УДК 517.925 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 4
MSC 34C20

Двумерные однородные кубические системы: классификация и нормальные формы — V

В. В. Басов, А. С. Чермных

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Басов В. В., Чермных А. С.* Двумерные однородные кубические системы: классификация и нормальные формы — V // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 4. С. 556–571. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.403

Данная статья является пятой в цикле работ, посвященном двумерным однородным кубическим системам. В ней рассматривается случай, когда однородный векторный многочлен в правой части системы имеет линейный общий множитель. Множество таких систем разбивается на классы линейной эквивалентности, в каждом из которых на основании определенным образом введенных принципов выделяется простейшая система — нормальная форма третьего порядка, задаваемая матрицей коэффициентов своей правой части, которая называется канонической формой (КФ). Каждая КФ имеет свою структуру расположения ненулевых элементов, их определенную нормировку и каноническое множество допустимых значений для ненормированных элементов, относящее КФ к выбранному классу эквивалентности. Помимо классификации для каждой КФ приводятся: а) условия на коэффициенты исходной системы, б) линейные неособые замены, преобразующие правую часть системы при этих условиях в выбранную КФ, в) получаемые значения ненормированных элементов КФ.

Ключевые слова: однородная кубическая система, нормальная форма, каноническая форма.

1. Введение. Настоящая работа является непосредственным продолжением работ [1, 2], и в ней сохраняются все введенные ранее обозначения. В связи с большим количеством ссылок на формулы из работы [1] их номера для краткости отмечаются сверху цифрой «1». Например, система (2.1) из [1] обозначается $(2.1)^1$.

Также в работе имеются ссылки на доказательства, выполненные в пакете Maple и доступные в любом из хранилищ https://github.com/Vladimir-Basov/DE или https://github.com/ACherm/DE.

Эта работа завершает классификацию вещественных систем $(2.1)^1$

$$\dot{x}_1 = P_1(x_1, x_2), \quad \dot{x}_2 = P_2(x_1, x_2) \qquad (P_i = a_i x_1^3 + b_i x_1^2 x_2 + c_i x_1 x_2^2 + d_i x_2^3 \not\equiv 0),$$

в которых многочлены P_1 и P_2 имеют общий множитель ненулевой степени l.

Множество систем $(2.1)^1$ удалось разбить на классы линейной эквивалентности и выделить в каждом классе образующую — простейшую систему, названную кубической нормальной формой, и отождествляемую с матрицей коэффициентов ее правой части, названной канонической формой (КФ).

Предлагаемая классификация преследует цель максимально упростить сведение возмущенных систем $(1.4)^1$ с различными КФ в невозмущенной части к обобщенным нормальным формам. Определение обобщенных нормальных форм и кон-

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2018

структивный метод получения их всевозможных структур приведены в [1, разд. 1.3]. Далее, основываясь на рассуждениях из раздела 1.4, в [2, разд. 1] были разработаны структурные и нормировочные принципы, позволившие оптимально определить КФ.

Рассмотрим для сравнения классификацию двумерных однородных кубических систем, основанную на иных принципах выделения канонических форм.

А. Сима, Дж. Либре в [3] сначала осуществили классификацию однородных многочленов от двух переменных четвертого порядка с вещественными коэффициентами или, коротко, бинарных форм, найдя их алгебраические инварианты относительно линейных неособых замен и выделив образующие — канонические бинарные формы (КБФ). Для этого они адаптировали методы, применявшиеся Г. Гуревичем в [4] для классификации комплексных бинарных форм. Было получено десять КБФ.

Затем произвольной системе $(2.1)^1$ была сопоставлена бинарная форма $F(x_1,x_2) = x_1P_2(x_1,x_2) - x_2P_1(x_1,x_2)$ и выделено трехпараметрическое семейство систем, которым также сопоставима полученная бинарная форма F.

Было доказано, что линейная неособая замена, сводящая F к какой-либо из КБФ, преобразует исходную систему к системе, сопоставимой с полученной КБФ.

Таким образом, была получена алгебраическая классификация систем $(2.1)^1$, позволившая разбить их на десять линейно неэквивалентных классов с явно выписанными образующими — трехпараметрическими семействами систем, каждому из которых сопоставима своя КБФ. Выделенные семейства систем естественно называть каноническими формами данной классификации.

Полученные результаты позволили провести полную топологическую классификацию фазовых портретов в случае, когда многочлены P_1 и P_2 не имеют общего множителя, что справедливо для девяти КБФ и соответствует случаю $l = 0$ в терминах данного цикла статей. В случаях, когда $l = 1, 2, 3$, КБФ тождественно равна нулю.

Отметим также, что классификация двумерных однородных квадратичных систем, связанная с вещественными однородными многочленами третьего порядка, была осуществлена в [5].

2. Выделение канонических форм и их допустимых множеств при $l = 1$. Выделим из списка 1.1 работы [2] структурные формы до $SF_8^{5,1}$ включительно, относящиеся к случаю $l = 1$ (имеется 41 такая форма) и нормируем их согласно НП из [2, разд. 1.2]. Выясним, какие из полученных нормированных структурных форм (NSF, см. [2, опред. 1.6]) являются каноническими формами (CF, см. [2, опред. 1.10]).

Утверждение 2.1. *Только* $NSF_6^{4,1} = \sigma\begin{pmatrix} u & 0 & 0 & u \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $NSF_{a,15}^{4,1} = \sigma\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & v & u & 0 \end{pmatrix}$, $NSF_{a,20}^{4,1} = \sigma\begin{pmatrix} v & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & u & 0 \end{pmatrix}$ $(uv \neq 1)$, $NSF_{22}^{4,1} = \sigma\begin{pmatrix} u & 0 & 0 & u \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $NSF_{37}^{4,1} = \sigma\begin{pmatrix} 0 & 0 & u & u \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $NSF_1^{5,1} = \sigma\begin{pmatrix} u & v & v-u & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $NSF_2^{5,1} = \sigma\begin{pmatrix} u & v & 0 & u-v \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $NSF_5^{5,1} = \sigma\begin{pmatrix} u & 0 & v & u+v \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *при всех допустимых значениях параметров линейными заменами* $(2.2)^1$ *сводятся к каким-либо предшествующим согласно СП из* [2, разд. 1.1] *структурным формам.*

Доказательство. 1) $NSF_6^{4,1}$ заменой с $s_1=-s_2,\ r_2=0$ сводится к $SF_5^{4,1}$;
2) $NSF_{a,15}^{4,1}$ заменой с $r_1=-2uv^{-1}r_2,\ s_1=0$ сводится к $SF_{a,8}^{3,1}$;
3) $NSF_{a,20}^{4,1}$ $(v\neq u^{-1})$ заменой с $s_1=0,\ r_2=ur_1$ сводится к $SF_{19}^{4,1}$;
4) $NSF_{22}^{4,1}$ заменой с $s_1=-s_2,\ r_2=r_1$ сводится к $SF_{a,20}^{4,1}$;
5) $NSF_{37}^{4,1}$ заменой с $s_1=-s_2,\ r_2=r_1$ при $u=1$ сводится к $SF_{9,\kappa}^{3,1}$, при $u=-1$ сводится к $SF_{a,14,\kappa}^{3,1}$, а при $u\neq\pm1$ заменой с $s_1=-s_2,\ r_1=ur_2$ сводится к $SF_{a,27}^{4,1}$;
6) $NSF_1^{5,1}$, $NSF_2^{5,1}$, $NSF_5^{5,1}$ заменой с $s_1=-s_2,\ r_2=0$ сводятся к $SF_5^{4,1}$.

Проверка показала, что остальные тридцать три $NSF^{m,1}$ являются $CF^{m,1}$. $\square$

Замечание 2.1. Здесь и в дальнейшем запись «сводится к какой-либо $SF^{m,1}$» означает, что получена указанная форма или одна из предшествующих ей форм.

Выпишем имеющиеся $CF^{m,1}$, их допустимые множества (ps) и канонические множества (cs) из [2, опред. 1.8, 1.9], причем $cs^{m,1}$ будут установлены в последующих утверждениях 3.1, 3.2 (записи tps, tcs означают, что ограничений на параметры нет). Укажем также разложение каждой формы на строку $(1,\beta)$ и матрицу G, как это сделано в системе $(2.9)^1$ $\dot{x}=(\alpha,\beta)\,x\,G\,q^{[2]}(x)$, и результант $R_2\neq0$ (см. [6]) матрицы G.

Список 2.1. Все $CF_i^{m,1}$ до $CF_8^{5,1}$ включительно с указанием коэффициента β, матрицы G, результанта R_2, $ps_i^{m,1}$ и $cs_i^{m,1}$ $(\sigma,\kappa=\pm1,\ u,v,w\neq0,\ \alpha=1,\ R_2\neq0)$.

I) 24 формы с $\beta=0$ ($d_1,d_2=0$, G — три первых столбца соответствующей $CF_i^{m,1}$) :

1) $CF_2^{2,1}=\sigma\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$, $R_2=1$, $tps_2^{2,1}$; $\quad CF_{a,5}^{3,1}=\sigma\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&u&1&0\end{pmatrix}$, $R_2=1$, $tps_{a,5}^{3,1}$;

$CF_{a,8}^{3,1}=\sigma\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&u&0\end{pmatrix}$, $R_2=u^2$, $tps_{a,8}^{3,1}$; $\quad$ 2) $CF_3^{3,1}=\sigma\begin{pmatrix}1&u&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$, $R_2=1$, $tps_3^{3,1}$;

$CF_{a,14,\kappa}^{3,1}=\sigma\begin{pmatrix}0&1&0&0\\\kappa&0&u&0\end{pmatrix}$, $R_2=\kappa u$, $tps_{14,\kappa}^{3,1}$; $\quad CF_7^{4,1}=\sigma\begin{pmatrix}u&v&0&0\\0&1&1&0\end{pmatrix}$, $R_2=u(u-v)$, $ps_7^{4,1}=\{v\neq u\}$;

$CF_{a,12}^{4,1}=\sigma\begin{pmatrix}1&1&0&0\\v&0&u&0\end{pmatrix}$, $R_2=u(u+v)$, $ps_{12}^{4,1}=\{v\neq-u\}$; $\quad CF_{a,24}^{4,1}=\sigma\begin{pmatrix}0&1&0&0\\v&1&u&0\end{pmatrix}$, $R_2=uv$, $tps_{24}^{4,1}$;

3) $CF_9^{2,1}=\sigma\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$, $R_2=1$, $tps_9^{2,1}$; $\quad CF_6^{3,1}=\sigma\begin{pmatrix}u&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$, $R_2=u^2$, $tps_6^{3,1}$;

$CF_{11,\kappa}^{3,1}=\sigma\begin{pmatrix}u&0&\kappa&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$, $R_2=\kappa u$, $tps_{11,\kappa}^{3,1}$; $\quad CF_{17}^{3,1}=\sigma\begin{pmatrix}u&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$, $R_2=1$, $tps_{17}^{3,1}$;

$CF_{a,19}^{3,1}=\sigma\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&u&0\end{pmatrix}$, $R_2=1$, $tps_{a,19}^{3,1}$; $\quad CF_{21}^{3,1}=\sigma\begin{pmatrix}0&u&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$, $R_2=1$, $tps_{21}^{3,1}$;

$CF_{a,22}^{3,1}=\sigma\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&u&0&0\end{pmatrix}$, $R_2=1$, $tps_{a,22}^{3,1}$; $\quad CF_5^{4,1}=\sigma\begin{pmatrix}u&v&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$, $R_2=u^2$, $tps_5^{4,1}$;

$CF_{11}^{4,1}=\sigma\begin{pmatrix}u&1&v&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$, $R_2=uv$, $tps_{11}^{4,1}$; $\quad CF_{a,14}^{4,1}=\sigma\begin{pmatrix}v&0&1&0\\0&u&1&0\end{pmatrix}$, $R_2=v(u^2+v)$, $ps_{14}^{4,1}=\{v\neq-u^2\}$;

$CF_{19}^{4,1}=\sigma\begin{pmatrix}u&v&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$, $R_2=1$, $tps_{19}^{4,1}$; $\quad CF_{a,27}^{4,1}=\sigma\begin{pmatrix}v&0&1&0\\1&u&0&0\end{pmatrix}$, $R_2=u^2v+1$, $ps_{27}^{4,1}=\{v\neq-u^2\}$;

$CF_{a,29}^{4,1}=\sigma\begin{pmatrix}0&1&1&0\\v&0&u&0\end{pmatrix}$, $R_2=v(u+v)$, $ps_{29}^{4,1}=\{v\neq-u\}$; $\quad CF_{a,30}^{4,1}=\sigma\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&v&u&0\end{pmatrix}$, $R_2=1$, $tps_{30}^{4,1}$;

$CF_{a,33}^{4,1}=\sigma\begin{pmatrix}0&1&1&0\\v&u&0&0\end{pmatrix}$, $R_2=v(v-u)$, $ps_{33}^{4,1}=\{v\neq u\}$; $\quad CF_8^{5,1}=\sigma\begin{pmatrix}u&v&w&0\\0&1&1&0\end{pmatrix}$, $R_2=u(u-v+w)$, $ps_8^{5,1}=\{w\neq v-u\}$;

II) 9 форм с $\beta=1$ и своими G ($R_2=u^2$ и $ps=tps$ в первых шести формах):

$CF_1^{4,1}=\sigma\begin{pmatrix}u&u&0&0\\0&0&1&1\end{pmatrix},\ \sigma\begin{pmatrix}u&0&0\\0&0&1\end{pmatrix};\qquad CF_3^{4,1}=\sigma\begin{pmatrix}u&0&-u&0\\0&0&1&1\end{pmatrix},\ \sigma\begin{pmatrix}u&-u&0\\0&0&1\end{pmatrix};$

$CF_{13}^{4,1}=\sigma\begin{pmatrix}u&0&0&u\\0&1&0&-1\end{pmatrix},\ \sigma\begin{pmatrix}u&-u&u\\0&1&-1\end{pmatrix};\ CF_{28}^{4,1}=\sigma\begin{pmatrix}0&u&0&-u\\1&0&0&1\end{pmatrix},\sigma\begin{pmatrix}0&u&-u\\1&-1&1\end{pmatrix};$

$CF_{32}^{4,1}=\sigma\begin{pmatrix}0&0&u&u\\1&0&0&1\end{pmatrix},\sigma\begin{pmatrix}0&0&u\\1&-1&1\end{pmatrix};\qquad CF_{36}^{4,1}=\sigma\begin{pmatrix}0&0&u&u\\1&0&-1&0\end{pmatrix},\sigma\begin{pmatrix}0&0&u\\1&-1&0\end{pmatrix};$

$CF_3^{5,1}=\sigma\begin{pmatrix}u&v&v-u&0\\0&1&0&-1\end{pmatrix},\quad\sigma\begin{pmatrix}u&v-u&0\\0&1&-1\end{pmatrix},\ \begin{matrix}R_2=uv,\\ps_3^{5,1}=\{v\neq u\};\end{matrix}$

$CF_6^{5,1}=\sigma\begin{pmatrix}u&v&0&u-v\\0&1&0&-1\end{pmatrix},\quad\sigma\begin{pmatrix}u&v-u&u-v\\0&1&-1\end{pmatrix},\ \begin{matrix}R_2=u^2,\\ps_6^{5,1}=\{v\neq u\};\end{matrix}$

$CF_7^{5,1}=\sigma\begin{pmatrix}u&v&v-u&0\\1&0&0&1\end{pmatrix},\quad\sigma\begin{pmatrix}u&v-u&0\\1&-1&1\end{pmatrix},\ \begin{matrix}R_2=u^2-uv+v^2,\\ps_7^{5,1}=\{v\neq u\};\end{matrix}$

