УДК 517.938 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 4
MSC 37E05

Оценка числа периодических траекторий данного периода отображений отрезка, числа Люка и ожерелья

О. А. Иванов

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Иванов О. А.* Оценка числа периодических траекторий данного периода отображений отрезка, числа Люка и ожерелья // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 4. С. 606–613. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.406

В 1964 году А. Н. Шарковский опубликовал статью, в которой было введено отношение порядка на множестве натуральных чисел, обладающее тем свойством, что если у отображения отрезка в себя имеется периодическая траектория некоторого периода, то у этого отображения есть периодические траектории любого большего периода. Наименьшим числом относительно этого отношения порядка является число 3. Таким образом, если у отображения отрезка в себя есть траектория периода 3, то у него есть траектории любых периодов. В 1975 году последний результат был переоткрыт Ли и Йорком, опубликовавшим статью «Period three implies chaos». В настоящей статье получена точная оценку снизу на число траекторий данного периода у отображения отрезка, у которого есть траектория периода 3. Ключевой момент рассуждения состоял в решении одной комбинаторной задачи, ответ на которую выражается через числа Люка. Как следствие получена явная формула для одного класса ожерелий. В статье также рассмотрено конкретное кусочно-линейное унимодальное отображение отрезка $[0;1]$ в себя, у которого можно найти точки произвольного заданного периода.

Ключевые слова: периодическая траектория, отображения отрезка, порядок Шарковского, числа Люка, число ожерелий.

1. Введение и формулировка основного результата. Предположим, что непрерывное отображение отрезка в себя имеет траекторию периода 3. Как известно [1–3], тогда это отображение имеет траектории любых периодов, более того, динамика отображения отрезка в себя является «хаотической». Исследованию подобных отображений посвящено огромное количество работ (см., к примеру, [3–5] и библиографию в этих работах). Исследовались точки бифуркаций семейств отображений [3–4], предельное поведение траекторий, вероятностные задачи [3–5]. Объектом исследования данной работы являются именно периодические траектории такого отображения.

Теорема 1. 1. *Пусть отображение отрезка в себя имеет траекторию периода 3. Обозначим через* traj_n *число траекторий периода* n *этого отображения. Справедливо неравенство*

$$\mathrm{traj}_n \geqslant \frac{1}{n}\sum_{d|n}\mu(d)L_{n/d}, \tag{1}$$

где μ *— это функция Мёбиуса, а* L_k *— числа Люка.*

2. *Рассмотрим отображение f, заданное равенством*

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, \text{ если } x \in \left[0; \frac{1}{2}\right], \\ 2 - 2x, \text{ если } x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]. \end{cases}$$

Тогда для отображения f неравенство (1) *обращается в равенство, так что*

$$\mathrm{traj}_n = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(d) L_{n/d}. \tag{2}$$

Для полноты приведем определения понятий, использованных в формулировке основного результата. Числа Люка L_n удовлетворяют тому же соотношению, что и числа Фибоначчи, $L_{n+1} = L_n + L_{n-1}$, при этом $L_1 = 1$ и $L_2 = 3$. Нетрудно видеть, что $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$, где F_n — это числа Фибоначчи.

Функция Мёбиуса μ определена на множестве натуральных чисел следующим образом. Пусть $n = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \ldots p_k^{s_k}$, где p_i — различные простые числа. Тогда

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, \text{ если } n = 1, \\ 0, \text{ если } s_i \geqslant 2 \text{ хотя бы для одного } i, \\ (-1)^k, \text{ если } s_1 = s_2 = \ldots = s_k = 1. \end{cases}$$

2. Вспомогательные утверждения. Доказательство теоремы 1 основано на решении одной комбинаторной задачи. А именно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Рассмотрим бесконечные периодические последовательности из* 0 *и* 1, *в которых нет соседних нулей. Тогда число p_n тех последовательностей, период которых равен n, определяется формулой*

$$p_n = \sum_{d|n} \mu(d) L_{n/d}. \tag{3}$$

Докажем вначале следующую лемму, из которой станет ясно, откуда же в формуле (1) появляются числа Люка.

