МАТЕМАТИКА

УДК 511.221, 511.223
MSC 11S20, 11S31, 14L05

Формальный модуль Хонды в неразветвленном p-расширении локального поля как модуль Галуа*

Т. Л. Акопян, С. В. Востоков

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Акопян Т. Л., Востоков С. В.* Формальный модуль Хонды в неразветвленном p-расширении локального поля как модуль Галуа // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 4. С. 541–548. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.401

Для фиксированного рационального простого числа p рассмотрим цепочку конечных расширений полей $K_0/\mathbb{Q}_p, K/K_0, L/K, M/L$, где K/K_0 — неразветвленное расширение, M/L — расширение Галуа с группой Галуа G. Пусть задан одномерный формальный групповой закон Хонды F над кольцом $\mathcal{O}_K$ относительно расширения K/K_0 и простого элемента $\pi \in K_0$. В работе изучается структура $F(\mathfrak{m}_M)$ как $\mathcal{O}_{K_0}[G]$-модуля для неразветвленного p-расширения M/L при условии $W_F \cap F(\mathfrak{m}_L) = W_F \cap F(\mathfrak{m}_M) = W_F^s$ при некотором $s \geq 1$, где W_F^s — это π^s-кручение, а $W_F = \bigcup_{n=1}^{\infty} W_F^n$ — общее π-кручение фиксированного алгебраического замыкания K^{alg} поля K.

Ключевые слова: локальное поле, неразветвленное расширение, формальная группа, модуль Галуа.

1. Введение. Пусть p — рациональное простое число, $K/\mathbb{Q}_p, L/K, M/L$ — цепочка конечных расширений локальных полей, M/L — расширение Галуа с группой Галуа G, а F — одномерный формальный групповой закон над кольцом $\mathcal{O}_K$. На максимальном идеале $\mathfrak{m}_M$ кольца $\mathcal{O}_M$ операция $x \underset{F}{+} y = F(x,y)$ задает структуру абелевой группы, которую будем обозначать $F(\mathfrak{m}_M)$. Учитывая естественное действие группы G на $F(\mathfrak{m}_M)$, группу $F(\mathfrak{m}_M)$ можно рассматривать как $\mathrm{End}_{\mathcal{O}_K}(F)[G]$-модуль, в котором умножение на скаляры из $\mathrm{End}_{\mathcal{O}_K}(F)$ задается по правилу $f * x = f(x)$.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант 16-11-10200).

Относительно формальных групп и группы $F(\mathfrak{m}_M)$ мы отсылаем читателя к [1, гл. 6, § 3], [2, гл. 3, § 6], а также к [3, гл. 4] и [4, гл. 4].

Если F — формальный групповой закон Любина—Тейта, то имеется вложение колец $\mathcal{O}_K \hookrightarrow \mathrm{End}_{\mathcal{O}_K}(F)$ [1, гл. 6, предложение 3.3], что позволяет рассматривать $F(\mathfrak{m}_M)$ как $\mathcal{O}_K[G]$-модуль. Структура этого модуля в случае мультипликативной формальной группы $F = F_m$ и $K = \mathbb{Q}_p$ достаточно подробно изучена в цикле работ [5–7], а в работе [8] изучен случай формальной группы Любина—Тейта F для циклического неразветвленного p-расширения M/L иррегулярных полей M и L, показатели иррегулярности которых совпадают.