1) $tcs_2^{2,1}$; $cs_5^{3,1}=\{u\neq 2\}$, $cs_8^{3,1}=\{u>1/4\}$;

2) $tcs_3^{3,1}$, $cs_{14,\kappa}^{3,1}=\{(\kappa,u)\neq(1,1/2)\}$; $cs_7^{4,1}=\{v\neq u,\ 2-u^{-1},2u(u+1)^{-1}\}$, $cs_{12}^{4,1}=\{u\neq -v,\ 1/2;\ 4v(u-1)>1\}$, $cs_{24}^{4,1}=\{u=1/2,\ v<-1/2\}$;

3) $tcs_9^{2,1}$, $tcs_9^{2,1}$; $tcs_6^{3,1}$, $tcs_{11,\kappa}^{3,1}$, $tcs_{17}^{3,1}$, $tcs_{19}^{3,1}$, $cs_{21}^{3,1}=\{u\neq 2\}$, $tcs_{22}^{3,1}$;
$cs_1^{4,1}=\{u\neq\pm 1\}$, $cs_3^{4,1}=\{u\neq -1/2,-2\}$;
$cs_5^{4,1}=\{u\neq v(v-2)/4;\ (u,v)\neq(1,-2),(-1/9,1)\}$; $cs_{11}^{4,1}=\{v\neq u(2u-1)^{-2}\}$,
$cs_{13}^{4,1}=\{u\neq -1/3,\ 2/3\}$, $cs_{14}^{4,1}=\{v\neq u,-u^2;\ v\neq u/2$ при $u>-1/2\}$,
$cs_{27}^{4,1}=\{v\neq -u^{-2},\ (u^{3/2}\pm 2^{3/2})u^{-1/2}/2;\ (u,v)\neq 4^{-2/3}\cdot(3,1)\}$,
$cs_{19}^{4,1}=\{u\neq v^2/4,\ (v^3-8)(4v)^{-1}\}$, $cs_{28}^{4,1}=\{u\neq -3,\ -3/4,\ 3/2,\ 6,\ \vartheta_1\}$,
$cs_{29}^{4,1}=\{u\neq -1/2;\ v\neq -u,\ u^2,\ (1-2u)/8,\ (1-2u)^2/8;\ (u,v)\neq(\vartheta_3,\vartheta_4)\}$,
$cs_{30}^{4,1}=\{u\neq -v^{-1},\ (v^3-8)(4v)^{-1};\ (u,v)\neq(2,3),(3,-3)\}$,
$cs_{32}^{4,1}=\{u\neq -3,-3/4,\ 3/8,\ 6\}$,
$cs_{33}^{4,1}=\{u\neq 1;\ v\neq u,\ (4u+1)/2,\ (6u+1\pm(2u+1)(8u+1)^{1/2})/16\}$,
$cs_{36}^{4,1}=\{u\neq -2,\ -1/8,\ 1\pm 3\sqrt{2}/4,\ 1/4,\ 4\}$; $cs_3^{5,1}=\{v\neq u,\ 3.2_1\}$,
$cs_6^{5,1}=\{v\neq u,\ 3.2_2\}$, $cs_7^{5,1}=\{v\neq u,\ 3.2_3\}$, $cs_8^{5,1}=\{w\neq v-u,\ 3.2_4\}$.

Здесь запись $\{\ldots,\ 3.2_i\}$ означает, что значения параметров не удовлетворяют условиям из пункта i $(i=1,2,3,4)$ следующего ниже утверждения 3.2.

Поскольку в список 2.1 входят $CF^{m,1}$ только с $\beta=0$ или с $\beta=\alpha$, выясним, при каких условиях формы с такими β могут быть преобразованы друг в друга.

Утверждение 2.2. *Пусть система* $(2.9)^1$ *с* $P_0^1=\alpha x_1+\beta x_2$ *линейной неособой заменой* $(2.2)^1$ *сводится к системе* $(2.11)^1$ $\dot y=\widetilde P_0^1(y)\,\tilde G q^{[2]}(y)$ *с* $\widetilde P_0^1=\tilde\alpha x_1+\tilde\beta x_2$, *тогда* 1) *при* $\alpha=1:\tilde\beta=0\Leftrightarrow s_1=-\beta s_2$, 2) *при* $\beta=0:\tilde\beta=0\Leftrightarrow s_1=0$, 3) *при* $\beta=0:\tilde\alpha=\tilde\beta\Leftrightarrow r_1=s_1\neq 0$, 4) *при* $\alpha=\beta:\tilde\beta=0\Leftrightarrow s_2=-s_1\neq 0$.

Доказательство. По теореме 2.1 из [1] $\tilde\alpha=\alpha r_1+\beta r_2$, $\tilde\beta=\alpha s_1+\beta s_2$. □

Набор 2.1. Числовые константы, используемые в дальнейшем:
$\vartheta_1=\rho+20\rho^{-1}+5$, $\vartheta_2=((\sqrt{29}+27)\rho^2-(10\sqrt{29}-130)\rho+1000)/600$, $\rho=(4\sqrt{29}+92)^{1/3}$;
$\vartheta_3=((3\sqrt{29}-17)\rho^2+(4\sqrt{29}-24)\rho-16)/24$, $\vartheta_4=((72-13\sqrt{29})\rho^2-(9\sqrt{29}-59)\rho+72)/36$, $\vartheta_5=(\rho+4\rho^{-1})/6$, $\vartheta_6=2(2\rho^2+9\rho+8)/(\rho^2-18\rho+4)$, $\rho=(20\sqrt{29}+108)^{1/3}$;
$\vartheta_7=(8\rho^2+(3\sqrt{57}-1)\rho+68)/12$, $\vartheta_8=((\sqrt{57}+85)\rho^2+32(\sqrt{57}-1)\rho+640)/96$,
$\vartheta_9=(8\rho^{-1}-\rho-1)/3$, $\vartheta_{10}=((11-\sqrt{57})\rho^2+4(\sqrt{57}+5)\rho+32)/96$, $\rho=(3\sqrt{57}+1)^{1/3}$;
$\vartheta_{11}=((\sqrt{17}-9)\rho^2-4(\sqrt{17}+1)\rho-40)/8$, $\vartheta_{12}=-\rho+4\rho^{-1}$, $\rho=(2\sqrt{17}+2)^{1/3}$;

$\vartheta_{13} = (\rho^2 - (\sqrt{77}-9)\rho - 16)/4,\ \ \vartheta_{14} = -3((\sqrt{77}-9)\rho^2 - 4\rho + 24)/8,$
$\vartheta_{15} = \rho/6 + 2(3\rho)^{-1},\ \ \vartheta_{16} = ((3\sqrt{77}-25)\rho^2 - (2\sqrt{77}-6)\rho - 8)/24,\ \ \rho = (4\sqrt{77}+36)^{1/3}.$

3. Выделение канонических и минимальных множеств для $CF^{m,1}$.

Утверждение 3.1. *Только следующие формы с $m \le 4$ из списка 2.1 при указанных значениях параметров сводятся к предшествующим структурным формам:*
1) $NSF_5^{3,1}$ *при* $u=2$ *заменой с* $r_1=-r_2,\ s_2=0$ — *к* $SF_2^{2,1}$;
2) $NSF_8^{3,1}$ *при* $u\le 1/4$ *заменой с* $s_2=(1+(1-4u)^{1/2})s_1/2,\ r_2=0$ — *к* $SF_5^{3,1}$;
3) $NSF_{14,\kappa}^{3,1}$ *при* $\kappa=1,\ u=1/2$ *заменой с* $r_1=2^{1/2}r_2,\ \ s_2=0$ — *к* $SF_3^{3,1}$;
4) $NSF_{21}^{3,1}$ *при* $u=2$ *заменой с* $s_1=0,\ \ r_2=-r_1$ — *к* $SF_6^{3,1}$;
5) $NSF_1^{4,1}$: *a) при* $u=-1$ *заменой с* $r_2=0,\ \ s_2=-s_1$ — *к* $SF_3^{3,1}$;
b) при $u=1$ *заменой с* $r_1=r_2,\ \ s_2=-s_1$ — *к* $SF_{11}^{3,1}$;
6) $NSF_3^{4,1}$: *a) при* $u=-1/2$ *заменой с* $r_2=0,\ \ s_2=-s_1$ — *к* $SF_3^{3,1}$;
b) при $u=-2$ *заменой с* $r_2=0,\ \ s_2=2s_1$ — *к* $SF_1^{4,1}$;
7) $NSF_5^{4,1}$: *a) при* $u=1,\ \ v=-2$ *заменой с* $r_1=0,\ \ s_2=s_1$ — *к* $SF_{22}^{3,1}$;
b) при $u=v(v-2)/4$ *заменой с* $r_2=0,\ \ s_2=(1-v/2)s_1$ — *к* $SF_1^{4,1}$;
c) при $u=v(2v-3)/9$ *заменой с* $r_2=0,\ \ s_2=(3-2v)s_1/3$ — *к* $SF_3^{4,1}$;
8) $NSF_7^{4,1}$ $(v\ne u)$: *a) при* $v=2-u^{-1}$ *заменой с* $r_1=-u^{-1}r_2,\ s_1=0$ — *к* $SF_3^{3,1}$;
b) при $v=2u(u+1)^{-1}$ *заменой с* $r_1=0,\ s_1=2(u+1)^{-1}s_2$ — *к* $SF_{14,\kappa}^{3,1}$;
9) $NSF_{11}^{4,1}$ *при* $v=u(2u-1)^{-2}$ *заменой с* $s_1=0,\ r_2=(1-2u)r_1$ — *к* $SF_5^{4,1}$;
10) $NSF_{12}^{4,1}$ $(v\ne -u)$: *a) при* $u=1/2$ *заменой с* $s_1=-s_2,\ r_2=0$ — *к* $SF_{14,\kappa}^{3,1}$;
b) при $4v(u-1)\le 1$ *заменой с* $r_2=(1+(1-4v(u-1))^{1/2})(2v)^{-1}r_1,\ s_2=0$ — *к* $SF_7^{4,1}$;
11) $NSF_{13}^{4,1}$: *a) при* $u=2/3$ *заменой с* $r_1=2r_2,\ \ s_2=-s_1$ — *к* $SF_3^{3,1}$;
b) при $u=-1/3$ *заменой с* $r_1=r_2/2,\ s_2=-s_1$ — *к* $SF_{11}^{4,1}$;
12) $NSF_{14}^{4,1}$ $(v\ne -u^2)$: *a) при* $v=u/2,\ u>-1/2$ *заменой с* $r_1=(1-(2u+1)^{1/2})r_2/2$, $s_1=(1+(2u+1)^{1/2})s_2/2$ — *к* $SF_1^{4,1}$;
b) при $v=u$ *заменой с* $r_2=r_1,\ \ s_2=0$ — *к* $SF_{11}^{4,1}$;
c) при $u=-1/4,\ v=-1/12$ *заменой с* $r_1=0,\ \ s_2=2s_1$ — *к* $SF_{13}^{4,1}$;
13) $NSF_{19}^{4,1}$: *a) при* $u=v^2/4$ *заменой с* $r_1=0,\ \ s_2=-vs_1/2$ — *к* $SF_{19}^{3,1}$;
b) при $u=(v^3-8)(4v)^{-1}$ *заменой с* $s_1=0,\ r_2=-vr_1/2$ — *к* $SF_6^{3,1}$;
14) $NSF_{24}^{4,1}$: *a) при* $u\ne 1/2$ *заменой с* $r_2=0,\ s_2=(1-2u)s_1$ — *к* $SF_{12}^{4,1}$;
b) при $u=1/2,\ v\ge -1/2$ *заменой с* $r_1=(1+(2v+1)^{1/2})r_2,\ s_2=0$ — *к* $SF_7^{4,1}$;
15) $NSF_{27}^{4,1}$ $(v\ne -u^{-2})$: *a) при* $v=u/2\pm(u/2)^{-1/2}$ *заменой с* $r_1=\pm(u/2)^{1/2}r_2$, $s_2=0$ — *к* $SF_5^{4,1}$;
b) при $u=3/4^{2/3},\ v=4^{-2/3}$ *заменой с* $r_1=2^{1/3}r_2,\ s_1=-3\cdot 2^{-2/3}s_2$ — *к* $SF_{13}^{4,1}$;
16) $NSF_{28}^{4,1}$: *a) при* $u=-3$ *заменой с* $s_1=2s_2,\ \ r_2=-r_1$ — *к* $SF_{22}^{3,1}$;
b) при $u=6$ *заменой с* $r_1=2r_2,\ s_2=-s_1$ — *к* $SF_5^{4,1}$;
c) при $u=-3/4$ *заменой с* $r_1=r_2/2,\ s_2=-s_1$ — *к* $SF_{11}^{4,1}$;
d) при $u=3/2$ *заменой с* $s_1=3s_2/2,\ r_2=-r_1$ — *к* $SF_{12}^{4,1}$;
e) при $u=\vartheta_1$ *заменой с* $s_1=\vartheta_2 s_2,\ \ r_2=-r_1$ — *к* $SF_{14}^{4,1}$;
17) $NSF_{29}^{4,1}$ $(v\ne -u)$: *a) при* $v=u^2$ *заменой с* $r_1=ur_2,\ \ s_2=0$ — *к* $SF_{11}^{4,1}$;
b) при $v=(1-2u)^2/8$ *заменой с* $r_1=(u-1/2)r_2,\ \ s_2=0$ — *к* $SF_5^{4,1}$;
c) при $v=(1-2u)/8$ *заменой с* $r_2=0,\ s_2=-2s_1$ — *к* $SF_{14}^{4,1}$;
d) при $u=\vartheta_3,\ v=\vartheta_4$ *заменой с* $r_1=\vartheta_5 r_2,\ s_1=\vartheta_6 s_2$ — *к* $SF_{13}^{4,1}$;
e) при $u=-1/2$ *заменой с* $s_1=-s_2/2,\ r_2=0$ — *к* $SF_{27}^{4,1}$;
18) $NSF_{30}^{4,1}$: *a) при* $u=-v^{-1}$ *заменой с* $r_1=-v^{-1}r_2,\ \ s_2=0$ — *к* $SF_{11}^{4,1}$;
b) при $u=(v^3-8)(4v)^{-1}$ *заменой с* $r_2=-vr_1/2,\ \ s_2=0$ — *к* $SF_5^{4,1}$;
c) при $u=3,\ v=-3$ *заменой с* $r_1=r_2,\ s_1=0$ — *к* $SF_{13}^{4,1}$;

d) при $u=2,\ v=3$ *заменой с* $r_1=-r_2,\ s_1=0$ *— к* $SF_{28}^{4,1}$;
19) $NSF_{32}^{4,1}$: *a) при* $u=-3$ *заменой с* $s_1=2s_1,\ r_2=-r_1$ *— к* $SF_{14}^{3,1}$;
b) при $u=3/8$ *заменой с* $r_2=2r_1,\ s_2=-s_1$ *— к* $SF_{5}^{4,1}$;
c) при $u=6$ *заменой с* $r_1=2r_2,\ s_2=-s_1$ *— к* $SF_{11}^{4,1}$;
d) при $u=-3/4$ *заменой с* $r_2=-r_1,\ s_2=2s_1$ *— к* $SF_{30}^{4,1}$;
20) $NSF_{33}^{4,1}$ $(v\neq u)$: *a) при* $u=1$ *заменой с* $r_2=0,\ s_2=-s_1$ *— к* $SF_{29}^{4,1}$;
b) при $v=(4u+1)/8$ *заменой с* $r_2=0,\ s_2=-2s_1$ *— к* $SF_{14}^{4,1}$;
c) при $v=(6u+1\pm(2u+1)(8u+1)^{1/2})/16$ *заменой с* $r_1=-(1\pm(8u+1)^{1/2})r_2/4$, $s_2=0$ *— к* $SF_{5}^{4,1}$;
21) $NSF_{36}^{4,1}$: *a) при* $u=-1/8$ *заменой с* $r_2=2r_1,\ s_2=-s_1$ *— к* $SF_{5}^{4,1}$;
b) при $u=4$ *заменой с* $r_1=2r_2,\ s_2=-s_1$ *— к* $SF_{11}^{4,1}$;
c) при $u=-2$ *заменой с* $s_1=4s_2/3,\ r_2=-r_1$ *— к* $SF_{12}^{4,1}$;
d) при $u=1\pm3\sqrt{2}/4$ *заменой с* $s_1=(1\pm1/\sqrt{2})s_2,\ r_2=-r_1$ *— к* $SF_{14}^{4,1}$;
e) при $u=1/4$ *заменой с* $r_2=-r_1,\ s_2=2s_1$ *— к* $SF_{30}^{4,1}$.