Лемма 1. *Рассмотрим последовательности длины n из* 0 *и* 1, *в которых нет соседних нулей. Число таких последовательностей, первым и последним членами которых являются единицы, равно F_n — n-му числу Фибоначчи. Число таких последовательностей, первый и последний члены которых не равны нулю одновременно, равно L_n — n-му числу Люка.*

Доказательство. Обозначим через s_n число таких последовательностей длины n, у которых первый и последний член равны 1. Ясно, что $s_1 = s_2 = 1$. Пусть $n > 2$. Разобъем все такие последовательности на два типа. К первому из них отнесем те последовательности, предпоследний член которых равен 1, ко второму типу — те, у которых он равен нулю. В силу условия на последовательности, у последовательностей второго типа третий член с конца равен 1:

$$\text{Тип 1:} \quad \underbrace{1\ldots1}_{n-1}1; \quad \text{Тип 2:} \quad \underbrace{1\ldots1}_{n-2}01.$$

Значит, имеется s_{n-1} последовательностей типа 1 и s_{n-2} последовательностей типа 2, поэтому $s_n = s_{n-1} + s_{n-2}$. Таким образом, числа s_n удовлетворяют тому же соотношению, что и числа Фибоначчи. Поскольку $s_1 = F_1$ и $s_2 = F_2$, то $s_n = F_n$ при всех натуральных n.

Теперь предположим, что первый и последний члены последовательности не могут быть одновременно равными нулю. Разобъем множество всех таких последовательностей на три типа:

$$\text{Тип 1:}\quad \underbrace{1\ldots1}_{n};\quad \text{Тип 2:}\quad \underbrace{1\ldots1}_{n-1}0;\quad \text{Тип 3:}\quad 0\underbrace{1\ldots1}_{n-1}.$$

В силу только что доказанного равенства, имеются F_n последовательностей первого типа и по F_{n-1} последовательностей каждого из типов 2 и 3. Поэтому всего имеется $F_n + 2F_{n-1} = F_{n+1} + F_{n-1} = L_n$ последовательностей указанного вида. ■

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим последовательность, такую что $x_{k+n} = x_k$ при всех натуральных k. Заметим, что числа x_1 и x_n не могут быть равны нулю одновременно. В силу леммы 1 число таких последовательностей равно L_n. Однако число n может не быть наименьшим периодом этой последовательности. В таком случае найдется число d — делитель числа n, такое что $x_{k+d} = x_k$ при всех натуральных m. Поэтому

$$L_n = \sum_{d|n} p_d.$$

Для доказательства формулы (1) осталось применить формулу обращения Мёбиуса (см., к примеру, [6, с. 96, теорема 3.19]). ■

3. Доказательство теоремы 1. Доказательство проведем по следующей схеме. Вначале докажем утверждение пункта 2 этой теоремы, а затем покажем, что из его доказательства следует и утверждение пункта 1. Пусть $f : [0;1] \to [0;1]$ — отображение, описанное в пункте 2 теоремы 1. Через x_k обозначим точки на траектории точки x_1 под действием отображения f. Положим $J_0 = \left[0; \frac{1}{2}\right]$ и $J_1 = \left[\frac{1}{2}; 1\right]$. Идея следующей леммы, собственно говоря, содержится в работе [2].