Пусть $K_0/\mathbb{Q}_p$ — конечное расширение, K/K_0 — неразветвленное расширение, $\pi \in K_0$ — униформизирующий элемент в поле K_0, F — формальная группа Хонды над кольцом $\mathcal{O}_K$ относительно расширения K/K_0 типа $u \in \mathcal{O}_{K,\varphi}[[T]]$ конечной высоты, то есть содержащего обратимый коэффициент. (В отличие от кольца $\mathcal{O}_K[[T]]$, умножение в кольце $\mathcal{O}_{K,\varphi}[[T]]$ некоммутативно и выполняется исходя из правил $T^iT^j = T^{i+j}, Ta = a^{\varphi}T$, для всех $i, j \geq 0, a \in \mathcal{O}_K$, где φ — автоморфизм Фробениуса расширения K/K_0.) За деталями, касающимися формальных групп Хонды, мы отсылаем читателя к работе [9, §§ 2, 3], а также к статье [10, § 1]. Пусть K^{alg} — фиксированное алгебраическое замыкание поля K, а $\mathfrak{m}_{K^{\mathrm{alg}}}$ — идеал нормирования, т. е. множество точек в K^{alg} с положительным нормированием. Обозначим через $W_F^n = \ker[\pi^n]_F \subset F(\mathfrak{m}_{K^{\mathrm{alg}}})$ подмодуль π^n-кручения. Точнее, пусть $W_F^n = \{x \in \mathfrak{m}_{K^{\mathrm{alg}}} | [\pi^n]_F(x) = 0\}$, где $[\pi^n]_F \in \mathrm{End}_{\mathcal{O}_K}(F)$, и пусть $W_F = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} W_F^n$.

Известно (см. [9, § 2, теорема 3]), что имеется вложение колец $\mathcal{O}_{K_0} \hookrightarrow \mathrm{End}_{\mathcal{O}_K}(F)$, которое позволяет рассматривать $F(\mathfrak{m}_M)$ как $\mathcal{O}_{K_0}[G]$-модуль. В данной работе с помощью порождающих элементов и определяющих соотношений описывается структура этого модуля в случае неразветвленного p-расширения M/L, для которого при некотором $s \geq 1$ выполняется условие $W_F \cap F(\mathfrak{m}_L) = W_F \cap F(\mathfrak{m}_M) = W_F^s$. Следует отметить (см. [3, предложение 2.11]), что всякое конечное неразветвленное расширение локального поля является расширением Галуа с циклической группой Галуа, поэтому G является циклической p-группой.

Условимся в следующих обозначениях:

- n — степень поля L над K_0;
- h — высота типа $u = \pi + \sum_{i\geq 1} a_i T^i$ формальной группы F, т. е. минимальное число h, для которого a_h обратим;
- f — логарифм формальной группы F;
- p^m — порядок группы $G = \mathrm{Gal}(M/L)$;
- σ — порождающий элемент G;
- $\zeta_i, 1 \leq i \leq h,$ — фиксированный базис $\mathcal{O}_{K_0}/\pi^s\mathcal{O}_{K_0}$-модуля W_F^s;
- k_0, l — поля вычетов K_0 и L соответственно;
- q — порядок k_0;
- $x \underset{F}{+} y := F(x, y)$;
- $\sum_{F;i=1}^{k} x_i := x_1 \underset{F}{+} x_2 \underset{F}{+} \cdots \underset{F}{+} x_k$.

2. Вспомогательные леммы.

Лемма 1. *$\mathcal{O}_{K_0}$-модуль W_F^n изоморфен $(\mathcal{O}_{K_0}/\pi^n\mathcal{O}_{K_0})^h$.*

Доказательство. См. [10, предложение 1]. □

Лемма 2. *Для неразветвленного расширения M/L группы $H^i(G, F(\mathfrak{m}_M))$ являются тривиальными при $i = 0, -1$.*

Лемма 3. *Если элементы $x_1, x_2, \ldots, x_k$ из $F(\mathfrak{m}_M)$ таковы, что система*

$$\{N_{F(\mathfrak{m}_M)}(x_i), 1 \leq i \leq k\}$$

линейно независима в k_0-векторном пространстве $F(\mathfrak{m}_M)/[\pi]_F(F(\mathfrak{m}_M))$, то линейно независима и система $\{x_i^{\sigma^j}, 1 \leq i \leq k, 0 \leq j \leq p^m - 1\}$.

Лемма 4. *Если элементы $x_1, x_2, \ldots, x_k$ из $F(\mathfrak{m}_M)$ порождают k_0-векторное пространство $F(\mathfrak{m}_M)/[\pi]_F(F(\mathfrak{m}_M))$, то они порождают $F(\mathfrak{m}_M)$ как $\mathcal{O}_{K_0}$-модуль.*

Доказательства лемм 2–4 можно найти в статье [8], а также в [7, § 3].