Доказательство находится в файле statement1.mw в хранилище (см. введение).

В дальнейшем: 1) запись «$\ldots\ \zeta=[\,\varsigma_1\vee\upsilon_1\,]\ \ldots\ \eta=[\,\varsigma_2\vee\upsilon_2\,]\ \ldots$» означает, что или $\zeta=\varsigma_1,\ \eta=\varsigma_2$, или $\zeta=\upsilon_1,\ \eta=\upsilon_2$; 2) запись «$\theta_*:\ \ P(\theta)$» означает, что θ_* — это любой вещественный нуль многочлена P; 3) при сведении $NSF_i^{m,1}$ из списка 2.1 к предшествующим формам замены выбираются с учетом утверждения 2.2.

Утверждение 3.2. *Только при указанных значениях параметров* $NSF_i^{5,1}$ *из списка* 2.1 *сводятся к предшествующим согласно одному из СП структурным формам:*
1) $NSF_3^{5,1}$ $(u\neq v)$: *a) при* $v=[\,u-3\vee3u-1\vee u+1,\ u\neq3\,]$ *заменой с* $r_2=-r_1$, $[\,s_1=0\vee s_2=0\vee s_2=(1-u)s_1/2\,]$ *— к* $SF_{14}^{4,1}$;
b) при $v=(u-1)^2u^{-1},\ u\neq-1$ *заменой с* $s_1=-s_2,\ r_2=ur_1$ *— к* $SF_{5}^{4,1}$;
c) при $v=2(u-1)$ *заменой с* $r_1=0,\ s_2=-s_1$ *— к* $SF_{7}^{4,1}$;
d) $[\,u=-1,v\neq-4\vee v=2u\,]$ *заменой с* $r_1=[\,(v/2+1)r_2\vee0\,],\ s_2=-s_1$ *— к* $SF_{11}^{4,1}$;
e) при $u=\vartheta_7,\ v=\vartheta_8$ *заменой с* $r_1=\vartheta_9r_2,\ s_1=\vartheta_{10}s_2$ *— к* $SF_{13}^{4,1}$;
f) при $v=4u,\ u\neq-1$ *заменой с* $r_1=ur_2,\ s_2=-s_1$ *— к* $SF_{19}^{4,1}$;
g) при $v=3(u+1),\ u\neq-5$ *заменой с* $s_1=(u+3)s_2/2,\ r_2=-r_1$ *— к* $SF_{27}^{4,1}$;
h) при $v=(2u^2+1\pm(2u+1)(5-4u)^{1/2})(2u+2)^{-1},\ (u,v)\neq(-5,-12)$ *заменой с* $r_2=-r_1,\ s_2=(3\pm(5-4u)^{1/2})s_1/2$ *— к* $SF_{29}^{4,1}$;
i) $v=u-1\pm2\sqrt{-u},\ u\neq-1$ *заменой с* $r_2=-r_1,\ s_2=\pm\sqrt{-u}s_1$ *— к* $SF_{30}^{4,1}$;
j) при $u=-(352\theta_*^5+396\theta_*^4+839\theta_*^3+1005\theta_*^2-1297\theta_*-105)/46,\ v=-(328\theta_*^5+438\theta_*^4+844\theta_*^3+1098\theta_*^2-1046\theta_*-366)/23$ *заменой с* $r_1=\theta_*r_2,\ s_2=-(4\theta_*^5+39\theta_*^4+49\theta_*^3+111\theta_*^2+31\theta_*-60)s_1/138$ *— к* $SF_{28}^{4,1}$, $\theta_*:\ 4\theta^6+7\theta^5+13\theta^4+18\theta^3-6\theta^2-9\theta-3$;
k) при $2u=\theta_*^2-2\theta_*+3,\ 2v=-3\theta_*^3+6\theta_*^2-11\theta_*$ *заменой с* $r_1=\theta_*r_2,\ s_1=-(\theta_*^3-\theta_*^2+3\theta_*+3)s_2/2$ *— к* $SF_{32}^{4,1}$, $\theta_*:\ \theta^4-\theta^3+2\theta^2+3\theta+3$;
l) $v=2(u+1)^2(u+2)^{-1},\ u\neq-3$ *заменой с* $r_2=-r_1,\ s_2=(u+2)s_1$ *— к* $SF_{33}^{4,1}$;
m) при $6u=-2\theta_*^3-\theta_*^2+4\theta_*-15,\ 3v=-4\theta_*^3-3\theta_*^2+8\theta_*-21$ *заменой с* $r_1=\theta_*r_2$, $s_1=-(2\theta_*^3+3\theta_*^2+9)s_2/6$ *— к* $SF_{36}^{4,1}$, $\theta_*:\ 2\theta^4+3\theta^3-3\theta^2+9\theta+9$;
2) $NSF_6^{5,1}(u\neq v)$: *a) при* $v=2-3u$ *заменой с* $r_1=2r_2,\ s_2=-s_1$ *— к* $SF_{5}^{4,1}$;
b) при $v=(3u-2)/2$ *заменой с* $r_2=0,\ s_2=-s_1$ *— к* $SF_{7}^{4,1}$;
c) при $v=(3u+1)/2$ *заменой с* $r_2=2r_1,\ s_2=-s_1$ *— к* $SF_{11}^{4,1}$;
d) при $v=[\,3u-1\vee1-u\pm2(u^2-u+1)^{1/2},\ (u,v)\neq(8/3,3)\,]$ *заменой с* $r_2=-r_1$, $[\,s_2=0\vee s_1=(u-2\mp(u^2-u+1)^{1/2})(u-1)^{-1}s_2\,]$ *— к* $SF_{14}^{4,1}$;
e) при $v=3u+3,\ u\neq-8/3$ *заменой с* $s_1=3(u+2)s_2/2,\ r_2=-r_1$ *— к* $SF_{27}^{4,1}$;

f) при $v=(-u^2-2u\pm(2u+1)(u^2+u+1)^{1/2})(u+1)^{-1},\ (u,v)\neq(-8/3,-5)$ *заменой с* $r_2=-r_1,\ s_2=(u+2\pm(u^2+u+1)^{1/2})s_1/3$ — *к* $SF_{29}^{4,1}$;
g) при $v=[\,u-1\vee-3u-1\,]$ *заменой с* $s_1=[\,0\vee 2s_2\,],\ r_2=-r_1$ — *к* $SF_{30}^{4,1}$;
h) при $v=(3u^2+4u+2)(2u+2)^{-1},\ u\neq-4/3$ *заменой с* $s_1=(u+2)(2u+2)^{-1}s_2$, $r_2=-r_1$ — *к* $SF_{33}^{4,1}$;
i) при $v=[\,(-1\mp\sqrt{3})(3u-1)\vee 1-u\pm(4u^2-3u+3)^{1/2},\ (u,v)\neq((14\pm4\sqrt{10})/9,(4\pm 2\sqrt{10})/3)\vee(2\theta_*^3-4\theta_*^2+4\theta_*+1)((\theta_*-2)(2\theta_*-1)\theta_*)^{-1},\ \theta_*\neq-1\,]$ *заменой с* $r_1=[\,(1\pm\sqrt{3})r_2/2\vee-r_2\vee\theta_*r_2\,],\ s_2=\langle\,0\vee-(4u^2-9u+1\pm2u(4u^2-3u+3)^{1/2})(15u-3)^{-1}s_1\vee(2\theta_*^2-2\theta_*-1)(3\theta_*)^{-1}s_1\,]$ — *к* $SF_{3}^{5,1}$, $\theta_*:\ 2(u-1)\theta^3-(5u-7)\theta^2+2(u-2)\theta-1$;
j) при $u=35/3,\ v=12$ *заменой с* $s_1=2s_2,\ r_2=-4r_1$ — *к* $SF_{13}^{4,1}$;
k) при $u=-35/3,\ v=-41/4$ *заменой с* $s_1=2s_2,\ r_2=-4r_1$ — *к* $SF_{28}^{4,1}$;
l) при $u=-7/12,\ v=3/2$ *заменой с* $r_1=2r_2,\ s_2=-4s_1$ — *к* $SF_{32}^{4,1}$;
m) при $u=-5/9,\ v=17/12$ *заменой с* $r_1=2r_2,\ s_2=-4s_1$ — *к* $SF_{36}^{4,1}$.
3) $NSF_7^{5,1}$ $(u\neq v):$ *a) при* $v=2u+3$ *заменой с* $r_1=0,\ s_2=-s_1$ — *к* $SF_{7}^{4,1}$;
b) при $u=(v-1)(v-3)(v-2)^{-1}$ *заменой с* $r_2=(2-v)r_1,\ s_2=-s_1$ — *к* $SF_{5}^{4,1}$;
c) при $v=[2u\vee 3-u]$ *заменой с* $r_1=[\,0\vee(u-1)r_2],\ s_2=-s_1$ — *к* $SF_{11}^{4,1}$;
d) при $u=\vartheta_{11},\ v=\vartheta_{11}-3$ *заменой с* $r_1=\vartheta_{12}r_2,\ s_1=-(\vartheta_{11}+3)s_2/6$ — *к* $SF_{13}^{4,1}$;
e) при $v=[\,u+3\vee 2u+2\pm(u^2+6u+1)^{1/2},\ (u,v)\neq(-6,-9)]$ *заменой с* $r_2=-r_1$, $s_1=[\,0\vee(u+3\pm(u^2+6u+1)^{1/2})s_2/2\,]$ — *к* $SF_{14}^{4,1}$;
f) при $v=3(u-1),\ u\neq6$ *заменой с* $s_1=(3-u)s_2/3,\ r_2=-r_1$ — *к* $SF_{27}^{4,1}$;
g) при $u=-18\theta_*^4-24\theta_*^3+25\theta_*^2-16\theta_*+4,\ v=-(261\theta_*^4+456\theta_*^3-187\theta_*^2+148\theta_*+23)/5$ *заменой с* $r_1=\theta_*r_2,\ s_2=(9\theta_*^4+39\theta_*^3+37\theta_*^2+2\theta_*+7)s_1/15$ — *к* $SF_{28}^{4,1}$, $\theta_*:$ $9\theta_*^5+21\theta^4+4\theta^3+3\theta^2+3\theta+1$;
h) при $v=(2u^2-2u+5\mp(2u-1)(1+4u)^{1/2})(2u-4)^{-1},\ (u,v)\neq(6,15)$ *заменой с* $r_2=-r_1,\ s_2=(3\pm(1+4u)^{1/2})s_1/2$ — *к* $SF_{29}^{4,1}$;
i) при $v=u+1\mp2(u+1)^{1/2}$ *заменой с* $r_2=-r_1,\ s_2=\pm(u+1)^{1/2}s_1$ — *к* $SF_{30}^{4,1}$;
j) при $u=\vartheta_{13},\ v=\vartheta_{14}$ *заменой с* $r_1=\vartheta_{15}r_2,\ s_1=\vartheta_{16}s_2$ — *к* $SF_{32}^{4,1}$;
k) $v=(2u^2-4u+3)(u-2)^{-1},\ u\neq3$ *заменой с* $r_2=-r_1,\ s_2=-(u-2)s_1$ — *к* $SF_{33}^{4,1}$;
l) при $u=-\theta_*^3-\theta_*+2,\ v=-6\theta_*^3-2\theta_*^2-5\theta_*+8$ *заменой с* $r_1=\theta_*r_2,\ s_2=-\theta_*^2s_1$ — *к* $SF_{36}^{4,1}$, $\theta_*:\ \theta^4+\theta^3+\theta^2-\theta-1$;
m) при $u=[\,v(3v-10\pm(v^2+12v-12)^{1/2})(4v-8)^{-1}\vee(-4\theta_*^2+2(v-1)\theta_*+2v-7)/3\,]$ *заменой с* $r_1=[\,0\vee(-2\theta_*^2+v\theta_*-2)r_2\,],\ s_2=\langle(v+2\pm(v^2+12v-12)^{1/2})s_1/4\vee\theta_*s_1\,]$ — *к* $SF_{3}^{5,1}$, $\theta_*:\ 2\theta^3-(v+2)\theta^2+2(v+1)\theta-3$;
n) при $u=(\theta_*^2-\theta_*-v+1)(\theta_*-1)^{-1}$ *заменой с* $r_1=\theta_*r_2,\ s_2=((2v-3)\theta_*+v)(\theta_*^2-(v-2)\theta_*-2)^{-1}s_1$ — *к* $SF_{6}^{5,1}$, $\theta_*:\ \theta^4-(2v-3)\theta^3+(v-3)(v+1)\theta^2+(3v^2-6v+4)\theta+v^2$;
4) $NSF_8^{5,1}$ $(w\neq v-u):$ *a) при* $v=-2$ *заменой с* $r_1=0,\ s_1=ws_2$ — *к* $SF_{27}^{4,1}$;
b) при $v=[\,(2u-1)/2\vee(2u-1)(3u-1)^{-1}\,],\ w=[\,(u-2)/4\vee-(2u-1)(3u-1)^{-2}\,]$ *заменой с* $r_1=[\,-r_2/2\vee-(3u-1)^{-1}r_2\,],\ s_2=[\,0\vee(3u-1)(u-1)(2u-1)^{-1}s_1\,]$ — *к* $SF_{3}^{4,1}$;
c) $w=v(uv-2u+1)(2u-1)^{-2}$ *заменой с* $s_1=0,\ r_2=(1-2u)v^{-1}r_1$ — *к* $SF_{5}^{4,1}$;
d) при $w=-v(u-1)^{-1}$ *заменой с* $s_1=0,\ r_2=-(u-1)v^{-1}r_1$ — *к* $SF_{11}^{4,1}$;
e) при $[\,v=(3u-1)/2,\ w=(3u-2)/4\vee u=(w^{3/2}\pm1)(w^{1/2}\mp2)^{-2}w^{-1/2},\ v=(2w+1)(\mp w^{1/2}+2)^{-1}\,]$ *заменой с* $s_1=[\,-s_2/2\vee\mp w^{1/2}s_2\,],\ r_2=[\,0\vee(-1\pm 2w^{1/2})w^{-1/2}(w^{1/2}\mp2)^{-1}r_1\,]$ — *к* $SF_{13}^{4,1}$;
f) при $w=v(v-2)(4u-4)^{-1}$ *заменой с* $r_1=0,\ s_1=(2-v)(2u-2)^{-1}s_2$ — *к* $SF_{14}^{4,1}$;
g) при $w=v$ *заменой с* $r_1=vr_2,\ s_1=0$ — *к* $SF_{19}^{4,1}$;
h) при $u=-((16w+18)\theta_*^2+(4w^2-2w)\theta_*+w^3+14w^2+30w+9)w^{-1}(w+6)^{-2},\ v=(w\theta_*^2-2w\theta_*+w^2+4w-3)(w+6)^{-1}$ *заменой с* $s_1=\theta_*s_2,\ r_2=(6\theta_*^2+2w\theta_*+2w+$

