УДК 521.14 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 3
MSC 70F15

О расстояниях между орбитами планет и астероидов*

К. В. Холшевников[1,2], *А. С. Щепалова*[1]

[1] Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9
[2] Институт прикладной астрономии РАН,
Российская Федерация, 191187, Санкт-Петербург, наб. Кутузова, 10

Для цитирования: *Холшевников К. В., Щепалова А. С.* О расстояниях между орбитами планет и астероидов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 3. С. 509–523. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.314

Во многих задачах астрономии требуется количественно оценить близость орбит небесных тел. Она может служить критерием общего происхождения (обычно распада некоторого родительского тела). Для этих целей во второй половине прошлого века было предложено несколько субметрик, т. е. определенных для каждой пары кеплеровых орбит функций, удовлетворяющих первым двум аксиомам метрического пространства, но не обязательно третьей, аксиоме треугольника. В этом десятилетии было показано, что для каждой из предложенных субметрик можно указать открытое множество пар орбит, для которых эта ключевая аксиома нарушается. Недавно были построены новые метрики, удовлетворяющие всем аксиомам метрического пространства, а также индуцируемые ими метрики в распространенных в небесной механике фактор-пространствах пространства непрямолинейных кеплеровых орбит. В настоящей статье мы продолжили исследования свойств обсуждаемых субметрик и метрик; вычислили соответствующие субрасстояния и расстояния между орбитами планет Солнечной системы; вычислили расстояния между парами орбит всех нумерованных астероидов (как в пространстве орбит, так и в трех его фактор-пространствах); вычислили расстояния между орбитой челябинского тела и орбитами всех нумерованных астероидов.

Ключевые слова: метрика, кеплерова орбита, астероид, расстояние между орбитами.

Введение. Во многих областях астрономии требуется оценить схожесть кеплеровых орбит $\mathcal{E}_s$ как точек в некотором 5-мерном пространстве (положение на орбите мы опускаем, но направление движения по орбите учитываем). Этой цели служит введение некоторой функции $\varrho(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$, задающей меру близости, причем критерием близости выступает неравенство

$$\varrho(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) < \varepsilon. \tag{1}$$

Значение ε зависит от рассматриваемой задачи. В идеале ϱ должно представлять собой некоторое расстояние, т. е. удовлетворять трем аксиомам метрического пространства [1, 2]:

1. $\varrho(x_1, x_2) \geqslant 0$, причем $\varrho(x_1, x_2) = 0$ тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$;
2. $\varrho(x_1, x_2) = \varrho(x_2, x_1)$;
3. $\varrho(x_1, x_3) \leqslant \varrho(x_1, x_2) + \varrho(x_2, x_3)$ (аксиома треугольника).

*Работа выполнена с использованием оборудования Вычислительного центра Научного парка СПбГУ при финансовой поддержке РНФ (грант 18-12-00050).

Однако с середины прошлого века до последнего времени были известны только субметрики [3–7], где субрасстояние ϱ удовлетворяет первым двум аксиомам, но не третьей: неравенство треугольника нарушается для некоторых троек орбит [8, 9].

Замечание. Здесь мы ввели термин *субметрика*, поскольку термины *псевдометрика, квазиметрика, полуметрика* уже заняты [1].

В 2004 году появилась и настоящая метрика [10], действующая в пространстве $\mathbb{H}_0$ ограниченных орбит (эллиптических и прямолинейно-эллиптических). В приложениях же наибольший интерес представляют околопараболические орбиты. Поэтому вскоре были предложены метрики [8, 9, 11], действующие в пространстве $\mathbb{H}$ непрямолинейных орбит и в пространстве $\mathbb{H}^\star$ всех кеплеровых орбит. Соответствующие метрики индуцируются евклидовым расстоянием в пространствах $\mathbb{R}^6$ и $\mathbb{R}^7$, в которые вкладываются 5-мерные пространства $\mathbb{H}$ и $\mathbb{H}^\star$. Эти метрики уже используются в задачах отождествления и поиска генетически связанных семейств небесных тел [9, 12, 13]. В 2010 г. Дж. Маруськин [14] предложил риманову метрику в пространстве $\mathbb{H}_0$. Примеров применения этой метрики пока нет.

В данной статье мы вычислили расстояния между орбитами всех планет Солнечной системы с помошью разных субметрик и метрик и выявили их сравнительные достоинства и недостатки. Воспользовавшись одной из них, мы нашли наименьшие расстояния между парами орбит всех нумерованных астероидов. Соответствующие пары могут представлять собой в действительности один объект или быть осколками одного астероида. Кроме того, мы выяснили, что орбита челябинского метеорита определена недостаточно надежно, чтобы выявить его родительское тело среди нумерованных астероидов.

Субметрики. Исторически первые две субметрики были предложены Саутвортом и Хокинзом [3, 7] и названы D-критерием. Если обозначить через a, q, p, e, i, g, Ω большую полуось, перицентрическое расстояние, фокальный параметр, эксцентриситет, наклон, аргумент перицентра и долготу восходящего узла, то для первого критерия Саутворта—Хокинза справедливо

$$D_1^2(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = \frac{(q_1 - q_2)^2}{L^2} + 4\sin^2\frac{I}{2} + (e_1 - e_2)^2 + (e_1 + e_2)^2 \sin^2\frac{\Pi}{2}\,. \qquad (2)$$

Здесь L — масштабный множитель размерности длины, I — взаимный наклон, $\Pi = \lambda_1 - \lambda_2$ — разность долгот в орбите для перицентров, считаемых от взаимного узла. Выбор одного из двух таких узлов безразличен, поскольку при смене узлов каждая из долгот меняется на $\pm\pi$, а их разность на 0 или $\pm 2\pi$, что оставляет инвариантным $|\sin(\Pi/2)|$.

Для вычисления второго и четвертого слагаемых (2) можно воспользоваться формулами [3, 7]

$$\cos I = c_1 c_2 + s_1 s_2 \cos\Delta, \qquad \sin^2\frac{I}{2} = \sin^2\frac{i_1 - i_2}{2} + s_1 s_2 \sin^2\frac{\Delta}{2}\,, \qquad (3)$$

где $c = \cos i$, $s = \sin i$, $\Delta = \Omega_1 - \Omega_2$;

$$\Pi = g_1 - g_2 \pm 2\arcsin\xi, \qquad \xi = \cos\frac{i_1 + i_2}{2}\sin\frac{\Delta}{2}\sec\frac{I}{2}\,. \qquad (4)$$

Знак минус отвечает случаю $|\Delta| > \pi$ при соглашении $0 \leqslant \Omega < 2\pi$ (или $-\pi < \Omega \leqslant 2\pi$).