Лемма 2. *Для любой последовательности $t_1, t_1, \ldots, t_n$ из 0 и 1, в которой нет стоящих рядом нулей и которая не может начинаться и заканчиваться нулями, существует единственная точка $x_1 \in J_{t_1}$, для которой $x_k \in J_{t_k}$ при всех $k = 2, 3, \ldots, n$, а $x_{n+1} = x_1$.*

Поскольку $x_n \in J_{t_n}$, а $x_{n+1} = f(x_n) = x_1 \in J_{t_1}$, то $x_n \in J_{t_n} \cap f^{-1}(J_{t_1})$. Положим $J^{(n)} = J_{t_n} \cap f^{-1}(J_{t_1})$. Поскольку $x_{n-1} \in J_{t_{n-1}}$ и $f(x_{n-1}) = x_n \in J^{(n)}$, то $x_{n-1} \in J^{(n-1)} = J_{t_{n-1}} \cap f^{-1}(J^{(n)})$. Аналогичным образом строим отрезки $J^{(k)} = J_{t_k} \cap f^{-1}(J^{(k+1)})$, $k = n-2, n-3, \ldots, 1$. Заметим, что $f(J_0) = J_1$, $f(J_1) = J_0 \cup J_1$ и если $t_k = 0$, то $t_{k+1} = 1$. Значит, $f(J^{(k)}) = J^{(k+1)}$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Таким образом, если искомая точка существует, то она должна лежать в отрезке $J^{(1)}$. По построению $f^n(J^{(1)}) = J_{t_1} \supset J^{(1)}$, значит, существует точка $x_1 \in J^{(1)}$, такая что $f^n(x_1) = x_1$. Для доказательства единственности этой точки осталось заметить, что если $x \in J^{(1)}$, то $f^n(x) = (-2)^p x + a$, где p — это число единиц в последовательности $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Поэтому уравнение $(-2)^p x + a = x$ имеет не более одного решения. ■

Доказательство пункта 2 теоремы 1. Пусть x_1 — периодическая точка. Сопоставим ей бесконечную последовательность t_m из 0 и 1 по правилу $x_m \in J_{t_m}$. Заметим, что если $x_m \in J_0$, то $x_{m+1} \in J_1$, поэтому в этой последовательности нет стоящих рядом нулей. Ясно, что последовательность t_m является периодической. В силу леммы 2, указанное соответствие между множеством периодических точек отображения f и множеством последовательностей указанного вида является биекцией. Поэтому число точек, являющихся начальными данными траекторий периода n, совпадает с числом p_n последовательностей из 0 и 1, в которых нет рядом стоящих нулей и период которых равен n. Осталось заметить, что если имеется p_n точек, лежащих на траекториях периода n, то число самих этих траекторий равно $\frac{1}{n}\,p_n$, поэтому формула (2) есть следствие формулы (1).

Теперь докажем пункт 1 теоремы. Пусть отображение g некоторого отрезка в себя имеет траекторию $\{a, b, c\}$ периода 3, где точка b лежит между точками a и c, при этом $g(a) = b$, $g(b) = c$ и $g(c) = a$. Для определенности считаем, что $a < b < c$. Положим $J_0 = [a; b]$ и $J_1 = [b; c]$. Ясно, что $g(J_0) \supset J_1$ и $g(J_1) \supset J_0 \cup J_1$. Пусть $\{t_i\}_{i=1,2,\dots}$ — последовательность из 0 и 1 периода n, в которой никакие два нуля не стоят рядом. Рассмотрим отрезок $t_1, t_2 \dots, t_n$ этой последовательности. Из лемм 0 и 1 работы [2] следует, что для любой последовательности $t_1, t_2, \dots, t_n$ из 0 и 1, в которой нет стоящих рядом нулей и хотя бы одно из чисел t_1 и t_n отлично от нуля, существует последовательность отрезков $J^{(k)} \subset J_{t_k}$, $k = 1, 2, \dots, n$, такая что $g(J^{(k)}) = J^{(k+1)}$ при $k = 1, 2, \dots, n-1$, а $g(J^{(n)}) = J_{t_1}$. Таким образом, $g^n(J^{(1)}) = J_{t_1} \supset J^{(1)}$, поэтому существует точка $x_1 \in J^{(1)}$, такая что $g^n(x_1) = x_1$. Точка x_1 и является начальной точкой траектории периода n.