3) $(w(w+6))^{-1}r_1$ — κ $SF^{4,1}_{28}$, $\theta_*:\ 2\theta^3+(2w+1)\theta+w$;
i) при $w=(v+2)(uv+v-2u)(2u+1)^{-2}$ *заменой с* $r_1=0,\ s_1=-(v+2)(2u+1)^{-1}s_2$ — κ $SF^{4,1}_{29}$;
j) при $w=v^2(4u)^{-1}$ *заменой с* $r_1=0,\ s_1=-v(2u)^{-1}s_2$ — κ $SF^{4,1}_{30}$;
k) при $u=(v^2+2\mp(v+1)\varrho)(3v-6)^{-1},\ w=-(v+1)(v\pm\varrho)$ *заменой с* $r_1=(v\pm\varrho)r_2$, $s_1=(-v-2\mp2\varrho)s_2/3$, *где* $\varrho=(v^2+v-2)^{1/2}$, — κ $SF^{4,1}_{32}$;
l) при $w=-(v+1)u^{-1}$ *заменой с* $r_1=0,\ s_1=-(v+1)u^{-1}s_2$ — κ $SF^{4,1}_{33}$;
m) при $v=-(2u^2+4u+1)(3u+1)^{-1}(u+1)^{-1},\ w=-(5u^2+4u+1)(3u+1)^{-2}(u+1)^{-1}$ *заменой с* $s_1=-(2u+1)(3u+1)^{-1}(u+1)^{-1}s_2,\ r_2=(3u+1)r_1$ — κ $SF^{4,1}_{36}$;
n) при $[\,v=-(w\theta_*^2-\theta_*+u-1)\theta_*^{-1}\vee w=v(2uv-3u+1)(3u-1)^{-2}\vee w=(2v-u-1)/4\,]$ *заменой с* $r_2=[\,\theta_*r_1\vee(1-3u)v^{-1}r_1\vee0\,],\ s_2=[\,(u-1)(w\theta_*)^{-1}s_1\vee0\vee-2s_1\,]$ — κ $SF^{5,1}_{3}$, $\theta_*:\ w^2\theta^3-w\theta^2-w(u+1)\theta-u+1$;
o) при $w=[\,v-3u/4\ \vee\ -((v-1)\theta_*+u-1)\theta_*^{-2}\,]$ *заменой с* $r_2=[\,0\vee\theta_*r_1\,]$, $s_2=[\,-2s_1\vee-\theta_*(v\theta_*+3u-1)(v\theta_*+u-1)^{-1}s_1\,]$ — κ $SF^{5,1}_{6}$, $\theta_*:\ v^2\theta^3+(v^2+2uv-2v)\theta^2+(6uv-2v-3u^2-2u+1)\theta+5u^2-6u+1$;
p) при $[\,w=v(3uv-3u+1)(3u-1)^{-2}\ \vee\ u=(v^2-v+7)/9,\ w=2\ \vee\ u=((13v-16w-6)\theta_*^2+(4vw-v^2-2w+2v-3)\theta_*+8w^2-2vw+3w)(3\theta_*)^{-2}\,]$ *заменой с* $r_1=[\,-v(3u-1)^{-1}r_2\vee-r_2\vee\theta_*r_2\,],\ s_2=[\,0\vee(v-2)s_1/3\vee-(\theta_*^2+(2v-1)\theta_*+w)(3w\theta_*)^{-1}s_1\,]$ — κ $SF^{5,1}_{7}$, $\theta_*:\ \theta^3+(2v-4w-1)\theta^2+w(v-1)\theta+2w^2$.

Доказательство находится в файле statement2.mw в хранилище (см. введение).

Следствие 3.1. *В списке* 1.1 *указаны канонические формы со своими каноническими множествами систем с* $l=1$.

Доказательство. Канонические множества для каждой формы из списка 1.1 были получены путем удаления всех тех значений параметров из допустимого множества, при которых в соответствующем пункте утверждений 2.1 и 2.2 выбранная форма сводится к предшествующей. Все полученные канонические множества являются непустыми, поэтому каждая форма списка — каноническая. □

Утверждение 3.3. *Только в следующих* $CF^{m,1}$ *из списка* 2.1 *удается ограничить значения параметров в* $cs^{m,1}$, *а именно:* 1) *в* $CF^{3,1}_3$ *при* $u=2$ *замена с* $r_1=-1, s_1=0,\ r_2, s_2=1$, *а в* $CF^{3,1}_{14,\kappa}$ *замена с* $-r_1, s_2=-1,\ s_1,\ r_2=0$ *изменяют знак* σ; 2) *в* $CF^{3,1}_5$ *при* $u_*=u<1$ *замена с* $r_1=1,\ s_1=1-u_*,\ r_2=0,\ s_2=1$ *дает* $u=2-u_*$ $(u>1,\ u\neq2)$; 3) *в* $CF^{4,1}_1$ *при* $\sigma_*=\sigma,\ u_*=u$ *замена с* $r_1,\ s_2=0,\ s_1,\ r_2=|u_*|^{-1/2}$ *дает* $\sigma=\sigma_*\operatorname{sign}u_*,\ u=u_*^{-1}$; 4) *в* $CF^{4,1}_7$ $(v\neq2-u^{-1})$ *при* $\sigma_*=\sigma$ $u_*=u$ *замена с* $r_1=|v-1|^{1/2}|u_*v-2u_*+1|^{-1/2},\ s_1=0,\ r_2=(1-u_*)(v-1)^{-1}r_1,\ s_2=(v-1)^{-1}(u_*v-2u_*+1)r_1$ *дает* $\sigma=\sigma_*\operatorname{sign}((v-1)(u_*v-2u_*+1))$, $u=(v-u_*)(u_*v-2u_*+1)^{-1}$ *и тем же* v.

Следствие 3.2. *В силу определения* 1.12 *из* [2] *имеем:* $acs^{3,1}_3=\{\sigma=-1$ *при* $u=2\}$, $acs^{3,1}_5=\{u<1\}$, $acs^{3,1}_{14,\kappa}=\{\sigma=-1\}$, $acs^{4,1}_1=\{|u|>1\}$, $acs^{4,1}_7=\{u<1$ *при* $v\neq1\}$, *у остальных канонических форм из списка* 2.1 $mcs^{m,1}=cs^{m,1}$.

Набор 3.1. Константы, многочлены и замены, используемые в дальнейшем:
1) $\varkappa_1=\tilde p_1^2-4\tilde p_2,\ \ \varkappa_2=\tilde p_1(1+|\tilde p_1^{-1}|\varkappa_1^{1/2})$;
2) $\varkappa_3=\tilde p_2(\tilde q_1-2)^2-\tilde q_2^2,\ \ \varkappa_4=\tilde q_2^2+4\tilde p_2,\ \ \varkappa_5=\tilde q_2(1+|\tilde q_2|^{-1}\varkappa_4^{1/2})$,
$\varkappa_6=\tilde q_2^2+4\tilde p_2(\tilde q_1-1),\ \ \varkappa_7=-\tilde q_2(1+|\tilde q_2|^{-1}\varkappa_6^{1/2})(2\tilde p_2)^{-1},\ \ \varkappa_8=\tilde q_1-(\varkappa_6+|\tilde q_2|\varkappa_6^{1/2})(2\tilde p_2)^{-1}$;
3$_{\mathrm{I}}$) $\varkappa_9=\tilde t_2^2+\tilde p_1\tilde t_1+\tilde q_1\tilde t_2,\ \ \varkappa_{10}=\tilde q_1+2\tilde t_2,\ \ \varkappa_{11}=\tilde q_2\tilde t_1-\tilde p_1\tilde t_1-\tilde q_1\tilde t_2,\ \ \varkappa_{12}=\tilde q_2\tilde t_1-\tilde q_1\tilde t_2$,
$\varkappa_{13}=\tilde p_1\tilde t_1-\tilde t_2^2,\ \varkappa_{14}=2\tilde t_2^2+\tilde q_2\tilde t_1-\tilde p_1\tilde t_1,\ \varkappa_{15}=2\tilde t_2^2+\tilde q_2\tilde t_1,\ \varkappa_{16}=\tilde t_2^2+\tilde q_2\tilde t_1,\ \varkappa_{17}=\tilde q_1^2-4\tilde p_1\tilde t_1$,
$\varkappa_{18}=4\tilde p_1\tilde t_1-\tilde q_1^2+2\tilde q_1\tilde t_2-4\tilde q_2\tilde t_1,\ \ \varkappa_{19}=4\tilde p_1\tilde t_1-\tilde q_1^2-2\tilde q_1\tilde t_2,\ \ \varkappa_{20}=\tilde q_1\tilde t_2-2\tilde q_2\tilde t_1$,