При $i_1 = i_2 = 0$, а также при $\Delta = 0$ формула (4) упрощается:

$$\Pi = (\Omega_1 + g_1) - (\Omega_2 + g_2). \qquad (5)$$

Это обстоятельство побудило авторов [3] ввести второй критерий $D_2(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$, квадрат которого равен правой части (2) при П, равном правой части (5).

Некоторая модификация функций D_1, D_2 была предложена Драммондом [4, 5]:

$$D_3^2(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = \left(\frac{q_1 - q_2}{q_1 + q_2}\right)^2 + \left(\frac{e_1 - e_2}{e_1 + e_2}\right)^2 + I^2 + \left(\frac{e_1 + e_2}{2}\right)^2 P^2. \tag{6}$$

Здесь P — угол между векторами Лапласа—Рунге—Ленца, направленными из притягивающего центра в перицентр орбиты:

$$\cos P = s_1 s_2 \sin g_1 \sin g_2 + (\cos g_1 \cos g_2 + c_1 c_2 \sin g_1 \sin g_2) \cos\Delta + \\ + (c_2 \cos g_1 \sin g_2 - c_1 \sin g_1 \cos g_2) \sin\Delta. \tag{7}$$

Поскольку $0 \leqslant P \leqslant \pi$, угол P однозначно определяется своим косинусом.

Легко установить следующие свойства функций $D_s(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ (см. [8, 9]).

- Функция D_3 зависит лишь от самих орбит, тогда как D_1, D_2 зависят еще и от выбора основной плоскости.
- Введем пространство $\mathbb{H}$ всех непрямолинейных кеплеровых орбит. Функции D_s, $s = 1, 2, 3$, определены лишь на части пространства $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$. Именно, следует исключить случаи, когда хотя бы одна из двух орбит круговая.
- Для $s = 1, 2$ следует исключить случай, когда $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ совпадают, но проходятся в противоположных направлениях.
- Функция D_3 почти не различает орбиты при фиксированном q_1 и большими, но разными q_2.
- Ни одна из функций D_s не удовлетворяет аксиоме треугольника и, следовательно, является лишь субрасстоянием.

Перейдем к настоящим метрикам. Удивительно, что их не предложили полвека назад. Дело, скорее всего, в том, что субметрики применялись только к близким друг к другу орбитам с большими эксцентриситетами, когда указанные недостатки практически не сказываются.

Метрики. В статье [11] показано, что все используемые в астрономии пространства кеплеровых орбит могут быть метризованы без особенностей. В частности, там введены метрики в 5-мерном пространстве $\mathbb{H}^\star$ всех кеплеровых орбит и в 5-мерном пространстве $\mathbb{H}$ всех непрямолинейных орбит. Пространство $\mathbb{H}^\star$ редко встречается в практике астрономических исследований, метрика там сложнее, и мы сосредоточим свое внимание на пространстве $\mathbb{H}$. Его главный недостаток (с математической точки зрения) — неполнота, вызванная исключением прямолинейных орбит — не влияет на астрономические приложения. Действительно, почти-прямолинейные орбиты чрезвычайно редки, и даже когда встречаются, то не нуждаются в сравнении с соседними орбитами (см., например, исследования кометы Шумейкеров—Леви 9 [15]).

Однако предложенная в [11] метрика, как и D_1, содержит произвольный параметр. Здесь мы будем использовать слегка модифицированную метрику [8, 9], свободную уже от всех вышеуказанных недостатков.

Каждая орбита $\mathcal{E} \in \mathbb{H}$ однозначно определяется двумя ортогональными векторами $\mathbf{u}, \mathbf{v}$, пропорциональными вектору момента импульса и вектору Лапласа—Рунге—Ленца, соответственно. Обратно, каждая пара ортогональных векторов $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ при условии $|\mathbf{u}| > 0$ определяет непрямолинейную орбиту $\mathcal{E} \in \mathbb{H}$. Пусть

$$\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z), \quad \mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z), \quad |\mathbf{u}| = \sqrt{p}, \quad |\mathbf{v}| = e\sqrt{p}, \tag{8}$$

$$\mathbf{uv} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z = 0, \qquad |\mathbf{u}| > 0. \tag{9}$$

Здесь

$$\begin{aligned} u_x &= \sqrt{p}\sin i \sin\Omega, & v_x &= e\sqrt{p}(\cos g\cos\Omega - \cos i\sin g\sin\Omega), \\ u_y &= -\sqrt{p}\sin i\cos\Omega, & v_y &= e\sqrt{p}(\cos g\sin\Omega + \cos i\sin g\cos\Omega), \\ u_z &= \sqrt{p}\cos i, & v_z &= e\sqrt{p}\sin i\sin g. \end{aligned} \tag{10}$$

Орбита $\mathcal{E}$ взаимно-однозначно определяется набором шести чисел $u_x, \dots, v_z$, связанных условиями (9). Пять кеплеровых элементов также определяют орбиту однозначно. Обратное верно с необходимыми оговорками. Во-первых, примем $0 \leqslant i \leqslant \pi$. Во-вторых, при $i = 0$ или $i = \pi$ считаем $\Omega = 0$. В третьих, если $e = 0$, считаем $g = 0$.

Пространство $\mathbb{H}$ вложено в $\mathbb{R}^6$, являясь 5-мерной поверхностью второго порядка (конусом) $\mathbf{uv} = 0$ без 3-мерной плоскости $\mathbf{u} = 0$. Определим расстояние в пространстве $\mathbb{H}$ евклидовой метрикой в объемлющем пространстве $\mathbb{R}^6$:

$$\varrho_2(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = \sqrt{(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)^2 + (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2}, \tag{11}$$

где $\mathbf{u}_k = \mathbf{u}(\mathcal{E}_k)$, $\mathbf{v}_k = \mathbf{v}(\mathcal{E}_k)$.

Замечание. Мы сохраняем нумерацию метрик из [9], позволяя себе иногда опускать индекс 2, отвечающий основному случаю.

Функция (11) определена и не имеет особенностей во всем пространстве $\mathbb{H}$, включающем все эллиптические, параболические и гиперболические орбиты. Она превращает $\mathbb{H}$ в пятимерное алгебраическое, открытое, локально-компактное, линейно-связное пространство без особых точек. Физическая размерность ϱ — корень из единицы длины. Например,

$$\begin{aligned} (\text{а. е.})^{1/2} &= 153.149\,264\,8 R_\oplus^{1/2} = 386.778\,891\,7\,(\text{Мм})^{1/2} = \\ &= 12\,231.022\,49\,(\text{км})^{1/2} = 386\,778.891\,7\,(\text{м})^{1/2}, \end{aligned} \tag{12}$$

где $R_\oplus = 6\,378\,164\,222$ мм — экваториальный радиус общего земного эллипсоида [16]. Разумеется, можно предложить метрику, использующую единицы длины. Достаточно в (8)–(10) заменить $\sqrt{p}$ на p. Но мы не будем делать этого ради сохранения физического смысла вектора $\mathbf{u}$ — момента импульса с точностью до постоянного нормирующего множителя.

