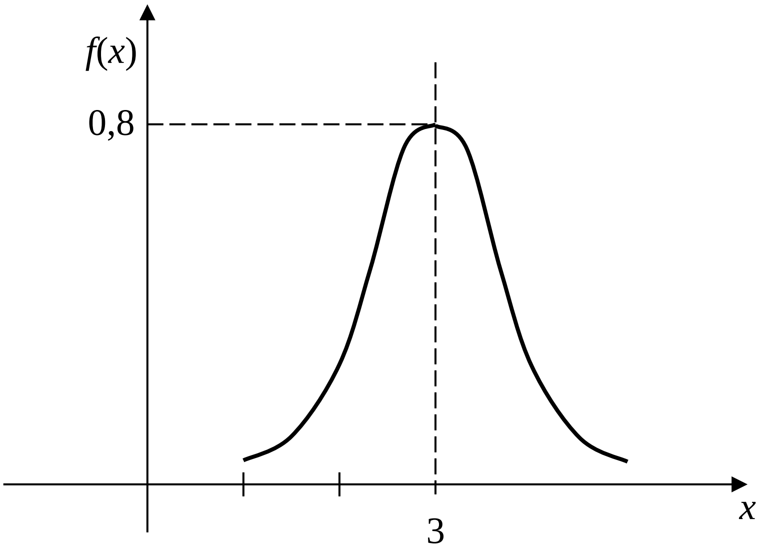


Рис. 9

5. Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в промежуток [x_1, x_2)

Сначала докажем вспомогательное утверждение.

Утверждение 1. Пусть $\xi\in N(a,\sigma)$. Тогда $\frac{\xi-a}{\sigma}\in N(0,1)$, то есть случайная величина $\frac{\xi-a}{\sigma}$ имеет стандартное нормальное распределение.

Доказательство. Положим $\eta=\frac{\xi-a}{\sigma}$. Пусть F_ξ и F_η – функции распределения случайных величин ξ и η. Тогда

$$F_\eta(x)=\mathrm{P}\{\eta<x\}=\mathrm{P}\left\{\frac{\xi-a}{\sigma}<x\right\}=\mathrm{P}\{\xi<a+\sigma x\}=F_\xi(a+\sigma x);$$

$$F'_\eta(x)=\left(F_\xi(a+\sigma x)\right)'=F'_\xi(a+\sigma x)(a+\sigma x)'=\sigma F'_\xi(a+\sigma x).$$

В соответствии с замечанием 1 п. 2 §1, $F'_\xi(a+\sigma x)$ – это плотность распределения случайной величины ξ в точке $a+\sigma x$. Значит,

$$F'_\eta(x)=\sigma\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\frac{-(a+\sigma x-a)^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}=\varphi(x).$$

Используя замечание 2 п. 2 §1, получаем, что $\varphi(x)$ – это плотность распределения случайной величины η. Следовательно, $\eta \in N(0,1)$. •

Следующее утверждение показывает, как выразить вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в заданный промежуток с помощью функции Лапласа.

Утверждение 2. Пусть $\xi \in N(a,\sigma)$. Тогда

$$P\{x_1 \le \xi < x_2\} = \Phi\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right), \tag{1}$$

где $\Phi(x) = \int_0^x \varphi(t)\,dt$ – функция Лапласа.

Доказательство. По утверждению 1 случайная величина $\eta = \frac{\xi - a}{\sigma}$ имеет стандартное нормальное распределение, и, следовательно, ее функцией распределения является $F_0(x)$ (функция стандартного нормального распределения). Используя выражение функции $F_0(x)$ через функцию Лапласа (см. п.4.3), получаем

$$P\{x_1 \le \xi < x_2\} = P\left\{\frac{x_1 - a}{\sigma} \le \frac{\xi - a}{\sigma} < \frac{x_2 - a}{\sigma}\right\} = F_0\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - F_0\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right)\right) - \left(\frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right)\right) = \Phi\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right). \bullet$$

Замечания.

1) В утверждении 2 промежуток $[x_1, x_2)$ можно заменить на любой из промежутков (x_1, x_2), $(x_1, x_2]$, $[x_1, x_2]$. Вероятность попадания останется прежней.

2) Аналогичная формула будет справедлива, если $x_1 = -\infty$ или $x_2 = +\infty$, причем $\Phi(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} \Phi(x) = 0{,}5$, а $\Phi(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} \Phi(x) = -0{,}5$, так как функция $\Phi(x)$ нечетная.

Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в промежуток $[x_1, x_2)$ можно найти непосредственно (без формулы Лапласа), если воспользоваться электронными таблицами EXCEL, в которых содержатся значения функции распределения $F_\xi(x)$ для любых случайных величин $\xi \in N(a,\sigma)$. Искомая вероятность будет вычисляться по формуле

$$P\{x_1 \le \xi < x_2\} = F_\xi(x_2) - F_\xi(x_1). \tag{2}$$

В рассмотренных далее задачах будут приведены два способа вычислений: по формуле (1) и по формуле (2).

Задача 2. Пусть случайная величина ξ имеет нормальное распределение со средним значением, равным 30, и дисперсией, равной 100. Найти вероятность того, что значение ξ будет принадлежать промежутку (10; 50).

Решение. По условию математическое ожидание $E\xi = 30$, дисперсия $D\xi = 100$, среднее квадратическое отклонение $\sigma = \sqrt{D\xi} = 10$. Следовательно, $\xi \in N(30,10)$. Вычислим искомую вероятность.

1-й способ (по формуле (1) с использованием таблицы значений функции Лапласа):

$$P\{10 < \xi < 50\} = \Phi\left(\frac{50-30}{10}\right) - \Phi\left(\frac{10-30}{10}\right) = \Phi(2) - \Phi(-2) =$$

$$= 2\Phi(2) \approx 2 \cdot 0,4772 = 0,9544.$$

2-й способ (по формуле (2) с использованием таблиц EXCEL).

После определения параметров нормального распределения воспользуемся таблицами EXCEL. В разделе «функции», который обозначен символом f_x, выбираем категорию «статистические»; среди них находим нужную функцию НОРМ.РАСП. В полученное окно вводим значение аргумента x, указываем нужные параметры распределения (напомним, что среднее значение – это математическое ожидание, а стандартное отклонение – среднее квадратическое отклонение); в графе «интегральная» вводим «ИСТИНА». После этого нажимаем «ОК» и получаем значение $F_\xi(x)$. (Заметим, что, если в графе «интегральная» ввести «ЛОЖЬ», то получим соответствующее значение плотности нормального распределения.) Найдя таким образом $F_\xi(50)$ и $F_\xi(10)$, вычисляем искомую вероятность:

$$P(10 < \xi < 50) = F_\xi(50) - F_\xi(10) \approx 0,9772 - 0,0228 = 0,9544.$$

Задача 3. Автоматическая фасовочная линия настроена на заполнение пакетов крупой так, чтобы вес крупы в пакете составлял 900 гр. Предположим, что отклонение от заданного веса распределено по нормальному закону со средним значением 0 гр. и средним квадратическим отклонением 5гр. Найти вероятность выпуска пакета весом не менее 910 граммов.

Решение. Пусть ξ – отклонение от заданного веса. Из условия задачи следует, что $\xi \in N(0;5)$. Требуется найти $P\{\xi \geq 10\}$.

1-й способ (по формуле (1)):

$$P\{10 \leq \xi < +\infty\} = \Phi(+\infty) - \Phi\left(\frac{10-0}{5}\right) = 0,5 - \Phi(2) \approx 0,5 - 0,4772 = 0,0228.$$

2-й способ (по формуле (2) с использованием таблиц EXCEL):

$$P\{10 \leq \xi < +\infty\} = F_\xi(+\infty) - F_\xi(10) \approx 1 - 0,9772 = 0,0228.$$

6. Правило «3σ»

Утверждение 3. Пусть $\xi \in N(a,\sigma)$. Тогда $\mathrm{P}\{|\xi - a| < 3\sigma\} \approx 0{,}997$, то есть, с большой вероятностью значения нормально распределенной случайной величины лежат в интервале $(a-3\sigma, a+3\sigma)$.

Доказательство. Воспользуемся утверждением 2:

$$\mathrm{P}\{|\xi - a| < 3\sigma\} = \mathrm{P}\{a - 3\sigma < \xi < a + 3\sigma\} = \Phi\left(\frac{(a+3\sigma)-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{(a-3\sigma)-a}{\sigma}\right) =$$

$$= \Phi(3) - \Phi(-3) = 2\Phi(3) \approx 0{,}997 . \bullet$$

Задача 4. Пусть $\xi \in N(30{,}10)$. Найти интервал, в котором с вероятностью 0,997 будут находиться значения случайной величины ξ.

Решение. По правилу «3σ»

$\mathrm{P}\{|\xi - a| < 3\sigma\} \approx 0{,}997$ или $\mathrm{P}\{\xi \in (a-3\sigma, a+3\sigma)\} \approx 0{,}997$.

В данном случае a=30, σ=10. Тогда a–3σ=0, a+3σ=60. Следовательно, с вероятностью 0,997 значения случайной величины ξ будут лежать в интервале (0;60).

Задачи для самостоятельного решения

Задача 2.4.1. Нормально распределенная случайная величина ξ задана плотностью

$$f(x) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2+6x+9}{32}}.$$

Найти $\mathrm{E}\xi$, $\mathrm{D}\xi$ и $P(|\xi| < 5)$.

Задача 2.4.2. Изделие маркируют первым сортом, если его размер отличается от номинала по абсолютной величине не более чем на 5 мм. Считая, что отклонение размера изделия от номинала – это случайная величина ξ, распределенная по нормальному закону с математическим ожиданием 0 мм и дисперсией 9 кв. мм, вычислить, каков процент изделий первого сорта.

§5. Равномерное распределение на отрезке [*a, b*]

1. Определение

Случайная величина ξ имеет равномерное распределение на отрезке [a,b], если ее плотность задается формулой

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} \text{ при } x \in [a,b], \\ 0 \text{ при } x \notin [a,b]. \end{cases}$$

График плотности равномерного распределения изображен на рис. 10.

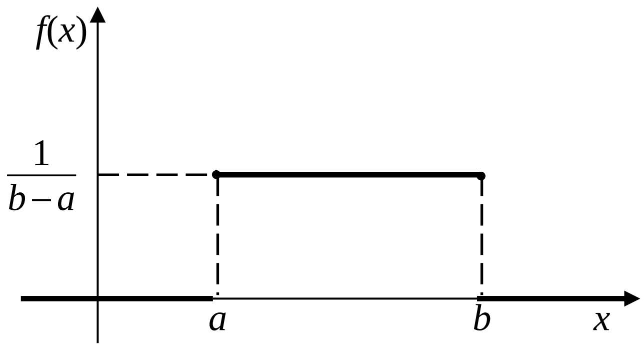


Рис. 10

Площадь под графиком равна $S=\frac{1}{b-a}\cdot(b-a)=1$. Заметим, что в данном случае плотность постоянна на $[a,b]$.

