

## Об одном свойстве ограниченных комплексов дискретных $\mathbb{F}_p[\pi]$ -модулей

О. Б. Подкопаев

Научно-исследовательский университет Высшая школа экономики,  
Российская Федерация, 190008, Санкт-Петербург, ул. Союза Печатников, 16

**Для цитирования:** Подкопаев О. Б. Об одном свойстве ограниченных комплексов дискретных  $\mathbb{F}_p[\pi]$ -модулей // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 4. С. 631–636. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.409>

Целью этой заметки является доказательство следующего утверждения: пусть  $\pi$  — проконечная группа и  $K^*$  — ограниченный комплекс дискретных  $\mathbb{F}_p[\pi]$ -модулей. Предположим, что  $H^i(K^*)$  — конечные абелевы группы. Тогда существует квазиизоморфизм  $L^* \rightarrow K^*$ , где  $L^*$  — ограниченный комплекс дискретных  $\mathbb{F}_p[\pi]$ -модулей, такой что все  $L^i$  — конечные абелевы группы. Это аналог для дискретных  $\mathbb{F}_p[\pi]$ -модулей известной леммы об ограниченных комплексах  $A$ -модулей (например, сконцентрированных в неотрицательных степенях), где  $A$  — нетерово кольцо, которая утверждает, что любой такой комплекс квазиизоморфен некоторому комплексу конечно порожденных  $A$ -модулей, свободных за исключением, возможно, модуля, лежащего в степени 0. Эта лемма играет ключевую роль в доказательстве теоремы о замене базы в когомологиях когерентных пучков на нетеровых схемах, которая, в свою очередь, может быть использована для доказательства теоремы Гротендика о поведении размерностей групп когомологий семейства векторных расслоений над плоским семейством многообразий.

*Ключевые слова:* проконечная группа, дискретный модуль, когомологии.

**1. Введение.** Пусть  $f : X \rightarrow Y$  — собственный морфизм нетеровых схем, причем  $Y = \operatorname{Spec} A$  — аффинная схема, и пусть  $\mathcal{F}$  — когерентный пучок на  $X$ , плоский над  $Y$ . Теорема о замене базы (см. [1] и [2, гл. 2, § 5]) утверждает, что существует конечный комплекс  $K^*$  конечно порожденных проективных  $A$ -модулей и изоморфизм функторов

$$H^p(X \times_A \operatorname{Spec} B, \mathcal{F} \otimes_A B) \cong H^p(K^* \otimes_A B)$$

на категории  $A$ -модулей  $B$ . Эта теорема имеет важные приложения в алгебраической геометрии; из нее, в частности, вытекает полунепрерывность сверху размерности когомологий слоев. Доказательство теоремы о замене базы основано на следующем утверждении (*loc. cit.*). Пусть  $C^*$  — комплекс  $A$ -модулей, такой что  $H^i(C^*)$  — конечно порожденные  $A$ -модули и  $C^p = 0$  при  $p < 0$  и  $p > n$ . Тогда существует комплекс  $K^*$  конечно порожденных  $A$ -модулей, такой что  $K^p = 0$  при  $p < 0$  и  $p > n$ ,  $K^p$  — свободные модули при  $1 \leq p \leq n$ , и существует гомоморфизм комплексов  $K^* \rightarrow C^*$ , индуцирующий изоморфизмы  $H^i(K^*) \rightarrow H^i(C^*)$  для всех  $i$ . Более того, если все  $C^p$  являются плоскими над  $A$ , то  $K^0$  также плоский над  $A$ .

Целью этой заметки является доказательство следующего аналога вышеуказанного утверждения в категории дискретных  $\pi$ -модулей, где  $\pi$  — проконечная группа.

