

## МЕХАНИКА

УДК 539.3  
MSC 74K10

## Устойчивость гибкого вертикального стержня на вибрирующем основании\*

А. К. Беляев<sup>1</sup>, Н. Ф. Морозов<sup>2</sup>, П. Е. Товстик<sup>2</sup>, Т. П. Товстик<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Институт проблем машиноведения РАН,  
Российская Федерация, 199178, Санкт-Петербург, Большой пр. В. О., 61

<sup>2</sup> Санкт-Петербургский государственный университет,  
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

**Для цитирования:** Беляев А. К., Морозов Н. Ф., Товстик П. Е., Товстик Т. П. Устойчивость гибкого вертикального стержня на вибрирующем основании // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 3. С. 477–488. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.311>

Дается обобщение классической задачи Капицы на случай перевернутого гибкого маятника. Рассматривается тонкий однородный вертикальный стержень со свободным верхним концом и шарнирно или жестко закрепленным нижним концом под действием веса и гармонических вертикальных колебаний основания. В обоих случаях закрепления найдены условия устойчивости вертикального положения стержня. Учитывается влияние как продольных, так и изгибных колебаний стержня, причем изгибные колебания описываются по балочной модели Бернулли—Эйлера. Решение построено в виде разложения в ряды Фурье по собственным функциям вспомогательных краевых задач. В результате задача сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами и малым параметром. Для ее решения и для определения критического уровня вибраций используется асимптотический метод двухмасштабных разложений. Установлено, что учет влияния продольных волн в стержне существенно снижает критическую нагрузку. Оказалось, что одномодовое приближение дает удовлетворительную точность. В случае шарнирной опоры нижнего конца стержня получено явное приближенное решение. Для жесткого закрепления проведен численный анализ критического уровня вибраций от параметров задачи.

*Ключевые слова:* гибкий маятник Капицы, сжатый стержень, изгибные колебания, продольные колебания, двухмасштабные асимптотические разложения.

\*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 16.01.00580-а, 16.51.52025 МНТ-а).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2018

**1. Введение.** В различных постановках рассматривается задача об устойчивости вертикального положения стержня, равновесие которого поддерживается за счет вертикальных вибраций нижнего основания. Простейшей задачей этого класса является задача об устойчивости вертикального положения перевернутого математического маятника с вибрирующей точкой опоры. Впервые задача была решена в работе А. Стефенсона [1], однако более детальные теоретические и экспериментальные исследования были выполнены П. Л. Капицей [2]. Различные обобщения этой задачи и приближенные методы их решения содержатся в монографии И. И. Блехмана [3].

В данной статье основное внимание уделено вопросам устойчивости вертикального положения гибкого стержня с нижней точкой опоры, находящегося под действием собственного веса и вибраций основания. Еще из трудов Л. Эйлера известен подход, позволяющий теоретически проверить очевидный факт, что достаточно длинный стержень неустойчив, даже если он жестко закреплен снизу. Ниже показано, что при наличии вертикальных гармонических вибраций основания неустойчивое положение может стать устойчивым. В линейном приближении задача сводится к поперечным колебаниям стержня под действием периодического осевого сжатия. Задачи этого класса были предметом исследований авторов статьи [4, 5], посвященных задаче Лаврентьева—Ишлинского о динамическом сжатии стержня [6]. В них существенное влияние на движение оказывали параметрические резонансы [7], возникающие при определенных соотношениях между частотами продольных и поперечных колебаний. Ниже определяющую роль играет левая часть диаграммы Айнса—Стретта [8], на которую распространяется область устойчивости. Решение получено как без учета, так и с учетом распространения продольных волн в стержне, причем оказалось, что, как правило, влияние продольных волн весьма существенно.

Решение построено в виде разложения по собственным функциям вспомогательных краевых задач. Одной из этих задач является задача бифуркации вертикального равновесия стержня под действием собственного веса. Другая задача — это задача свободных поперечных колебаний сжатой балки. В результате разложения получены системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Для исследования устойчивости нулевого решения используется асимптотический метод двухмасштабных разложений [9].