2. Вероятность попадания равномерно распределенной случайной величины в промежуток (c, d)

Пусть случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке $[a,b]$ и пусть $(c,d)\subset[a,b]$. Тогда

$$\mathrm{P}\{\xi\in(c,d)\}=\int_c^d f(x)dx=\int_c^d\frac{1}{b-a}dx=\frac{d-c}{b-a}.$$

Таким образом, вероятность попадания в интервал зависит только от длины интервала d–c. Следовательно, вероятности попадания случайной величины в интервалы одинаковой длины совпадают, что соответствует названию «равномерное» распределение. Графическая иллюстрация вероятностей попадания в равные по длине промежутки приведена на рис. 11.

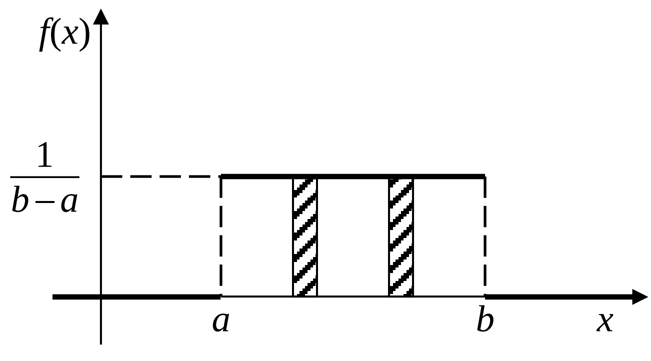


Рис. 11

Задача 1. Однородную нить длиной один метр тянут за концы, и происходит разрыв в случайной точке $\xi\in[0,1]$. Найти вероятность того, что разрыв произойдет в интервале от 10 до 12 см.

Решение. Так как нить однородная, можно считать, что случайная величина ξ имеет равномерное распределение на отрезке [0,1]. В данном случае a=0, b=1, c=0,1 и d=0,12. Тогда

$$\mathrm{P}\{\xi \in (0,1;\ 0,12)\} = \frac{d-c}{b-a} = 0,12 - 0,1 = 0,02.$$

Задача 2. Длину участка измеряют шагами. Длина шага 60 сантиметров. Результат измерения округляют до ближайшего конца шага. Предполагается, что ошибка округления распределена равномерно.

Найти вероятность того, что ошибка измерения по абсолютной величине меньше 10 сантиметров.

Решение. Пусть случайная величина ξ – это ошибка округления. Из условия следует, что ξ равномерно распределена на отрезке [-30;30], причём в качестве единицы длины взят сантиметр. Тогда плотность распределения ξ имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{60} \text{ при } x \in [-30;30], \\ 0 \text{ при } x \notin [-30;30]. \end{cases}$$

Отсюда получаем

$$\mathrm{P}\{|\xi| < 10\} = \mathrm{P}\{\xi \in (-10;10)\} = \int_{-10}^{10} \frac{1}{60}\,dx = \frac{1}{60}(10-(-10)) = \frac{1}{3}.$$

3. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, равномерно распределенной на [a,b]

Утверждение. Пусть случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке $[a,b]$. Тогда

$$\mathrm{E}\xi=\frac{a+b}{2},\ \ \mathrm{D}\xi=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Доказательство. В соответствии с определениями математического ожидания и дисперсии непрерывной случайной величины получаем

$$\mathrm{E}\xi=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_a^b x\cdot\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_a^b=\frac{1}{2(b-a)}\left(b^2-a^2\right)=\frac{a+b}{2};$$

$$\mathrm{D}\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-E\xi)^2 f(x)dx=\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\int_{a-\frac{a+b}{2}}^{b-\frac{a+b}{2}}t^2dt=\frac{1}{b-a}\cdot\left.\frac{t^3}{3}\right|_{\frac{a-b}{2}}^{\frac{b-a}{2}}=$$

$$=\frac{1}{3(b-a)}\left(\frac{(b-a)^3}{8}-\frac{(a-b)^3}{8}\right)=\frac{1}{24(b-a)}\cdot 2(b-a)^3=\frac{(b-a)^2}{12}.\bullet$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 2.5.1. Каждые 8 минут к остановке подходит автобус. Случайная величина ξ – это время ожидания пассажиром автобуса на остановке. Найти плотность распределения $f(x)$ случайной величины ξ, а также $\mathrm{E}\xi$, $\mathrm{D}\xi$ и $P\{\xi>5\}$.

Задача 2.5.2. Случайная величина ξ имеет равномерное распределение, причем $E\xi=4$, $D\xi=3$. Найти плотность распределения этой случайной величины.

Задача 2.5.3. Цена деления шкалы весов равна 100 г. Показания округляют до ближайшего деления. Предполагается, что ошибка округления является случайной величиной с равномерным распределением. Найти вероятность того, что при взвешивании будет допущена ошибка, превышающая по абсолютной величине 45 г.

§6. Показательный закон распределения

Определение. Случайная величина ξ имеет показательное (экспоненциальное) распределение с параметром $\lambda>0$, если ее плотность задается формулой

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x\ge 0,\\ 0 \text{ при } x<0.\end{cases}$$

Говорят также, что случайная величина распределена по показательному или экспоненциальному закону с параметром λ.

График плотности $f(x)$ приведен на рис. 12.

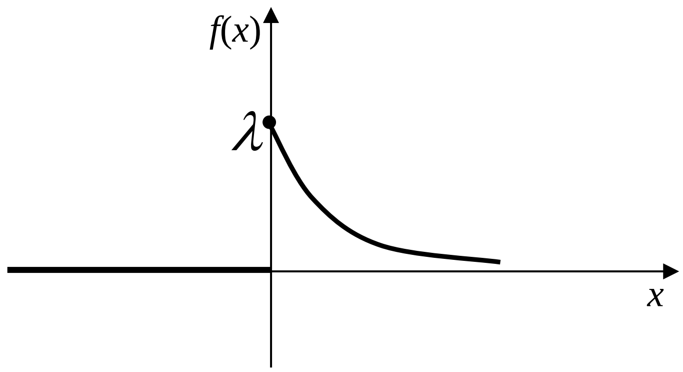


Рис. 12

Найдем функцию распределения $F(x)$ случайной величины, распределенной по показательному закону. Для $x\ge 0$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(y)dy=\int_{0}^{x}\lambda e^{-\lambda y}dy=\lambda\cdot\frac{1}{(-\lambda)}e^{-\lambda y}\Big|_{0}^{x}=-\left(e^{-\lambda x}-1\right)=1-e^{-\lambda x}.$$

Для x<0 $\quad F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(y)dy=0$.

Таким образом, $F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & \text{при } x\ge 0,\\ 0 & \text{при } x<0.\end{cases}$

Утверждение. Пусть случайная величина ξ имеет показательное распределение с параметром λ. Тогда $E\xi=\frac{1}{\lambda}$, $D\xi=\frac{1}{\lambda^2}$.

Доказательство. Используя определение математического ожидания непрерывной случайной величины и применяя метод интегрирования по частям, получаем

$$E\xi=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_{0}^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx=-\int_{0}^{+\infty} x de^{-\lambda x}=-xe^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}+\int_{0}^{+\infty} e^{-\lambda x}dx=$$

$$=0+\frac{1}{(-\lambda)}e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{\lambda}.$$

Для вычисления дисперсии найдем сначала $\mathrm{E}\xi^2$:

$$E\xi^2=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx=\int_{0}^{+\infty} x^2\lambda e^{-\lambda x}dx=-\int_{0}^{+\infty} x^2 de^{-\lambda x}=-x^2e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}+\int_{0}^{+\infty} e^{-\lambda x}\cdot 2x dx=$$

$$=0+2\int_{0}^{+\infty} xe^{-\lambda x}dx.$$

При вычислении математического ожидания мы получили, что

$\int_{0}^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx=\frac{1}{\lambda}$. Следовательно, $2\int_{0}^{+\infty} xe^{-\lambda x}dx=\frac{2}{\lambda^2}$.

Теперь по формуле для вычисления дисперсии будем иметь

$$\mathrm{D}\xi=\mathrm{E}\xi^2-(\mathrm{E}\xi)^2=\frac{2}{\lambda^2}-\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2=\frac{1}{\lambda^2}\bullet$$

Показательное распределение используется в теории массового обслуживания. По показательному закону распределено, например, время обслуживания или ожидания в очереди.

Задача. Какова вероятность, что время, затраченное на обслуживание покупателя, будет находиться в интервале от 2 до 4 минут, если среднее время обслуживания 2 минуты?

Решение. Пусть ξ – время обслуживания покупателя. В соответствии с условием $E\xi = \frac{1}{\lambda} = 2$. Следовательно, $\lambda = \frac{1}{2}$, а $F(x) = 1 - e^{-x/2}$ для всех $x \geq 0$.

Тогда

$$P\{2 \leq \xi \leq 4\} = F(4) - F(2) = 1 - e^{-2} - (1 - e^{-1}) = e^{-1} - e^{-2} \approx 0{,}23.$$

Замечание. Для нахождения значений функции распределения $F(x)$ можно использовать таблицы EXCEL. В разделе «функции», который обозначен символом f_x, выбираем категорию «статистические»; среди них находим нужную функцию ЭКСП.РАСП. В полученное окно вводим значение аргумента x, указываем значение λ, в графе «интегральная» вводим «ИСТИНА». После этого нажимаем «ОК» и получаем значение $F(x)$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 2.6.1. Время безотказной работы смартфона является экспоненциально распределенной случайной величиной. Известно, что смартфоны работают безотказно в среднем 4 года. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины, а также вероятность того, что наудачу купленный смартфон прослужит без ремонта хотя бы три года.

Задача 2.6.2. Функция распределения случайной величины ξ имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases} 1-e^{-0,04x} & \text{при } x\ge 0, \\ 0 & \text{при } x<0. \end{cases}$$

Найти $\mathrm{E}\xi$, $\mathrm{D}\xi$, и $\mathrm{P}\{\xi>20\}$.

§7. Совместная функция распределения

Напомним, что двумерные дискретные случайные величины рассматривались в §7 главы 1. Ниже мы дадим определение совместной функции распределения двух случайных величин, которое применимо к любым случайным величинам. Понятие совместной функции распределения будет использовано в следующем параграфе при рассмотрении непрерывных двумерных случайных величин.

1. Определение совместной функции распределения

Совместной функцией распределения случайных величин ξ и η называется функция $F(x,y)=P\{\xi<x,\ \eta<y\}$, где $x\in(-\infty;+\infty)$, $y\in(-\infty;+\infty)$.

С геометрической точки зрения знание функции распределение позволяет найти вероятность попадания точки со случайными координатами в заданную область $D=\{(x,y)|x<x_0, y<y_0\}$.

Задача 1. Задана совместная функция распределения случайных величин ξ и η

$$F(x,y)=\left(\frac{1}{\pi}arctg\frac{x}{3}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{\pi}arctg\frac{y}{2}+\frac{1}{2}\right).$$

Найти вероятность попадания случайной точки (ξ,η) в область $D=\{(x,y)|\ x<3,\ y<2\}$.