Приведем формулу для вычисления метрики по известным элементам. Для ϱ_2 и всех вводимых ниже расстояний ϱ_s она имеет вид

$$\varrho_s^2 = (1 + e_1^2)p_1 + (1 + e_2^2)p_2 - 2\zeta_s\sqrt{p_1 p_2}. \tag{13}$$

Для $s = 2$ имеем

$$\zeta_2 = \cos I + e_1 e_2 \cos P, \tag{14}$$

где $\cos I, \cos P$ даются выражениями (3), (7).

Метрика в фактор-пространствах. Часто, хотя и не всегда, узлы орбит имеют большие вековые возмущения, тогда как остальные 4 элемента орбиты меняются незначительно. В связи с этим полезно иногда игнорировать узлы, или, что то же, отождествлять орбиты с одинаковыми параметрами p, e, i, ω вне зависимости от значений Ω. Это достигается введением 4-мерного фактор-пространства $\mathbb{H}/\Omega$, элементом которого является класс орбит с фиксированными параметрами p, e, i, ω и всевозможными значениями Ω.

Фактор-пространство метрического пространства само является метрическим с хаусдорфовой метрикой [17]. Как показано в [18], последнюю можно представить в простом виде

$$\varrho_3 = \min_{\Omega_1, \Omega_2} \varrho_2. \tag{15}$$

Наименьшее значение существует в силу компактности тора.

Выразим ϱ_3 (15) через элементы. Соотношение (13) имеет вид

$$\varrho^2 = A_0 + A_1 \cos\Delta + A_2 \sin\Delta, \tag{16}$$

где A_k не зависят от Δ. Наименьшее по Δ значение правой части (16) равно

$$\varrho_3^2 = A_0 - \sqrt{A_1^2 + A_2^2}\,.$$

Мы приходим к (13) при

$$\zeta_3 = c_1 c_2 + e_1 e_2 s_1 s_2 \sin g_1 \sin g_2 + \sqrt{s_1^2 s_2^2 + A}, \tag{17}$$

где

$$A = e_1^2 e_2^2 (1 - s_1^2 \sin^2 g_1)(1 - s_2^2 \sin^2 g_2) + 2 e_1 e_2 s_1 s_2 (\cos g_1 \cos g_2 + c_1 c_2 \sin g_1 \sin g_2)\,.$$

Возможна ситуация, когда быстрее изменяются направления перицентров. Напомним, что перигей орбиты Луны движется существенно быстрее узла. Поэтому разумно ввести фактор-пространство $\mathbb{H}/\omega$, элементом которого является класс орбит с фиксированными параметрами p, e, i, Ω и всевозможными значениями ω. Как показано в [18], метрика в этом пространстве дается формулой

$$\varrho_4 = \min_{\omega_1, \omega_2} \varrho. \tag{18}$$

В соотношении (13) от ω_s зависит лишь $\cos P$. Придадим ему вид

$$\cos P = B_1 \cos\varphi + B_2 \sin\varphi + B_3 \cos\psi + B_4 \sin\psi, \tag{19}$$

где $\varphi = \omega_1 - \omega_2, \quad \psi = \omega_1 + \omega_2,$

$$2B_1 = s_1 s_2 + (1 + c_1 c_2)\cos\Delta, \qquad 2B_2 = -(c_1 + c_2)\sin\Delta,$$

$$2B_3 = -s_1 s_2 + (1 - c_1 c_2)\cos\Delta, \qquad 2B_4 = (c_1 - c_2)\sin\Delta.$$

Наибольшее значение правой части (19) равно сумме амплитуд гармоник:

$$\max \cos P = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} + \sqrt{B_3^2 + B_4^2}.$$

Прямые вычисления дают

$$4(B_1^2+B_2^2)=(1+c_1c_2+s_1s_2\cos\Delta)^2,\quad 4(B_3^2+B_4^2)=(1-c_1c_2-s_1s_2\cos\Delta)^2,$$

так что $\sqrt{B_1^2+B_2^2}+\sqrt{B_3^2+B_4^2}=1$. Искомый максимум $\cos P$ равен единице, $P=0$. Это ясно и без вычислений. От аргументов перицентров зависит лишь второе слагаемое под знаком корня в (11). При постоянных $|\mathbf{v}_s|$ оно минимально при нулевом угле между векторами, что достигается их поворотом в орбитальных плоскостях так, чтобы оба вектора были направлены в один из взаимных узлов.

Окончательно, опять приходим к (13) при

$$\zeta_4=e_1e_2+\cos I. \tag{20}$$

Можно идти и дальше, игнорируя и узлы, и перицентры. Достаточно ввести трехмерное фактор-пространство $\mathbb{H}/(\Omega,\omega)$ с метрикой

$$\varrho_5=\min_{\Omega_1,\Omega_2,\omega_1,\omega_2}\varrho. \tag{21}$$

Легко проверяется, что наименьшее значение ϱ (и наибольшее значение косинусов I и P) достигается при одинаковых значениях узлов и перицентров:

$$\Omega_1-\Omega_2=0,\qquad g_1=g_2=0,$$

$$\max\cos I=\cos(i_1-i_2),\qquad \max\cos P=1.$$

В результате опять приходим к (13) при

$$\zeta_5=e_1e_2+\cos(i_1-i_2). \tag{22}$$

Замечание. Метрики ϱ_2,ϱ_4 инвариантны относительно выбора основной плоскости. Напротив, ϱ_3,ϱ_5 зависят от ее выбора, но инвариантны относительно начала отсчета долгот.

Модельные примеры. Приведем несколько примеров в простейших случаях.

1. Если $\mathcal{E}_1=\mathcal{E}_2$, то $\varrho=0$ и обратно.

2. Пусть $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ представляют собой одно и то же коническое сечение, проходимое в противоположных направлениях. Тогда $\mathbf{u}_1=-\mathbf{u}_2$, $\mathbf{v}_1=\mathbf{v}_2$ и $i_2=\pi-i_1$, $\Omega_2=\pi+\Omega_1$, $g_2=\pi-g_1$, $I=\pi$, $P=0$. Без труда находим $\varrho_2=\varrho_4=2\sqrt{p}$, $\varrho_5=2|c|\sqrt{p}$. Мы опускаем индексы у величин $p,e,|c|,s,\sin g,|\cos g|$, общих у обеих орбит.