Следовательно, точек периода n не меньше, чем последовательностей периода n, откуда, в силу теоремы 2, и следует искомая оценка. ■

4. Периодические точки специального отображения. Далее мы будем изучать периодические точки отображения f (принадлежащего классу так называемых *skew-tent map*), введенного в теореме 1. Напомним, что

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, \text{ если } x \in \left[0; \frac{1}{2}\right], \\ 2 - 2x, \text{ если } x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]. \end{cases}$$

В следующей таблице приведено число траекторий периода n этого отображения при не очень больших n.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
traj_n	1	1	1	1	2	3	4	5	8	11	18	25	40	58	90	135

Однако из этой таблицы совсем не видно, что с ростом n число траекторий растет чрезвычайно быстро. Например, имеются 370 705 400 415 траекторий периода 64. Ясно, что все траектории периода 64 перечислить невозможно, но можно найти некоторые из них. К примеру, следующая дробь является начальной точкой такой траектории:

$$\frac{768\,614\,336\,404\,564\,651}{4\,611\,686\,018\,427\,387\,903}.$$

В следующей теореме описаны все периодические точки отображения f.

Теорема 3. *Периодическими точками отображения f являются:* (1) *точки* $0, \frac{1}{2}, 1$, *лежащие на траектории периода* 3; (2) *несократимые дроби вида* $\frac{p}{q}$, *где q нечетно;* (3) *несократимые дроби вида* $\frac{p}{2q}$, *где q нечетно и $p > q$.*

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{P}_q$ множество указанных точек при заданном нечетном числе q. Нетрудно видеть, что сужение отображения f на $\mathcal{P}_q$ есть биекция этого множества на себя. Таким образом, это сужение порождает перестановку конечного множества, которая может быть разложена на циклы. Любая другая рациональная точка под действием отображения f попадет в одно из множеств $\mathcal{P}_q$, поэтому такие точки не порождают периодических траекторий. Для завершения доказательства осталось заметить, что иррациональные точки отрезка $[0;1]$ очевидным образом не являются периодическими. ■

Конечно, «угадать» приведенную выше точку периода 64 отображения f невозможно. Все дело в том, что лемма 2 не является чистой «теоремой существования».

Будем называть *кодовыми* последовательности $\boldsymbol{t}$, удовлетворяющие условиям леммы 2. Оказывается, что существует алгоритм, который по произвольной кодовой последовательности строит точку x_1, удовлетворяющую заключению этой леммы. Идея состоит в том, чтобы искать задание искомой точки в виде периодической двоичной дроби: $x_1 = 0, a_1 a_2 \ldots$

Лемма 3. *Всякая кодовая последовательность* $\boldsymbol{t}$*, содержащая четное число единиц и оканчивающаяся единицей, однозначно разбивается на блоки вида* $\underline{1{,}1}$, $\underline{0{,}1{,}1}$, $\underline{1{,}0{,}1}$ *и* $\underline{0{,}1{,}0{,}1}$.

Доказательство. Проведем индукцию по длине n кодовой последовательности. При $n = 2$ имеется единственная последовательность $1, 1$. Если $n = 3$, то таких последовательностей две: $0, 1, 1$ и $1, 0, 1$. При $n = 4$ также имеются только две последовательности, удовлетворяющие условию леммы: $1, 1, 1, 1$ и $0, 1, 0, 1$. В четырех случаях мы получили указанные выше блоки, в одном — последовательность, состоящую из двух таких блоков.

Теперь рассмотрим последовательность длины n. Предположим, что $t_1 = 1$. Если $t_2 = 1$, то мы получили блок $\underline{1{,}1}$, отбросив который мы получим последовательность длины $n-2$, также содержащую четное число единиц и оканчивающуюся на 1. Если $t_2 = 0$, то тогда $t_3 = 1$, значит, у нас имеется блок $\underline{1{,}0{,}1}$, отбросив который, мы получим последовательность длины $n - 3$.