Решение. Заметим, что $\mathrm{P}\{(\xi,\eta)\in D\}=\mathrm{P}\{\xi<3,\ \eta<2\}$. Из определения, приведенного выше, получаем

$$\mathrm{P}\{\xi<3,\ \eta<2\}=F(3,2)=\left(\frac{1}{\pi}arctg1+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}arctg1+\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{16}.$$

2. Свойства совместной функции распределения

Пусть $F(x,y)$ – совместная функция распределения случайных величин ξ и η.

Свойства 1) и 2), приведенные ниже, доказываются аналогично тому, как это было сделано для функции распределения от одной переменной в гл.1, §6, п.3. Свойства 3), 4) приводятся с пояснением (без доказательства).

1) $0\le F(x,y)\le 1$ для всех x, y.

2) $F(x,y)$ – неубывающая функция по каждому аргументу, то есть для любого y $F(x_1,y)\le F(x_2,y)$ при $x_1<x_2$, и для любого x $F(x,y_1)\le F(x,y_2)$ при $y_1<y_2$.

Для формулирования дальнейших свойств используем следующие обозначения:

$$F(-\infty,y)=\lim_{x\to-\infty}F(x,y),\quad F(x,-\infty)=\lim_{y\to-\infty}F(x,y),\quad F(+\infty,y)=\lim_{x\to+\infty}F(x,y),$$

$$F(x,+\infty)=\lim_{y\to+\infty}F(x,y),\ F(-\infty,-\infty)=\lim_{\substack{x\to-\infty\\ y\to-\infty}}F(x,y),\ F(+\infty,+\infty)=\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}F(x,y).$$

3) Если хотя бы один из аргументов функции распределения $F(x,y)$ равен $-\infty$, то значение функции распределения равно нулю, то есть

$$F(-\infty,y)=F(x,-\infty)=F(-\infty,-\infty)=0;$$

если оба аргумента равны $+\infty$, то $F(+\infty,+\infty)=1$.

Рассмотрим, к примеру, формулы $F(-\infty,y)=0$ и $F(+\infty,+\infty)=1$. Пояснением к ним могут служить следующие цепочки равенств:

$$F(-\infty,y)=P\{\xi<-\infty,\ \eta<y\}=P(\varnothing)=0,$$

$$F(+\infty,+\infty)=P\{\xi<+\infty,\ \eta<+\infty\}=\mathrm{P}(\Omega)=1,$$

причем в каждой цепочке первое равенство не очевидно (вытекает из аксиоматического определения вероятности). Для остальных равенств в формулировке свойства 3) можно дать аналогичное пояснение.

4) Пусть $F_\xi(x)$ и $F_\eta(y)$ – функции распределения случайных величин ξ и η. Тогда $F_\xi(x)=F(x,+\infty)$, $F_\eta(y)=F(+\infty,y)$.

Эти формулы поясняются аналогично, например,

$$F(x,+\infty)=P\{\xi<x,\ \eta<+\infty\}=P\{\xi<x\}=F_\xi(x).$$

Замечание. Данное в п. 1 определение допускает обобщение на произвольное число случайных величин. Действительно, пусть $\xi_1,\ \xi_2,\dots,\ \xi_n$ – любые случайные величины. Их совместной функцией распределения будет функция n переменных $F(x_1,x_2,\dots,x_n)=P\{\xi_1<x_1,\xi_2<x_2,\dots,\xi_n<x_n\}$, где $x_1,x_2,\dots,x_n$ – произвольные вещественные числа. Такой упорядоченный набор чисел часто интерпретируют как n-мерный вектор или как координаты точки в n-мерном пространстве. Соответственно функция распределения в n-мерной точке, координаты которой содержат $-\infty$ и $+\infty$, определяется аналогично случаю двух переменных.

Свойства 1) и 2) при этом сохраняются. Свойство 3) формулируется так: если хотя бы один из n аргументов равен $-\infty$, то функции распределения равна нулю; если все n значений аргументов равны $+\infty$, то функция распределения равна единице. Свойство 4) обобщается следующим образом: если часть аргументов функции распределения принимает значение $+\infty$, то эта функция распределения совпадает с совместной функцией распределения тех случайных величин, которым соответствуют аргументы, отличные от $+\infty$. В частности $F(+\infty, x_2, ..., x_n) = F_{\xi_2 ... \xi_n}(x_2, ..., x_n)$.

3. Вероятность попадания двумерной случайной величины в заданный прямоугольник

Как было показано в п. 4 §6 главы 1, знание функции распределения $F(x)$ случайной величины ξ позволяет легко находить вероятность ее попадания в заданный промежуток: $\mathrm{P}\{a \le \xi < b\} = F(b) - F(a)$. Аналогичный результат можно получить и для двумерного случая.

Рассмотрим случайные величины ξ и η, а также их совместную функцию распределения $F(x,y) = P\{\xi < x,\ \eta < y\}$. Найдем $P\{a \le \xi < b,\ c \le \eta < d\}$. Геометрически это событие можно описать как попадание значений случайного вектора (ξ, η) в прямоугольник, ограниченный на координатной плоскости xOy прямыми $x = a,\ x = b,\ y = c,\ y = d$. При этом (как следует из условия) отрезки прямых $x = b,$ и $y = d$ ему не принадлежат.

Утверждение 1. Если $F(x,y) = P\{\xi < x,\ \eta < y\}$, то

$$P\{a \le \xi < b,\ c \le \eta < d\} = F(b,d) - F(b,c) - F(a,d) + F(a,c).$$

Доказательство. Введем в рассмотрение события

$$A = \{a \le \xi < b,\ c \le \eta < d\};\ B = \{\xi < a,\ \eta < d\};\ C = \{\xi < b,\ \eta < c\}.$$

Тогда $A + B + C = \{\xi < b,\ \eta < d\}$ и $P(A + B + C) = P\{\xi < b,\ \eta < d\} = F(b,d)$.

Так как события A и $B + C$ несовместны , $P(A + B + C) = P(A) + P(B + C)$.

Далее используем теорему сложения $P(B + C) = P(B) + P(C) - P(BC)$ и получаем, что $P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(BC)$.

Отсюда следует, что интересующая нас вероятность

$$P(A) = P(A + B + C) - P(B) - P(C) + P(BC). \qquad (*)$$

Заметим, что $BC = \{\xi < a,\ \eta < c\}$ и $P(BC) = P\{\xi < a,\ \eta < c\} = F(a,c)$, $P(B) = P\{\xi < a,\ \eta < d\} = F(a,d)$, $P(C) = P\{\xi < b,\ \eta < c\} = F(b,c)$. Тогда выражение (*) примет вид

$$P\{a \le \xi < b,\ c \le \eta < d\} = F(b,d) - F(b,c) - F(a,d) + F(a,c) \bullet$$

Задача 2. Задана совместная функция распределения случайных величин ξ и η

$$F(x,y) = \left(\frac{1}{\pi} arctg \frac{x}{3} + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{\pi} arctg \frac{y}{2} + \frac{1}{2}\right).$$

Найти вероятность попадания значений случайной точки (ξ,η) в область $D=\left\{(x,y)\middle|\sqrt{3}\le x<3,\ 0\le y<2\right\}$.

Решение. $\mathrm{P}\{(\xi,\eta)\in D\}=\mathrm{P}\left\{\sqrt{3}\le\xi<3,\ 0\le\eta<2\right\}$. Из доказанного только что утверждения следует, что

$$\mathrm{P}\left\{\sqrt{3}\le\xi<3,\ 0\le\eta<2\right\}=F(3;2)-F(3;0)-F\left(\sqrt{3};2\right)+F\left(\sqrt{3};0\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{\pi}arctg1+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}arctg1+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{\pi}arctg1+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}arctg0+\frac{1}{2}\right)-$$

$$-\left(\frac{1}{\pi}arctg\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}arctg1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{\pi}arctg\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}arctg0+\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}\cdot0+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}\cdot0+\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}=\frac{9}{16}-\frac{3}{8}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1}{48}.$$

4. Совместная функция распределения двух независимых случайных величин

Определение. Случайные величины ξ и η называется независимыми, если для любых x, y выполняется равенство $P\{\xi<x,\ \eta<y\}=P\{\xi<x\}\cdot P\{\eta<y\}$.

Это же равенство можно записать в терминах функций распределения:

$F(x,y)=F_\xi(x)F_\eta(y)$,

где $F(x,y)$ – совместная функция распределения случайных величин ξ и η, а $F_\xi(x)$ и $F_\eta(y)$ – функции распределения случайных величин ξ и η.

Задача для самостоятельного решения

Задача 2.7.1. [1] Совместная функция распределения случайных величин ξ и η имеет вид: $F(x,y)=1-2^{-x^2}-3^{-y^2}+2^{-x^2}3^{-y^2}$. Определить совместную плотность $f(t,s)$ распределения этих величин и вычислить

$P\{1\le\xi\le2,\ 0\le\eta\le1\}$.

§8. Двумерные случайные величины с непрерывным распределением

1. Определение

Пусть $F(x,y)$ – совместная функция распределения случайных величин ξ и η. Если существует неотрицательная функция $f(t,s)$ такая, что

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(t,s)dtds,$$

то $f(t,s)$ называется совместной плотностью распределения случайных величин ξ и η, а двумерная случайная величина (ξ,η) называется непрерывной.

Из курса математического анализа следует, что двойной несобственный интеграл в формуле $F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(t,s)dtds$ равен повторному интегралу, то есть, может быть вычислен последовательным интегрированием по каждой из переменных:

$$\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(t,s)dtds=\int_{-\infty}^{x}\left(\int_{-\infty}^{y} f(t,s)ds\right)dt=\int_{-\infty}^{y}\left(\int_{-\infty}^{x} f(t,s)dt\right)ds.$$

Заметим, что при вычислении внутреннего интеграла по одной из переменных вторая переменная рассматривается как константа.

Частные функции распределения также можно выразить через совместную плотность распределения:

$$F_{\xi}(x)=F(x,+\infty)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t,s)dtds=\int_{-\infty}^{x}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t,s)ds\right)dt,$$

$$F_{\eta}(y)=F(+\infty,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+y} f(t,s)dtds=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{y} f(t,s)ds\right)dt=\int_{-\infty}^{y}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t,s)dt\right)ds.$$

При этом частные плотности распределения случайных величин ξ и η очевидно задаются выражениями

$$f_{\xi}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t,s)ds \quad \text{и} \quad f_{\eta}(s)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t,s)dt.$$

2. Свойства совместной плотности распределения

1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t,s)dtds=1.$

Доказательство. Используя свойства интегралов, а также свойство 3) совместной функции распределения, получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t,s)dtds=F(+\infty,+\infty)=1. \bullet$$

Свойства **2)** и **3)** приводим без доказательства.

2) В каждой точке непрерывности плотности выполнено равенство

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\cdot\partial y}=f(x,y).$$

Это утверждение следует из свойств интегралов.

Задача 1 [1]. Задана совместная функция распределения случайных величин ξ и η:

$$F(x,y)=\left(1-e^{-\alpha x}\right)\left(1-e^{-\beta y}\right).$$

Найти совместную плотность распределения случайных величин ξ,η.