Лемма 5. *Естественный гомоморфизм*

$$\varphi : F(\mathfrak{m}_L)/[\pi]_F(F(\mathfrak{m}_L)) \to F(\mathfrak{m}_M)/[\pi]_F(F(\mathfrak{m}_M))$$

k_0-пространств, индуцированный вложением, имеет ядро размерности h.

Доказательство. Рассмотрим элементы $\eta_i = [\pi^{s-1}]_F \zeta_i, 1 \leq i \leq h$. Они являются свободными образующими W_F^1 как $\mathcal{O}_{K_0}/\pi\mathcal{O}_{K_0}$-модуля. Замечая, что

$$N_{F(\mathfrak{m}_M)}\eta_i = [p^m]_F \eta_i = 0,$$

получаем в силу леммы 2, что $\eta_i = t_i^\sigma \underset{F}{-} t_i$ для некоторого $t_i \in F(\mathfrak{m}_M)$. Пусть теперь $x \in F(\mathfrak{m}_L)$ и $x = [\pi]_F(y)$ для некоторого $y \in F(\mathfrak{m}_M)$. Тогда $[\pi]_F(y^\sigma \underset{F}{-} y) = x^\sigma \underset{F}{-} x = 0$, из чего следует, что

$$y^\sigma \underset{F}{-} y = \sum_{F;i=1}^{h} [a_i]_F(\eta_i) = \sum_{F;i=1}^{h} \left(([a_i]_F(t_i))^\sigma \underset{F}{-} [a_i]_F(t_i) \right)$$

для некоторых $a_i \in \mathcal{O}_{K_0}$, определенных однозначно по модулю π. Последнее соотношение указывает на существование такого $z \in F(\mathfrak{m}_L)$, что $y = \sum_{F;i=1}^{h} [a_i]_F(t_i) \underset{F}{+} z$. Следовательно,

$$x = [\pi]_F(y) = \sum_{F;i=1}^{h} [a_i]_F([\pi]_F(t_i)) \underset{F}{+} [\pi]_F(z).$$

Таким образом, элементы $[\pi]_F(t_i), 1 \leq i \leq h$, образуют базис $\ker \varphi$. Лемма доказана. □

Лемма 6. *Размерность k_0-пространства $F(\mathfrak{m}_L)/[\pi]_F(F(\mathfrak{m}_L))$ равна $n + h$.*

Доказательство. Известно (см. [4, гл. 4, теорема 6.4]), что при $i > \frac{e(L/\mathbb{Q}_p)}{p-1}$ имеется изоморфизм групп $f : F(\mathfrak{m}_L^i) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{m}_L^i$, который является изоморфизмом $\mathcal{O}_{K_0}$-модулей в силу соотношения $f \circ [a]_F = af$, справедливого для всех $a \in \mathcal{O}_{K_0}$. Следовательно, $F(\mathfrak{m}_L^i)$ является свободным $\mathcal{O}_{K_0}$-модулем ранга n. Из точности последовательности $\mathcal{O}_{K_0}$-модулей:

$$0 \to F(\mathfrak{m}_L^{i+1}) \to F(\mathfrak{m}_L^i) \to l \to 0, \quad i \geq 1,$$

вытекает, что $F(\mathfrak{m}_L^i)$ является $\mathcal{O}_{K_0}$-подмодулем конечного индекса в $F(\mathfrak{m}_L)$. Следовательно, $F(\mathfrak{m}_L)$ является конечно порожденным $\mathcal{O}_{K_0}$-модулем ранга n. Из теории конечно порожденных модулей над областями главных идеалов известно, что $F(\mathfrak{m}_L) = T \bigoplus A$, где T-подмодуль кручения, который в нашем случае совпадает с W_F^s, а A — свободный $\mathcal{O}_{K_0}$-модуль ранга n. Следовательно,

$$|F(\mathfrak{m}_L)/[\pi]_F(F(\mathfrak{m}_L))| = |T/[\pi]_F T| \cdot |A/[\pi]_F A| = q^h \cdot q^n = q^{n+h},$$

что завершает доказательство леммы. □

Замечание 1. Точно также получаем, что $\dim_{k_0}(F(\mathfrak{m}_M)/[\pi]_F(F(\mathfrak{m}_M))) = np^m + h$.