**Теорема.** Пусть  $\pi$  — проконечная группа,  $K^*$  — ограниченный комплекс дискретных  $\mathbb{F}_p[\pi]$ -модулей. Пусть  $H^i(K)$  — конечные группы. Тогда существует ограниченный комплекс  $L^*$  дискретных  $\mathbb{F}_p[\pi]$ -модулей, такой что все  $L^i$  являются конечными абелевыми группами, и существует гомоморфизм комплексов дискретных  $\mathbb{F}_p[\pi]$ -модулей  $\phi : L^* \rightarrow K^*$ , индуцирующий изоморфизмы  $H^i(L^*) \rightarrow H^i(K^*)$  для всех  $i$ .

**2. Доказательство основного результата.** Пусть  $\pi$  — проконечная группа и  $\mathbb{F}_p[\pi]$  — групповое кольцо группы  $\pi$  над полем  $\mathbb{F}_p$  [3]. Доказательству основной теоремы мы предпошлем два вспомогательных утверждения.

**Лемма 1.** Пусть  $M$  — дискретный  $\mathbb{F}_p[\pi]$ -модуль,  $N$  — дискретный  $\mathbb{F}_p[\pi]$ -модуль, конечный как абелева группа,  $p : M \rightarrow N$  — сюръективный гомоморфизм  $\mathbb{F}_p[\pi]$ -модулей. Тогда существует коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} & M & \\ & \nearrow v & \searrow p \\ \mathbb{F}_p[X] & \xrightarrow{u} & N, \end{array} \tag{1}$$

в которой  $X$  — конечное  $\pi$ -множество и гомоморфизм  $u$  сюръективен.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.**  $N$  — дискретный  $\pi$ -модуль, конечный как абелева группа. В частности,  $N$  — конечное  $\pi$ -множество и для любого  $n \in N$  подгруппа  $\text{Stab}(n)$  открыта в  $\pi$ . Представим  $N$  в виде  $N = \sqcup_{i=1}^k \mathcal{O}_{n_i}$ , где  $\mathcal{O}_{n_i}$  — орбита  $n_i \in N$ . Имеем  $\mathcal{O}_{n_i} \cong \pi/\text{Stab}(n_i)$  как  $\pi$ -множества. Пользуясь сюръективностью гомоморфизма  $p : M \rightarrow N$ , для каждого  $n_i, i = 1 \dots k$ , найдем  $m_i \in M$ , такой что  $p(m_i) = n_i$ . Поскольку  $M$  — дискретный  $\pi$ -модуль, группа  $\text{Stab}(m_i)$  открыта в  $\pi$ . Убедимся в том, что  $\pi/\text{Stab}(m_i)$  конечно.

Пусть  $\text{pr} : \pi \rightarrow \pi/\text{Stab}(m_i)$  — естественная проекция. Множество  $\pi/\text{Stab}(m_i)$  дискретно, так как для любого  $x \in \pi/\text{Stab}(m_i)$  слой  $\text{pr}^{-1}(x)$  гомеоморфен множеству  $\text{Stab}(m_i)$ , открытому в  $\pi$ . Следовательно, по определению фактортопологии множество  $\{x\}$  открыто в  $\pi/\text{Stab}(m_i)$ . Поскольку  $\pi$  — проконечная группа, она, в частности, компактна. Значит,  $\pi/\text{Stab}(m_i)$  компактно и, следовательно,  $\pi/\text{Stab}(m_i)$  конечно.

Положим  $X = \sqcup_{i=1}^k \pi/\text{Stab}(m_i)$ . Это конечное множество. Рассмотрим естественную проекцию  $\pi$ -множеств  $\pi/\text{Stab}(m_i) \rightarrow \pi/\text{Stab}(n_i)$ . Продолжим ее по линейности до гомоморфизма

$$\Sigma_{i=1}^k u'_i : \mathbb{F}_p[X] \rightarrow \oplus_{i=1}^k \mathbb{F}_p[\pi/\text{Stab}(n_i)].$$

Пусть

$$u'' : \oplus_{i=1}^k \mathbb{F}_p[\pi/\text{Stab}(n_i)] \rightarrow N$$

— естественная сюръекция. Положим  $u = u'' \circ u' : \mathbb{F}_p[X] \rightarrow N$ .