Теперь предположим, что $t_1 = 0$, значит, $t_2 = 1$. Если $t_3 = 1$, то у нас имеется блок $\underline{0{,}1{,}1}$, отбросив который, мы получим последовательность длины $n-3$. Если же $t_3 = 0$, то $t_4 = 1$, значит, у нас имеется блок $\underline{0{,}1{,}0{,}1}$, отбросив который, мы получим последовательность длины $n - 4$, удовлетворяющую тем же условиям. ■

Опишем алгоритм определения цифр в представлении искомой точки в виде двоичной дроби. Будем далее использовать следующее обозначение: как в математической логике, считаем, что $\overline{0} = 1$ и $\overline{1} = 0$. Из определения функции f следует, что если $x = 0, a_1 a_2 \ldots$ — представление числа x в виде двоичной дроби, то

$$f(x) = \begin{cases} 0, 1\, a_2 \ldots, \text{ если } a_1 = 0, \\ 0, \overline{a}_2 \overline{a}_3 \ldots, \text{ если } a_1 = 1. \end{cases}$$

Предположим вначале, что кодовая последовательность $\boldsymbol{t}$ длины n содержит четное число p единиц.

Пусть $t_n = 1$. В силу леммы 3 данная кодовая последовательность разбивается на блоки указанного в формулировке леммы 3 вида. Непосредственно проверяется, что каждому такому блоку соответствуют следующие пары цифр двоичного представления числа x_1:

$$\underline{1,1} \mapsto 10 \quad \underline{0,1,1} \mapsto 00 \quad \underline{1,0,1} \mapsto 11 \quad \underline{0,1,0,1} \mapsto 01,$$

при этом, если $x_1 = 0, a_1 a_2 \ldots$, то $x_{n+1} = 0, a_{p+1} a_{p+2} \ldots$ Значит, цифры $a_1, a_2, \ldots, a_p$ определены, а из условия $x_{n+1} = x_1$ следует, что $a_{k+p} = a_k$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Таким образом, искомая точка x_1 задается периодической двоичной дробью $0,(a_1 a_2 \ldots a_p)$.

Теперь пусть $t_n = 0$. Отбросив последний нуль, получим последовательность длины $n-1$, удовлетворяющую условию предыдущего случая. Значит, цифры $a_1, a_2, \ldots, a_p$ определены, а $x_n = 0, a_{p+1} a_{p+2} \ldots$ Поскольку по предположению $t_n = 0$, то $a_{p+1} = 0$, следовательно, $x_{n+1} = 0, 1 a_{p+2} \ldots$ Из условия $x_{n+1} = x_1$ следует, что $a_{k+p} = a_k$ при всех $k \geqslant 2$. Таким образом, искомая точка x_1 задается предпериодической двоичной дробью $0, a_1(a_2 a_3 \ldots a_{p+1})$.

Если же число p единиц в кодовой последовательности нечетно, тогда, если она оканчивается единицей, то $x_1 = 0,(a_1 \ldots a_p \overline{a}_1 \ldots \overline{a}_p)$. Если же $t_n = 0$, то $x_1 = 0, a_1(a_2 \ldots a_{p+1} \overline{a}_2 \ldots \overline{a}_{p+1})$.