**2. Маятник Капицы.** Рассмотрим сначала движение перевернутого маятника с вертикально колеблющейся точкой опоры. Будем считать маятник тонким однородным недеформируемым стержнем длины  $L$ . В подвижной системе координат движение описывается уравнением

$$J\ddot{\varphi} - (mL/2)(g - a\omega^2 \sin \omega t) \sin \varphi = 0, \quad (2.1)$$

где  $\varphi$  — угол поворота,  $J = mL^2/3$  — момент инерции относительно точки опоры,  $m$  — масса,  $g$  — ускорение свободного падения,  $a$  и  $\omega$  — амплитуда и частота колебаний основания.

Устойчивость вертикального положения равновесия находим из линеаризованного уравнения (2.1), записанного в безразмерных переменных

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} - (q - \alpha \sin t)\varphi = 0, \quad (2.2)$$

где  $\hat{t} = \omega t$ ,  $q = 3g/(L\omega^2)$ ,  $\alpha = 3a/(2L)$ . Уравнение (2.2) — это уравнение Матье. Границы области устойчивости нулевого решения при малых  $q > 0$  известны [8]:

$\alpha^2/2 > q > 0.595(\alpha - 0.454)$  (см. рис. 1, на котором область устойчивости  $S$  заштрихована, а ее часть при  $q > 0$  обозначена через  $S_1$ ) или в исходных обозначениях

$$0.75\delta^2 > g/(L\omega^2) > 0.595(\delta - 0.303), \quad \delta = a/L. \quad (2.3)$$

При фиксированных  $L$  и  $\delta$  левое неравенство (2.3) будет выполнено при достаточно больших значениях частоты  $\omega$ . Правое неравенство (2.3) интересует нас в меньшей степени, ибо оно может нарушаться лишь при больших амплитудах колебаний основания  $a > 0.3L$ .

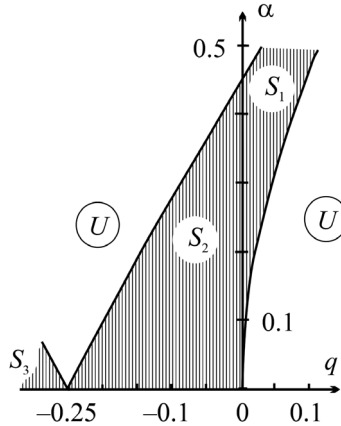


Рис. 1. Фрагмент диаграммы Айнса—Стретта.

Перепишем левую часть неравенства (2.3) в виде

$$g_a > g_a^* = \frac{4}{3\delta}. \quad (2.4)$$

Безразмерную величину  $g_a = a\omega^2/g$  назовем перегрузкой при колебаниях основания, обеспечивающей устойчивость вертикального положения стержня.

**3. Уравнение изгиба сжатого стержня.** Малые изгибные колебания продольно сжатого стержня длины  $L$  около вертикального положения равновесия в подвижной системе координат описываются уравнением

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial}{\partial x} \left( P \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \rho S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad P = P_w(x) + P_v(x, t). \quad (3.1)$$

Здесь  $w(x, t)$  — поперечный прогиб,  $D = EI$  — изгибная жесткость,  $\rho$  — плотность,  $S$  — площадь поперечного сечения.

Верхний конец  $x = L$  стержня свободен, а на нижнем конце  $x = 0$  рассматриваем два варианта граничных условий — шарнирную опору или жесткое закрепление, что дает граничные условия в виде

$$\frac{\partial^2 w(L, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 w(L, t)}{\partial x^3} = 0, \quad w(0, t) = \frac{\partial^2 w(0, t)}{\partial x^2} = 0 \quad \text{или} \quad w(0, t) = \frac{\partial w(0, t)}{\partial x} = 0. \quad (3.2)$$

На эти же условия будем ссылаться и в случае функций  $w(x)$ ,  $\Psi(x)$ ,  $\Phi(x)$  при  $0 \leq x \leq 1$ .

Осевая сила  $P$  состоит из двух слагаемых, первое из которых  $P_w(x) = P_0(L - x)/L$  связано с весом стержня  $P_0 = \rho gSL$ , а второе  $P_v(x, t)$  обусловлено вибрациями основания. Для нерастяжимого стержня имеем  $P_v(x, t) = -\rho a \omega^2 S(L - x) \sin \omega t$ , а для растяжимого стержня сила  $P_v(x, t)$  зависит от распространения продольных волн по стержню и найдена в п. 6.