$\varkappa_{21}^{\pm}=-\tilde q_1\pm\varkappa_{17}^{1/2},\ \ \varkappa_{22}^{\pm}=\tilde q_1^2-4\tilde p_1\tilde t_1+\tilde q_1\tilde t_2\pm(\tilde q_1+\tilde t_2)\varkappa_{17}^{1/2},\ \ \varkappa_{23}^{\pm}=\varkappa_{10}\pm\varkappa_{17}^{1/2},$
$\varkappa_{24}^{\pm}=4\tilde p_1\tilde t_1-\tilde q_1^2-2\tilde q_1\tilde t_2+2\tilde q_2\tilde t_1\pm\varkappa_{10}\varkappa_{17}^{1/2},\ \ \varkappa_{25}=(2\tilde t_2-\tilde q_1)^2+8\tilde q_2\tilde t_1,$
$\varkappa_{26}^{\pm}=\varkappa_{10}\pm\varkappa_{25}^{1/2},\ \ \varkappa_{27}^{\pm}=2\tilde t_2-\tilde q_1\pm\varkappa_{25}^{1/2},\ \ \varkappa_{28}^{\pm}=8\tilde p_1\tilde t_1-\tilde q_1^2+2\tilde q_1\tilde t_2-4\tilde q_2\tilde t_1\pm\tilde q_1\varkappa_{25}^{1/2},$
$\varkappa_{29}^{\pm}=8\tilde p_1\tilde t_1-\tilde q_1^2+4\tilde q_2\tilde t_1+4\tilde t_2^2\pm\varkappa_{10}\varkappa_{25}^{1/2},\ \ \varkappa_{30}^{\pm}=4\tilde q_2\tilde t_1-\tilde q_1\tilde t_2+2\tilde t_2^2\pm\tilde t_2\varkappa_{25}^{1/2};$
$3_{\mathrm{II}})$ $\ \varkappa_{31}=\tilde t_2^2+4\tilde p_1\tilde t_1,\ \varkappa_{32}^{\pm}=\tilde t_2\pm\varkappa_{31}^{1/2},\ \ \varkappa_{33}^{\pm}=(\tilde q_2\tilde t_1)^{1/2}\pm2\tilde t_2,\ \varkappa_{34}^{\pm}=(\tilde q_2\tilde t_1)^{1/2}\pm\tilde t_2,$
$\varkappa_{35}^{\pm}=\tilde q_2\tilde t_1\pm(\tilde q_2\tilde t_1)^{1/2}\tilde t_2+\tilde t_2^2,\ \ \varkappa_{36}=9\theta_*-2\tilde q_1^2+\tilde q_1\tilde t_2+\tilde t_2^2,\ \ \varkappa_{37}=3\theta_*-\tilde q_1^2-\tilde q_1\tilde t_2-\tilde t_2^2,$
$\varkappa_{38}=9\theta_*^2-3(\tilde q_1^2-2\tilde q_1\tilde t_2-2\tilde t_2^2)\theta_*-\tilde t_2(2\tilde q_1+\tilde t_2)(2\tilde q_1^2+4\tilde q_1\tilde t_2+3\tilde t_2^2)+\tilde q_2\tilde t_1\varkappa_{10}^2,$
$\varkappa_{39}=\theta_*+\tilde q_1\tilde t_2+\tilde t_2^2,\ \ \varkappa_{40}=\tilde q_1^2+\tilde q_1\tilde t_2-2\tilde t_2^2,\ \ \varkappa_{41}^{\pm}=(2\tilde q_1+\tilde t_2\pm\varkappa_{40}^{1/2})(\tilde q_1+\tilde t_2)/3,$
$\varkappa_{42}^{\pm}=\varkappa_{41}^{\pm}+\tilde q_1\tilde t_2+\tilde t_2^2,\ \ \varkappa_{43}^{\pm}=3\varkappa_{41}^{\pm}-\tilde q_1^2-\tilde q_1\tilde t_2-\tilde t_2^2,\ \ \varkappa_{44}=\tilde q_1^2+3\tilde q_1\tilde t_2+2\tilde t_2^2,$
$\varkappa_{45}^{\pm}=(\tilde q_1+\tilde t_2\pm\varkappa_{44}^{1/2})(2\tilde q_1+3\tilde t_2),\ \varkappa_{46}^{\pm}=\varkappa_{45}^{\pm}+2\tilde q_1^2+9\tilde t_2(\tilde q_1+\tilde t_2),\ \varkappa_{47}^{\pm}=\varkappa_{45}^{\pm}+\tilde q_1\tilde t_2+\tilde t_2^2;$
$\varkappa_{48}=\tilde q_1\tilde q_2+\tilde t_2(\tilde q_2-3\tilde p_1),\ \ \varkappa_{49}=3\tilde p_1\tilde t_2-\tilde q_2(2\tilde q_1+\tilde t_2),\ \ \varkappa_{50}=4\tilde p_1\tilde t_1-\tilde q_1^2+\tilde t_2^2,$
$\varkappa_{51}=\tilde p_1\tilde t_1-\tilde q_1\tilde t_2+\tilde t_2^2,\ \ \varkappa_{52}=\tilde p_1\tilde t_1+\tilde q_1\tilde t_2-\tilde q_1^2,\ \ \varkappa_{53}=\tilde q_1\tilde t_2-\tilde q_2\tilde t_1,\ \ \varkappa_{54}=2\tilde q_1\tilde t_2-4\tilde q_2\tilde t_1-\tilde t_2^2,$
$\varkappa_{55}=\tilde t_1^2\theta_*^4+\tilde t_1(\tilde t_2+\tilde q_1)\theta_*^3+(5\tilde q_1\tilde t_2-2\tilde t_2^2-7\tilde q_2\tilde t_1-2\tilde q_1^2)\theta_*^2+\tilde q_2(\tilde t_2+\tilde q_1)\theta_*+\tilde q_2^2,$
$\varkappa_{56}=4\tilde t_1\theta_*^2+(2\tilde q_1-\tilde t_2)\theta_*+\tilde q_2,\ \ \varkappa_{57}=\tilde t_1\tilde t_2\theta_*^2+(2\tilde q_1\tilde t_2-3\tilde q_2\tilde t_1-\tilde t_2^2)\theta_*+\tilde q_2\tilde t_2,$
$\varkappa_{58}=2\tilde t_1^2\theta_*^3+\tilde t_1(\tilde q_1-\tilde t_2)\theta_*^2+(2\tilde q_1\tilde t_2-4\tilde q_2\tilde t_1-\tilde t_2^2)\theta_*+\tilde q_2\tilde t_2,$
$\varkappa_{59}=2\tilde t_1^2\theta_*^4+5\tilde t_1(\tilde q_1+\tilde t_2)\theta_*^3+(2\tilde q_1^2+10\tilde q_2\tilde t_1-5\tilde q_1\tilde t_2+2\tilde t_2^2)\theta_*^2-\tilde q_2(\tilde q_1+\tilde t_2)\theta_*-\tilde q_2^2,$
$\varkappa_{60}=3\tilde p_1\tilde q_1+(\tilde q_2-3\tilde p_1)\tilde t_2,\ \ \varkappa_{61}=\tilde q_1\tilde q_2+(\tilde q_2-3\tilde p_1)\tilde t_2,$
$\varkappa_{62}=\tilde t_1\tilde t_2\theta_*^3+(5\tilde t_1\tilde q_2+2\tilde t_2^2-4\tilde q_1\tilde t_2)\theta_*^2-\tilde q_2(2\tilde q_1+\tilde t_2)\theta_*-\tilde q_2^2,\ \ \varkappa_{63}=2\tilde t_1\theta_*^2+(\tilde q_1-2\tilde t_2)\theta_*-\tilde q_2;$
$S_1(\theta)=27\theta^3-3(7\tilde q_1+5\tilde t_2)(\tilde q_1-\tilde t_2)\theta^2+(\tilde q_1^2-4\tilde q_1\tilde t_2-3\tilde t_2^2)(2\tilde q_1+\tilde t_2)^2\theta+\tilde t_2(\tilde q_1+\tilde t_2)(\tilde q_1^2+$
$\tilde q_1t_2+\tilde t_2^2)(2\tilde q_1+\tilde t_2)^2;\quad S_2(\theta)=\tilde t_1\tilde t_2\theta^3+(5\tilde q_2\tilde t_1-4\tilde q_1\tilde t_2+2\tilde t_2^2)\theta^2-\tilde q_2(2\tilde q_1+\tilde t_2)\theta-\tilde q_2^2,$
$S_3(\theta)=2\tilde t_1^2\theta^3+(\tilde q_1-\tilde t_2)\tilde t_1\theta^2+(2\tilde q_1\tilde t_2-4\tilde q_2\tilde t_1-\tilde t_2^2)\theta+\tilde t_2\tilde q_2;$
$J_0^1=\{r_1=1,\,s_1=-\beta,\,r_2=0,\,s_2=1\},$
$J_1^1=\{r_1=1,\,s_1=0,\,r_2=-\hat q_2(2\hat t_2)^{-1},\,s_2=\hat t_2^{-1}\},$
$J_2^1=\{r_1=1,\,s_1=0,\,r_2=-\hat p_1\hat q_1^{-1},\,s_2=\hat t_2^{-1}\},\quad J_3^1=\{r_1=1,\,s_1=0,\,r_2=\theta_*,\,s_2=1\};$
1) $L_2^{2,1}=\{r_1=|\tilde p_1|^{-1/2},\ s_1,r_2=0,\ s_2=\tilde p_1r_1\};$
$L_5^{3,1}=\{r_1=0,\ s_1=|\tilde p_1|^{-1/2},\ r_2=\tilde p_1s_1,\ s_2=\varkappa_2s_1/2\};$
$L_8^{3,1}=\{r_1,s_2=0,\ s_1=|\tilde p_1|^{-1/2},\ r_2=\tilde p_2\tilde p_1^{-1}s_1\};$
2) $L1_3^{3,1}=\{r_1=(\tilde q_1-2)(\tilde q_1\tilde q_2)^{-1}s_2,\ s_1=0,\ r_2=\tilde q_1^{-1}s_2,\ s_2=|\tilde q_1\tilde q_2|^{1/2}|\tilde q_1-2|^{-1/2}\},$
$L2_3^{3,1}=\{r_1=(4\tilde p_2)^{-1/4},\ s_1=0,\ r_2=\tilde p_2^{1/2}r_1,\ s_2=(4\tilde p_2)^{1/4}\};$
$L_{14,\kappa}^{3,1}=\{r_1,s_2=0,\ s_1=|\tilde p_2|^{-1/4}|\tilde q_1|^{3/4}\tilde q_1^{-1},\ r_2=|\tilde p_2|^{1/4}|\tilde q_1|^{-3/4}\},$
$L1_7^{4,1}=\{r_1=|\tilde q_2|^{-1/2},\ s_1=0,\ r_2=\varkappa_5r_1/2,\ s_2=\tilde q_2r_1\},$
$L2_7^{4,1}=\{r_1=\varkappa_7r_2,\ s_1=0,\ r_2=|\varkappa_7\varkappa_8|^{-1/2},\ s_2=\varkappa_8r_2\},$
$L_{12}^{4,1}=\{r_1=0,\ s_1=|\tilde q_1-2|^{1/2}|\tilde q_1\tilde q_2|^{-1/2},\ r_2,s_2=\tilde q_2(\tilde q_1-2)^{-1}s_1\},$
$L_{24}^{4,1}=\{r_1,s_2=0,\ s_1=|\tilde q_2|^{-1/2},\ r_2=\tilde q_2s_1/2\},$
$3_{\mathrm I})$ $L_9^{2,1}=\{r_1=-\tilde t_1|\tilde t_1|^{-1/2}\tilde t_2^{-1},\ s_1=0,\ r_2=\tilde t_1^{-1}\tilde t_2r_1,\ s_2=|\tilde t_1|^{-1/2}\},$
$L1_6^{3,1}=\{r_1=2\tilde t_1\varkappa_{10}^{-1}|\tilde t_1|^{-1/2},\ s_1=0,\ r_2=-\tilde q_1(2\tilde t_1)^{-1}r_1,\ s_2=|\tilde t_1|^{-1/2}\},$
$L2_6^{3,1}=\{r_1=\tilde t_1|\tilde t_1|^{-1/2}\tilde t_2^{-1},\ s_1,r_2=0,\ s_2=|\tilde t_1|^{-1/2}\},$
$L1_{11,\kappa}^{3,1}=\{r_1=|\tilde q_2|^{-1/2},\ s_1,r_2=0,\ s_2=|\tilde t_1|^{-1/2}\},$
$L2_{11,\kappa}^{3,1}=\{r_1=|\tilde p_1|^{-1/2},\ s_1=0,\ r_2=\tilde t_1^{-1}\tilde t_2r_1,\ s_2=|\tilde t_1|^{-1/2}\};$
$L_{17}^{3,1}=\{r_1=-(\tilde p_1\tilde t_2)^{-1/3}|\tilde t_1|^{1/6},\ s_1=0,\ r_2=\tilde t_1^{-1}\tilde t_2r_1,\ s_2=|\tilde t_1|^{-1/2}\};$
$L_{19}^{3,1}=\{r_1=0,\ s_1=-2^{2/3}|\tilde t_1|^{5/6}(\tilde q_1^2\tilde t_1\tilde t_2)^{-1/3},\ r_2=|\tilde t_1|^{-1/2},\ s_2=-\tilde q_1(2\tilde t_1)^{-1}s_1\};$
$L_{21}^{3,1}=\{r_1=\tilde t_1|\tilde t_1|^{-1/2}(\tilde t_2^2(\tilde q_1+\tilde t_2))^{-1/3},\ s_1=0,\ r_2=\tilde t_1^{-1}\tilde t_2r_1,\ s_2=|\tilde t_1|^{-1/2}\};$
$L_{22}^{3,1}=\{r_1=0,\ s_1=\tilde t_1(\varkappa_{16}\tilde t_2)^{-1/3}|\tilde t_1|^{-1/2},\ r_2=|\tilde t_1|^{-1/2},\ s_2=\tilde t_1^{-1}\tilde t_2s_1\};$
$L1_5^{4,1}=\{r_1=4(\varkappa_{26}^{\mp})^{-1}\tilde t_1^{-1}|\tilde t_1|^{-1/2},\ s_1=0,\ r_2=\varkappa_{27}^{\pm}(4\tilde t_1)^{-1}r_1,\ s_2=|\tilde t_1|^{-1/2}\},$
$L2_5^{4,1}=\{r_1=\tilde t_1\tilde t_2^{-1}|\tilde t_1|^{-1/2},\ s_1,r_2=0,\ s_2=|\tilde t_1|^{-1/2}\};$
$L1_{11}^{4,1}=\{r_1=|\tilde q_2|^{-1/2},\ s_1,r_2=0,\ s_2=\tilde q_1^{-1}\tilde q_2|\tilde q_2|^{-1/2}\},$

$L2_{11}^{4,1}=\{r_1=|\varkappa_{12}|^{-1/2}|\tilde t_1|^{1/2},\ s_1=0,\ r_2=\tilde t_1^{-1}\tilde t_2 r_1,\ s_2=\varkappa_{12}\tilde t_1^{-1}\varkappa_{10}^{-1}r_1\}$;
$L1_{14}^{4,1}=\{r_1=0,\ s_1=2\tilde t_1\varkappa_{10}^{-1}|\tilde t_1|^{-1/2},\ r_2=|\tilde t_1|^{-1/2},\ s_2=-\tilde q_1(2\tilde t_1)^{-1}s_1\}$,
$L2_{14}^{4,1}=\{r_1,s_2=0,\ s_1=\tilde t_1|\tilde t_1|^{-1/2}\tilde t_2^{-1},\ r_2=|\tilde t_1|^{-1/2}\}$;
$L_{19}^{4,1}=\{r_1=-|\tilde t_1|^{1/6}(\tilde p_1\tilde t_2)^{-1/3},\ s_1=0,\ r_2=\tilde t_1^{-1}\tilde t_2 r_1,\ s_2=|\tilde t_1|^{-1/2}\}$;
$L_{27}^{4,1}=\{r_1=0,\ s_1=|\tilde t_1|^{5/6}(\varkappa_{14}\tilde t_1\tilde t_2)^{-1/3},\ r_2=|\tilde t_1|^{-1/2},\ s_2=\tilde t_1^{-1}\tilde t_2 s_1\}$;
$L_{29}^{4,1}=\{r_1=0,\ s_1=\pm\varkappa_{17}^{-1/2}\tilde t_1|\tilde t_1|^{-1/2},\ r_2=|\tilde t_1|^{-1/2},\ s_2=\varkappa_{21}^{\pm}(2\tilde t_1)^{-1}s_1\}$;
$L_{30}^{4,1}=\{r_1=0,\ s_1=2|\tilde t_1|^{5/6}(2\varkappa_{20}\tilde t_1\tilde q_1)^{-1/3},\ r_2=|\tilde t_1|^{-1/2},\ s_2=-\tilde q_1(2\tilde t_1)^{-1}s_1\}$;
$L_{33}^{4,1}=\{r_1=0,\ s_1=\tilde t_1\varkappa_{10}^{-1}|\tilde t_1|^{-1/2},\ r_2=|\tilde t_1|^{-1/2},\ s_2=\tilde t_1^{-1}\tilde t_2 s_1\}$;
$L_8^{5,1}=\{r_1=|\tilde q_2|^{-1/2},\ s_1,r_2=0,\ s_2=\tilde q_2|\tilde q_2|^{-1/2}\tilde t_2^{-1}\}$;
3_{II}) $L1_1^{4,1}=\{r_1=s_1,\ s_1=\varkappa_{31}^{-1/4}|2\tilde t_1(\varkappa_{32}^{\pm})^{-1}|^{1/2},\ r_2=\varkappa_{32}^{\mp}(2\tilde t_1)^{-1}s_1,$
$s_2=\varkappa_{32}^{\pm}(2\tilde t_1)^{-1}s_1\}$,
$L2_1^{4,1}=\{r_1=s_1,\ s_1=|\tilde p_1|^{-1/2},\ r_2=\varkappa_{32}^{\pm}(2\tilde t_1)^{-1}s_1,\ s_2=0\}$;
$L1_3^{4,1}=\{r_1=s_1,\ s_1=|(3\tilde q_1-\tilde t_2)(\tilde q_1-\tilde t_2)\tilde t_1^{-1}|^{-1/2},\ r_2=\tilde q_1\tilde t_1^{-1}s_1,\ s_2=(\tilde t_2-2\tilde q_1)\tilde t_1^{-1}s_1\}$,
$L2_3^{4,1}=\{r_1=s_1,\ s_1=\sqrt{3}\,|(2\tilde q_1-3\tilde t_2)\tilde t_2\tilde t_1^{-1}|^{-1/2},\ r_2=0,\ s_2=-(2\tilde q_1-3\tilde t_2)(3\tilde t_1)^{-1}s_1\}$,
$L3_3^{4,1}=\{r_1=s_1,\ s_1=4|(2\tilde q_1-3\tilde t_2)(2\tilde q_1+\tilde t_2)\tilde t_1^{-1}|^{-1/2},\ r_2=-(2\tilde q_1-3\tilde t_2)(4\tilde t_1)^{-1}s_1,$
$s_2=0\}$;
$L1_{13}^{4,1}=\{r_1=s_1,\ s_1=2\,|(2\tilde q_1-\tilde t_2)\tilde t_2\tilde t_1^{-1}|^{-1/2},\ r_2=0,\ s_2=-(2\tilde q_1-\tilde t_2)(2\tilde t_1)^{-1}s_1\}$,
$L2_{13}^{4,1}=\{r_1=s_1,\ s_1=\pm(\tilde q_2\tilde t_1)^{1/2}\tilde q_2^{-1}s_2,\ r_2=-(2(\tilde q_2\tilde t_1)^{1/2}\pm\tilde t_2)(\varkappa_{33}^{\pm})^{-1}s_2,$
$s_2=(\tilde q_2\tilde t_1)^{1/4}\varkappa_{33}^{\pm}(3\varkappa_{35}^{\pm})^{-1/2}|\varkappa_{34}^{\pm}\tilde t_1|^{-1/2}\}$;
$L_{28}^{4,1}=\{r_1=s_1,\ s_1=\varkappa_{10}|\varkappa_{39}\varkappa_{36}\tilde t_1^{-1}|^{-1/2},\ r_2=-(3\theta_*+2\tilde q_1\tilde t_2+\tilde t_2^2)(\tilde t_1\varkappa_{10})^{-1}s_1,$
$s_2=(6\theta_*-\tilde q_1\tilde t_2-2\tilde q_1^2)(\tilde t_1\varkappa_{10})^{-1}s_1\}$;
$L_{32}^{4,1}=\{r_1=s_1,s_1=|\tilde t_1|^{1/2}|\varkappa_{42}^{\pm}|^{-1/2},r_2=-(\tilde q_1+\tilde t_2)\tilde t_1^{-1}s_1,$
$s_2=(3\varkappa_{41}^{\pm}-\tilde q_1^2+\tilde t_2^2)(\tilde t_1\varkappa_{10})^{-1}s_1\}$;
$L_{36}^{4,1}=\{r_1=s_1,\ s_1=|\tilde t_1|^{1/2}|\varkappa_{46}^{\pm}|^{-1/2},\ r_2=-(2\tilde q_1+3\tilde t_2)\tilde t_1^{-1}s_1,$
$s_2=(\varkappa_{45}^{\pm}+2\tilde q_1\tilde t_2+3\tilde t_2^2)(\tilde t_1\varkappa_{10})^{-1}s_1\}$;
$L1_3^{5,1}=\{r_1,s_1=|\tilde p_1|^{-1/2},\ r_2=(\tilde q_2-3\tilde p_1)\tilde q_1^{-1}s_1,\ s_2=0\}$,
$L2_3^{5,1}=\{r_1,s_1=|\tilde q_2|^{-1/2},\ r_2=0,\ s_2=-2\tilde q_2\tilde t_2^{-1}s_1\}$,
$L3_3^{5,1}=\{r_1,s_1=(\tilde q_1-\tilde t_2)|\varkappa_{50}\tilde p_1|^{-1/2},\ r_2=-(2\tilde p_1\tilde t_1-\tilde q_1\tilde t_2+\tilde t_2^2)(\tilde t_1(\tilde q_1-\tilde t_2))^{-1}s_1,$
$s_2=(2\tilde p_1\tilde t_1+\tilde q_1\tilde t_2-\tilde q_1^2)(\tilde t_1(\tilde q_1-\tilde t_2))^{-1}s_1\}$;
$L1_6^{5,1}=\{r_1,s_1=|\tilde q_2|^{-1/2},\ r_2=0,\ s_2=-2\tilde q_2\tilde t_2^{-1}s_1\}$,
$L2_6^{5,1}=\{r_1,s_1=3\theta_*|\varkappa_{59}\tilde t_1^{-1}|^{-1/2},\ r_2=-(\tilde t_1\theta_*^2+(2\tilde q_1-\tilde t_2)\theta_*+\tilde q_2)(3\tilde t_1\theta_*)^{-1}s_1,\ s_2=\theta_* s_1\}$;
$L1_7^{5,1}=\{r_1,s_1=|\tilde p_1|^{-1/2},\ r_2=(\tilde q_2-3\tilde p_1)\tilde q_1^{-1}s_1,\ s_2=0\}$,
$L2_7^{5,1}=\{r_1,s_1=\sqrt{3}|\varkappa_{63}|^{-1/2},\ r_2=\theta_* s_1,\ s_2=-(\tilde t_1\theta_*^2+(2\tilde q_1-\tilde t_2)\theta_*+\tilde q_2)(3\tilde t_1\theta_*)^{-1}s_1\}$.