Решение. Найдем сначала частную производную от совместной функции распределения по переменной *x*:

$$\left(F(x,y)\right)'_x=\left(\left(1-e^{-\alpha x}\right)\left(1-e^{-\beta y}\right)\right)'_x=\left(1-e^{-\beta y}\right)\left(1-e^{-\alpha x}\right)'_x=\left(1-e^{-\beta y}\right)\alpha e^{-\alpha x}.$$

Далее от полученной функции вычислим частную производную по переменной *y*:

$$\left(\left(F(x,y)\right)'_x\right)'_y=\left(\left(1-e^{-\beta y}\right)\alpha e^{-\alpha x}\right)'_y=\alpha e^{-\alpha x}\cdot\beta e^{-\beta y}=\alpha\beta e^{-(\alpha x+\beta y)}.$$

Отсюда следует, что совместная плотность имеет вид

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\cdot\partial y}=\left(\left(F(x,y)\right)'_x\right)'_y=\alpha\beta\cdot e^{-(\alpha x+\beta y)}.$$

3) Пусть D – некоторая область на координатной плоскости *xOy*, (ξ,η) – непрерывная двумерная случайная величина. Тогда

$$P\{(\xi,\eta)\in D\}=\iint\limits_D f(t,s)dtds.$$

Замечания.

а) Как и в случае с одномерной случайной величиной, принадлежность множеству D его граничных точек не влияет на вероятность попадания непрерывной двумерной случайной величины в это множество.

б) В дальнейшем мы будем рассматривать только такие двойные интегралы, которые сводятся к повторному интегралу, то есть могут быть вычислены последовательным интегрированием по каждой из переменных.

Следствие. Вероятность попадания двумерной непрерывной случайной величины (ξ,η) в заданный прямоугольник может быть вычислена по формуле

$$P\{a\le\xi<b,\ c\le\eta<d\}=\int\limits_a^b\left(\int\limits_c^d f(t,s)ds\right)dt.$$

При этом в отличие от общего случая (см. §7, п.3) будут верны следующие равенства:

$$P\{a\le\xi<b,\ c\le\eta<d\}=P\{a\le\xi\le b,\ c\le\eta<d\}=$$
$$=P\{a\le\xi<b,\ c\le\eta\le d\}=P\{a\le\xi\le b,\ c\le\eta\le d\}.$$

Задача 2. Двумерная случайная величина (ξ,η) задана совместной плотностью распределения

$$f(t,s)=\begin{cases}\dfrac{1}{8} \ \text{при} \ t\in[2;4], s\in[-1;3],\\ 0 \ \text{при} \ t\notin[2;4] \ \text{или} \ s\notin[-1;3].\end{cases}$$

Найти $P\{1\le\xi\le3,\ 0\le\eta\le5\}$.

Решение. Вычислим искомую вероятность по формуле, приведенной в следствии из свойства **3)**:

$$P\{1\le\xi\le3,\ 0\le\eta\le5\}=\int_1^3\left(\int_0^5 f(t,s)ds\right)dt=\int_2^3\left(\frac{1}{8}\int_0^3 ds\right)dt=\frac{1}{8}\int_2^3\left(\int_0^3 ds\right)dt=$$

$$=\frac{1}{8}\int_2^3 3dt=\frac{3}{8}=0{,}375.$$

4) Непрерывные случайные величины ξ и η независимы тогда и только тогда, когда $f(t,s)=f_\xi(t)f_\eta(s)$ для всех t и s.

Доказательство.

а) Пусть случайные величины ξ и η независимы. Воспользуется свойством совместной функции распределения для независимых случайных величин (см. §7, п. 4). Тогда согласно сформулированному выше свойству **2)** получаем

$$f(t,s)=\left(\left(F(t,s)\right)'_t\right)'_s=\left(\left(F_\xi(t)\cdot F_\eta(s)\right)'_t\right)'_s=\left(F_\eta(s)\left(F_\xi(t)\right)'_t\right)'_s=\left(F_\xi(t)\right)'_t\left(F_\eta(s)\right)'_s=f_\xi(t)\cdot f_\eta(s).$$

б) Пусть для всех t и s выполнено равенство $f(t,s)=f_\xi(t)f_\eta(s)$. Докажем независимость случайных величин ξ и η. Рассмотрим их совместную функцию распределения:

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_\xi(t)f_\eta(s)dtds=\int_{-\infty}^{y} f_\eta(s)\left(\int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)dt\right)ds=\int_{-\infty}^{y} f_\eta(s)F_\xi(x)ds=$$

$$=F_\xi(x)\int_{-\infty}^{y} f_\eta(s)ds=F_\xi(x)F_\eta(y).$$

Отсюда получаем, что случайные величины ξ и η независимы. ●

Задача 3. Двумерная случайная величина (ξ,η) задана совместной плотностью распределения

$$f(t,s)=\begin{cases}0 \ \text{при} \ t<0 \ \text{или} \ s<0,\\ ae^{-(t+s)} \ \text{при} \ t\ge0, s\ge0.\end{cases}$$

Найти число a и плотности распределения случайных величин ξ и η; проверить эти случайные величины на независимость .

Решение. Найдём число a. Для этого вычислим двойной интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t,s)dtds=\int\limits_{0}^{+\infty}\left(\int\limits_{0}^{+\infty} ae^{-(t+s)}ds\right)dt=\int\limits_{0}^{+\infty}\left(ae^{-t}\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-s}ds\right)dt=$$

$$=\int\limits_{0}^{+\infty}\left(ae^{-t}(-e^{-s})\Big|_0^{+\infty}\right)dt=a\int\limits_{0}^{+\infty}\left(e^{-t}(0-(-1)\right)dt=a\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-t}dt=a(-e^{-t})\Big|_0^{+\infty}=a.$$

Так как по первому свойству плотности данный интеграл равен единице, то $a=1$.

Найдем плотности случайных величин ξ и η:

$$f_\xi(t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t,s)ds=\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-(t+s)}ds=e^{-t}\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-s}ds=e^{-t};$$

аналогично $f_\eta(s)=e^{-s}$.

Заметим, что $f_\xi(t)\cdot f_\eta(s)=e^{-t}\cdot e^{-s}=e^{-(t+s)}=f(t,s)$. Отсюда и следует независимость случайных величин ξ и η.

3. Ковариация непрерывных случайных величин. Коэффициент корреляции

Для непрерывных случайных величин сохраняются определения, данные в п.3 §7 главы 1, а также свойства ковариации и коэффициента корреляции. Напомним эти определения.

Определение 1. Ковариацией случайных величин ξ и η называется число

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta)=\mathrm{E}\left((\xi-\mathrm{E}\xi)(\eta-\mathrm{E}\eta)\right).$$

Для вычисления ковариации можно использовать формулу

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta)=\mathrm{E}(\xi\eta)-\mathrm{E}\xi\mathrm{E}\eta.$$

Определение 2. Коэффициентом корреляции случайных величин ξ и η называется число

$$\rho(\xi,\eta)=\frac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{\mathrm{D}\xi\cdot\mathrm{D}\eta}}.$$

В случае непрерывных случайных величин ξ и η, заданных совместной плотностью $f(t,s)$, соответствующие формулы для ковариации примут вид:

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(t-E\xi)(s-E\eta)f(t,s)dtds;$$

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} ts\,f(t,s)dtds-E\xi\cdot E\eta.$$

Для вычисления математических ожиданий и дисперсий ξ и η удобно использовать частные плотности $f_\xi(t)$ и $f_\eta(s)$ соответственно.

Задача 4. Двумерная случайная величина (ξ,η) задана совместной плотностью распределения

$$f(t,s)=\begin{cases}0 \; \textit{при}\; t<0 \;\; \textit{или} \;\; s<0,\\ e^{-(t+s)} \;\; \textit{при} \;\; t\ge 0,\, s\ge 0.\end{cases}$$

Найти $\operatorname{cov}(\xi,\eta)$.

Решение. Вычислим математические ожидания $E\xi$ и $E\eta$. Для этого воспользуемся частными плотностями, найденными в предыдущей задаче:

$$E\xi=\int_{-\infty}^{+\infty} t\cdot f_{\xi}(t)dt=\int_{0}^{+\infty} t\cdot e^{-t}dt=-t\cdot e^{-t}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}e^{-t}dt=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{e^x}+0+1=-\lim_{x\to+\infty}\frac{x'}{(e^x)'}+1=-\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}+1=1.$$

Здесь при вычислении предела было использовано правило Лопиталя, известное из курса математического анализа.

Аналогично

$$E\eta=\int_{-\infty}^{+\infty} s f_{\eta}(s)ds=1.$$

Вычислим

$$E(\xi\eta)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} ts f(t,s)dtds=\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty} tse^{-(t+s)}dtds=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}tse^{-t}\cdot e^{-s}ds\right)dt=$$

$$=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}tse^{-t}e^{-s}ds\right)dt=\int_0^{+\infty}te^{-t}\left(\int_0^{+\infty}se^{-s}ds\right)dt=\int_0^{+\infty}te^{-t}dt=1.$$

Тогда

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta)=\mathrm{E}(\xi\eta)-\mathrm{E}\xi\cdot\mathrm{E}\eta=1-1\cdot 1=0.$$

Замечание. Полученный результат в данном случае был ожидаемым, так как случайные величины ξ и η в этой задаче независимы (см. задачу 3 выше), и следовательно их ковариация равна нулю (см. гл.1, §7, п.3). Обратное утверждение неверно, то есть, из равенства нулю ковариации (иначе говоря, из некоррелированности случайных величин) не следует их независимость. Соответствующий пример приведен в частности в книге [1].

4. Двумерный нормальный закон распределения

Двумерный нормальный закон распределения – один из наиболее часто встречающихся законов совместного распределения.

Определение. Говорят, что двумерная случайная величина (ξ,η) распределена по нормальному закону, если ее плотность распределения имеет вид:

$$f(t,s)=\frac{1}{2\pi\sigma_\xi\sigma_\eta\sqrt{1-\rho_{\xi\eta}^2}}\cdot e^{-\frac{1}{2(1-\rho_{\xi\eta}^2)}\left[\frac{(t-a_\xi)^2}{\sigma_\xi^2}+\frac{(s-a_\eta)^2}{\sigma_\eta^2}-2\rho_{\xi\eta}\frac{t-a_\xi}{\sigma_\xi}\cdot\frac{s-a_\eta}{\sigma_\eta}\right]},$$

где $a_\xi=E\xi$, $a_\eta=E\eta$, $\sigma_\xi=\sqrt{D\xi}$, $\sigma_\eta=\sqrt{D\eta}$, $\rho_{\xi\eta}=\rho(\xi,\eta)$ − коэффициент корреляции случайных величин ξ и η.