Запишем уравнение (3.1) в безразмерном виде

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \hat{x}^4} + \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left( P_* (1 - \hat{x}) \frac{\partial w}{\partial \hat{x}} \right) (1 - g_a \sin \hat{t}) + \frac{P_* g_a}{\delta} \frac{\partial^2 w}{\partial \hat{t}^2} = 0, \quad (3.3)$$

где

$$x = L\hat{x}, \quad \hat{t} = \omega t, \quad P_* = \frac{P_0 L^2}{D}, \quad g_a = \frac{a \omega^2}{g}, \quad \delta = \frac{a}{L}.$$

В дальнейшем значок  $\hat{\phantom{x}}$  опускаем.

#### 4. Разложение решения по системам собственных функций. Положим

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^N \Psi_k(x) w_k(t), \quad (4.1)$$

где  $\Psi_k(x)$  — собственные функции краевой задачи, состоящей из уравнения

$$\frac{d^4 \Psi}{dx^4} + p \frac{d}{dx} \left( (1-x) \frac{d\Psi}{dx} \right) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (4.2)$$

и граничных условий (3.2) (случаи шарнирной и жесткой опор конца  $x = 0$  стержня рассматриваем одновременно).

Задача (4.2) суть задача бифуркации статического равновесия вертикального стержня под действием собственного веса. Ее первые собственные значения в случае шарнирной опоры таковы:  $p_1 = 0$ ,  $p_2 = 25.64$ ,  $p_3 = 95.96$ ,  $p_4 = 210.7$  и  $\Psi_1(x) = x$ , в случае жесткой заделки —  $p_1 = 7.8373$ ,  $p_2 = 55.98$ ,  $p_3 = 148.5$ ,  $p_4 = 285.4$ , и при  $P_* > p_1$  стержень теряет устойчивость под действием собственного веса.

Уравнение (4.2) интегрируется в функциях Эри.

Пользуясь ортогональностью  $\int_0^1 (1-x) \Psi'_k \Psi'_n dx = 0$  функций  $\Psi_k(x)$ , получаем систему уравнений для неизвестных функций  $w_k(t)$ :

$$\sum_{k=1}^N a_{nk} \frac{d^2 w_k}{dt^2} + \delta b_n \left( \frac{1}{g_a} \left( \frac{p_n}{P_*} - 1 \right) + \sin t \right) w_n = 0, \quad n = 1, \dots, N, \quad (4.3)$$

где  $a_{kn} = \int_0^1 \Psi_k \Psi_n dx$ ,  $b_n = \int_0^1 (1-x) (\Psi'_n)^2 dx$ .

Разложение (4.1) назовем *первым* разложением. Рассмотрим *второе* разложение

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^N \Phi_k(x) \tilde{w}_k(t), \quad (4.4)$$

где  $\Phi_k(x)$  — собственные функции краевой задачи

$$\frac{d^4 \Phi}{dx^4} + P_* \frac{d}{dx} \left( (1-x) \frac{d\Phi}{dx} \right) - \lambda \Phi = 0, \quad (4.5)$$

связанной со свободными колебаниями сжатого стержня. Пользуясь ортогональностью  $\int_0^1 \Phi_k \Phi_n dx = 0$ , для функций  $\tilde{w}_k(t)$  приходим к системе уравнений

$$\tilde{b}_n \tilde{w}_n''(t) + \frac{\delta \tilde{b}_n \lambda_n}{P_* g_a} \tilde{w}_n - \delta \sum_{k=1}^N \tilde{c}_{kn} \tilde{w}_k \sin t = 0, \quad n = 1, \dots, N, \quad (4.6)$$

где  $\tilde{b}_n = \int_0^1 \Psi_n^2 dx$ ,  $\tilde{c}_{kn} = \int_0^1 (1-x) \Phi_k' \Phi_n' dx$ .

Здесь в отличие от задачи (4.2) собственные значения  $\lambda_n$  зависят от параметра  $P_*$ . Спектр  $\lambda_n(P_*)$  содержит конечное число отрицательных собственных значений  $\lambda_n < 0$  при  $P_* > p_n$ , которым соответствуют неустойчивые при отсутствии колебаний основания формы, и бесконечное число положительных собственных значений.