Рассмотрим подмодуль  $V$  в  $M$ , порожденный  $\sqcup_{i=1}^k \mathcal{O}_{m_i}$ . Обозначим  $v' : \mathbb{F}_p[X] \rightarrow V$  естественную проекцию и  $v'' : V \rightarrow M$  — вложение подмодуля  $V$ . Положим  $v =$

$v'' \circ v' : \mathbb{F}_p[X] \longrightarrow M$ . Легко проверяется коммутативность полученной диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} & M & \\ v \nearrow & & \searrow p \\ \mathbb{F}_p[X] & \xrightarrow{u} & N. \end{array}$$

Лемма доказана. ■

**Лемма 2.** Пусть  $M$  — дискретный  $\mathbb{F}_p[\pi]$ -модуль,  $N, N'$  — дискретные  $\mathbb{F}_p[\pi]$ -модули, конечные как абелевы группы;  $p_1 : M \longrightarrow N, p_2 : N' \longrightarrow N$  — сюръективные гомоморфизмы  $\mathbb{F}_p[\pi]$ -модулей. Тогда существует коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}_p[X] & \xrightarrow{u} & M \\ \downarrow v & & \downarrow p_1 \\ N' & \xrightarrow{p_2} & N, \end{array} \quad (2)$$

в которой  $X$  — конечное  $\pi$ -множество и гомоморфизм  $v$  сюръективен.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Представим  $N$  в виде  $N = \sqcup_{i=1}^k \mathcal{O}_{n_i}$ , где  $\mathcal{O}_{n_i}$  — орбита  $n_i \in N$ . Гомоморфизмы  $p_1$  и  $p_2$  сюръективны. Выберем  $m_i \in M$  и  $n'_i \in N'$ , такие что  $p_1 m_i = n_i$  и  $p_2 n'_i = n_i$ . Подгруппы  $\text{Stab}(m_i)$  и  $\text{Stab}(n'_i)'$  открыты в  $\text{Stab}(n_i)$ . Обозначим  $\pi_i = \text{Stab}(m_i) \cap \text{Stab}(n'_i)$ . Убедимся в том, что это открытая подгруппа в  $\pi$  конечного индекса. Действительно,  $\pi$  естественным образом действует на  $\text{Stab}(m_i) \times \text{Stab}(n'_i)$ . Имеем  $\text{Stab}(\bar{1}, \bar{1}) = \text{Stab}(m_i) \cap \text{Stab}(n'_i)$ , значит это подгруппа в  $\pi$  конечного индекса. Очевидно, она открыта. Положим  $X = \sqcup_{i=1}^k \pi/\pi_i$  и рассмотрим естественную проекцию  $\pi$ -множеств

$$\pi/\pi_i \longrightarrow \pi/\text{Stab}(n'_i).$$

Продолжим ее по линейности до гомоморфизма

$$v'_i : \mathbb{F}_p[\pi/\pi_i] \longrightarrow \mathbb{F}_p[\pi/\text{Stab}(n'_i)].$$

Положим

$$v' = \Sigma_{i=1}^k v'_i : \mathbb{F}_p[X] \longrightarrow \oplus_{i=1}^k \mathbb{F}_p[\pi/\text{Stab}(n'_i)].$$

Гомоморфизм  $v''$  сюръективен. Рассмотрим естественную проекцию

$$v'' : \oplus_{i=1}^k \mathbb{F}_p[\pi/\text{Stab}(n_i)] \longrightarrow N'.$$

Пусть  $v = v'' \circ v' : \mathbb{F}_p[X] \longrightarrow N'$ . Рассмотрим естественную проекцию  $\pi$ -множеств  $\pi/\pi_i \longrightarrow \pi/\text{Stab}(m_i)$ . Продолжим ее по линейности до гомоморфизма

$$u'_i : \mathbb{F}_p[\pi/\pi_i] \longrightarrow \mathbb{F}_p[\pi/\text{Stab}(m_i)].$$