В частном случае, когда случайные величины ξ и η некоррелированные (то есть, $\rho_{\xi\eta}=0$), получаем

$$f(t,s)=\frac{1}{\sigma_\xi\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(t-a_\xi)^2}{2\sigma_\xi^2}}\cdot\frac{1}{\sigma_\eta\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(s-a_\eta)^2}{2\sigma_\eta^2}}=f_\xi(t)\cdot f_\eta(s).$$

Таким образом, для двумерного нормального распределения некоррелированность влечет независимость, что, как мы знаем, в общем случае неверно.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 2.8.1. [1] Совместная функция распределения случайных величин ξ и η имеет вид: $F(x,y)=1-2^{-x^2}-3^{-y^2}+2^{-x^2}3^{-y^2}$. Найти совместную плотность $f(t,s)$ распределения этих случайных величин и использовать ее для вычисления $P\{1\le\xi\le 2,\ 0\le\eta\le 1\}$.

Задача 2.8.2 Случайные величины ξ и η независимы и распределены по нормальному закону: $\xi\in N(-2;5)$, $\eta\in N(4;2)$. Найти их совместную плотность распределения, а также $E(\xi+\eta)$ и $D(\xi+\eta)$.

ГЛАВА 3. ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ И ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА

§1. Независимость нескольких случайных величин. Одинаково распределенные случайные величины

Пусть $\xi_1,\xi_2,...,\xi_n$ – произвольные случайные величины.

Определение. Случайные величины $\xi_1,\xi_2,...,\xi_n$ называются независимыми (в совокупности), если для любых чисел $x_1,x_2,...,x_n$

$$\mathrm{P}\{\xi_1<x_1,\xi_2<x_2,...,\xi_n<x_n\}=\mathrm{P}\{\xi_1<x_1\}\cdot\mathrm{P}\{\xi_2<x_2\}\cdot...\cdot\mathrm{P}\{\xi_n<x_n\}.$$

Замечания.

1) Можно доказать, что если случайные величины $\xi_1,\xi_2,...,\xi_n$ независимы, то любые случайные величины, выбранные из этого набора, также будут независимыми.

2) Если проводится n независимых экспериментов, на которых заданы случайные величины $\xi_1,\xi_2,...,\xi_n$ соответственно, то эти случайные величины будут независимыми.

Дадим пояснение понятия «одинаково распределенные» случайные величины. Для дискретных случайных величин это означает, что они имеют одинаковые таблицы распределений; для непрерывных случайных величин – что они имеют одинаковые плотности; в общем случае, то есть для произвольных случайных величин – что они имеют одинаковые функции распределения.

Пример. Пусть проводятся n испытаний Бернулли с вероятностью успеха p. Рассмотрим случайные величины

$$\xi_i=\begin{cases}1, \text{ если в } i-\text{м испытании успех,}\\0, \text{ если в } i-\text{м испытании неудача;}\end{cases} \quad \text{i=1,2, ..., n.}$$

Тогда случайные величины $\xi_1,\xi_2,...,\xi_n$ будут независимыми (так как испытания независимые). Выпишем распределение ξ_i:

ξ_i	1	0
P	p	q

(q=1–p).

Таким образом, все случайные величины ξ_i имеют одинаковые распределения. Следовательно, $\xi_1,\xi_2,...,\xi_n$ являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами.

§2. Закон больших чисел

1. Суть закона больших чисел

Рассмотрим случайный эксперимент и некоторую случайную величину ξ, которая наблюдается в ходе этого эксперимента. Пусть математическое ожидание этой случайной величины равно a. Теперь предположим, что проводится большое количество не зависящих друг от друга таких же экспериментов, в каждом из которых наблюдается случайная величина, аналогичная случайной величине ξ. Тогда мы будем иметь последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин ξ_1, ξ_2, … с математическим ожиданием $\mathrm{E}\xi_i = a$. Заранее мы не можем предсказать, какие значения будут принимать в ходе экспериментов случайные величины ξ_i, так как эти значения зависят от случая. Однако, как показывает практика, среднее арифметическое значений случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, полученных в результате n экспериментов, приближается с ростом n к числу a. Этот эмпирический факт говорит о том, что поведение суммы большого числа случайных величин становится предсказуемым, почти закономерным.

Пример. Рассмотрим эксперимент с бросанием игральной кости, и пусть случайная величина ξ равна выпавшему числу. По распределению ξ легко вычислить математическое ожидание:

$$\mathrm{E}\xi = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = 3{,}5.$$

Пусть теперь игральную кость бросают n раз и наблюдают выпавшие числа. Тогда, если n достаточно велико, среднее арифметическое всех выпавших чисел будет приближенно равно 3,5.

Математическая формулировка описанного факта носит название «закон больших чисел». Существует несколько теорем, дающих обоснование этого закона при различных предположениях относительно последовательности $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$. В п. 3 настоящего параграфа мы приведем теорему с наиболее простой формулировкой закона больших чисел. Для этого нам понадобится понятие сходимости последовательности случайных величин по вероятности.

2. Сходимость последовательности случайных величин по вероятности

Определение. Говорят, что последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ сходится по вероятности к случайной величине ξ, если для любого положительного числа ε

$$\mathrm{P}\{|\xi_n - \xi| < \varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

(вероятность события $\{|\xi_n - \xi| < \varepsilon\}$ стремится к 1 при $n \to \infty$).

В частности, последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...$ сходится по вероятности к числу a, если для любого $\varepsilon > 0$

$$P\{|\xi_n - a| < \varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

Это означает, что при достаточно больших n с вероятностью, близкой к 1, будет выполняться неравенство $\{|\xi_n - a| < \varepsilon\}$, то есть значения случайной величины ξ_n будут находиться в промежутке $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ (рис. 13).

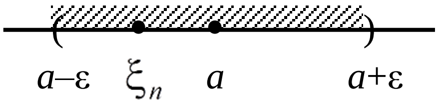


Рис. 13

3. Закон больших чисел для независимых одинаково распределенных случайных величин

Следующая теорема приводится без доказательства.

Теорема 1 (закон больших чисел). Пусть $\xi_1, \xi_2, ...$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с математическим ожиданием $a = \mathrm{E}\xi_i$. Рассмотрим случайную величину $\overline{X}_n = \dfrac{\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n}{n}$ (среднее арифметическое случайных величин $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$). Тогда при $n \to \infty$ последовательность случайных величин $\{\overline{X}_n\}$ сходится по вероятности к числу a (то есть, для любого $\varepsilon > 0$ $P\{|\overline{X}_n - a| < \varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$).

Замечания.

1) При условии существования дисперсии $D\xi_i = c$ можно оценить, насколько вероятность события $\{|\overline{X}_n - a| < \varepsilon\}$ близка к единице. Используя неравенство Чебышева [1], получаем формулу

$$P\{|\overline{X}_n - a| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{c}{n\varepsilon^2}.$$

2) На законе больших чисел основываются статистические методы оценивания неизвестных параметров распределения.

Пояснить закон больших чисел можно следующим образом. Различные факторы, влияющие на значения отдельных случайных величин ξ_i, могут приводить как к положительным, так и к отрицательным отклонениям этих значений от математического ожидания. В то же время при рассмотрении среднего арифметического большого количества случайных величин отклонения разных знаков взаимно погашаются. Иными словами, случайные величины ξ_i могут иметь значительный разброс, а их среднее арифметическое будет сосредоточено около математического ожидания.

Закон больших чисел дает обоснование принципу среднего арифметического, который используется в экспериментальных науках. В качестве примера рассмотрим измерение некоторой физической величины. Проведя n независимых измерений при одинаковых условиях, получаем n значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которые могут существенно отличаться друг от друга. Опираясь на закон больших чисел, приближенным значением измеряемой величины считают среднее арифметическое результатов измерений, то есть $\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$.

4. Применение закона больших чисел к испытаниям Бернулли

Пусть проводятся n испытаний Бернулли с вероятностью успеха p. Обозначим через μ число успехов в n испытаниях. Число $\frac{\mu}{n}$ называют частотой (относительной частотой) появления успеха в n испытаниях. Приведенная ниже теорема (закон больших чисел в форме Бернулли) утверждает, что частота появления успеха приближается с ростом n к вероятности успеха p и, следовательно, при больших n $\frac{\mu}{n} \approx p$.

Теорема 2. Пусть μ – число успехов в n испытаниях Бернулли с вероятностью успеха p. Тогда последовательность $\left\{\frac{\mu}{n}\right\}$ сходится при $n \to \infty$ к p по вероятности, то есть, для любого $\varepsilon > 0$ $\mathrm{P}\left\{\left|\frac{\mu}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$

Доказательство. Пусть ξ_i – это число успехов в испытании с номером i. Тогда случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы, имеют одинаковые распределения, $\mathrm{E}\xi_i = p$, $\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n = \mu$ (см. гл.1, §5, п. 2). Применяя к ним закон больших чисел, получаем, что $\frac{\mu}{n} = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n}$ сходится к p по вероятности. ●

Пример. Пусть имеется монета, причем неизвестно, симметричная ли она. Обозначим через p вероятность выпадения герба. Как найти p эмпирическим путем?

Рассмотрим последовательность подбрасываний монеты. Это испытания Бернулли с вероятностью успеха p (успехом считаем выпадение герба). Пусть μ – число выпадений герба в n испытаниях. Тогда по теореме 2 $\frac{\mu}{n}$ сходится к p по вероятности. Следовательно, при больших n $\frac{\mu}{n} \approx p$. Таким образом, подбрасывая монету большое число раз и вычисляя частоту $\frac{\mu}{n}$ выпадения герба, можно приближенно вычислить p и в частности узнать, симметричная ли монета.

Для проверки согласия результатов опыта с теорией было проведено много экспериментов, в которых вычислялась частота появления успеха в n испытаниях Бернулли при больших n, причем вероятность успеха p была заранее известна. Все такие опыты продемонстрировали полное согласие с теоретическими выводами. Так, проводя опыты с подбрасыванием симметричной монеты, французский естествоиспытатель Бюффон (XVIII в.) при 4040 подбрасываниях получил частоту выпадения герба, равную 0.507, а английский статистик К. Пирсон (XIX-XX вв.) при 12000 подбрасываниях получил частоту 0,5016 и при 24000 – частоту 0,5005. Как мы видим, отклонения от вероятности выпадения герба, равной 0.5, совсем незначительны.

Основываясь на теореме Бернулли, неизвестную вероятность какого-либо события можно считать приближенно равной частоте появления этого события при большом количестве проведенных независимых опытов. Это, в свою очередь, оправдывает использование так называемого статистического определения вероятности. Например, если стрелок произвел 50 выстрелов по мишени и при этом было зафиксировано 45 попаданий, то вероятность попадания для данного стрелка можно считать равной $\frac{45}{50} = 0,9.$

§3. Центральная предельная теорема

1. Суть центральной предельной теоремы

Многие случайные явления – это результат взаимодействия большого числа незначительных случайных факторов. В качестве примера рассмотрим ошибку измерения. Предположим, проводится измерение некоторой физической величины. На результат измерения воздействуют многие независимые случайные факторы: температура, влажность, состояние измерительного прибора и др. Каждый из этих факторов порождает некоторую малую ошибку, из которых и складывается ошибка измерения. Другим примером может служить массовое производство, в процессе которого изготавливаются большие партии одинаковых изделий. На практике всегда имеет место некоторое отклонение изделия от номинала, вызванное случайными причинами, причем каждая из этих причин вызывает ничтожно малую ошибку, а сумма большого числа таких ошибок дает заметное отклонение. Оказывается, что при определенных условиях величина суммарного воздействия большого числа незначительных случайных факторов мало отличается от нормально распределенной случайной величины. Этот факт объясняет центральная предельная теорема, суть которой заключается в следующем: сумма большого числа независимых случайных величин (при определенных условиях) имеет распределение, близкое к нормальному.