**5. Двухмасштабные разложения.** Исследуем устойчивость нулевого решения систем (4.3) и (4.6). При  $\delta = 0$  эти системы имеют решения  $w_k = C_k$ , где параметры  $C_k$  постоянны. В связи с этим при  $\delta \ll 1$  будем искать их решения в виде периодических функций с медленно меняющимися амплитудами [9].

Положим  $g_a = \zeta/\delta$  и запишем систему  $N$  уравнений (4.3) в матричном виде

$$\mathbf{A} \cdot \frac{d^2 \mathbf{W}}{dt^2} + \frac{\delta^2}{\zeta} \mathbf{P} \cdot \mathbf{W} + \delta \mathbf{B} \cdot \mathbf{W} \sin t = 0, \quad (5.1)$$

где  $\mathbf{W} = \{w_k\}_{k=1,N}^T$  — вектор неизвестных функций,  $\mathbf{A} = \{a_{kn}\}_{k,n=1,N}$  — симметричная матрица,  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{B}$  — диагональные матрицы с коэффициентами  $\{b_k(p_k/P_* - 1)\}_{k=1,N}$  и  $\{b_k\}_{k=1,N}$  соответственно.

Искомую функцию  $\mathbf{W} = \mathbf{W}(t, \theta, \delta)$ , где  $\theta = \delta t$  — медленное время, ищем в виде асимптотического разложения

$$\mathbf{W}(t, \theta, \delta) = \sum_{m=0}^{\infty} (\mathbf{U}_m(\theta) + \mathbf{V}_m(t, \theta)) \delta^m, \quad \int_0^{2\pi} \mathbf{V}_m(t, \theta) dt = 0, \quad m = 0, 1, \dots \quad (5.2)$$

С учетом соотношения

$$\frac{d^2 \mathbf{W}}{dt^2} = \frac{\partial^2 \mathbf{W}}{\partial t^2} + 2\delta \frac{\partial^2 \mathbf{W}}{\partial t \partial \theta} + \delta^2 \frac{\partial^2 \mathbf{W}}{\partial \theta^2} \quad (5.3)$$

последовательно находим

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_0(t, \theta) &\equiv 0, & \mathbf{V}_1(t, \theta) &= \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{U}_0 \sin t, \\ \mathbf{A} \cdot \frac{d^2 \mathbf{U}_0}{d\theta^2} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{U}_0 &= 0, & \mathbf{D} &= \frac{\mathbf{P}}{\zeta} + (1/2) \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Из уравнения для  $\mathbf{U}_0$  следует, что положение равновесия будет устойчивым, если матрица  $\mathbf{D}$  положительно определенная. Нарушение положительной определенности служит для определения критического значения  $\zeta_*$  параметра перегрузки  $\zeta$ .

При одномодовом приближении ( $N = 1$ ) получаем

$$\zeta_* = \frac{2a_{11}}{b_1} \left( 1 - \frac{p_1}{P_*} \right). \quad (5.5)$$

При  $N = 1$  система (4.3) сводится к уравнению Матье, и неравенство  $q < \alpha^2/2$  дает формулу (5.5). В частности, для шарнирной опоры имеем  $p_1 = 0$  и формула (5.5) совпадает с формулой (2.4) для недеформируемого стержня.

Аналогичные вычисления для системы (4.6) приводят к матрице  $\tilde{D}$ , положительная определенность которой служит критерием устойчивости:

$$\tilde{D} = \frac{\tilde{P}}{\zeta} + (1/2)\tilde{C} \cdot \tilde{B}^{-1} \cdot \tilde{C}, \quad (5.6)$$

где  $\tilde{B}$  и  $\tilde{P}$  — диагональные матрицы с элементами  $\{\tilde{b}_k\}$  и  $\tilde{b}_k \lambda_k / P_*$  и  $\tilde{C}$  — симметричная матрица с элементами  $\tilde{c}_{kn}$ . При одномодовом приближении формула (5.6) дает  $\zeta_* = 2\lambda_1 \tilde{b}_1^2 / (P_* \tilde{c}_{11}^2)$ .