Замечание 2. Так как $F(\mathfrak{m}_M)$ — конечно порожденный $\mathcal{O}_{K_0}$-модуль, то по лемме Накаямы получаем новое доказательство утверждения леммы 4.

Лемма 7. *$\zeta_i, 1 \leq i \leq h$, линейно независимы по модулю* $\ker\varphi$.

Доказательство. Допустим выполняется соотношение $\sum_{F;i=1}^h [a_i]_F \zeta_i = [\pi]_F(y)$ для некоторых $a_i \in \mathcal{O}_{K_0}, y \in F(\mathfrak{m}_M)$. Применяя эндоморфизм $[\pi^s]_F$, получим $[\pi^{s+1}]_F(y) = 0$, что дает $[\pi^s]_F(y) = 0$. Откуда $\sum_{F;i=1}^h [\pi^{s-1} a_i]_F \zeta_i = 0$, что эквивалентно условию $a_i \vdots \pi, 1 \leq i \leq h$. Лемма доказана. □

Следствие. $h \leq n$.

Доказательство. Из доказанных лемм вытекает, что максимальное число линейно независимых по модулю $\ker\varphi$ векторов в $F(\mathfrak{m}_L)/[\pi]_F(F(\mathfrak{m}_L))$ равно

$$\dim \mathrm{Im}\varphi = \dim_{k_0}(F(\mathfrak{m}_L)/[\pi]_F(F(\mathfrak{m}_L))) - \dim\ker\varphi = (n+h) - h = n.$$

По лемме 7 мы уже имеем h линейно независимых векторов по модулю $\ker\varphi$, из чего и следует требуемое утверждение. □

3. Основная теорема.

Теорема. *Если расширение M/L неразветвлено, $W_F \cap F(\mathfrak{m}_L) = W_F \cap F(\mathfrak{m}_M) = W_F^s$ при некотором $s \geq 1$, то и поэтому $h \leq n$ и для $\mathcal{O}_{K_0}[G]$-модуля $F(\mathfrak{m}_M)$ существует система образующих $\theta_j, \xi_i, \omega_i, 1 \leq j \leq n-h, 1 \leq i \leq h$, с единственными определяющими соотношениями $[\pi^s]_F(\xi_i) = \omega_i^\sigma \underset{F}{-} \omega_i, 1 \leq i \leq h$.*

Доказательство. Из тривиальности группы $H^0(G, F(\mathfrak{m}_M))$ вытекает существование таких элементов $\xi_i \in F(\mathfrak{m}_M), 1 \leq i \leq h$, что $N_{F(\mathfrak{m}_M)}(\xi_i) = \zeta_i$. Так как

$$N_{F(\mathfrak{m}_M)}([\pi^s]_F(\xi_i)) = [\pi^s]_F(\zeta_i) = 0$$

и группа $H^{-1}(G, F(\mathfrak{m}_M))$ тривиальна, то существуют такие $\omega_i \in F(\mathfrak{m}_M), 1 \leq i \leq h$, что $[\pi^s]_F \xi_i = \omega_i^\sigma \underset{F}{-} \omega_i$. В силу вышеописанного следствия, систему $\zeta_i, 1 \leq i \leq h$, можно дополнить элементами $\varepsilon_j \in F(\mathfrak{m}_L), 1 \leq j \leq n-h$, до базиса по модулю $\ker\varphi$. Выберем такие элементы $\theta_j \in F(\mathfrak{m}_M), 1 \leq j \leq n-h$, что $N_{F(\mathfrak{m}_M)}(\theta_j) = \varepsilon_j$ при всех j и докажем, что система

$$\{\omega_i, \xi_i^{\sigma^k}, \theta_j^{\sigma^k} | 1 \leq i \leq h, 1 \leq j \leq n-h, 0 \leq k \leq p^m - 1\}$$

является линейно независимой по модулю $[\pi]_F(F(\mathfrak{m}_M))$. Допустим противное: пусть существуют элементы $a_i, a_{i,k}, b_{j,k} \in \mathcal{O}_{K_0}$ и $\beta \in F(\mathfrak{m}_M)$, такие что

$$\sum_{F;i}[a_i]_F\omega_i \underset{F}{+} \sum_{F;i,k}[a_{i,k}]_F(\xi_i^{\sigma^k}) \underset{F}{+} \sum_{F;j,k}[b_{j,k}]_F(\theta_j^{\sigma^k}) \underset{F}{+} [\pi]_F(\beta) = 0.$$