2. Центральная предельная теорема для независимых одинаково распределенных случайных величин

Следующая теорема приводится без доказательства.

Теорема. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с математическим ожиданием $E\xi_i = a$ и конечной дисперсией $D\xi_i = \sigma^2$. Рассмотрим случайную величину $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$. Пусть $F_n(x)$ – это функция распределения случайной величины $Z_n = \dfrac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}}$. Тогда для любого x $F_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_0(x)$, где $F_0(x)$ – функция стандартного нормального распределения.

Из этой теоремы следует, что при больших n случайная величина S_n имеет распределение, близкое к нормальному с параметрами na и $\sigma\sqrt{n}$, то есть, $S_n \approxeq N\left(na, \sigma\sqrt{n}\right)$.

Замечания.

1) В условиях приведенной теоремы имеет место более сильное заключение, а именно равномерная по x сходимость последовательности $F_n(x)$ к $F_0(x)$, откуда в свою очередь следует сходимость в каждой точке x.

2) Для независимых случайных величин, которые не являются одинаково распределенными, но удовлетворяют определенным условиям, был получен аналогичный результат, то есть, сумма большого числа таких случайных величин также имеет распределение, близкое к нормальному.

3. Приближенные формулы при больших *n*

Рассмотрим вероятность попадания случайной величины S_n в промежуток $[x_1, x_2)$. Пусть n достаточно велико. Тогда $S_n \approxeq N\left(na, \sigma\sqrt{n}\right)$. Применяя формулу для вероятности попадания нормально распределенной случайной величины в промежуток $[x_1, x_2)$, (см. гл.2, §4, п. 5), получаем

$$P\{x_1 \le S_n < x_2\} \approx \Phi\left(\frac{x_2 - na}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - na}{\sigma\sqrt{n}}\right), \qquad (1)$$

где $\Phi(x)$ – функция Лапласа (определение функции $\Phi(x)$ приведено в гл.2, §4, п. 3).

Как упоминалось ранее (см. гл.2, §4, п. 5), с помощью таблиц EXCEL можно получить значения функции распределения $F(x)$ для нормально распределенной случайной величины с заданными параметрами. Следовательно, можно вычислить искомую вероятность по формуле

$$P\{x_1 \le S_n < x_2\} \approx F(x_2) - F(x_1), \qquad (2)$$

где $F(x)$ – функция нормального распределения с параметрами na и $\sigma\sqrt{n}$.

Напомним, что формулы (1) и (2) справедливы для любого промежутка с концами x_1, x_2 (открытого, полуоткрытого или замкнутого). Этими формулами рекомендуется пользоваться при $n \ge 30$ [9].

В приведенных ниже задачах 1 – 3 представлены два варианта вычисления вероятности: с использованием формулы (1) и формулы (2).

Заметим, что в результатах вычислений могут оказаться небольшие расхождения (в третьем знаке после запятой). Это связано с тем, что при использовании стандартной таблицы значений функции Лапласа аргументы функции округляются до двух знаков после запятой, откуда и появляется погрешность. Однако, если высокая степень точности не требуется и достаточно, например, вычислить вероятность с точностью до 0.01, то оба способа дадут одинаковый результат.

Задача 1. Игральную кость бросают 100 раз. Какова вероятность, что сумма выпавших чисел окажется в пределах от 360 до 400.

Решение. Пусть $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{100}$ – выпавшие числа. Эти случайные величины – независимые, одинаково распределенные с математическим ожиданием $\mathrm{E}\xi_i = 3{,}5$ (см. пример в §2, п. 1). Вычислим дисперсию. Для этого запишем распределение случайной величины ξ_i^2:

ξ_i^2	1	4	9	16	25	36
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Отсюда $E\xi_i^2 = \frac{1}{6}(1+4+9+16+25+36) = \frac{91}{6}$ и $\mathrm{D}\xi_i = \mathrm{E}\xi_i^2 - (\mathrm{E}\xi_i)^2 = \frac{91}{6} - (3{,}5)^2 = \frac{35}{12}$.
Пусть $S_n = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n$, где $n = 100$. Вычислим $\mathrm{P}\{360 \le S_n < 400\}$.

1-й способ (по формуле (1) с использованием таблицы значений функции Лапласа):

$$\mathrm{P}\{360 \le S_n < 400\} \approx \Phi\left(\frac{400 - 100\cdot 3{,}5}{\sqrt{\frac{35}{12}}\cdot\sqrt{100}}\right) - \Phi\left(\frac{360 - 100\cdot 3{,}5}{\sqrt{\frac{35}{12}}\cdot\sqrt{100}}\right) = \Phi\left(\frac{5\cdot 2\sqrt{3}}{\sqrt{35}}\right) - \Phi\left(\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{35}}\right) \approx$$

$$\approx \Phi(2{,}93) - \Phi(0{,}59) \approx 0{,}4983 - 0{,}2224 = 0{,}2759.$$

2-й способ (по формуле (2) с использованием таблиц EXCEL).

Определим параметры распределения случайной величины S_n. В нашем случае среднее равно $na = 100\cdot 3{,}5 = 350$, а стандартное (среднее квадратическое) отклонение равно $\sigma\sqrt{n} = \sqrt{\frac{35}{12}}\cdot 10 \approx 17{,}0783$. Теперь воспользуемся таблицами EXCEL. В разделе «функции», который обозначен символом f_x, выбираем категорию «статистические»; среди них находим нужную функцию НОРМ.РАСП. В полученное окно вводим значение аргумента x, указываем нужные параметры распределения. В графе «интегральная» вводим

«ИСТИНА». После этого нажимаем «ОК» и получаем искомое значение $F(x)$.

Таким образом,

$$\mathrm{P}\{360 \le S_{100} < 400\} \approx F(400) - F(360) \approx 0{,}9983\text{-}0{,}7209\text{=}0{,}2774.$$

Заметим, что с точностью до 0,01 значения вероятности, полученные при разных способах вычислений, совпадают и равны 0,28.

Задача 2. В течение дня i-й посетитель магазина делает покупку на случайную сумму ξ_i. Предполагается, что ξ_i – это независимые одинаково распределенные случайные величины с математическим ожиданием $a=500$ и средним квадратическим отклонением $\sigma=1000$. За день магазин посещают 3600 человек. Найти вероятность того, что дневная выручка магазина будет меньше 1920000.

Решение. По условию n=3600; дневная выручка $S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$ представляет собой сумму независимых одинаково распределенных случайных величин. Требуется найти $\mathrm{P}\{0 \le S_n < 1920000\}$.

1-й способ (по формуле (1) с использованием таблицы значений функции Лапласа):

$$\mathrm{P}\{0 \le S_n < 1920000\} \approx \Phi\left(\frac{1920000 - 3600 \cdot 500}{1000\sqrt{3600}}\right) - \Phi\left(\frac{-3600 \cdot 500}{1000\sqrt{3600}}\right) =$$

$$= \Phi(2) + \Phi(30) \approx 0{,}4772 + 0{,}5 = 0{,}9772.$$

2-й способ (по формуле (2) с использованием таблиц EXCEL).

Аналогично предыдущей задаче, используя функцию НОРМ.РАСП со средним $na = 3600 \cdot 500 = 1800000$ и стандартным отклонением $\sigma\sqrt{n} = 1000 \cdot 60 = 60000$, получаем

$$\mathrm{P}\{0 \le S_n < 1920000\} \approx F(1920000) - F(0) \approx 0{,}9772 - 0 = 0{,}9772.$$

В данном случае результаты, полученные при двух способах вычислений, совпадают, так как аргументы функции Лапласа оказались целыми числами и их не пришлось округлять.

Задача 3. (Условие задачи взято из [1]). Предположим, что на станцию скорой помощи вызовы в течение суток поступают по закону Пуассона с параметром $\lambda = 73$ и в разные сутки их количество не зависит друг от друга. Определить вероятность того, что в течение года (365 дней) общее число вызовов будет в пределах от 26500 до 26800.

Решение. Пусть ξ_i – число вызовов за i-е сутки (i=1, 2, …, 365). По условию случайная величина ξ_i имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda = 73$. Далее, $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{365}$ – это независимые одинаково распределенные случайные величины с математическим ожиданием $a = \mathrm{E}\xi_i = \lambda = 73$ и дисперсией

$\sigma^2 = D\xi_i = \lambda = 73$, откуда $\sigma = \sqrt{73}$. Общее число вызовов за год будет равно $S_n = S_{365} = \sum_{i=1}^{365} \xi_i$. Вычислим $P\{26500 \le S_n \le 26800\}$.

1-й способ:

$$P\{26500 \le S_n \le 26800\} \approx \Phi\left(\frac{26800 - 365\cdot 73}{\sqrt{73}\sqrt{365}}\right) - \Phi\left(\frac{26500 - 365\cdot 73}{\sqrt{73}\sqrt{365}}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{155}{73\sqrt{5}}\right) - \Phi\left(\frac{-145}{73\sqrt{5}}\right) \approx \Phi(0{,}95) + \Phi(0{,}89) \approx 0{,}3289 + 0{,}3133 = 0{,}6422.$$

2-й способ (с использованием таблиц EXCEL).

Используем статистическую функцию НОРМ.РАСП со средним $na = 365\cdot 73 = 26645$ и стандартным отклонением $\sigma\sqrt{n} = \sqrt{73}\cdot\sqrt{365} \approx \approx 163{,}23$. Тогда аналогично предыдущим задачам получим

$$\mathrm{P}\{26500 \le S_n < 26800\} \approx F(26800) - F(26500) \approx 0{,}8288 - 0{,}1872 = 0{,}6416.$$

С точностью до 0,01 результаты, полученные при двух способах вычислений, совпадают и равны 0,64.

4. Применение центральной предельной теоремы к испытаниям Бернулли

Рассмотрим последовательность испытаний Бернулли с вероятностью успеха p. Пусть ξ_i – это число успехов в испытании с номером i (см. гл.1, §5, п. 2). Тогда $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$ – это число успехов в n испытаниях. Применим к последовательности $\xi_1, \xi_2, \ldots$ центральную предельную теорему. Так как $E\xi_i = p$ и $D\xi_i = pq$, где $q=1–p$, при достаточно больших n имеем $S_n \,\widetilde{\in}\, N\left(np, \sqrt{npq}\right)$, то есть, число успехов в n испытаниях Бернулли (обозначим его μ) имеет распределение, близкое к нормальному с параметрами np и $\sqrt{npq}$. Отсюда получаем (при больших n) приближенную формулу

$$P\{m_1 \le \mu \le m_2\} \approx \Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right), \tag{3}$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}dt$ – функция Лапласа, причем в левой части формулы каждый из нестрогих знаков неравенства можно заменить на строгий.