Приведем численные результаты для критического значения параметра перегрузки  $\zeta_*$ , вытекающие из первого разложения (4.1) и требования положительной определенности матрицы  $D$  (см. (5.4)). Расчеты показали, что одномодовое и двухмодовое ( $N = 2$ ) приближения дают достаточную точность (погрешность менее 1%), поэтому ограничимся ими. В матрицу  $D$  входят параметры: для шарнирной опоры

$$p_1 = 0, \quad p_2 = 25.64, \quad a_{11} = 1/3, \quad a_{12} = 0.0331, \quad a_{22} = 0.02003, \quad b_1 = 0.5, \quad b_2 = 0.162$$

и для жесткой заделки нижнего конца

$$p_1 = 7.84, \quad p_2 = 56.0, \quad a_{11} = 0.128, \quad a_{12} = -0.0143, \quad a_{22} = 0.01786, \\ b_1 = 0.202, \quad b_2 = 0.144.$$

Результаты представлены на рис. 2. Для шарнирной опоры при  $P_* \leq p_2$  имеем  $\zeta_* = 4/3$ , что совпадает со значением для недеформируемого стержня. При  $P_* > p_2$  величина  $\zeta_*$  незначительно растет, достигая при  $P_* = 120$  величины  $\zeta_* = 1.369$  (вместо  $4/3 = 1.333$ ).

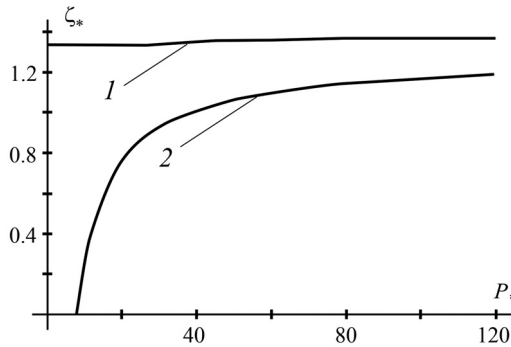


Рис. 2. Функции  $\zeta_*(P_*)$  для шарнирного (кривая 1) и жесткого (кривая 2) закреплений нижнего конца стержня.

В случае жесткого закрепления (при отсутствии вибраций) потеря устойчивости имеет место лишь при  $P_* > p_1 = 7.84$ . В интервале  $p_1 < P_* < p_2 = 56.0$  одномодовое приближение дает точное значение  $\zeta_*$ , а при  $P_* > p_2$  старшие приближения незначительно (на величину порядка 1%) уточняют его в сторону увеличения  $\zeta_*$ . С ростом нагрузки  $P_*$  величины  $\zeta_*$  для жесткой и шарнирной опор сближаются.

Расчеты, выполненные с использованием второго разложения и приводящие к соотношениям (4.6) и (5.6), показали, что при близости результатов по первому и второму разложениям второе разложение оказалось значительно менее удобным.

Во-первых, собственные функции строятся проще. Во-вторых, одномодовое приближение второго разложения приемлемо лишь при  $p_1 < P_* < p_2$ .

**6. Влияние продольных волн на устойчивость.** Уравнение продольных колебаний в подвижной системе координат имеет вид

$$\rho S \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + g - a\omega^2 \sin \omega t \right) = ES \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(0, t) = 0, \quad \left. \frac{du}{dx} \right|_{x=L} = 0, \quad (6.1)$$

где  $u(x, t)$  — продольное перемещение. Для подстановки в уравнение (3.1) нужно найти осевую сжимающую силу  $P(x, t) = -ESu_x$ . Как и выше, перейдем к безразмерным переменным  $x = L\hat{x}$ ,  $\hat{t} = \omega t$  и, опуская значок  $\wedge$ , представим решение уравнения (6.1) в виде

$$u(x, t) = \frac{P_0 L}{ES} (x^2/2 - x) + U(x) \sin t, \quad P_0 = \rho g S L.$$

Для функции  $U(x)$  получаем краевую задачу

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + \nu^2 (U + a) = 0, \quad U(0) = 0, \quad \left. \frac{dU}{dx} \right|_{x=1} = 0, \quad \nu^2 = \frac{\omega^2 L^2}{c^2},$$

где  $c = \sqrt{E/\rho}$  — скорость звука в материале стержня. Находим решение

$$U(x) = -a(1 - \cos \nu x - \sin \nu x \operatorname{tg} \nu)$$

и осевую силу

$$P(x, t) = -ES \frac{\partial u}{\partial x} = P_0(1 - \hat{x}) - ES\nu\delta(\cos \nu x \operatorname{tg} \nu - \sin \nu x) \sin t.$$

Для нерастяжимого стержня имеем  $E = \infty$ ,  $c = \infty$ ,  $\nu = 0$  и, переходя к пределу при  $\nu \rightarrow 0$ , находим  $P \rightarrow P_0(1 - x)(1 - g_a \sin t)$ , что совпадает с формулой (3.3).