Применим $\sigma-1$ к обеим частям последнего соотношения и воспользуемся равенством $[\pi^s]_F\xi_i = \omega_i^\sigma \underset{F}{-} \omega_i, 1 \le i \le h$. В итоге получим соотношение

$$\sum_{F;i,k}[a_{i,k} - a_{i,k-1}]_F(\xi_i^{\sigma^k}) \underset{F}{+} \sum_{F;j,k}[b_{j,k} - b_{j,k-1}]_F(\theta_j^{\sigma^k}) \underset{F}{+} \sum_{F;i}[a_i]_F[\pi^s]_F\xi_i \underset{F}{+} [\pi]_F(\beta^\sigma \underset{F}{-} \beta) = 0.$$

Из лемм 3 и 7 вытекает, что система

$$\{\xi_i^{\sigma^k}, \theta_j^{\sigma^k} | 1 \le i \le h, 1 \le j \le n-h, 0 \le k \le p^m - 1\}$$

линейно независима по модулю $[\pi]_F(F(\mathfrak{m}_M))$, из чего следует, что $a_{i,k} (\mathrm{mod}\ \pi)$ и $b_{j,k} (\mathrm{mod}\ \pi)$ не зависят от k. Следовательно, не ограничивая общности, можно считать, что

$$\sum_{F;i}[a_i]_F[\pi^s]_F\xi_i \underset{F}{+} [\pi]_F(\beta^\sigma \underset{F}{-} \beta) = 0,$$

поменяв, если угодно, β. Из полученного вытекает, что существуют $b_i \in \mathcal{O}_{K_0}, 1 \le i \le h$, такие что

$$\sum_{F;i}[a_i\pi^{s-1}]_F(\xi_i) \underset{F}{+} \beta^\sigma \underset{F}{-} \beta = \sum_{F;i}[b_i]_F\eta_i.$$

После взятия нормы $N_{F(\mathfrak{m}_M)}$ полученное соотношение приводит к равенству

$$\sum_{F;i}[a_i\pi^{s-1}]_F(\zeta_i) = 0,$$

из которого следует, что $a_i \,\vdots\, \pi, 1 \le i \le h$. Теперь из линейной независимости системы

$$\{\xi_i^{\sigma^k}, \theta_j^{\sigma^k} | 1 \le i \le h, 1 \le j \le n-h, 0 \le k \le p^m - 1\}$$

вытекает, что $a_{i,k} \,\vdots\, \pi$ и $b_{j,k} \,\vdots\, \pi$ при всех i, j и k. Это завершает доказательство линейной независимости системы

$$\{\omega_i, \xi_i^{\sigma^k}, \theta_j^{\sigma^k} | 1 \le i \le h, 1 \le j \le n-h, 0 \le k \le p^m - 1\}.$$

Число векторов в ней равно $np^m + h = \dim_{k_0}(F(\mathfrak{m}_M)/[\pi]_F(F(\mathfrak{m}_M)))$. Последнее равенство означает, что эти элементы порождают пространство $F(\mathfrak{m}_M)/[\pi]_F(F(\mathfrak{m}_M))$. Из леммы 4 вытекает, что они порождают $F(\mathfrak{m}_M)$ как $\mathcal{O}_{K_0}$-модуль, и следовательно, элементы $\theta_j, \xi_i, \omega_i, 1 \le j \le n-h, 1 \le i \le h$, порождают $F(\mathfrak{m}_M)$ как $\mathcal{O}_{K_0}[G]$-модуль. Остается доказать утверждение про определяющие соотношения.

Условимся далее записывать умножение на элементы из кольца $\mathcal{O}_{K_0}[G]$ через возведение в степень. Пусть выполняется соотношение

$$\sum_{F;i}\xi_i^{\alpha_i} \underset{F}{+} \sum_{F;i}\omega_i^{\beta_i} \underset{F}{+} \sum_{F;j}\theta_j^{\delta_j} = 0$$

для некоторых $\alpha_i, \beta_i, \delta_j \in \mathcal{O}_{K_0}[G]$. Наша цель — доказать, что существуют элементы $\gamma_i \in \mathcal{O}_{K_0}[G]$ такие, что $\alpha_i = \pi^s \gamma_i, \beta_i = (1-\sigma)\gamma_i$, а $\delta_j = 0$.