Замечание. Полученная формула непосредственно следует из интегральной теоремы Муавра-Лапласа, обобщением которой является центральная предельная теорема.

Формула (3) аналогична формуле (1), приведенной выше в п. 3. Аналогом формулы (2) в нашем случае будет формула

$$P\{m_1 \le \mu \le m_2\} \approx F(m_2) - F(m_1), \qquad (4)$$

где $F(x)$ – функция нормального распределения с параметрами *np* и $\sqrt{npq}$.

Так же, как в задачах 1 – 3, в приведенных ниже задачах 4 – 6 представлены два варианта вычислений: по формуле (3) с использованием таблицы значений функции Лапласа и по формуле (4) с использованием таблиц EXCEL для нахождения значений $F(x)$. О возможных (незначительных) расхождениях результатов при двух способах вычислений уже упоминалось выше в п. 3.

Задача 4. В конкурсе участвует 1000 человек. В среднем лишь 40% участников выдерживают испытание первого тура и допускаются ко второму туру. Какова вероятность, что ко второму туру будет допущено не менее 20 и не более 380 участников?

Решение. Участие в первом туре 1000 человек можно рассматривать как последовательность испытаний Бернулли при $n = 1000$. Будем считать успехом допуск участника ко второму туру. За вероятность успеха принимаем отношение $\frac{40\%}{100\%}$, то есть $p = 0,4$. Пусть μ – число участников, допущенных ко второму туру. Вычислим $P\{20 \le \mu \le 380\}$.

1-й способ (по формуле (3)):

$$P\{20 \le \mu \le 380\} \approx \Phi\left(\frac{380 - 1000 \cdot 0,4}{\sqrt{1000 \cdot 0,4 \cdot 0,6}}\right) - \Phi\left(\frac{20 - 1000 \cdot 0,4}{\sqrt{1000 \cdot 0,4 \cdot 0,6}}\right) =$$

$$= -\Phi\left(\frac{20}{\sqrt{240}}\right) + \Phi\left(\frac{380}{\sqrt{240}}\right) = -\Phi\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right) + 0,5 \approx -\Phi(1,29) + 0,5 \approx -0,4015 + 0,5 = 0,0985.$$

2-й способ (по формуле (4) с использованием таблиц EXCEL).

Используем статистическую функцию НОРМ.РАСП со средним *np*=400 и стандартным отклонением $\sigma\sqrt{n} = \sqrt{pq} \cdot \sqrt{n} = \ = \sqrt{0,4 \cdot 0,6 \cdot 1000} = \sqrt{240} \approx 15,49$. Тогда

$$P\{20 \le \mu \le 380\} \approx F(380) - F(20) \approx 0{,}0983\text{-}0{=}0{,}0983.$$

Задача 5. В некоторой местности в среднем на каждые 100 выращиваемых арбузов приходится один весом не менее 10 кг. Найти вероятность того, что в партии, содержащей 4000 арбузов, будет не меньше 30 и не больше 50 таких арбузов.

Решение. Можно считать, что производится 4000 испытаний Бернулли, которые заключаются во взвешивании арбузов. Если вес арбуза оказался не менее 10 кг, считаем, что испытание закончилось успехом. В соответствии с условием задачи вероятность успеха $p = 0,01$.Требуется найти вероятность события $\{30 \le \mu \le 50\}$, где μ – число успехов в *n* испытаниях Бернулли при $n = 4000$. Вычислим эту вероятность.

1-й способ (по формуле (3)):

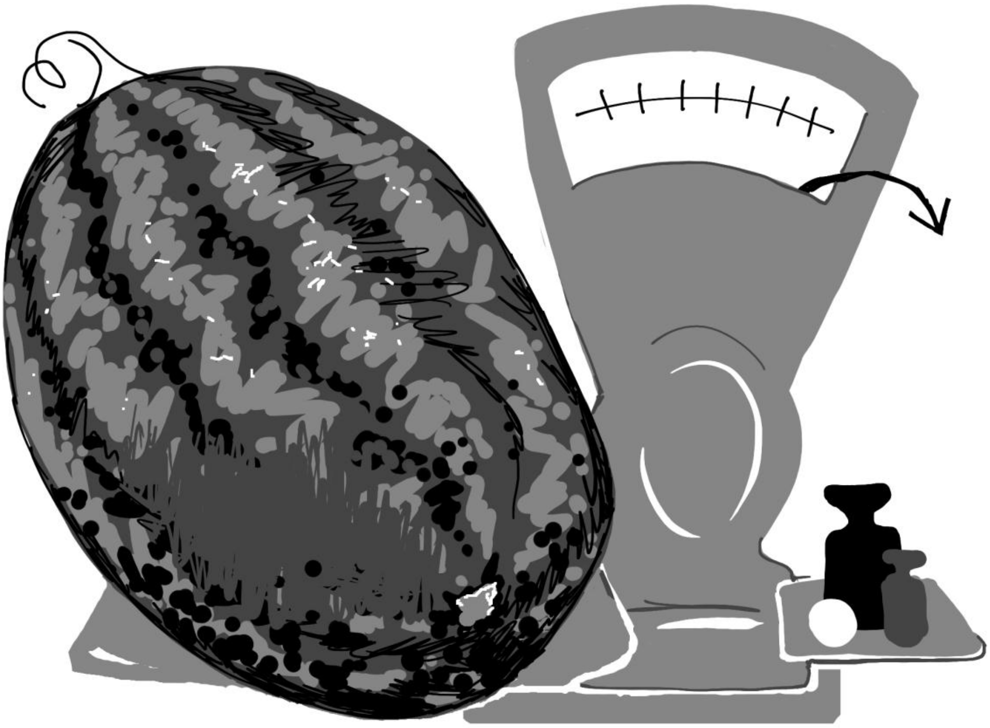
$$P\{30 \le \mu \le 50\} \approx \Phi\left(\frac{50-4000\cdot 0,01}{\sqrt{4000\cdot 0,01\cdot 0,99}}\right) - \Phi\left(\frac{30-4000\cdot 0,01}{\sqrt{4000\cdot 0,01\cdot 0,99}}\right) = 2\Phi\left(\frac{10}{\sqrt{40\cdot 0,99}}\right) =$$

$$= 2\Phi\left(\frac{5}{\sqrt{9,9}}\right) \approx 2\Phi(1,59) \approx 2\cdot 0,4441 = 0,8882.$$

2-й способ (по формуле (4) с использованием таблиц EXCEL).

Используем статистическую функцию НОРМ.РАСП. Найдем параметры функции распределения. Среднее значение: $np = 4000\cdot 0,01 = 40$; стандартное отклонение: $\sigma\sqrt{n} = \sqrt{pq}\cdot\sqrt{n} = \sqrt{0,01\cdot 0,99\cdot 4000} = \sqrt{39,6} \approx 6,29$.

Тогда $P\{30 \le \mu \le 50\} \approx F(50) - F(30) \approx$ 0,9940-0,0559=0,8881.



Задача 6. (Условие задачи взято из [1]). При социологических опросах граждан каждый человек независимо от других может дать неискренний ответ с вероятностью 0,2. Предположим, опрошено 22500 человек. Найти вероятность того, что число неискренних ответов не будет превосходить 4620.

Решение. Пусть событие {ответ неискренний} – это успех. Испытания независимые, следовательно, мы имеем 22500 испытаний Бернулли с вероятностью успеха 0,2. Пусть μ – количество неискренних ответов. Требуется найти $P\{0 \le \mu \le 4620\}$.

1-й способ:

$$P\{0\le\mu\le 4620\}\approx\Phi\left(\frac{4620-22500\cdot 0,2}{\sqrt{22500\cdot 0,2\cdot 0,8}}\right)-\Phi\left(\frac{-22500\cdot 0,2}{22500\cdot 0,2\cdot 0,8}\right)=$$

$$=\Phi\left(\frac{120}{15\cdot 4}\right)+\Phi\left(\frac{4500}{15\cdot 4}\right)=-\Phi(2)+\Phi(75)\approx 0,4772+0,5=0,9772.$$

2-й способ.

Используем статистическую функцию НОРМ.РАСП. Найдем параметры функции распределения. Среднее значение: $np=22500\cdot 0,2=4500$; стандартное отклонение: $\sigma\sqrt{n}=\sqrt{pq}\cdot\sqrt{n}=\sqrt{0,2\cdot 0,8\cdot 22500}=\sqrt{3600}=60$.

Тогда $P\{0\le\mu\le 4620\}\approx F(4620)-F(0)\approx$0,9773-0 =0,9773.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 3.3.1. Среди счетов, оплаченных через банк в течении дня, в среднем 50% составляют счета на сумму 60 тыс. рублей каждый, 40% – счета на сумму 300 тыс. рублей и 10% – на сумму 1 млн. рублей. За день через банк была оплачена 1000 счетов. Какова вероятность того, что величина поступлений за этот день будет находиться в пределах от 220 до 260 млн. рублей?

Задача 3.3.2. В школьной олимпиаде по математике участвуют 30 учеников. Задание состоит из трех задач. Решение 1-й задачи оценивается в 2 балла, 2-й – в 1 балл и 3-й – в 1 балл. Каждый школьник может решить первую задачу с вероятностью 0.5, вторую задачу – с вероятностью 0.6 и третью – с вероятностью 0.9. Какова вероятность, что суммарное количество баллов, набранных всеми школьниками, будет находиться в пределах от 40 до 80?

Задача 3.3.3. Каждый избиратель независимо от другого отдает свой голос за кандидата А с вероятностью 0,7 и за кандидата В с вероятностью 0,3. Найти вероятность того, что в результате голосования на избирательном участке (5000 избирателей) кандидат А опередит кандидата В не менее, чем на 1900 голосов.

Задача 3.3.4. Свое имущество застраховали от пожара 2000 человек. Вероятность пожара в течение года для каждого страхователя равна 0,02. Какова вероятность, что число страховых случаев не превысит 20?

Задача 3.3.5. [9] Студент знает перевод любого слова с английского языка с вероятностью 0,95. Какова вероятность, что в тексте, содержащем 600 различных слов, встретится не более 20 или не менее 32 незнакомых слов?

Задача 3.3.6. В автогонках по бездорожью участвуют 80 человек. Для каждого участника вероятность сойти с дистанции или не уложиться в контрольное время равна 0,2. Какова вероятность, что успешно финишируют не менее 60 участников?

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ

Глава 1

1.1.1. $a=0{,}1$; $P\{\xi\ge 5\}=0{,}1$; $P\{\xi<3\}=0{,}3$; $P\{2<\xi\le 4{,}5\}=0{,}6$.