Подставляя выражение для силы  $P(x, t)$  в уравнение поперечных колебаний (3.1), получаем

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + P_* \frac{\partial}{\partial x} \left( \left( 1 - \hat{x} + \frac{g_a}{\nu} (\cos \nu \hat{x} \tan \nu - \sin \nu \hat{x}) \sin \hat{t} \right) \frac{\partial w}{\partial x} \right) + P_* \frac{g_a}{\delta} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0.$$

Как и выше, решение этого уравнения представляем в виде суммы (4.1) (ограничимся использованием первого разложения). Тогда для неизвестных функций  $w_n(t)$  получаем систему уравнений вида (4.3):

$$\sum_{k=1}^N a_{nk} \frac{d^2 w_k}{dt^2} + \delta \left( \frac{b_n}{g_a} \left( \frac{p_n}{P_*} - 1 \right) + c_n \sin t \right) w_n = 0, \quad n = 1, \dots, N, \quad (6.2)$$

в которой величины  $a_{kn}$ ,  $b_n$ ,  $P_*$ ,  $\delta$  имеют прежние значения, а коэффициенты  $c_n(\nu)$ , учитывающие распространение волн в стержне, даются формулой

$$c_n(\nu) = \frac{1}{\nu} \int_0^1 \left( \frac{d\Psi_n}{dx} \right)^2 (\sin \nu x - \cos \nu x \tan \nu) dx.$$

В частности, для нерастяжимого стержня получаем  $c_n(0) = b_n$ .

Матрица  $D$ , определяющая границу области устойчивости, теперь имеет вид

$$D = \frac{P}{\zeta} + (1/2)C \cdot A^{-1} \cdot C, \quad (6.3)$$

где  $C$  — диагональная матрица с элементами  $c_n(\nu)$ .

Одномодовое приближение, которым мы и ограничимся, дает

$$\zeta_* = \frac{2a_{11}b_1}{c_1^2(\nu)} \left(1 - \frac{p_1}{P_*}\right). \quad (6.4)$$

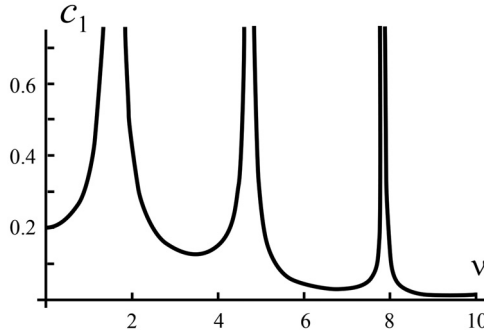


Рис. 3. График коэффициента  $|c_1(\nu)|$ .

При  $\nu = \nu_k = (k - 0.5)\pi$  имеют место резонансы продольных колебаний. При приближении к резонансам возрастают коэффициенты  $c_n$  и вместе с ними убывает параметр перегрузки  $\zeta_*$ , характеризующий потребный для устойчивости уровень колебаний основания. График функции  $|c_1(\nu)|$  показан на рис. 3. В связи с тем, что  $|c_1(\nu)| > b_1$ , следует ожидать значительного снижения величины  $\zeta_*$  при учете продольных колебаний стержня.