Пусть $\beta_i = b_i + (1-\sigma)\gamma_i$ для некоторых $b_i \in \mathcal{O}_{K_0}$ и $\gamma_i \in \mathcal{O}_{K_0}[G]$. Тогда, учитывая соотношение $[\pi^s]_F \xi_i = \omega_i^\sigma \underset{F}{-} \omega_i$, получим

$$\sum_{F;i} \omega_i^{b_i} \underset{F}{+} \sum_{F;i} \xi_i^{\alpha'_i} \underset{F}{+} \sum_{F;j} \theta_j^{\delta_j} = 0,$$

где $\alpha'_i = \alpha_i - \pi^s \gamma_i$. Факторизируя это соотношение по модулю $[\pi]_F(F(\mathfrak{m}_M))$ и учитывая, что система

$$\{\omega_i, \xi_i^{\sigma^k}, \theta_j^{\sigma^k} | 1 \le i \le h, 1 \le j \le n-h, 0 \le k \le p^m - 1\}$$

является базисом по модулю $[\pi]_F(F(\mathfrak{m}_M))$, получаем, что существуют $b_i^{(1)}, \beta'_i, \delta_j^{(1)} \in \mathcal{O}_{K_0}[G]$ такие, что $b_i = \pi b_i^{(1)}, \alpha'_i = \pi \beta'_i, \delta_j = \pi \delta_j^{(1)}$. Следовательно, при некоторых $a_i \in \mathcal{O}_{K_0}$

$$\sum_{F;i} \omega_i^{b_i^{(1)}} \underset{F}{+} \sum_{F;i} \xi_i^{\beta'_i - a_i \sum_k \sigma^k} \underset{F}{+} \sum_{F;j} \theta_j^{\delta_j^{(1)}} = 0$$

в силу того, что $\zeta_i = N_{F(\mathfrak{m}_M)}(\xi_i) = \xi_i^{\sum_k \sigma^k}$. По тем же самым соображениям все $b_i^{(1)}$ и $\delta_j^{(1)}$ делятся на π. По индукции получаем последовательности $(b_i^{(\nu)})_{\nu \ge 0}$ и $(\delta_j^{(\nu)})_{\nu \ge 0}$, удовлетворяющие условиям $b_i^{(0)} = b_i, \delta_j^{(0)} = \delta_j, b_i^{(\nu)} = \pi b_i^{(\nu+1)}$ и $\delta_j^{(\nu)} = \pi \delta_j^{(\nu+1)}$ для всех $\nu \ge 0, 1 \le i \le h, 1 \le j \le n-h$, из которых вытекает, что $b_i = 0$ при всех i и $\delta_j = 0$ при всех j. Остается соотношение $\sum_{F;i} \xi_i^{\alpha'_i} = 0$.

Пусть теперь $\alpha'_i = \sum_k a_{i,k} \sigma^k$, где $a_{i,k} \in \mathcal{O}_{K_0}$ при всех i, k. Тогда факторизация по модулю $[\pi]_F(F(\mathfrak{m}_M))$ дает $a_{i,k} = \pi b_{i,k}$. Далее, получаем, что

$$\sum_{F;i} \xi_i^{\sum_k b_{i,k} \sigma^k} = \sum_{F;i} [\lambda_i]_F(\zeta_i) = \sum_{F;i} \xi_i^{\lambda_i \sum_k \sigma^k}$$

при некоторых $\lambda_i \in \mathcal{O}_{K_0}$. Следовательно, $b_{i,k} (\mathrm{mod} \pi)$ одна и та же при всех k, и так далее. В итоге получим, что $a_{i,k} = a_i$ и что $\sum_{F;i} [a_i]_F(\zeta_i) = 0$, т. е. $a_i = \pi^s t_i$ для некоторых $t_i \in \mathcal{O}_{K_0}$, и поэтому

$$\alpha_i - \pi^s \gamma_i = \alpha'_i = \pi^s t_i \sum_k \sigma^k.$$

Если теперь обозначим $\gamma'_i = \gamma_i + t_i \sum_k \sigma^k$, то будем иметь $\alpha_i = \pi^s \gamma'_i$ и $\beta_i = (1-\sigma)\gamma_i = (1-\sigma)\gamma'_i$, завершив тем самым доказательство теоремы. $\square$