Ситуация с ϱ_3 сложнее. Согласно (13), (17) имеем

$$\varrho_3^2=2p(1+e^2-\zeta_3),\qquad \zeta_3=e^2s^2\sin^2 g-c^2+\left|s^2-e^2(1-s^2\sin^2 g)\right|.$$

После несложных выкладок получаем

$$\varrho_3=\begin{cases}2\sqrt{p}, & \text{если}\quad s^2\leqslant e^2(1-s^2\sin^2 g),\\ 2\sqrt{p[1+e^2(1-s^2\sin^2 g)-s^2]}, & \text{если}\quad s^2\geqslant e^2(1-s^2\sin^2 g).\end{cases}$$

Легко проверить, что $\varrho_5\leqslant\varrho_3\leqslant\varrho_2$ в согласии с определением расстояний.

Обратим внимание, что $\varrho_4 = \varrho_2$, так что никакие повороты линий апсид в орбитальной плоскости не могут сделать орбиты ближе друг к другу. Не меняющие наклона повороты орбитальных плоскостей могут сблизить орбиты лишь при $s^2 < e^2(1 - s^2 \sin^2 g)$. Наконец, комбинация указанных поворотов сближает орбиты (как точки в пятимерном метрическом пространстве) всегда, исключая случай $\sin i = 0$.

3. Пусть $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ лежат в одной ориентированной плоскости, так что $i_1 = i_2$, $\Omega_1 = \Omega_2$, $\Delta = 0$, $\cos I = 1$, $\cos P = \cos(g_1 - g_2)$. Следовательно, в формуле (13) будем иметь

$$\zeta_2 = 1 + e_1 e_2 \cos(g_1 - g_2), \qquad \zeta_3 = \zeta_4 = \zeta_5 = 1 + e_1 e_2. \tag{23}$$

Естественно, наименьшее при фиксированных p_k, e_k расстояние достигается при $g_1 = g_2$, а наибольшее — при $g_1 = g_2 + \pi$ и не зависит от ориентации векторов u и v. Метрики во всех фактор-пространствах равны.

4. В примере 3 считаем орбиту $\mathcal{E}_2$ круговой, $e_2 = 0$. Тогда

$$\varrho^2 = (1 + e_1^2)p_1 + p_2 - 2\sqrt{p_1 p_2}, \quad \varrho_3 = \varrho_4 = \varrho_5 = \varrho.$$

В частности, если обе орбиты круговые, то $\varrho = |\sqrt{p_1} - \sqrt{p_2}|$.

5. Пусть орбиты $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ круговые с произвольной ориентацией. Тогда

$$\varrho = |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2| = \sqrt{p_1 + p_2 - 2\sqrt{p_1 p_2} \cos I},$$

$$\varrho_3 = \varrho_5 = \sqrt{p_1 + p_2 - 2\sqrt{p_1 p_2} \cos(i_1 - i_2)},$$

$$\varrho_4 = \sqrt{p_1 + p_2 - 2\sqrt{p_1 p_2}(c_1 c_2 + s_1 s_2 \cos \Delta)}.$$

При $I = 0$ мы получаем случай 4, а при $I = \pi, p_1 = p_2$ — случай 2 для круговых орбит.

Расстояния между орбитами планет Солнечной системы. Вычислим взаимные расстояния между орбитами планет Солнечной системы и Плутона в различных метриках и субметриках. Физическая размерность используемых расстояний положена равной корню из а. е. Субрасстояние D_3 безразмерно. Субрасстояния D_1, D_2 безразмерны; входящий в их определение параметр L положен равным 1 а. е., как это принято всеми исследователями.

Замечание. Выбор единицы расстояния не играет существенной роли в метриках ϱ_s. При переходе к другой единице все величины просто умножаются на одно и то же число. Напротив, выбор единицы длины для L существен при нахождении D_1, D_2.

В качестве входных данных использовались элементы орбит планет Солнечной системы и Плутона на эпоху 2000.0 [19]. Работа программы протестирована на модельных примерах предыдущего раздела. Результаты приведены в табл. 1 и 2.

В табл. 1 первое число в каждой ячейке — расстояние $\varrho(\mathcal{E}_k, \mathcal{E}_n)$ между орбитами; второе и третье — значения модулей векторов $|\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_n|$ и $|\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_n|$ соответственно. Эти три величины связаны соотношением (11). Для каждой пары приводим три

Таблица 1. **Расстояния $\varrho(\mathcal{E}_k, \mathcal{E}_n)$ между орбитами планет на эпоху 2000.0**

	Мер	**Вен**	**Зем**	**Мар**	**Юп**	**Сат**	**Ур**	**Неп**
Вен	**0.2772**							
	0.2476							
	0.1246							
Зем	**0.4261**	**0.1598**						
	0.4024	0.1591						
	0.1400	0.0155						
Мар	**0.6515**	**0.3987**	**0.2617**					
	0.6249	0.3801	0.2319					
	0.1842	0.1206	0.1213					
Юп	**1.6749**	**1.4335**	**1.2855**	**1.0627**				
	1.6747	1.4292	1.2792	1.0505				
	0.0278	0.1118	0.1273	0.1605				
Сат	**2.4942**	**2.2475**	**2.0993**	**1.8861**	**0.8399**			
	2.4866	2.2410	2.0923	1.8635	0.8142			
	0.1951	0.1701	0.1714	0.2906	0.2062			
Ур	**3.7816**	**3.5318**	**3.3812**	**3.1615**	**2.1166**	**1.2972**		
	3.7710	3.5263	3.3760	3.1470	2.0974	1.2910		
	0.2826	0.1981	0.1891	0.3022	0.2842	0.1267		
Неп	**4.8762**	**4.6299**	**4.4800**	**4.2547**	**3.2024**	**2.3921**	**1.1251**	
	4.8750	4.6295	4.4795	4.2512	3.2007	2.3891	1.1107	
	0.1060	0.0567	0.0650	0.1737	0.1047	0.1204	0.1796	
Пл	**5.7157**	**5.4608**	**5.3348**	**5.1076**	**4.2349**	**3.5603**	**2.7068**	**2.2689**
	5.4880	5.2541	5.1266	4.9062	3.9315	3.1816	2.2548	1.6686
	1.5974	1.4880	1.4758	1.4198	1.5739	1.5981	1.4975	1.5375

величины, чтобы можно было оценить вклад в значение ϱ от размеров орбит и ориентации их плоскостей, с одной стороны (вектор $\mathbf{u}$), и вклад от эксцентричности и ориентации линий апсид, с другой стороны (вектор $\mathbf{v}$).