Алгоритм поиска начальной точки по кодовой последовательности был реализован в компьютерной среде Wolfram Mathematica. Укажем для примера все траектории периода 12. Сначала надо сгенерировать все (непериодические) кодовые последовательности длины 12. Затем найти все периодические точки и разбить их на траектории. Следующие числа являются наименьшими на каждой из двадцати пяти траекторий периода 12:

$$\frac{2}{171}, \frac{1}{85}, \frac{1}{43}, \frac{2}{85}, \frac{2}{57}, \frac{3}{85}, \frac{7}{171}, \frac{14}{341}, \frac{10}{171}, \frac{1}{17}, \frac{3}{43}, \frac{6}{85}, \frac{2}{19},$$
$$\frac{9}{85}, \frac{23}{171}, \frac{46}{341}, \frac{114}{683}, \frac{57}{341}, \frac{29}{171}, \frac{58}{341}, \frac{10}{57}, \frac{3}{17}, \frac{31}{171}, \frac{9}{43}, \frac{18}{85}.$$

Покажем, насколько бывает сложна связь между значением дроби $x = p/q$ и периодом точки x. В качестве примера рассмотрим точку $x = \frac{10}{171}$, период которой, как уже известно, равен 12. Так как $\varphi(171) = 108$ (здесь φ — это функция Эйлера), то $2^{108} \equiv 1 \pmod{171}$. Однако уже $2^{18} \equiv 1 \pmod{171}$, поэтому период двоичного представления дроби $\frac{10}{171}$ равен 18. Действительно, $\frac{10}{171} = 0,(000011101111100010)$. Из описанного выше алгоритма ясно, как строить кодовую последовательность, зная цифры двоичной дроби. В нашем случае кодовой последовательностью рассматриваемой точки является следующая последовательность длины 24:

$$\underbrace{0,1,1,0,1,1,1,0,1,1,1,1}, \underbrace{0,1,1,0,1,1,1,0,1,1,1,1}.$$

Случайным образом оказалось, что она состоит из двух одинаковых половин, поэтому период точки $x = \frac{10}{171}$ и равен 12.

5. Приложения основного результата. Заметим, что из теоремы 1 следуют и некоторые интересные свойства чисел Люка. Предположим вначале, что n — простое число. Поскольку в этом случае число траекторий периода n равно $\frac{L_n - 1}{n}$, а это есть заведомо натуральное число, то мы получаем, что для любого простого числа n справедливо сравнение

$$L_n \equiv 1 \pmod{n}.$$

Теперь рассмотрим числа вида $n = p^k$, где p — простое число. Так как $\mu(1) = 1$, $\mu(p) = -1$ и $\mu(p^\ell) = 0$ при $\ell \geqslant 2$, то число траекторий периода n равно $\frac{L_{p^k} - L_{p^{k-1}}}{p^k}$, следовательно,

$$L_{p^k} \equiv L_{p^{k-1}} \pmod{p^k}.$$

Если же $n = pq$, где p и q — различные простые числа, то, поскольку $\mu(pq) = 1$, мы получим сравнение

$$L_{pq} + 1 \equiv L_p + L_q \pmod{pq}.$$

В частности, так как $L_p \equiv 1 \pmod{p}$, то $L_{pq} \equiv L_q \pmod{p}$.

Таким образом, мы вывели из доказанной теоремы следующие свойства чисел Люка: для всякого простого числа p и любого натурального числа k справедливы сравнения: (1) $L_{p^k} \equiv L_{p^{k-1}} \pmod{p^k}$; (2) $L_{p^k} \equiv 1 \pmod{p}$; для любых различных простых чисел p и q справедливо сравнение: (3) $L_{pq} \equiv L_q \pmod{p}$. ■

В заключение заметим, что из теоремы 2 также следует явная формула для числа ожерелий специального вида. Предположим, что мы составляем ожерелья из белых и черных бусин, при этом запрещается размещать рядом две черные бусины. Тогда число таких ожерелий, состоящих из n бусин, равно

$$\sum_{p|n} \frac{1}{p} \sum_{d|p} \mu(d) L_{p/d}. \tag{4}$$

В следующей таблице приведены первые значения для числа ожерелий данного вида.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	1	2	2	3	3	5	5	8	10	15	19	31

n	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
	41	64	94	143	211	329	493	766	1170	1811	2787	4341

Растут эти числа, конечно, экспоненциально.