Положим

$$u' = \Sigma_{i=1}^k u'_i : \mathbb{F}_p[X] \longrightarrow \oplus_{i=1}^k \mathbb{F}_p[\pi/\text{Stab}(m_i)].$$

Рассмотрим подмодуль  $V \subset M$ , порожденный  $\sqcup_{i=1}^k \mathcal{O}_{m_i}$ . Пусть

$$u'' : \oplus_{i=1}^k \mathbb{F}_p[\pi/\text{Stab}(m_i)] \longrightarrow V$$

— естественный сюръективный гомоморфизм и  $u''' : V \longrightarrow M$  — вложение. Положим  $u = u''' \circ u'' \circ u' : \mathbb{F}_p[X] \longrightarrow M$ . Мы получили диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}_p[X] & \xrightarrow{u} & M \\ \downarrow v & & \downarrow p_1 \\ N' & \xrightarrow{p_2} & N. \end{array}$$

Легко убедиться в ее коммутативности, что завершает доказательство леммы 2. ■

**Теорема.** Пусть  $\pi$  — проконечная группа,  $K^*$  — ограниченный комплекс дискретных  $\mathbb{F}_p[\pi]$ -модулей. Пусть  $H^i(K)$  — конечные группы. Тогда существует ограниченный комплекс  $L^*$  дискретных  $\mathbb{F}_p[\pi]$ -модулей, такой что все  $L^i$  являются конечными абелевыми группами, и существует гомоморфизм комплексов дискретных  $\mathbb{F}_p[\pi]$ -модулей  $\phi : L^* \rightarrow K^*$ , индуцирующий изоморфизмы  $H^i(L^*) \rightarrow H^i(K^*)$  для всех  $i$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукцией вниз по  $m$  построим диаграммы:

$$\begin{array}{ccccccc} L^m & \xrightarrow{\delta^m} & L^{m+1} & \xrightarrow{\phi_{m+2}} & L^{m+2} & \xrightarrow{\delta^{m+2}} & \dots \\ \downarrow \phi_m & & \downarrow \phi_{m+1} & & \downarrow \phi_{m+1} & & \\ K^m & \xrightarrow{d^m} & K^{m+1} & \xrightarrow{d^{m+1}} & K^{m+2} & \xrightarrow{\delta^{m+2}} & \dots \end{array}$$

Пусть  $K^i = 0$  при  $i < 0$  и  $i > n$ . Положим  $L^m = 0$  при  $m > n$ . Пусть  $L^p, \phi_p, \delta^p$  уже определены при  $p \geq m + 1$ , так что выполняются следующие условия:

- (i)  $d^p \phi_p = \phi_{p+1} \delta^p, p \geq m + 1$ ,
- (ii)  $\delta^{p+1} \delta^p = 0, p \geq m + 1$ ,
- (iii) гомоморфизмы  $\phi_p$  индуцируют изоморфизмы  $H^p(L^*) \rightarrow H^p(K^*), p \geq m + 2$ , и эпиморфизм  $\ker \delta^{m+1} \rightarrow H^{m+1}(K^*)$ ,
- (iv)  $L^p$  — конечные абелевы группы,  $p \geq m + 1$ .

Построим  $L^m, \phi_m, \delta^m$  таким образом, чтобы условия (i)–(iv) были бы по-прежнему выполнены, если  $m + 1$  заменить на  $m$ . Будем искать  $L^m$  в виде  $L'^m \oplus L''^m, \phi_m$  в виде  $\phi'_m + \phi''_m$  и  $\delta^m$  в виде  $\delta'^m + \delta''^m$ .