Проанализируем табл. 1. У всех пар орбит бо́льший вклад в расстояние вносят их размеры и ориентации плоскостей. Примерно на порядок или в несколько раз первое число больше второго, редко на 2 порядка: пары Нептун — Венера и Нептун — Земля. Только у планет Плутон — Нептун эти числа примерно равны. У Плутона в парах со всеми планетами сравнимый вклад вносят обе величины, различие находится максимум в 5 случаях.

Функция ϱ увеличивается с удалением планет друг от друга, что вполне логично. На диагонали табл. 1 находятся расстояния между соседними орбитами. Можно заметить, что чем больше орбиты (планеты дальше от Солнца), тем ϱ больше, даже между соседями.

Рассмотрим метрики в фактор-пространствах (табл. 2).

Для всех планет расстояния в фактор-пространствах примерно равны расстоянию в основном пространстве и между собой. Расхождения чаще всего начинаются в третьем — четвертом знаках (иногда в пятом — шестом). Но есть пары, различающиеся уже во втором знаке: все пары с Плутоном, кроме Земли, а также Марс — Меркурий, Марс — Земля, Юпитер — Сатурн, Юпитер — Уран. Еще 2 пары: Земля — Меркурий, Земля — Марс имеют различие с основным расстоянием, но все расстояния в фактор-пространствах почти идентичны.

Как видно из табл. 2, рассматривать расстояния в фактор-пространствах для планет Солнечной системы не имеет смысла, наклоны близки к нулю, эксцентриситеты тоже сравнительно малы. Только Плутон (и в меньшей степени Меркурий) немного выбивается из общего ряда, но и для него отличия не столь значительны.

Таблица 2. **Расстояния $\varrho, \varrho_3, \varrho_4, \varrho_5$ между орбитами планет на эпоху 2000.0**

	Мер	Вен	Зем	Мар	Юп	Сат	Ур	Неп
Вен	**0.277202**							
	0.274249							
	0.274936							
	0.273299							
Зем	**0.426080**	**0.159823**						
	0.416841	0.159445						
	0.416807	0.159446						
	0.416806	0.159444						
Мар	**0.651522**	**0.398733**	**0.261693**					
	0.630364	0.397972	0.251778					
	0.625026	0.395411	0.251777					
	0.625025	0.394855	0.251776					
Юп	**1.674937**	**1.433547**	**1.285510**	**1.062666**				
	1.674929	1.433522	1.282691	1.050152				
	1.674763	1.433080	1.282690	1.050486				
	1.673874	1.432925	1.282690	1.049761				
Сат	**2.494206**	**2.247485**	**2.099290**	**1.886059**	**0.839940**			
	2.484854	2.246976	2.098327	1.866663	0.821692			
	2.487081	2.247484	2.098326	1.864531	0.816776			
	2.484750	2.246880	2.098326	1.862925	0.816553			
Ур	**3.781606**	**3.531812**	**3.381164**	**3.161505**	**2.116550**	**1.297177**		
	3.772855	3.531803	3.380996	3.149659	2.101958	1.294090		
	3.771830	3.531754	3.380996	3.148259	2.099375	1.291257		
	3.771716	3.531753	3.380996	3.148193	2.099221	1.289844		
Неп	**4.876201**	**4.629855**	**4.479977**	**4.254743**	**3.202434**	**2.392088**	**1.125083**	
	4.873283	4.629123	4.479734	4.250844	3.200947	2.392024	1.124871	
	4.875460	4.629848	4.479734	4.251527	3.201106	2.391775	1.119566	
	4.873177	4.629061	4.479734	4.250162	3.200708	2.391303	1.115389	
Пл	**5.715736**	**5.460799**	**5.334757**	**5.107574**	**4.234888**	**3.560362**	**2.706807**	**2.268931**
	5.680060	5.457127	5.332745	5.104126	4.204576	3.525956	2.600972	2.264444
	5.653889	5.458362	5.332646	5.093944	4.164526	3.440328	2.593808	2.192937
	5.641416	5.455603	5.332646	5.086813	4.164204	3.440206	2.585879	2.183259

Приведем для сравнения табл. 3 субрасстояний D_1, D_2, D_3. Первое число в графе соответствует D_1, второе — D_2, третье — D_3.

Проанализировав таблицу значений D_s, можно сделать следующие выводы.

1. При расчетах с помощью D_1 получаются значения, различающиеся от ϱ примерно на порядок. Отчасти это связано с разной размерностью D_s и ϱ. Функции D_s и ϱ возрастают с удалением планет друг от друга, что вполне естественно.

2. Субрасстояния D_2 близки к D_1, как и предсказывает теория. Почти у всех пар планет они различаются только во втором и далее знаке после запятой. Это связано с тем, что наклоны орбит большинства планет близки друг к другу и малы. Для Плутона, наклон которого больше, чем у остальных планет, отличие также не превышает нескольких тысячных, что связано с небольшими отличиями еще и долгот восходящих узлов Плутона и других планет. Можно заметить, что для всех пар орбит Земля — планета различия вплоть до 9-го знака после запятой незаметны. Данная картина наблюдается из-за практически нулевого наклона орбиты Земли.

3. Значения D_3 малы как для близких, так и для далеких планет, не наблюдается какой-либо закономерности. Это связано с тем, что в формуле (6) первое слагаемое стремится к 1 при $q_1 \to \infty$ и фиксированном q_2. Кроме того, для круговых орбит

Таблица 3. **Субрасстояния** D_1, D_2, D_3

	Мер	**Вен**	**Земля**	**Мар**	**Юп**	**Сат**	**Ур**	**Неп**
Вен	0.465200 0.483506 1.02238							
Зем	0.732336 0.744039 1.02392	0.272372 0.271886 0.456437						
Мар	1.10824 1.10739 0.790449	0.676777 0.676777 0.934342	0.416369 0.416369 0.724837					
Юп	4.65127 4.64641 1.11131	4.23219 4.23205 1.06614	3.96735 3.96735 0.834523	3.56904 3.57044 0.645347				
Сат	8.73378 8.73463 1.10458	8.32044 8.32034 1.16214	8.05561 8.05561 0.973583	7.65776 7.65897 0.778044	4.08907 4.08938 0.308144			
Ур	17.9921 17.9929 1.16961	17.5797 17.5797 1.18850	17.3148 17.3148 1.01369	16.9174 16.9174 0.946168	13.3484 13.3484 0.584540	9.25965 9.25965 0.357114		
Неп	29.3758 29.3755 1.34893	28.9635 28.9635 0.986667	28.6987 28.69870 0.956507	28.3008 28.3010 1.20295	24.7320 24.7321 0.949061	20.6434 20.6434 0.856166	11.3841 11.3840 0.659266	
Пл	29.3351 29.3368 1.07109	28.9237 28.9244 1.37219	28.6593 28.6593 1.32006	28.2624 28.2608 1.16248	17.7370 17.7369 1.04865	20.6055 20.6055 0.921595	11.3473 11.3491 0.778680	0.436356 0.436325 1.00673

D_3 ведет себя плохо: при $e_1 = 0, e_2 \neq 0$ четвертое слагаемое правой части (6) не определено, а второе равно единице, что противоречит здравому смыслу. Все это приводит к значениям субрасстояний, заключенным между 0 и 1.4. Недостаток этой субметрики еще и в том, что расстояния не увеличиваются при удалении планет друг от друга, а имеют скачки, поэтому ее затруднительно использовать при сравнении орбит.