Литература

1. Алгебраическая теория чисел / под ред. Дж. Касселса, А. Фрелиха. М.: Мир, 1969.
2. *Neukirch J.* Class field theory. Springer-Verlag, 1986.
3. *Iwasawa K.* Local class field theory. Oxford University Press, 1986.
4. *Silverman J. H.* The arithmetic of elliptic curves. In Ser.: Graduate Texts in Mathematics. Vol. 106. New York: Springer-Verlag, 1986.
5. *Iwasawa K.* On Galois groups of local fields // Trans. Amer. Soc. 1955. Vol. 80, N 2. P. 448–469.
6. *Iwasawa K.* On local cyclotomic fields // J. Math. Soc. Japan. 1960. Vol. 12, N 1. P. 16–21.

7. *Боревич З. И.* О мультипликативной группе циклических p-расширений локального поля // Тр. МИАН СССР. 1965. Т. 80. С. 16–29.
8. *Востоков С. В., Некрасов И. И.* Формальный модуль Любина—Тейта в циклическом неразветвленном p-расширении как модуль Галуа // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2014. Т. 430. С. 61–66.
9. *Honda T.* On the theory of commutative formal groups // J. Math. Soc. Japan. 1970. Vol. 22, N 2. P. 213–246.
10. *Демченко О. В.* Формальные группы Хонды: арифметика группы точек // Алгебра и анализ. 2000. Т. 12, вып. 1. С. 132–149.

Статья поступила в редакцию 9 мая 2018 г.; рекомендована в печать 2 июля 2018 г.

Контактная информация:

Акопян Тигран Левонович — аспирант; tigran19931026@gmail.com
Востоков Сергей Владимирович — д-р физ.-мат. наук, проф.; sergei.vostokov@gmail.com

Honda formal group in unramified p-extension of local field as Galois module

T. L. Hakobyan, S. V. Vostokov

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Hakobyan T. L., Vostokov S. V. Honda formal group in unramified p-extension of local field as Galois module. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2018, vol. 5 (63), issue 4, pp. 541–548. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.401 (In Russian).

Let p be a rational prime. Let $K/\mathbb{Q}_p$, L/K, and M/L be finite extensions of local fields, let M/L be a Galois extension with Galois group G, and let F be a one-dimensional formal group law over the ring $\mathcal{O}_K$. We denote by $F(\mathfrak{m}_M)$ the abelian group whose underlying set is the maximal ideal $\mathfrak{m}_M$ of $\mathcal{O}_M$ and the group operation is defined by the formula $x \underset{F}{+} y = F(x, y)$. The group $F(\mathfrak{m}_M)$ can be regarded as an $\mathrm{End}_{\mathcal{O}_K}(F)[G]$-module with the natural action of G. The case of the multiplicative formal group law $F = F_m$ is considered in detail in the paper of Borevich (1965), where the author describes the above-mentioned module structure by generators and defining relations when $K = \mathbb{Q}_p$ and M/L is a cyclic p-extension. It is well known that if F is a Lubin—Tate formal group law, then there is an embedding of rings $\mathcal{O}_K \hookrightarrow \mathrm{End}_{\mathcal{O}_K}(F)$, which makes it possible to consider $F(\mathfrak{m}_M)$ as an $\mathcal{O}_K[G]$-module. One natural generalization to the case of Lubin—Tate formal group laws is the paper of Vostokov (2014), where the structure of the $\mathcal{O}_K[G]$-module $F(\mathfrak{m}_M)$ is described in the case of an unramified cyclic p-extension of irregular fields M and L with equal indices of irregularity. Let $K_0/\mathbb{Q}_p$ be a finite extension, K/K_0 be an unramified extension, $\pi \in K_0$ be a uniformizing element in K_0, F be a Honda formal group of finite height over the ring $\mathcal{O}_K$ for the extension K/K_0 and the prime π. Let K^{alg} be a fixed algebraic closure of K, $\mathfrak{m}_{K^{\mathrm{alg}}}$ be the valuation ideal, $W_F^n = \ker[\pi^n]_F \subset F(\mathfrak{m}_{K^{\mathrm{alg}}})$ be the π^n-torsion submodule, and $W_F = \bigcup_{n=1}^{\infty} W_F^n$. In the present paper, we generalize the results of Vostokov to the case of a Honda formal group F. In particular, we describe the structure of the $\mathcal{O}_{K_0}[G]$-module $F(\mathfrak{m}_M)$ in the case of an unramified p-extension M/L for which the condition $W_F \cap F(\mathfrak{m}_L) = W_F \cap F(\mathfrak{m}_M) = W_F^s$ is valid for some $s \geq 1$.