Построим сначала  $L''^m, \phi''_m, \delta''^m$ . Пусть  $Z^i$  — группа коциклов в  $K_i$  и  $p_m : Z^m \rightarrow H^m(K^*)$  — естественная проекция. Тройка  $(Z^m, H^m(K^*), p_m)$  удовлетворяет условиям леммы 1. В силу этой леммы существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & & Z^m \\ & \nearrow v''_m & \searrow p_m \\ \mathbb{F}_p[X''] & \xrightarrow{u''_m} & H^m(K^*), \end{array}$$

в которой  $X''$  — некоторое конечное  $\pi$ -множество. Положим  $L''^m = \mathbb{F}_p[X'']$ ,  $\phi''_m = v''_m$ ,  $\delta''^m = 0$ .

Построим теперь  $L'^m, \phi'_m, \delta'^m$ . Пусть

$$\gamma_{m+1} = p_{m+1} \circ \phi_{m+1}|_{\ker \delta^{m+1}} : \ker \delta^{m+1} \longrightarrow H^{m+1}(K^*).$$

Обозначим  $K_m^0 = d^{-1}(\text{Im } \phi_{m+1}) \subset K^m$ . По индукционному предположению  $\ker \gamma_{m+1}$  — конечная абелева группа. Абелева группа  $dK^m \cap \text{Im } \phi_{m+1}$  также конечна. Рассмотрим диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} & \ker \gamma_{m+1} & \\ & \searrow \phi_{m+1} & \\ K_m^0 & \xrightarrow{d} & dK^m \cap \text{Im } \phi_{m+1}. \end{array}$$

Гомоморфизм  $\phi_{m+1}$  сюръективен. Действительно,

$$\alpha \in dK^m \Rightarrow \gamma_{m+1}\beta = (p_{m+1} \circ \phi_{m+1})\beta = p_{m+1}\alpha = 0.$$

Поэтому для любого  $\alpha \in dK^m \cap \text{Im } \phi_{m+1}$  существует  $\beta \in L^{m+1}$ , такой что  $\phi_{m+1}\beta = \alpha$ ,  $\beta \in \ker \gamma_{m+1}$ . Таким образом,

$$(K_m^0, dK^m \cap \text{Im } \phi_{m+1}, \ker \gamma_{m+1}, d, \phi_{m+1}|_{\ker \gamma_{m+1}})$$

удовлетворяет условиям леммы 2. Следовательно, существует коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}_p[X'] & \xrightarrow{v'_m} & M \\ \downarrow u'_m & & \downarrow \phi_{m+1} \\ K_m^0 & \xrightarrow{d} & dK^m \cap \text{Im } \phi_{m+1}, \end{array}$$

где  $X'_m$  — некоторое конечное  $\pi$ -множество. Положим  $L'_m = \mathbb{F}_p[X']$ ,  $\phi'_m = u'_m$ ,  $\delta'_m = v'_m$ . Теперь положим  $L^m = L'^m \oplus L''^m$ ,  $\phi_m = \phi'_m + \phi''_m$ ,  $\delta^m = \delta'^m + \delta''^m$ . Убедимся в том, что условия (i)–(iv) по прежнему выполнены.

Пусть  $m \geq 1$ . Так как условие (i) достаточно проверить покомпонентно, то оно вытекает из коммутативности диаграмм (1) и (2).

(ii) Имеем  $\delta^{m+1} \circ \delta^m = 0$ , так как  $\delta^m = \delta'^m + \delta''^m$ ,  $\delta''^m = 0$ ,  $\delta'^m : L'^m \longrightarrow \ker \gamma_{m+1} \subset \ker \delta^{m+1}$ .