Расстояния между орбитами астероидов. В задаче отождествления родительских тел астероидно-метеороидных комплексов центральную роль играют метрики в пространстве кеплеровых орбит и в трех важнейших фактор-пространствах, полученных игнорированием долгот узлов, аргументов перицентров, или обоих этих углов.

В данной работе были найдены четыре указанных типа расстояний ϱ_s между орбитами всех $N = 464\,622$ нумерованных астероидов, всего $N(N-1)/2 = 107\,936\,569\,131$ пар. Параметры орбит взяты из ежегодника [20].

Величины ϱ_s имеют размерность квадратного корня из длины. Мы приводим их в системе, в которой за единицу длины принята астрономическая единица. Переход к другим единицам содержится в [12]. Нас интересуют малые расстояния. Программа расчета выводит на печать пары астероидов, расстояния между их орбитами и фактор-орбитами, если они не превосходят $10^{-3}\,(\text{а. е.})^{1/2} = 0.153\,R_\oplus^{1/2} = 12.2\,(\text{км})^{1/2}$. Наименьшие найденные расстояния приведены в табл. 4.

Наименьшее расстояние, равное $3.634540 \cdot 10^{-5}$, принадлежит паре № 63440 и № 331933. Элементы орбит данных астероидов различаются лишь в шестом знаке (чуть хуже у аргумента перицентра). Напрашивается предварительный вывод: эти астероиды являются осколками одного либо это вообще один и тот же асте-

Таблица 4. **Наименьшие расстояния между орбитами астероидов**

№ (абс. зв. величина)	№ (абс. зв. величина)	Расстояние
63440 (15.2)	331933 (17.6)	$\varrho = 3,63 \cdot 10^{-5}$ (также малые ϱ_4, ϱ_5)
58411 (15.1)	144578 (15.5)	$\varrho_3 = 6.73 \cdot 10^{-5}$
21436 (15.4)	334916 (18.2)	$\varrho = 7.97 \cdot 10^{-5}$ (также малые ϱ_3, ϱ_4)
355258 (18.8)	404118 (17.9)	$\varrho_5 = 3.98 \cdot 10^{-5}$ (также малое ϱ_4)

роид. Отдельно были рассмотрены метрики в трех фактор-пространствах. Наименьшие расстояния $\varrho_4 = 1.1463381 \cdot 10^{-5}$ (минимум по аргументам перицентра) и $\varrho_5 = 1.0753622 \cdot 10^{-5}$ (минимум по узлам и аргументам перицентра) принадлежат вышеуказанной паре. Однако наименьшее расстояние $\varrho_3 = 6.7338774 \cdot 10^{-5}$ (минимум по узлам) принадлежит паре астероидов № 58411 и № 145784, их орбиты в пространстве орбит таковыми не являются.

Для более точного анализа в табл. 4 приведены абсолютные звездные величины этих астероидов.

Большинство найденных минимальных расстояний между орбитами принадлежит астероидам с различными абсолютными звездными величинами, следовательно, можно предположить, что это осколки более крупного разрушенного астероида.

Из нескольких рассмотренных пар с достаточно малыми расстояниями между их орбитами были найдены 2 пары, абсолютные звездные величины которых приблизительно одинаковы (табл. 5).

Таблица 5. **Расстояния между орбитами астероидов с приблизительно равными звездными величинами**

№ (абс. зв. величина)	№ (абс. зв. величина)	Расстояние
180906 (17.6)	217266 (17.4)	$\varrho = 2.393 \cdot 10^{-4} (= 2.29\sqrt{km})$
100509 (15.1)	108692 (15.2)	$\varrho_3 = 1.076 \cdot 10^{-4}$

Приведем для более точного анализа элементы орбит данных астероидов (табл. 6). Элементы первой пары отличаются лишь во втором — третьем знаке. Возможно, они представляют один и тот же объект. У второй пары элементы отличаются сильнее, поэтому такое для них предположить нельзя.

Таблица 6. **Элементы орбит астероидов с приблизительно равными звездными величинами**

астерод	a, а.е.	e	i, град	g, град	Ω, град	M, град
180906	2.2359939	0.1156480	3.84085	197.19561	87.15577	204.45023
217266	2.2361541	0.1154993	3.84073	197.17917	87.14644	179.71038
100509	2.3502669	0.2238601	22.28812	93.47054	110.66002	200.34721
108692	2.4186526	0.1966817	21.11578	88.26485	327.08985	15.98486

В заключение раздела приведем вытекающие из определения неравенства между ϱ_s:

$$\varrho_5 \leqslant \varrho_3 \leqslant \varrho_2 \,, \qquad \varrho_5 \leqslant \varrho_4 \leqslant \varrho_2 \,. \tag{24}$$

Что же касается ϱ_3 , ϱ_4, то встречаются все три логически возможных варианта. Согласно (23) имеем $\varrho_3 = \varrho_4 = \varrho_5$ для орбит, лежащих в одной ориентированной плоскости. Табл. 2 показывает, что среди планет в 8 случаях выполняется $\varrho_3 < \varrho_4$, в 26 случаях — $\varrho_3 > \varrho_4$ и в 2 случаях — $\varrho_3 = \varrho_4$ с принятой точностью. Среди 107 936 569 131 пар астероидов в 46% случаев выполняется $\varrho_3 < \varrho_4$ и в 54% случаев — $\varrho_3 > \varrho_4$.

Челябинское тело. 15 февраля 2013 года астероид диаметром около 17 метров и массой порядка 10^4 тонн вошел в атмосферу Земли на скорости около 18 км/с. Это был так называемый «челябинский метеорит». По данным различных наблюдений сразу были найдены элементы его предварительной орбиты [21]. Табл. 7 воспроизводит более точную орбиту с указанием погрешностей [22]. Правда, ошибка Ω не приводится, но из текста ясно, что ее значение около $0.1°$.