4. Три класса линейной эквивалентности систем при $l=1$. Система $(2.1)^1$ $\dot x=A\,q^{[3]}(x)$ при $l=1$ согласно $(2.10)^1$ однозначно представима в виде $(2.9)^1$:

$$\dot x=(x_1+\beta x_2)\begin{pmatrix}p_1x_1^2+q_1x_1x_2+t_1x_2^2\\ p_2x_1^2+q_2x_1x_2+t_2x_2^2\end{pmatrix}=P_0^1(x)\,G\,q^{[2]}(x),\quad G=\begin{pmatrix}p_1&q_1&t_1\\ p_2&q_2&t_2\end{pmatrix},\ (4.1)$$

причем у нее $R_2=\delta_{pt}^2-\delta_{pq}\delta_{qt}\neq0$, так как $l=1$, а значит, $p_1^2+p_2^2\neq0$ и $t_1^2+t_2^2\neq0$.

Замена J_0^1 из набора 2.1 преобразует (4.1) в существенно более простую систему

$$\widehat A=\begin{pmatrix}\hat a_1&\hat b_1&\hat c_1&\hat d_1\\ \hat a_2&\hat b_2&\hat c_2&\hat d_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat p_1&\hat q_1&\hat t_1&0\\ \hat p_2&\hat q_2&\hat t_2&0\end{pmatrix},\ (\hat\alpha,\hat\beta)=(1,0),\ \widehat G=\begin{pmatrix}\hat p_1&\hat q_1&\hat t_1\\ \hat p_2&\hat q_2&\hat t_2\end{pmatrix},\ (4.2)$$

в которой $\hat p_1=p_1+\beta p_2,\ \hat q_1=q_1+\beta(q_2-2p_1)-2\beta^2p_2,\ \hat t_1=t_1+\beta(t_2-q_1)-\beta^2q_2+\beta^3p_2,$ $\hat p_2=p_2,\ \hat q_2=q_2-2\beta p_2,\ \hat t_2=t_2-\beta q_2+\beta^2p_2\ \ (\hat p_1^2+\hat p_2^2\neq0,\ \hat t_1^2+\hat t_2^2\neq0,\ \widehat R_2=R_2\neq0)$, так как согласно (2.12)[1] при любой замене (2.2)[1] $x = Ly$ матрица $\widehat{G} = L^{-1}GM$, $\widehat{R}_2 = \delta^2_{\hat{p}\hat{t}} - \delta_{\hat{p}\hat{q}}\delta_{\hat{q}\hat{t}} = \delta^2 R_2$, $\hat{\alpha} = r_1 + \beta r_2$, $\hat{\beta} = s_1 + \beta s_2$ $(\hat{\alpha}^2 + \hat{\beta}^2 \neq 0)$ и $\widehat{A}$ из (2.5)[1].

Сделав в (4.2) произвольную замену (2.2)[1] с $s_1 = 0$ $(r_1, s_2 \neq 0)$, получаем

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \hat{p}_1 r_1^2 + \hat{q}_1 r_1 r_2 + \hat{t}_1 r_2^2 & (\hat{q}_1 r_1 + 2\hat{t}_1 r_2)s_2 & \hat{t}_1 s_2^2 & 0 \\ -S_0(r_1^{-1}r_2)r_1^3 s_2^{-1} & \hat{q}_2 r_1^2 - (\hat{q}_1 - 2\hat{t}_2)r_1 r_2 - 2\hat{t}_1 r_2^2 & (\hat{t}_2 r_1 - \hat{t}_1 r_2)s_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

где $S_0(\theta) = \hat{t}_1\theta^3 + (\hat{q}_1 - \hat{t}_2)\theta^2 + (\hat{p}_1 - \hat{q}_2)\theta - \hat{p}_2$, $\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2$, $\hat{t}_1^2 + \hat{t}_2^2 \neq 0$, $\tilde{a}_1^2 + \tilde{a}_2^2$, $\tilde{c}_1^2 + \tilde{c}_2^2 \neq 0$.

В частности, при $\hat{t}_1 = 0$ $(\hat{t}_2 \neq 0)$ система (4.3) принимает вид

$$\begin{pmatrix} (\hat{p}_1 r_1 + \hat{q}_1 r_2)r_1 & \hat{q}_1 r_1 s_2 & 0 & 0 \\ (\hat{p}_2 r_1^2 - (\hat{p}_1 - \hat{q}_2)r_1 r_2 - (\hat{q}_1 - \hat{t}_2)r_2^2)r_1 s_2^{-1} & (\hat{q}_2 r_1 + (2\hat{t}_2 - \hat{q}_1)r_2)r_1 & \hat{t}_2 r_1 s_2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Утверждение 4.1. *Множество систем* (4.2) *разбивается на три линейно неэквивалентных класса условиями:* 1) $\hat{t}_1 = 0$, $\hat{q}_1 = 0$; 2) $\hat{t}_1 = 0$, $\hat{q}_1 \neq 0$; 3) $\hat{t}_1 \neq 0$.

Действительно, приведенные условия являются линейными инвариантами системы (4.2), поскольку у любой замены, связывающей системы вида (4.2), $s_1 = 0$ по утверждению 2.2 п. 2, а значит, в системах (4.3) и (4.4) коэффициенты замены $r_1, s_2 \neq 0$.

Выделим в каждом из классов наиболее простую систему вида (4.3) или (4.4).

1) $\hat{t}_1 = 0$, $\hat{q}_1 = 0$ $(\hat{p}_1 \neq 0,\ \hat{t}_2 \neq 0)$. Тогда система (4.4) примет вид

$$\begin{pmatrix} \hat{p}_1 r_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ (\hat{p}_2 r_1^2 + (\hat{q}_2 - \hat{p}_1)r_1 r_2 + \hat{t}_2 r_2^2)r_1 s_2^{-1} & (\hat{q}_2 r_1 + 2\hat{t}_2 r_2)r_1 & \hat{t}_2 r_1 s_2 & 0 \end{pmatrix}$$

и в ней всегда можно получить $\tilde{b}_2 = 0$, $\tilde{c}_2 = 1$. В частности, замена J_1^1 преобразует (4.2) в систему

$$\widetilde{A}_1 = \begin{pmatrix} \tilde{p}_1 & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{p}_2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \tilde{p}_1 = \hat{p}_1\,(\neq 0), \\ \tilde{p}_2 = (2\hat{p}_1\hat{q}_2 + 4\hat{p}_2\hat{t}_2 - \hat{q}_2^2)/4. \end{array} \quad (4.5)$$

При $\tilde{p}_2 \neq 0$ система $\widetilde{A}_1$ является $SF^{3,1}_{a,8}$.

2) $\hat{t}_1 = 0$, $\hat{q}_1 \neq 0$ $(\hat{t}_2 \neq 0)$. Тогда в (4.4) всегда можно получить $\tilde{a}_1 = 0$, $\tilde{c}_2 = 1$. В частности, замена J_2^1 преобразует (4.2) в систему

$$\widetilde{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{q}_1 & 0 & 0 \\ \tilde{p}_2 & \tilde{q}_2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \tilde{q}_1 = \hat{q}_1\hat{t}_2^{-1}\,(\neq 0), \quad \tilde{q}_2 = \hat{p}_1 + \hat{q}_2 - 2\hat{p}_1\hat{q}_1^{-1}\hat{t}_2, \\ \tilde{p}_2 = \hat{q}_1^{-2}\hat{t}_2(\hat{t}_2\hat{p}_1^2 - \hat{q}_2\hat{q}_1\hat{p}_1 + \hat{p}_2\hat{q}_1^2)\,(\neq 0). \end{array} \quad (4.6)$$

При $\tilde{q}_2 \neq 0$ система $\widetilde{A}_2$ является $SF^{4,1}_{a,24}$.

3) $\hat{t}_1 \neq 0$. Тогда в (4.3) можно получить $\tilde{a}_2 = 0$. В частности, замена J_3^1, где $\theta_* \in \mathbb{R}^1$ — любой нуль $S_0(\theta)$, преобразует (4.2) в систему (4.3):

$$\widetilde{A}_3 = \begin{pmatrix} \tilde{p}_1 & \tilde{q}_1 & \tilde{t}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{q}_2 & \tilde{t}_2 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{array}{l} \tilde{p}_1 = \hat{p}_1 + \hat{q}_1\theta_* + \hat{t}_1\theta_*^2\,(\neq 0), \quad \tilde{q}_1 = \hat{q}_1 + 2\hat{t}_1\theta_*, \quad \tilde{t}_1 = \hat{t}_1, \\ \tilde{q}_2 = \hat{q}_2 - (\hat{q}_1 - 2\hat{t}_2)\theta_* - 2\hat{t}_1\theta_*^2, \quad \tilde{t}_2 = \hat{t}_2 - \hat{t}_1\theta_*. \end{array} \quad (4.7)$$

При $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{t}_2 \neq 0$ система $\widetilde{A}_3$ является $SF^{5,1}_8$. В свою очередь, при $\tilde{q}_2 = 0$ — это $SF^{4,1}_5$, при $\tilde{t}_2 = 0$ — это $SF^{4,1}_{11}$, при $\tilde{q}_1 = 0$ — это $SF^{4,1}_{a,14}$.

Утверждение 4.2. *В списке* 1.1 *указаны все канонические формы системы* (4.1).

Доказательство. Произвольная система (4.1) сводится к системе (4.5), (4.6) или (4.7), а значит, отсутствуют канонические формы, которым предшествует $CF_8^{5,1}$, получаемая нормировкой системы (4.7) с $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{t}_2 \neq 0$. $\Box$

5. Сведение исходной системы к каждой из $CF^{m,1}$. Ниже для систем (4.5), (4.6), (4.7) будут найдены условия на коэффициенты, а также замены $(2.2)^1$, сводящие выбранную систему при этих условиях к соответствующей CF из списка 2.1, и приведены получаемые при этом значения параметров канонической формы.

Лемма 5.1. *Любая система* (4.5) *линейно эквивалентна представителю какой-либо $CF_i^{m,1}$ из списка 2.1_1. Ниже для каждой из трех таких $CF_i^{m,1}$ приведены: a) условия на коэффициенты $\tilde{p}_1(\neq 0)$, $\tilde{p}_2$ системы* (4.5), *b) замена $(2.2)^1$, преобразующая правую часть* (4.5) *при указанных условиях в выбранную форму, c) получаемые при этом значения σ и параметров из $cs_i^{m,1}$:*

$CF_2^{2,1}$: *a)* $\tilde{p}_2 = 0$, *b)* $L_2^{2,1}$, *c)* $\sigma = \operatorname{sign} \tilde{p}_1$;

$CF_5^{3,1}$: *a)* $\tilde{p}_2 \neq 0$, $\varkappa_1 \geq 0$, *b)* $L_5^{3,1}$, *c)* $\sigma = \operatorname{sign} \tilde{p}_1$, $u = \varkappa_2 \tilde{p}_1^{-1}$;

$CF_8^{3,1}$: *a)* $\tilde{p}_2 \neq 0$, $\varkappa_1 < 0$, *b)* $L_8^{3,1}$, *c)* $\sigma = \operatorname{sign} \tilde{p}_1$, $u = \tilde{p}_2 \tilde{p}_1^{-2}$.

Доказательство находится в файле lemma1.mw в хранилище (см. введение).

Лемма 5.2. *Любая система* (4.6) *линейно эквивалентна представителю какой-либо $CF_i^{m,1}$ из списка 2.1_2. Ниже для каждой из пяти таких $CF_i^{m,1}$ приведены: a) условия на коэффициенты $\tilde{q}_1(\neq 0)$, $\tilde{p}_2(\neq 0)$, $\tilde{q}_2$ системы* (4.6), *b) замена $(2.2)^1$, преобразующая правую часть* (4.6) *при указанных условиях в выбранную форму, c) получаемые при этом значения σ и параметров из $cs_i^{m,1}$:*

$CF_3^{3,1}$: 1) *a)* $\tilde{q}_1 \neq 2$, $\varkappa_3 = 0$, *b)* $L1_3^{3,1}$, *c)* $\sigma = \operatorname{sign}((\tilde{q}_1 - 2)\tilde{q}_1 \tilde{q}_2)$, $u = \tilde{q}_1$;
2) *a)* $\tilde{p}_2 > 0$, $\tilde{q}_1 = 2$, $\tilde{q}_2 = 0$, *b)* $L2_3^{3,1}$, *c)* $\sigma = 1$, $u = 2$;

$CF_{14,\kappa}^{3,1}$: *a)* $\tilde{p}_2 < 0$, *если* $\tilde{q}_1 = 2$, $\tilde{q}_2 = 0$, *b)* $L_{14,\kappa}^{3,1}$ *c)* $\kappa = \operatorname{sign}(\tilde{p}_2 \tilde{q}_1)$, $u = \tilde{q}_1^{-1}$;

$CF_7^{4,1}$: 1) *a)* $\tilde{q}_1 = 2$, $\varkappa_4 \geq 0$, $\tilde{q}_2 \neq 0$, *b)* $L1_7^{4,1}$, *c)* $\sigma = \operatorname{sign} \tilde{q}_2$, $u = \varkappa_5 \tilde{q}_2^{-1}$, $v = 2$;
2) *a)* $\tilde{q}_1 \neq 2$, $\tilde{q}_2 \neq 0$, $\varkappa_6 \geq 0$, $\varkappa_8 \neq 0$, *b)* $L2_7^{4,1}$, *c)* $\sigma = \operatorname{sign}(\varkappa_7 \varkappa_8)$, $u = \varkappa_8^{-1} \tilde{q}_1$, $v = \tilde{q}_1$;

$CF_{12}^{4,1}$: *a)* $\tilde{q}_1 \neq 2$, $\tilde{q}_2 \neq 0$, $4\varkappa_3(1 - \tilde{q}_1) > \tilde{q}_1^2 \tilde{q}_2^2$, *b)* $L_{12}^{4,1}$, *c)* $\sigma = \operatorname{sign}(\tilde{q}_1 \tilde{q}_2 (\tilde{q}_1 - 2))$, $u = \tilde{q}_1^{-1}$, $v = \varkappa_3 \tilde{q}_1^{-1} \tilde{q}_2^{-2}$;

$CF_{24}^{4,1}$: *a)* $\tilde{q}_1 = 2$, $\varkappa_4 < 0$, $\tilde{q}_2 \neq 0$, *b)* $L_{24}^{4,1}$, *c)* $\sigma = \operatorname{sign} \tilde{q}_2$, $u = 1/2$, $v = 2\tilde{p}_2 \tilde{q}_2^{-2}$.