(iii) Проверим, что  $\phi_{m+1}$  индуцирует изоморфизм  $H^{m+1}(L^*) \longrightarrow H^{m+1}(K^*)$ . Действительно, имеем эпиморфизм  $\ker \delta^{m+1} \longrightarrow H^{m+1}(K^*)$ . Так как

$$\text{Im } \delta^m = \text{Im } \delta'^m = \text{Im } v'^m = \ker \gamma_{m+1},$$

то

$$H^{m+1}(L^*) = \ker \delta^{m+1} / \text{Im } \delta^m = \ker \delta^{m+1} / \text{Im } \gamma^m \cong H^{m+1}(K^*).$$

Далее,  $\phi_m$  индуцирует эпиморфизм  $\ker \delta^m \longrightarrow H^m(K^*)$ . Действительно,  $\ker \delta^m \supset L''^m$ , а  $\phi_m|_{L'^m}$  индуцирует эпиморфизм  $u'_m : L'^m \longrightarrow H^m(K^*)$  (диаграмма (1)).

(iv)  $L^m$  — конечная абелева группа по построению.

Пусть теперь  $m = -1$ . Заменим  $L^0$  на  $L^0 / (\ker \delta^0 \cap \ker \phi_0)$  и в качестве  $\phi_0$  и  $\delta^0$  возьмем индуцированные гомоморфизмы. При  $p < 0$  положим  $L^p = 0$  и  $\phi_p = 0$ . Комплекс  $L^*$  и гомоморфизм  $\phi : L^* \longrightarrow K^*$  отвечают требованиям утверждения. ■

## Литература

1. Grothendieck A., Dieudonne J. *Éléments de géométrie algébrique*. Vol. III. Étude cohomologique des faisceaux cohérents, Seconde partie. Publications mathématiques de l'I.H.É.S., 1963.
2. Мамфорд Д. Абелевы многообразия. Мир, 1986.
3. Серр Ж.-П. Когомологии Галуа. М.: Мир, 1968.

Статья поступила в редакцию 27 мая 2018 г.; рекомендована в печать 2 июля 2018 г.

Контактная информация:

Подкопаев Олег Борисович — канд. физ.-мат. наук; opodkopaev@gmail.com

## One property of bounded complexes of discrete $\mathbb{F}_p[\pi]$ -modules

O. B. Podkopaev

Higher School of Economics, ul. Soyuza Pechatnikov, 16, St. Petersburg, 190008, Russian Federation

**For citation:** Podkopaev O. B. One property of bounded complexes of discrete  $\mathbb{F}_p[\pi]$ -modules. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2018, vol. 5 (63), issue 4, pp. 631–636. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.409> (In Russian).

The goal of this note is to give a proof of the following proposition. Let  $\pi$  be a profinite group and  $K^*$  be a bounded complex of discrete  $\mathbb{F}_p[\pi]$ -modules. Assume all  $H^i(K^*)$  are finite abelian groups. Then there exists a quasiisomorphism  $L^* \rightarrow K^*$ , where  $L^*$  is a bounded complex of discrete  $\mathbb{F}_p[\pi]$ -modules such that all  $L^i$  are finite abelian groups. This is an analogue for discrete  $\mathbb{F}_p[\pi]$ -modules of a well-known lemma about bounded complexes of  $A$ -modules (say, concentrated in nonnegative degrees), where  $A$  is a Noetherian commutative ring, that establishes the existence of a quasiisomorphism between any such complex and a complex of finitely generated  $A$ -modules that are free except, possibly, the one in degree 0. This lemma plays the key role in the proof of a base change theorem for cohomology of coherent sheaves on Noetherian schemes, that in turn, can be used to prove a theorem of Grothendieck about the behavior of dimensions of cohomology groups of a family of vector bundles on a flat family of varieties.

*Keywords:* profinite group, discrete module, cohomology.

## References

1. Grothendieck A., Dieudonne J., *Éléments de géométrie algébrique: III. Étude cohomologique des faisceaux cohérents* (Seconde partie, Publications mathématiques de l'I.H.É.S., 1963).
2. Mumford D., *Abelian varieties* (Oxford University Press, 1974).
3. Serre J.-P., *Galois Cohomology* (Springer, 1997).

Received: May 27, 2018

Accepted: July 2, 2018

Author's information:

Oleg B. Podkopaev — opodkopaev@gmail.com