Таблица 7. **Элементы орбиты челябинского тела**

a, а. е.	e	i, град	g, град	Ω, град
1.67 ± 0.10	0.57 ± 0.03	7.07 ± 0.54	106.28 ± 2.54	326.42 ± 0.10

Мы вычислили четыре типа расстояний между орбитой челябинского тела и орбитами всех нумерованных астероидов. В табл. 8 для каждого типа приведены значения наименьшего и следующего за ним расстояния и номера соответствующих астероидов. Как видим, все значения ϱ довольно большие. Расстояния в фактор-пространствах меньше, но несущественно.

Насколько надежны эти данные? Для ответа на этот вопрос мы проделали следующее.

Таблица 8. **Наименьшие расстояния между орбитой челябинского тела и орбитами астероидов**

Метрика	№ астероида	Расстояние
ϱ	86039	0.04492
	369057	0.12184
ϱ_3	86039	0.04385
	137126	0.05636
ϱ_4	86039	0.04428
	385605	0.05352
ϱ_5	257744	0.02151
	86039	0.02863

1. Обозначим 5 элементов орбиты $\mathcal{E}$ челябинского тела через ϵ_s, а приведенные в табл. 7 погрешности через $\delta\epsilon_s$, $s = 1, \ldots, 5$. Наряду с орбитой $\mathcal{E}$ рассмотрим $3^5 = 243$ орбиты $\mathcal{E}_k$ с элементами $\epsilon_{sk_s} = \epsilon_s + k_s\delta\epsilon_s$, $k_s = -1, 0, 1$, $k = (k_1, \ldots, k_5)$. Вычислим 4 типа расстояний между орбитами $\mathcal{E}_k$ и указанных в табл. 8 астероидов. В табл. 9 приведем наименьшее, наибольшее и среднее из этих величин.

Таблица 9. **Расстояния между варьированной орбитой челябинского тела и орбитами астероидов**

Метрика	№ астероида	Наименьшее	Среднее	Наибольшее
ϱ	86039	0.03684	0.06337	0.09577
	369057	0.06925	0.12718	0.18284
ϱ_3	86039	0.03047	0.05836	0.09248
	137126	0.03303	0.06857	0.09182
ϱ_4	86039	0.03626	0.05843	0.08982
	385605	0.04896	0.06653	0.08942
ϱ_5	257744	0.01569	0.04336	0.07162
	86039	0.01250	0.04585	0.08325

2. Вычислим 4 типа расстояний между орбитой $\mathcal{E}$ и 243 орбитами $\mathcal{E}_k$. Наименьшее для каждого типа, естественно, равно нулю. В табл. 10 приведены наибольшее и среднее из этих значений.

Таблица 10. **Наибольшее и среднее расстояния между орбитой $\mathcal{E}$ и 243 орбитами $\mathcal{E}_k$**

Метрика	Среднее	Наибольшее
ϱ	0.04421	0.06664
ϱ_3	0.03827	0.06092
ϱ_4	0.03749	0.06031
ϱ_5	0.03749	0.06031

Приведенные в табл. 9 и 10 значения сравнимы по порядку величины. У многих пар орбит реальных астероидов расстояния на несколько порядков меньше. Заключаем, что орбита челябинского тела определена не слишком уверенно для наших целей: можно указать с десяток астероидов, возможно являющихся родительским телом челябинского метеорита, и выбор между ними невозможен.

Литература

1. *Бураго Д. Ю., Бураго Ю. Д., Иванов С. В.* Курс метрической геометрии. М.; Ижевск: Изд-во ИКИ, 2004. 512 с.

2. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. М.: Наука, 1984. 831 с.

3. *Southworth R., Hawkins G.* Statistics of meteor streams // Smithson. Contrib. Astrophys. 1963. Vol. 7. P. 261–285.

4. *Drummond J. D.* On meteor/comet orbital discriminant D // Proc. Southwest Regional Conf. Astron. Astrophys / Eds. P. F. Gott, P. S. Riherd. Little Rock AR. 1979. Vol. 5. P. 83–86.

5. *Drummond J. D.* A test of comet and meteor shower associations // Icarus. 1981. Vol. 45. P. 545–553.

6. *Jopek T. J.* Remarks on the meteor orbital similarity *D*-criterion // Icarus. 1993. Vol. 106, N 2. P. 603–607.

7. *Калинин Д. А.* О критериях общности в кометных метеороидных комплексах // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 2013. Вып. 5. С. 3–9.

8. *Холшевников К. В.* О метриках в пространствах кеплеровских орбит // Физика Космоса: Тр. 45-й Международ. студ. науч. конф., Екатеринбург, 1–5 февр. 2016 г. Екатеринбург: Изд-во УрФУ, 2016. С. 168–185.

9. *Kholshevnikov K. V., Kokhirova G. I., Babadzhanov P. B., Khamroev U. H.* Metrics in the space of orbits and their application to searching for celestial objects of common origin // MNRAS. 2016. Vol. 462, N 2. P. 2275–2283.

10. *Kholshevnikov K. V., Vassiliev N. N.* Natural metrics in the spaces of elliptic orbits // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2004. Vol. 89, N 2. P. 119–125.

11. *Kholshevnikov K. V.* Metric Spaces of Keplerian Orbits // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2008. Vol. 100, N 3. P. 169–179.

12. *Кузнецов Э. Д., Сафронова В. С.* Приложение метрик пространства кеплеровых орбит для поиска астероидов на близких орбитах // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2017. №4. Вып. 2. С. 86–92.

13. *Kokhirova G. I., Kholshevnikov K. V., Babadzhanov P. B., Khamroev U. H., Milanov D. V.* Metric approaches to identify a common origin of objects in σ-Capricornids complex // Planetary and Space Science. 2018. Vol. 157. P. 28–33.

14. *Maruskin J. M.* Distance in the space of energetically bounded Keplerian orbits // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2010. Vol. 108, N 3. P. 265–274.

15. The Collision of Comet P/Shoemaker—Levy 9 and Jupiter / eds K. S. Noll, H. A. Weaver, P. D. Feldman. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2006. 388 p.

16. *Аллен К. У.* Астрофизические величины. М.: Мир, 1977. 25 с.

17. *Хаусдорф Ф.* Теория множеств. М.: КомКнига, 2006. 304 с.

18. *Milanov D. V.* Metrics in Keplerian orbits quotient spaces // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2018. Vol. 130, N 3. P. 75–94.

19. *Мюррей К., Дермотт С.* Динамика Солнечной системы. М.: Физматлит, 2010. 588 с.