1.1.2. Распределение случайной величины ξ:

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{28}{57}$	$\frac{8}{19}$	$\frac{8}{95}$	$\frac{1}{285}$

1.1.3. В данном эксперименте 9 равновозможных исходов. Распределение случайной величины η:

η	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

1.2.1. $c=0{,}1$; распределение случайной величины ξ:

ξ	1	2	3	4
P	0,4	0,3	0,2	0,1

$\mathrm{P}\{\xi<3{,}5\}=0{,}9$; $\mathrm{P}\{1<\xi\le 4\}=0{,}6$; $E\xi=2$.

1.2.2. 37.

1.2.3. $23{,}5$ руб.

1.2.4. Распределение случайной величины ξ, равной количеству бросков:

ξ	1	2	3	4
P	0,4	$0{,}6\cdot 0{,}2$	$0{,}6\cdot 0{,}8\cdot 0{,}4$	$0{,}6^2\cdot 0{,}8$

($\mathrm{P}\{\xi=4\}=0{,}6^2\cdot 0{,}8$, так как 4-й бросок производится, если первые 3 броска были удачными.) $E\xi=2{,}368$.

1.4.1. 49.

1.4.2. $E\xi=3{,}6$ (мин.), $D\xi=1{,}24$ (ξ – время опоздания).

1.4.3. $E\xi=1$ **($)**, $D\xi=28.8$, где ξ – выигрыш игрока.

1.4.4. $E\xi=54$ (мин.), $D\xi=39$, где ξ – затраченное время.

1.4.5. $\mathrm{E}\xi=\sum_{i=1}^{3}\mathrm{E}\xi_i=2{,}5$; $D\xi=\sum_{i=1}^{3}D\xi_i=1{,}33$ (ξ – количество баллов, набранных школьником, а ξ_i – количество баллов за решение i-й задачи).

1.5.1. 0,9576. **1.5.2.** 0,6321.

1.5.3. а) $\mathrm{P}\{\eta\le 1\}=0{,}1991$; б) $1-\mathrm{P}\{\eta=0\}=1-0{,}498=0{,}502$.

1.7.1.

ξ	1	–1
P	0,6	0,4

η	0	1	–1
P	0,4	0,25	0,35

1.7.2. $\mathrm{cov}\left(\xi,\xi^2\right)=\mathrm{E}\left(\xi^3\right)-\mathrm{E}\xi\mathrm{E}\xi^2=2-0,5\cdot 1,5=1,25.$

1.7.3. $\rho(\xi,\eta)=\dfrac{\mathrm{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{\mathrm{D}\xi\mathrm{D}\eta}}=-\dfrac{0,15}{\sqrt{4,65\cdot 0,25}}\approx -0,1391.$

Глава 2

2.1.1. $a=\dfrac{1}{3},\ \mathrm{P}\{1,5\le\xi\le 4,5\}=\dfrac{11}{24}.$ **2.1.2.** $a=\dfrac{1}{9},\ \mathrm{P}\{\xi>2\}=\dfrac{19}{27}.$

2.2.1 $F(x)=\begin{cases} 0 & \textit{при } x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{9} & \textit{при } 0<x\le 3,\\ 1 & \textit{при } x>3.\end{cases}$

2.2.2 а) $F(x)=\begin{cases} 0 & \textit{при } x\le 2,\\ \dfrac{(x-2)^2}{4} & \textit{при } 2<x\le 4,\\ 1 & \textit{при } x>4.\end{cases}$ б) $P\{1\le\xi\le 3,5\}=\dfrac{9}{16}.$

2.3.1. $\mathrm{E}\xi=\dfrac{19}{12},\ \ \mathrm{D}\xi=\dfrac{11}{144}.$ **2.3.2.** $\mathrm{E}\xi=0,\ \mathrm{D}\xi=\dfrac{1}{6}.$ **2.3.3.** $\mathrm{E}\xi=\dfrac{3}{4},\ \ \mathrm{D}\xi=\dfrac{3}{80}.$

2.4.1. $\mathrm{E}\xi=-3,\ \ \mathrm{D}\xi=16,\ P(|\xi|<5)\approx 0,69$. **2.4.2.** Изделий первого сорта выпускается 90,44%.

2.5.1. $f(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{8} & \text{при } y\in[0,8]\\ 0 & \text{при } y\notin[0,8]\end{cases};\quad \mathrm{E}\xi=4;\ \mathrm{D}\xi=\dfrac{16}{3};\ \mathrm{P}\{\xi>5\}=\dfrac{3}{8}.$

2.5.2. $f(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{6} & \text{при } y\in[1,7],\\ 0 & \text{при } y\notin[1,7].\end{cases}$

2.5.3. Искомая вероятность равна $\mathrm{P}\{|\xi|>45\}=0,1.$

2.6.1. $\mathrm{E}\xi=4;\ \mathrm{D}\xi=16;\ \lambda=0,25;\ \ \mathrm{P}\{\xi\ge 3\}=1-F(3)\approx 1-0,53=0,47.$

2.6.2. $\mathrm{E}\xi=25;\ \mathrm{D}\xi=625;\ \mathrm{P}\{\xi>20\}=1-F(20)\approx 1-0,55=0,45.$

2.7.1. $P\{1\le\xi\le 2,\ 0\le\eta\le 1\}=\dfrac{7}{24}.$

2.8.1. $f(x,y)=\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\cdot\partial y}=4\ln 2\cdot\ln 3\cdot xy\cdot 2^{-x^2}\cdot 3^{-y^2}$;

$$P\{1\le\xi\le 2,\ \ 0\le\eta\le 1\}=\int\limits_1^2\left(\int\limits_0^1 4\ln 2\cdot\ln 3\cdot ts\cdot 2^{-t^2}\cdot 3^{-s^2}\,ds\right)dt=$$

$$=\left(1-3^{-1}\right)(2^{-1}-2^{-4})=\frac{7}{24}.$$

2.8.2. $f(t,s)=\dfrac{1}{24\pi}\cdot e^{-\frac{(t+1)^2}{18}-\frac{(s-2)^2}{32}}$; $E(\xi+\eta)=1$; $D(\xi+\eta)=25$.

Глава 3

3.3.1. Пусть ξ_i – сумма (в тыс. руб.), на которую выписан счет с номером i. Тогда $a=\mathrm{E}\xi_i=60\cdot 0{,}5+300\cdot 0{,}4+1000\cdot 0{,}1=250$, $\sigma^2=D\xi_i=\mathrm{E}\xi_i^2-(\mathrm{E}\xi_i)^2=137800-62500=75300$, $S_{1000}=\sum\limits_{i=1}^{1000}\xi_i$ – величина поступлений за день;

$$\mathrm{P}\{220000\le S_{1000}\le 260000\}\approx\Phi\left(\frac{260000-250\cdot 1000}{\sqrt{75300\cdot 1000}}\right)-\Phi\left(\frac{220000-250\cdot 1000}{\sqrt{75300\cdot 1000}}\right)=$$

$$=\Phi\left(\frac{100}{\sqrt{7530}}\right)+\Phi\left(\frac{300}{\sqrt{7530}}\right)\approx\Phi(1{,}15)+\Phi(3{,}46)\approx 0{,}3749+0{,}4997=0{,}8746.$$

3.3.2. Пусть η_i – количество баллов, набранных i-м школьником. Тогда $a=\mathrm{E}\eta_i=2{,}5$, $\sigma^2=D\eta_i=1{,}33$ (см. задачу 1.4.5), $S_{30}=\sum\limits_{i=1}^{30}\eta_i$ – суммарное количество баллов; $\mathrm{P}\{40\le S_{30}\le 80\}\approx\Phi\left(\dfrac{80-30\cdot 2{,}5}{\sqrt{1{,}33\cdot 30}}\right)-\Phi\left(\dfrac{40-30\cdot 2{,}5}{\sqrt{1{,}33\cdot 30}}\right)\approx$

$\approx\Phi(0{,}79)+\Phi(5{,}54)\approx 0{,}2852+0{,}5=0{,}7852$.

3.3.3. Применяем схему Бернулли при $n=5000$, $p=0{,}7$; используя формулу для $P\{m_1\le\mu\le m_2\}$, где μ – число голосов, отданных за кандидата А, получаем

$P\{\mu-(n-\mu)\ge 1900\}=P\{3450\le\mu\le 5000\}\approx\Phi(46{,}29)-\Phi(-1{,}54)\approx$
$\approx 0{,}5+0{,}4382=0{,}9382$.

3.3.4. $P\{0\le\mu\le 20\}\approx-\Phi(3{,}19)+0{,}5\approx-0{,}4993+0{,}5=0{,}0007$.

3.3.5. $1-P\{20<\mu<32\}\approx 1-(\Phi(0{,}38)+\Phi(1{,}87))\approx 1-(0{,}148+0{,}469)=0{,}383$.

3.3.6. $P\{60\le\mu\le 80\}\approx 0{,}87$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бородин А. Н.* Элементарный курс теории вероятностей и математической статистики. – СПб.: Изд-во «Лань», 2011.
2. *Веселовская А. З*. Основы теории вероятностей: учеб.-метод. пособие. – СПб.: Издат. центр факультета менеджмента СПбГУ, 2005.
3. *Веселовская А. З.*, *Шепелявая Н. Б.* Элементы теории вероятностей. Понятие вероятности: учеб. пособие. – СПб.: СПбГУ, 2017. (ссылка: http://hdl.handle.net/11701/7028)
4. *Гмурман В. Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высшая школа, 2004.
5. *Гнеденко Б. В.* Курс теории вероятностей. Учебник. – Изд. 6-е, перераб. и доп. – М.: Наука, 1988.
6. *Игнатьев Е.И*. В царстве смекалки: книга 3-я. – Изд-е 2-е. – Петроград, 1915.
7. *Колмогоров А. Н., Журбенко И. Г., Прохоров А. В.* Введение в теорию вероятностей. – М.: Наука,1982.
8. *Максимов Ю.Д.* Математика. Выпуск 9. Теория вероятностей. Детализированный конспект. Справочник по одномерным непрерывным распределениям. – СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2002.
9. *Товстик Т. М., Алексеева Н. П.* Задачник по теории вероятностей: Учебное пособие. – СПб.: Изд-во СПбГУ, 2003.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ 3
ГЛАВА 1. ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ 4
§1. Понятие дискретной случайной величины 4
§2. Математическое ожидание 11
§3. Безобидная игра 18
§4. Дисперсия и моменты случайной величины 21
§5. Биномиальное распределение. Распределение Пуассона 28
§6. Функция распределения 36
§7. Совместное распределение двух дискретных случайных величин. Коэффициент корреляции 39
ГЛАВА 2. НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ 46
§1. Плотность распределения 46
§2. Функция распределения непрерывной случайной величины 49
§3. Математическое ожидание, дисперсия и моменты непрерывной случайной величины 51
§4. Нормальное распределение 54
§5. Равномерное распределение на отрезке $[a, b]$ 60
§6. Показательный закон распределения 64
§7. Совместная функция распределения 67
§8. Двумерные случайные величины с непрерывным распределением 70
ГЛАВА 3. ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ И ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА 77
§1. Независимость нескольких случайных величин. Одинаково распределенные случайные величины 77
§2. Закон больших чисел 78
§3. Центральная предельная теорема 81
ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ 90
ЛИТЕРАТУРА 93