Доказательство находится в файле lemma2.mw в хранилище (см. введение).

Договоримся о том, что приводимые ниже условия на коэффициенты системы, имеющие вид $\xi_1^{\pm} = 0$, $\xi_2^{\mp} \neq 0$, означают, что $\xi_1^{+} = 0$, $\xi_2^{-} \neq 0$ или $\xi_1^{-} = 0$, $\xi_2^{+} \neq 0$, и выбор их первого или второго верхнего знака влечет за собой такой же выбор в приведенных далее коэффициентах замены и получаемых значениях параметров CF.

Лемма 5.3. *Любая система* (4.7) *линейно эквивалентна представителю какой-либо $CF_i^{m,1}$ из списков $2.1_3, 2.1_{\mathrm{II}}$. Ниже для каждой из двадцати пяти таких $CF_i^{m,1}$ приведены: a) условия на коэффициенты $\tilde{p}_1, \tilde{t}_1, \tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{t}_2$ $(\tilde{p}_1, \tilde{t}_1, \tilde{q}_2^2 + \tilde{t}_2^2 \neq 0)$ системы* (4.7), *b) замена $(2.2)^1$, преобразующая правую часть* (4.7) *при указанных условиях в выбранную форму, c) получаемые при этом значения σ и параметров из $cs_i^{m,1}$:*

$CF_9^{2,1}$: *a)* $\varkappa_{10} = 0$, $\varkappa_{13} = 0$, $\varkappa_{15} = 0$, *b)* $L_9^{2,1}$, *c)* $\sigma = \operatorname{sign} \tilde{t}_1$;

$CF_{22}^{3,1}$: *a)* $\varkappa_{10} = 0$, $\varkappa_{13} = 0$, $\varkappa_{15} \neq 0$, *b)* $L_{22}^{3,1}$, *c)* $\sigma = \operatorname{sign} \tilde{t}_1$, $u = \varkappa_{15} (\varkappa_{16} \tilde{t}_2)^{-2/3}$;

$CF_{17}^{3,1}$: *a)* $\varkappa_{10} = 0$, $\varkappa_{15} = 0$, $\varkappa_{13} \neq 0$, *b)* $L_{17}^{3,1}$, *c)* $\sigma = \operatorname{sign} \tilde{t}_1$, $u = \varkappa_{13} (\tilde{p}_1 \tilde{t}_1 \tilde{t}_2)^{-2/3}$;

$CF^{3,1}_{11,\kappa}$: 1) *a)* $\tilde q_1=0,\ \tilde t_2=0,$ *b)* $L1^{3,1}_{11,\kappa}$, *c)* $\sigma=\operatorname{sign}\tilde q_2,\ \kappa=\operatorname{sign}(\tilde t_1\tilde q_2),\ u=\tilde p_1\tilde q_2^{-1}$;
2) *a)* $\varkappa_{10}=0,\ \tilde t_2\neq0,\ \varkappa_{14}=0,$ *b)* $L2^{3,1}_{11,\kappa}$, *c)* $\sigma=\operatorname{sign}\tilde p_1,\ \kappa=\operatorname{sign}(\tilde p_1\tilde t_1)$, $u=\varkappa_{13}(\tilde p_1\tilde t_1)^{-1}$;

$CF^{4,1}_{27}$: *a)* $\varkappa_{10}=0,\ \tilde t_2\neq0,\ \varkappa_{13}\neq0,\ \varkappa_{14}\neq0,\ \varkappa_{15}\neq0,\ 3.1_{15}$, *b)* $L^{4,1}_{27}$, *c)* $\sigma=\operatorname{sign}\tilde t_1$, $u=\varkappa_{15}(\varkappa_{14}\tilde t_2)^{-2/3},\ v=\varkappa_{13}(\varkappa_{14}\tilde t_2)^{-2/3}$;

$CF^{3,1}_{21}$: *a)* $\varkappa_{10}\neq0,\ \tilde q_1\neq0,\ \varkappa_{12}=0,\ \varkappa_9=0,$ *b)* $L^{3,1}_{21}$, *c)* $\sigma=\operatorname{sign}\tilde t_1$, $u=\varkappa_{10}(\tilde q_1+\tilde t_2)^{-1/3}\tilde t_2^{-2/3}$;

$CF^{4,1}_{19}$: *a)* $\varkappa_{10}\neq0,\ \tilde q_1\neq0,\ \varkappa_{12}=0,\ \varkappa_9\neq0,\ \varkappa_{17}\neq0,\ \varkappa_{19}\neq0,$ *b)* $L^{4,1}_{19}$, *c)* $\sigma=\operatorname{sign}\tilde t_1,\ u=\varkappa_9(\tilde p_1\tilde t_1\tilde t_2)^{-2/3},\ v=-(\tilde q_1+2\tilde t_2)(\tilde p_1\tilde t_1\tilde t_2)^{-1/3}$;

$CF^{4,1}_{33}$: *a)* $\varkappa_{10}\neq0,\ \varkappa_{12}\neq0,\ \varkappa_9=0,\ 3.1_{20},$ *b)* $L^{4,1}_{33}$, *c)* $\sigma=\operatorname{sign}\tilde t_1,\ u=\varkappa_{12}\varkappa_{10}^{-2}$, $v=\varkappa_{16}\tilde t_2\varkappa_{10}^{-3}$;

$CF^{4,1}_{11}$: 1) *a)* $\tilde t_2=0,\ \tilde q_1\neq0,\ 3.1_9,$ *b)* $L1^{4,1}_{11}$, *c)* $\sigma=\operatorname{sign}\tilde q_2$, $u=\tilde p_1\tilde q_2^{-1},\ v=\tilde q_1^{-2}\tilde q_2\tilde t_1$;
2) *a)* $\varkappa_{10}\neq0,\tilde t_2\neq0,\varkappa_{11}=0,3.1_9,$ *b)* $L2^{4,1}_{11}$, *c)* $\sigma=\operatorname{sign}(\varkappa_{12}\tilde t_1),\ u=\varkappa_{16}\varkappa_{12}^{-1},\ v=\varkappa_{12}\varkappa_{10}^{-2}$;

$CF^{3,1}_{19}$: *a)* $\varkappa_{10}\neq0,\varkappa_{12},\varkappa_{17}=0,$ *b)* $L^{3,1}_{19}$, *c)* $\sigma=\operatorname{sign}\ \tilde t_1,\ u=-\varkappa_{10}(2\tilde q_1^2\tilde t_2)^{-1/3}$;

$CF^{3,1}_{6}$: 1) *a)* $\varkappa_{12}=0,\varkappa_{19}=0,$ *b)* $L1^{3,1}_6$, *c)* $\sigma=\operatorname{sign}\tilde t_1,\ u=2\tilde q_1\tilde t_2\varkappa_{10}^{-2}$;
2) *a)* $\tilde q_1=0,\ \tilde q_2=0,$ *b)* $L2^{3,1}_6$, *c)* $\sigma=\operatorname{sign}\tilde t_1,\ u=\tilde p_1\tilde t_1\tilde t_2^{-2}$;

$CF^{4,1}_{30}$: *a)* $\varkappa_{10}\neq0,\ \varkappa_{12}\neq0,\ \varkappa_{17}=0,\ 3.1_{18},$ *b)* $L^{4,1}_{30}$, *c)* $u=\varkappa_{10}(2\varkappa_{20}\tilde q_1)^{-1/3}$, $v=4\varkappa_{12}(2\varkappa_{20}\tilde q_1)^{-2/3},\ \sigma=\operatorname{sign}\tilde t_1$;

$CF^{4,1}_{14}$: 1) *a)* $\varkappa_{10}\neq0,\ \tilde q_1\neq0,\ \varkappa_{12}\neq0,\ \varkappa_{18}=0,\ 3.1_{12},$ *b)* $L1^{4,1}_{14}$, *c)* $\sigma=\operatorname{sign}\tilde t_1$, $u=4\varkappa_{12}\varkappa_{10}^{-2},\ v=-2\varkappa_{20}\varkappa_{10}^{-2}$;
2) *a)* $\tilde q_1=0,\ \tilde q_2\neq0,\ \tilde t_2\neq0,\ 3.1_{12},$ *b)* $L2^{4,1}_{14}$, *c)* $\sigma=\operatorname{sign}\tilde t_1,\ u=\tilde q_2\tilde t_1\tilde t_2^{-2},\ v=\tilde p_1\tilde t_1\tilde t_2^{-2}$;

$CF^{4,1}_{29}$: *a)* $\varkappa_{17}>0,\ \varkappa^{\pm}_{24}=0,\ \varkappa^{\mp}_{23}\neq0,\ 3.1_{17},$ *b)* $L^{4,1}_{29}$, *c)* $\sigma=\operatorname{sign}\tilde t_1$, $u=\pm\varkappa^{\mp}_{23}\varkappa_{17}^{-1/2}/2,\ v=\pm\varkappa^{\pm}_{21}\varkappa^{\mp}_{22}\varkappa_{17}^{-3/2}/4$;

$CF^{4,1}_{5}$: 1) *a)* $\tilde q_2\neq0,\ \varkappa_{25}\geq0,\ \varkappa^{\pm}_{28}=0,\ 3.1_7,$ *b)* $L1^{4,1}_5$, *c)* $\sigma=\operatorname{sign}\tilde t_1$, $u=4\varkappa^{\pm}_{30}(\varkappa^{\mp}_{26})^{-2},\ v=2\varkappa^{\pm}_{26}(\varkappa^{\mp}_{26})^{-1}$;
2) *a) при* $\tilde q_1\neq0,\ \tilde q_2=0,\ 3.1_7,$ *b)* $L2^{4,1}_5$, *c)* $\sigma=\operatorname{sign}\tilde t_1,\ u=\tilde p_1\tilde t_1\tilde t_2^{-2},\ v=\tilde q_1\tilde t_2^{-1}$;

$CF^{5,1}_{8}$: *a)* $\tilde q_1\neq0,\ \tilde q_2\neq0,\ \tilde t_2\neq0,\ 3.2_4,$ *b) нормировка* $L^{5,1}_8$, *c)* $\sigma=\operatorname{sign}\tilde q_2$, $u=\tilde p_1\tilde q_2^{-1},\ v=\tilde q_1\tilde t_2^{-1},\ w=\tilde q_2\tilde t_1\tilde t_2^{-2}$;

$CF^{4,1}_{1}$: 1) *a)* $\tilde q_1=0,\tilde q_2=2\tilde p_1,\tilde t_2\neq0,\varkappa_{31}>0,3.1_5,$ *b)* $L1^{4,1}_1$, *c)* $\sigma=\pm\operatorname{sign}(\varkappa^{\pm}_{32}\tilde t_1)$, $u=-\varkappa^{\mp}_{32}(\varkappa^{\pm}_{32})^{-1}$;
2) *a)* $\tilde q_2=0,\ \tilde t_2\neq0,\ \varkappa_{31}\geq0,\ \tilde q_1=\varkappa^{\mp}_{32},\ 3.1_5,$ *b)* $L2^{4,1}_1$, *c)* $\sigma=\operatorname{sign}\tilde p_1$, $u=\varkappa^{\pm}_{32}\tilde t_2(2\tilde p_1\tilde t_1)^{-1}$;

$CF^{4,1}_{3}$: 1) *a)* $\tilde p_1=\tilde q_1(\tilde q_1-\tilde t_2)\tilde t_1^{-1},\ \tilde q_2=\tilde q_1(3\tilde q_1-2\tilde t_2)\tilde t_1^{-1},\ \tilde t_2\neq3\tilde q_1,\ \tilde q_2^2+\tilde t_2^2\neq0,\ 3.1_6$, *b)* $L1^{4,1}_3$, *c)* $\sigma=\operatorname{sign}(\tilde t_1(3\tilde q_1-\tilde t_2)(\tilde q_1-\tilde t_2)),\ u=\tilde q_1(\tilde q_1-\tilde t_2)^{-1}$;
2) *a)* $\tilde p_1=\tilde q_1(2\tilde q_1-3\tilde t_2)(9\tilde t_1)^{-1},\ \tilde q_2=0,\ \tilde t_2\neq0,\ 3.1_6,$ *b)* $L2^{4,1}_3$, *c)* $\sigma=-\operatorname{sign}(\tilde t_1\tilde t_2(2\tilde q_1-3\tilde t_2)),\ u=-\tilde q_1(3\tilde t_2)^{-1}$;
3) *a)* $\tilde p_1=(2\tilde q_1-3\tilde t_2)(2\tilde q_1+\tilde t_2)(16\tilde t_1)^{-1},\ \tilde q_2=\tilde t_2(2\tilde q_1-3\tilde t_2)(8\tilde t_1)^{-1},\ \tilde t_2\neq0,3.1_6,$ *b)* $L3^{4,1}_3$, *c)* $\sigma=\operatorname{sign}((2\tilde q_1-3\tilde t_2)(2\tilde q_1+\tilde t_2)\tilde t_1),\ u=-2\tilde t_2(2\tilde q_1+\tilde t_2)^{-1}$;

$CF^{4,1}_{13}$: 1) *a)* $\tilde p_1=(4\tilde q_1^2-\tilde t_2^2)(12\tilde t_1)^{-1},\ \tilde t_2\neq0,\ \tilde q_2=(2\tilde q_1-\tilde t_2)\tilde t_2(4\tilde t_1)^{-1},\ 3.1_{11}$, *b)* $L1^{4,1}_{13}$, *c)* $\sigma=\operatorname{sign}((2\tilde q_1-\tilde t_2)\tilde t_2\tilde t_1),\ u=(2\tilde q_1+\tilde t_2)(3\tilde t_2)^{-1}$;
2) *a)* $\tilde t_2\neq0,\ \tilde q_2\tilde t_1>0,\ \tilde p_1=(\tilde q_2\tilde t_1)^{1/2}\varkappa^{\mp}_{34}\varkappa^{\pm}_{35}(\varkappa^{\pm}_{33})^{-2}\tilde t_1^{-1}$, *если* $\varkappa^{\pm}_{33}\neq0,\ \tilde q_1=\pm(2\tilde q_2\tilde t_1+\tilde t_2^2)(\varkappa^{\pm}_{33})^{-1},\ \varkappa^{\pm}_{34}\neq0,\ 3.1_{11},$ *b)* $L2^{4,1}_{13}$, *c)* $\sigma=-\operatorname{sign}(\varkappa^{\pm}_{34}\tilde t_1),\ u=-\varkappa^{\mp}_{34}\varkappa^{\pm}_{33}(3\varkappa^{\pm}_{35})^{-1}$;