Keywords: local field, unramified extension, formal group, Galois module.

References

1. *Algebraic Number Theory* (eds. J. Cassels, A. Frohlich, Mir, Moscow, 1969) [Russian translation].
2. Neukirch J., *Class field theory* (Springer-Verlag, 1986).

3. Iwasawa K., *Local class field theory* (Oxford University Press, 1986).
4. Silverman J. H., *The arithmetic of elliptic curves*, in Ser. *Graduate Texts in Mathematics* **106** (Springer-Verlag, New York, 1986).
5. Iwasawa K., “On Galois groups of local fields”, *Trans. Amer. Soc.* **80**(2), 448–469 (1955).
6. Iwasawa K., “On local cyclotomic fields”, *J. Math. Soc. Japan* **12**(1), 16–21 (1960).
7. Borevich Z. I., “The multiplicative group of cyclic p-extension of a local field”, *Proc. Steklov Inst. Math.* **80**, 15–30 (1965).
8. Vostokov S. V., Nekrasov I. I., “Lubin—Tate formal module in a cyclic unramified p-extension as Galois module”, *J. Math. Sci.* **219**(3), 375–379 (New York, 2016).
9. Honda T., “On the theory of commutative formal groups”, *J. Math. Soc. Japan* **22**(2), 213–246 (1970).
10. Demchenko O. V., “Formal Honda groups: the arithmetic of the group of points”, *St. Petersburg Math. J.* **12**(1), 101–115 (2001).

Received: May 9, 2018
Accepted: July 2, 2018

Author’s information:

Tigran L. Hakobyan — tigran19931026@gmail.com
Sergei V. Vostokov — sergei.vostokov@gmail.com

ХРОНИКА

22 мая 2018 г. в Доме ученых РАН состоялось заседание Санкт-Петербургского математического общества.

В его первой, распорядительной части были заслушаны отчет президента Общества Ю. В. Матиясевича, отчеты казначея Б. Б. Лурье и председателя ревизионной комиссии Д. М. Ицыксона. Был избран новый состав правления. Президентом вновь избран Ю. В. Матиясевич, вице-президентами — С. В. Востоков, Я. Ю. Никитин, С. К. Смирнов. В состав правления вошли А. Д. Баранов, М. А. Всемирнов, Э. А. Гирш, П. Г. Зограф, С. В. Иванов, С. В. Кисляков, А. И. Назаров, Ф. В. Петров, С. Ю. Пилюгин, Г. И. Синкевич, Т. А. Суслина, Н. А. Широков. Ученым секретарем вновь избран А. А. Лодкин. На заседании была вручена премия Общества «Молодому математику» за 2017 год Александру Андреевичу Логунову. Новыми членами Общества избраны: И. И. Демидова, М. В. Карев, А. А. Логунов, А. Р. Минабутдинов, А. С. Михайлов, Е. В. Новикова, Н. А. Перязев, М. В. Платонова.

Во второй части заседания состоялась презентация коллективной монографии «Математический Петербург». Выступили организаторы-редакторы издания Г. И. Синкевич и А. И. Назаров, рецензент М. А. Всемирнов, художественный редактор книги Д. Ю. Русакова и директор издательства «Образовательные проекты» А. С. Русаков. В порядке проведения подготовки к Международному математическому конгрессу, который будет проходить в Санкт-Петербурге в 2022 году, готовятся второе издание монографии и ее английская версия.