20. *Железнов Н. Б., Кочетова О. М., Кузнецов В. Б. и др.* Эфемериды малых планет на 2017 год. СПб.: Изд-во ИПА РАН, 2016.

21. *Емельяненко В. В., Попова О. П., Чугай Н. Н. и др.* Астрономические и физические аспекты челябинского события 15 февраля 2013 г. // Астрономический вестник. 2013. Т. 47. Вып. 4. С. 262–277.

22. *Голубаев А. В.* Основные характеристики движения метеороида при выпадении Челябинского метеоритного дождя 15 февраля 2013 года // Астрономический вестник. 2015. Т. 49. Вып. 3. С. 163–175.

Статья поступила в редакцию 14 февраля 2018 г.; рекомендована в печать 22 марта 2018 г.

Контактная информация:

Холшевников Константин Владиславович — д-р физ.-мат. наук, проф.; kvk@astro.spbu.ru
Щепалова Анастасия Сергеевна — студент; shepalovanastya@mail.ru

On distances between orbits of planets and asteroids

K. V. Kholshevnikov[1,2], *A. S. Shchepalova*[1]

[1] St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation
[2] Institute of Applied Astronomy RAS, nab. Kutuzova, 10, St. Petersburg, 191187, Russian Federation

For citation: Kholshevnikov K. V., Shchepalova A. S. On distances between orbits of planets and asteroids. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2018, vol. 5 (63), issue 3, pp. 509–523. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.314

In various astronomical problems it is required to estimate a proximity of celestial bodies orbits. It can serve as a criterion of a common origin (usually of a parent body fragmentation). Several submetrics were proposed for this goal in the latter half of the 20th century. We call submetric a function defined for each pair of Keplerian orbits, and satisfying the first two axioms of metric space, but not obligatory the third, triangle axiom. It was shown during the last decade that for each of the proposed submetrics one can indicate an open set of orbital pairs for which this key axiom violates. Recently new metrics were constructed satisfying all axiom of mertric space, as well as induced by them metrics in widespread in celestial mechanics factor-spaces of the space of non-rectilinear Keplerian orbits. In the present paper we extended to examine properties of considered submetrics and metrics; calculated corresponding subdistances and distances between planetary orbits in the Solar System; calculated distances between all pairs of orbits of numbered asteroids (in the space of orbits, as well as in its three subspaces); calculated distances between the orbit of the Chelyabinsk body and orbits of all numbered asteroids.

Keywords: metrics, Keplerian orbit, asteroid, distance between orbits.

References

1. Burago D. Y., Burago Y. D., Ivanov S. V., *A Course in Metric Geometry* **33**. In: *Graduate Studies of Mathematics* (2001, 418 p.).

2. Korn G., Korn T., *Mathematical handbook for scientists and engineers* (Courier Corporation, 2013, 1152 p.).

3. Southworth R., Hawkins G., "Statistics of meteor streams", *Smithson. Contrib. Astrophys* **7**, 261–285 (1963).

4. Drummond J. D., "On meteor/comet orbital discriminant D", *Proc. Southwest Regional Conf. Astron. Astrophys.*, 83–86 (Eds. P. F. Gott, P. S. Riherd, Little Rock AR **5**, 1979).

5. Drummond J. D., "A test of comet and meteor shower associations", *Icarus* **45**, 545–553 (1981).

6. Jopek T. J., “Remarks on the meteor orbital similarity D-criterion”, *Icarus* **106**(2), 603–607 (1993).

7. Kalinin D. A., “On the criteria for generality in cometary meteoroid complexes”, *Proceedings of high schools. Geodesy and aerial photography* **5**, 3–9 (2013) [in Russian].

8. Kholshevnikov K. V., “On metrics in the space of Keplerian orbits”, *Physics of Space: Works of the 45th International. stud. sci. conference, Yekaterinburg, 1-5 February, 2016*, 168–185 (Yekaterinburg, 2016) [in Russian].

9. Kholshevnikov K. V., Kokhirova G. I., Babadzhanov P. B., Khamroev U. H., “Metrics in the space of orbits and their application to searching for celestial objects of common origin”, *MNRAS* **462**(2), 2275–2283 (2016).

10. Kholshevnikov K. V., Vassiliev N. N., “Natural metrics in the spaces of elliptic orbits”, *Celest. Mech. Dyn. Astron.* **89**(2), 119–125 (2004).

11. Kholshevnikov K. V., “Metric Spaces of Keplerian Orbits”, *Celest. Mech. Dyn. Astron.* **100**(3), 169–179 (2008).

12. Kuznetsov E. D., Safronova V. S., “Using of metrics in the space of orbits to searching for asteroids on close orbits”, *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation* (4), issue 2, 86–92 (2017) [in Russian].

13. Kokhirova G. I., Kholshevnikov K. V., Babadzhanov P. B., Khamroev U. H., Milanov D. V., “Metric approaches to identify a common origin of objects in σ-Capricornids complex”, *Planetary and Space Science*, **157**, 28–33 (2018).

14. Maruskin J. M., “Distance in the space of energetically bounded Keplerian orbits”, *Celest. Mech. Dyn. Astron.* **108**(3), 265–274 (2010).

15. *The Collision of Comet P/Shoemaker—Levy 9 and Jupiter* (Eds. K. S. Noll, H. A. Weaver, P. D. Feldman, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2006, 388 p.).

16. Allen K. U., *Astrophysical Quantities* (Ed. A. N. Cox, 4th ed., Springer, 1999).

17. Hausdorff F., *Set Theory* (AMS Chelsea Publishing, 2005, 352 p.).

18. Milanov D. V., “Metrics in Keplerian orbits quotient spaces”, *Celest. Mech. Dyn. Astron.* **130**(3), 75–94 (2018).

19. Murray C. D., Dermott S. F., *Solar System Dynamics* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001, 592 p.).

20. Zheleznov N. B., Kochetova O. M., Kuznetsov V. B., et al., *Ephemerides of minor planets for 2017* (IPA Publ., St. Petersburg, 2016).

21. Emelyanenko V. V., Popova O. P., Chugai N. N., et al., “Astronomical and physical aspects of the Chelyabinsk event February 15, 2013”, *Solar System Research* **47**(4), 240–254 (2013).

22. Golubaev A. V., “Main parameters of meteoroid motion during the fall of the Chelyabinsk meteorite shower on February 15, 2013”, *Solar System Research* **49**(3), 147–158 (2015).

Author’s information:

Konstantin V. Kholshevnikov — kvk@astro.spbu.ru
Anastasiia S. Shchepalova — shepalovanastya@mail.ru