Литература

1. *Шарковский А. Н.* Сосуществование циклов непрерывного преобразования прямой в себя // Украинский математический журнал. 1964. №1. С. 61–71.
2. *Li T.-Y., Yorke J. A.* Period three implies chaos // The American Mathematical Monthly. 1975. Vol. 82, N 10. P. 985–992.
3. *Шарковский А. Н., Коляда С. Ф., Сивак А. Г., Федоренко В. В.* Динамика одномерных отображений. Киев: Наукова Думка, 1989. 216 с.
4. *Lindström T., Thunberg H.* An elementary approach to dynamics and bifurcation of skew-tent maps // Journal of Differential Equations and Applications. 2008. Vol. 14, N 8. P. 819–833.
5. *Pfante O., Jost J.* Non-generating partition of unimodular maps. Santa Fe Institute, SFI Working Paper: 2015–02–004, 12 p.
6. *Иванов О. А.* Элементарная математика для школьников, студентов и преподавателей. М.: МЦНМО, 2009. 384 с.

Статья поступила в редакцию 26 мая 2018 г.; рекомендована в печать 2 июля 2018 г.

Контактная информация:

Иванов Олег Александрович — д-р пед. наук, проф.; o.a.ivanov@spbu.ru

An estimate for the number of periodical trajectories of the given period for a mapping of an interval, Lucas numbers, and necklaces

O. A. Ivanov

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Ivanov O. A. An estimate for the number of periodical trajectories of the given period for a mapping of an interval, Lucas numbers, and necklaces. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2018, vol. 5 (63), issue 4, pp. 606–613. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.406 (In Russian).

In 1964, A. N. Sharkovsky published an article in which he introduced a special ordering on the set of positive integers. This ordering has the property that if $p \lhd q$ and a mapping of an interval into itself has a point of period p, then it has a point of period q. The least number with respect to this ordering is the number 3. Thus, if a mapping has a point of period 3, then this mapping has points of any periods. In 1975, the latter result was rediscovered by Li and Yorke, who published the paper "Period three implies chaos". In that paper, an exact lower bound for the number of trajectories of a given period for a mapping of an interval into itself, which has a point of period 3 is given. The key point of the reasoning consisted in solution of one combinatorial problem, the answer to which is expressed in terms of the Lucas numbers. As a consequence, an explicit formula for the number of necklaces of a special type is obtained. The article also examined a particular piecewise linear unimodular mapping of an interval $[0, 1]$ into itself for which it is possible to find points of an arbitrary given period.

Keywords: periodical trajectory, mappings of an interval, Sharkovsky's ordering, Lucas numbers, number of necklaces.

References

1. Sharkovskii A. N., "Co-existence of cycles of a continuous mapping of a line onto itself", *Ukrainian Math. J.* **16**, 61–71 (1964).
2. Li T.-Y., Yorke J. A., "Period three implies chaos", *The American Mathematical Monthly* **82**(10), 985–992 (1975).
3. Sharkovskii A. N., Kolyada S. F., Sivak A. G., Fedorenko V. V., *Dynamics of one-dimensional mappings* (Naukova Dumka, Kiev, 1989, 216 p.) [in Russian].
4. Lindström T., Thunberg H., "An elementary approach to dynamics and bifurcation of skew-tent maps", *Journal of Differential Equations and Applications* **14**(8), 819–833 (2008).
5. Pfante O., Jost J., *Non-generating partition of unimodular maps* (Santa Fe Institute, SFI Working Paper 2015–02–004, 12 p.).
6. Ivanov O. A., *Making Mathematics Come to Life: A Guide for Teachers and Students* (American Mathematical Society, Providence, RI, 2009, 337 p.).

Received: May 26, 2018
Accepted: July 2, 2018

Author's information:

Oleg A. Ivanov — o.a.ivanov@spbu.ru