$CF^{4,1}_{28}$: *a)* $\tilde q_1\neq0,-\tilde t_2,-2\tilde t_2,\ \tilde q_2\neq0,\ \tilde t_2\neq0,\ \tilde p_1=\theta_*\tilde t_1^{-1},\ \varkappa_{38}=0,\ \varkappa_{36},\varkappa_{37}$, $\varkappa_{39}\neq0,$ *где* $\theta_*\in\mathbb{R}^1$ *— любой нуль* $S_1(\theta)$, 3.1_{16}, *b)* $L^{4,1}_{28}$, *c)* $\sigma=\operatorname{sign}(\varkappa_{36}\varkappa_{39}\tilde t_1)$, $u=-\varkappa_{37}\varkappa_{39}^{-1}$;

$CF_{32}^{4,1}$: *a)* $\tilde{q}_1 \neq 0, -\tilde{t}_2, -2\tilde{t}_2,\ \tilde{q}_2 \neq 0,\ \tilde{t}_2 \neq 0,\ \varkappa_{40} \geq 0,\ \varkappa_{41}^{\pm} \neq 0,\ \tilde{p}_1 = \varkappa_{41}^{\pm}\tilde{t}_1^{-1}$, $\tilde{q}_2 = ((\tilde{q}_1 + \tilde{t}_2)^2 - 3\varkappa_{41}^{\pm})\tilde{t}_1^{-1},\ \varkappa_{42}^{\pm} \neq 0,\ \varkappa_{43}^{\pm} \neq 0,\ 3.1_{19}$, *b)* $L_{32}^{4,1}$, *c)* $\sigma = \mathrm{sign}(\varkappa_{42}^{\pm}\tilde{t}_1)$, $u = 3\varkappa_{43}^{\pm}\varkappa_{10}^{-2}$;

$CF_{36}^{4,1}$: *a)* $\tilde{q}_1 \neq 0, -\tilde{t}_2, -3\tilde{t}_2/2, -2\tilde{t}_2,\ \tilde{q}_2 \neq 0,\ \tilde{t}_2 \neq 0,\ \varkappa_{44} \geq 0,\ \varkappa_{45}^{\pm} \neq 0,\ \tilde{p}_1 = \varkappa_{45}^{\pm}\tilde{t}_1^{-1}$, $\tilde{q}_2 = -(3\varkappa_{45}^{\pm} + 2\tilde{q}_1\tilde{t}_2 + 3\tilde{t}_2^2)\tilde{t}_1^{-1},\ \varkappa_{46}^{\pm} \neq 0,\ \varkappa_{47}^{\pm} \neq 0,\ 3.1_{21}$, *b)* $L_{36}^{4,1}$, *c)* $\sigma = \mathrm{sign}(\varkappa_{46}^{\pm}\tilde{t}_1)$, $u = \varkappa_{47}^{\pm}\varkappa_{10}^{-2}$;

$CF_3^{5,1}$: 1) *a)* $\tilde{q}_2 \neq 0, 3\tilde{p}_1,\ \tilde{t}_1 = \tilde{q}_1(2\tilde{p}_1\tilde{q}_1 + \tilde{t}_2\tilde{q}_2 - 3\tilde{t}_2\tilde{p}_1)(\tilde{q}_2 - 3\tilde{p}_1)^{-2},\ \tilde{t}_2 \neq 0,\ \varkappa_{48} \neq 0, -\tilde{q}_1\tilde{q}_2,\ 3.2_1$, *b)* $L1_3^{5,1}$, *c)* $\sigma = -\mathrm{sign}\,\tilde{p}_1,\ u = -\varkappa_{48}(\tilde{p}_1\tilde{q}_1)^{-1},\ v = -(\tilde{q}_1\tilde{q}_2 + \varkappa_{48})(\tilde{p}_1\tilde{q}_1)^{-1}$;
2) *a)* $\tilde{q}_2 \neq 0,\ \tilde{t}_1 = -\tilde{t}_2(\tilde{p}_1\tilde{t}_2 - 2\tilde{q}_1\tilde{q}_2 + \tilde{q}_2\tilde{t}_2)(2\tilde{q}_2)^{-2},\ \tilde{q}_1 \neq 0,\ \tilde{t}_2 \neq 0,\ \varkappa_{49} \neq 0, \tilde{p}_1\tilde{t}_2,\ 3.2_1$, *b)* $L2_3^{5,1}$, *c)* $\sigma = \mathrm{sign}\,\tilde{q}_2,\ u = \tilde{p}_1\tilde{q}_2^{-1},\ v = \varkappa_{49}(\tilde{q}_2\tilde{t}_2)^{-1}$;
3) *a)* $\tilde{q}_1 \neq 0, \tilde{t}_2,\ \tilde{q}_2 = (\tilde{t}_2\tilde{q}_1^3 - (\tilde{p}_1\tilde{t}_1 + 2\tilde{t}_2^2)\tilde{q}_1^2 - \tilde{t}_2(2\tilde{p}_1\tilde{t}_1 - \tilde{t}_2^2)\tilde{q}_1 + \tilde{p}_1\tilde{t}_1(4\tilde{p}_1\tilde{t}_1 + 3\tilde{t}_2^2))\tilde{t}_1^{-1}(\tilde{q}_1 - \tilde{t}_2)^{-2} \neq 0,\ \tilde{t}_2 \neq 0,\ \varkappa_{50} \neq 0,\ \varkappa_{51} \neq 0,\ \varkappa_{52} \neq 0,\ 3.2_1$, *b)* $L3_3^{5,1}$, *c)* $\sigma = -\mathrm{sign}(\varkappa_{50}\tilde{p}_1)$, $u = -\varkappa_{51}(\tilde{p}_1\tilde{t}_1)^{-1},\ v = -(\tilde{q}_1 - \tilde{t}_2)^2(\tilde{p}_1\tilde{t}_1)^{-1}$;

$CF_6^{5,1}$: 1) *a)* $\tilde{q}_1 \neq 0,\ \tilde{t}_2 \neq 0,\ \tilde{p}_1 = 4\varkappa_{53}\tilde{q}_2\tilde{t}_2^{-2}/3,\ \varkappa_{54} \neq 0,\ 4\varkappa_{53} \neq 3\varkappa_{54},\ 3.2_2$, *b)* $L1_6^{5,1}$, *c)* $\sigma = \mathrm{sign}\,\tilde{q}_2,\ u = 4\varkappa_{53}(3\tilde{t}_2^2)^{-1},\ v = \varkappa_{54}\tilde{t}_2^{-2}$;
2) *a)* $\tilde{q}_1 \neq 0,\ \tilde{q}_2 \neq 0,\ \tilde{t}_2 \neq 0,\ \tilde{p}_1 = -\varkappa_{55}(9\tilde{t}_1\theta_*^2)^{-1},\ \varkappa_{56} \neq 0,\ \varkappa_{57} \neq 0,\ \varkappa_{58} \neq 0,\ \varkappa_{59} \neq 0$, $\varkappa_{57} \neq \varkappa_{58}$, *где* $\theta_* \in \mathbb{R}^1$ *— любой нуль* $S_2(\theta)$, 3.2_2, *b)* $L2_6^{5,1}$, *c)* $\sigma = -\mathrm{sign}(\varkappa_{59}\tilde{t}_1)$, $u = 3\varkappa_{57}\theta_*\varkappa_{59}^{-1},\ v = 3\varkappa_{58}\theta_*\varkappa_{59}^{-1}$;

$CF_7^{5,1}$: 1) *a)* $\tilde{q}_2 \neq 0, 3\tilde{p}_1,\ \tilde{t}_2 \neq 0,\ \tilde{t}_1 = \varkappa_{60}\tilde{q}_1(\tilde{q}_2 - 3\tilde{p}_1)^{-2},\ \varkappa_{61} \neq 0, -\tilde{q}_1\tilde{q}_2,\ 3.2_3$, *b)* $L1_7^{5,1}$, *c)* $\sigma = \mathrm{sign}\,\tilde{p}_1,\ u = \varkappa_{61}(\tilde{p}_1\tilde{q}_1)^{-1},\ v = (\varkappa_{61} + \tilde{q}_1\tilde{q}_2)(\tilde{p}_1\tilde{q}_1)^{-1}$;
2) *a)* $\tilde{q}_1 \neq 0,\ \tilde{q}_2 \neq 0,\ \tilde{t}_2 \neq 0,\ \tilde{p}_1 = -\varkappa_{55}(9\tilde{t}_1\theta_*^2)^{-1},\ \varkappa_{56} \neq 0,\ \varkappa_{59} \neq 0, 3\varkappa_{62},\ \varkappa_{62} \neq 0,\ \varkappa_{63} \neq 0$, *где* $\theta_* \in \mathbb{R}^1$ *— любой нуль* $S_3(\theta)$, 3.2_3, *b)* $L2_7^{5,1}$, *c)* $\sigma = \mathrm{sign}\,\varkappa_{63},\ u = \varkappa_{59}(3\varkappa_{63}\tilde{t}_1\theta_*^2)^{-1}$, $v = \varkappa_{62}(\varkappa_{63}\tilde{t}_1\theta_*^2)^{-1}$.

Здесь запись 3.1_i *означает, что элементы системы* (4.7) *таковы, что значения параметров, входящих в ее каноническую форму, не удовлетворяют условиям из пункта* i *утверждения* 3.1; *запись* 3.2_j *понимается аналогично; константы* ϑ, $\varkappa$, *многочлены* $S(\theta)$ *и линейные замены* J, L *приведены в наборах 2.1 и 3.1.*

Доказательство находится в файле lemma3.mw в хранилище (см. введение).

Теорема 5.1. *При* $l = 1$ *любая система* $(2.1)^1$*, записанная в виде* (4.1) *согласно* $(2.10)^1$*, линейно эквивалентна представителю какой-либо* $CF_i^{m,1}$ *из списка* 2.1. *При этом, если коэффициенты* β, p_k, q_k, t_k $(k = 1, 2)$ *системы* (4.1) *таковы, что:*

1) *в системе* (4.2) $\hat{t}_1 = 0, \hat{q}_1 = 0$ *и для каждой из трех* $CF_i^{m,1}$ *из списка* 2.1_1 *выполняются условия на коэффициенты* $\tilde{p}_1$, $\tilde{p}_2$ *системы* (4.5), *приведенные в лемме* 5.1, *то композиция замен* J_0^1, J_1^1, $L_i^{m,1}$ *преобразует правую часть системы* (4.1) *в выбранную* $CF_i^{m,1}$ *со значениями параметров из леммы* 5.1;

2) *в системе* (4.2) $\hat{t}_1 = 0, \hat{q}_1 \neq 0$ *и для каждой из пяти* $CF_i^{m,1}$ *из списка* 2.1_2 *выполняются условия на коэффициенты* $\tilde{q}_1$, $\tilde{p}_2$, $\tilde{q}_2$ *системы* (4.6), *приведенные в лемме* 5.2, *то композиция замен* J_0^1, J_2^1, $L_i^{m,1}$ *преобразует правую часть системы* (4.1) *в выбранную* $CF_i^{m,1}$ *со значениями параметров из леммы* 5.2;

3) *в системе* (4.2) $\hat{t}_1 \neq 0$ *и для каждой из двадцати пяти* $CF_i^{m,1}$ *из списков* 2.1_3 *и* 2.1_{II} *выполняются условия на коэффициенты* $\tilde{p}_1$, $\tilde{t}_1$, $\tilde{q}_1$, $\tilde{q}_2$, $\tilde{t}_2$ *системы* (4.7), *приведенные в лемме* 5.3, *то композиция замен* J_0^1, J_3^1, $L_i^{m,1}$ *преобразует правую часть системы* (4.1) *в выбранную* $CF_i^{m,1}$ *со значениями параметров из леммы* 5.3.

Доказательство. В разделе 4 показано, что исходная система (4.1) при помощи двух линейных замен сводится к одной из систем вида (4.5), (4.6) или (4.7). В свою очередь, в силу лемм 5.1, 5.2, 5.3 любая из перечисленных систем сводится к определенному представителю соответствующей $CF_i^{m,1}$ из списка 2.1. $\square$

Литература

1. *Басов В. В.* Двумерные однородные кубические системы: классификация и нормальные формы — I // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2016. Т. 3 (61). Вып. 2. С. 181–195.

2. *Басов В. В.* Двумерные однородные кубические системы: классификация и нормальные формы — II // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2016. Т. 3 (61). Вып. 3. С. 355–371.

3. *Cima A., Llibre J.* Algebraic and topological classification of the homogeneous cubic vector fields in the plane // J. Math. Anal. Appl. 1990. Vol. 147, N 2. P. 420–448.

4. *Gurevich G.* Foundations of the Theory of Algebraic Invariants. Groningen: Noordhoff. 1964.

5. *Date T., Iri M.* Canonical forms of real homogeneous quadratic transformations // J. Math. Anal. Appl. 1976. Vol. 56, N 3. P. 650–682.

6. *Окунев Л. Я.* Высшая алгебра. М.; Л.: Гос. изд-во тех.-теор. лит-ры. 1949. 434 с.

Статья поступила в редакцию 13 декабря 2017 г.; рекомендована в печать 2 июля 2018 г.

Контактная информация:

Басов Владимир Владимирович — канд. физ.-мат. наук, доц.; vlvlbasov@rambler.ru

Чермных Александр Сергеевич — аспирант; achermnykh@yandex.ru

Two-dimensional homogeneous cubic systems: classification and normal forms — V

V. V. Basov, A. S. Chermnykh

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Basov V. V., Chermnykh A. S. Two-dimensional homogeneous cubic systems: classification and normal forms — V. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2018, vol. 5 (63), issue 4, pp. 556–571. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.403 (In Russian).

This article is the fifth in a series of works devoted to two-dimensional cubic homogeneous systems. It considers a case when a homogeneous polynomial vector in the right-hand part of the system has a linear common factor. A set of such systems is divided into classes of linear equivalence, wherein the simplest system being a third-order normal form is distinguished on the basis of properly introduced principles. Such a form is defined by the matrix of its right-hand part coefficients, which is called the canonical form (CF). Each CF has its own arrangement of non-zero elements, their specific normalization and canonical set of permissible values for the unnormalized elements, which relates CF to the selected class of equivalence. In addition to classification, each CF is provided with: (a) the conditions on the coefficients of the initial system, (b) non-singular linear substitutions that reduce the right-hand part of the system under these conditions to the selected CF, (c) obtained values of CF's unnormalized elements.

Keywords: homogeneous cubic system, normal form, canonical form.

References

1. Basov V. V., "Two-dimensional homogeneous cubic systems: classification and normal forms — I", *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics* **49**(2), 99–110 (2016).

2. Basov V. V., "Two-dimensional homogeneous cubic systems: classification and normal forms — II", *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics* **49**(3), 204–218 (2016).

3. Cima A., Llibre J., "Algebraic and topological classification of the homogeneous cubic vector fields in the plane", *J. Math. Anal. Appl.* **147**(2), 420–448 (1990).

4. Gurevich G., *Foundations of the Theory of Algebraic Invariants* (Noordhoff, Groningen, 1964).
5. Date T., Iri M., “Canonical forms of real homogeneous quadratic transformations”, *J. Math. Anal. Appl.* **56**(3), 650–682 (1976).
6. Okunev L. Ya., *Higher algebra* (Gos. izdat. teh.-teor. lit., Moscow, 1949, 434 p.) [in Russian].

Received: December 13, 2017
Accepted: July 2, 2018

Author’s information:

Vladimir V. Basov — vlvlbasov@rambler.ru
Aleksandr S. Chermnykh — achermnykh@yandex.ru