**7. Численные результаты.** Как установлено в п. 4, влияние старших форм на границу области устойчивости мало, поэтому обратимся к формуле (6.4). Кроме неизменяемых констант  $a_{11}$ ,  $b_1$ ,  $\lambda_1$  и функции  $c_1(\nu)$  эта формула содержит безразмерные константы  $\nu$  и  $P_*$ , зависящие от рассматриваемой задачи. Имеем

$$\nu^2 = \frac{L^2\omega^2}{c^2} = f\zeta_*, \quad f = \frac{L_c}{\delta^2}, \quad L_c = \frac{Lg}{c^2}, \quad \delta = \frac{a}{L}, \quad P_* = \frac{L_c}{\mu^2}, \quad \mu = \frac{r}{L}, \quad (7.1)$$

где  $r$  — радиус инерции поперечного сечения стержня в плоскости наименьшей изгибной жесткости (для стержня прямоугольного поперечного сечения толщиной  $h$  будет  $r = h/\sqrt{12}$ ). С учетом формулы для  $\nu^2$  соотношение (6.4) становится уравнением для границы  $\zeta_*$ . При решении уравнения (6.4) используем аппроксимацию Паде [10] для функции  $c_1^2(\nu)$ :

$$c_1^2(\nu) = \left( \frac{b_1 + 0.01\nu^2}{1 - (2\nu/\pi)^2} \right)^2,$$

имеющую погрешность менее 1% при  $\nu \leq 2$  и менее 3% при  $\nu \leq 3$ . При этом уравнение (6.4) становится кубическим относительно  $\zeta_*$ .



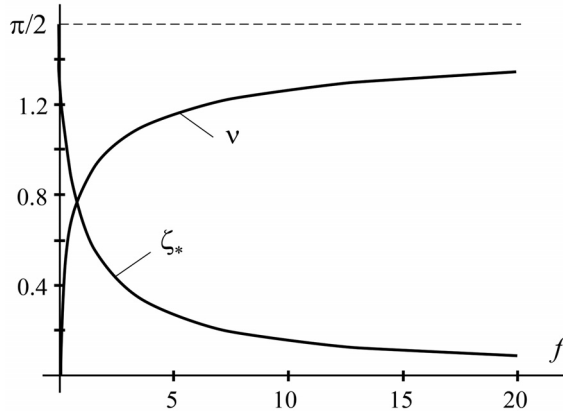


Рис. 4. Графики функций  $\zeta_*(f)$  и  $\nu(f)$ .

В случае шарнирной опоры нижнего конца стержня имеем  $p_1 = 0$  и уравнение (6.4) относительно  $\zeta_*$  в силу (7.1) содержит только один параметр  $f$ . Функция  $\zeta_*(f)$  и соответствующая ей функция  $\nu(f)$  показаны на рис. 4.

При  $f = 0$  продольные волны не учитываются и  $\zeta_* = 4/3$ , что соответствует недеформируемому стержню (см. (2.4)). С ростом  $f$  параметр перегрузки  $\zeta_*$  убывает, а параметр  $\nu$  растет и при  $f \rightarrow \infty$  приближается к резонансному значению  $\nu_1 = \pi/2$ .

В случае жесткой опоры нижнего конца стержня уравнение (6.4) содержит уже два параметра  $f$  и  $P_*$ , поэтому ограничимся рассмотрением частной задачи.

Рассмотрим стальной стержень (скорость звука  $c = 5100$  м/с) длиной  $L = 5$  м, тогда  $L_c = 1.886 \cdot 10^{-6}$ . Момент инерции сечения  $r$  и амплитуду колебаний основания  $a$  будем менять. Этот стержень теряет статическую устойчивость при радиусе инерции  $r < r_* = 2.45$  мм. Из уравнения (6.4) найдем нижнюю границу  $\zeta_*$  области устойчивости для ряда значений  $r < r_*$  и  $a$  (в миллиметрах) (возьмем  $r = 2.4, 2.0, 1.5, 1.0$ ;  $a = 0.5, 1, 2, 5$ ). Результаты вычислений приведены в таблице. В этой же таблице приведены и верхние границы  $\zeta_{**}$  области устойчивости  $\zeta_* < \zeta < \zeta_{**}$ , а также нижние границы области устойчивости  $\zeta_s$ , найденные без учета распространения продольных волн.

**Границы области устойчивости с учетом  
и без учета распространения продольных волн**

	$r = 2.4$		$r = 2$		$r = 1.5$		$r = 1$	
$a$	$\zeta_* - \zeta_{**}$	$\zeta_s$	$\zeta_* - \zeta_{**}$	$\zeta_s$	$\zeta_* - \zeta_{**}$	$\zeta_s$	$\zeta_* - \zeta_{**}$	$\zeta_s$
0.5	194 – 348	497	232 – 282	1447	238 – 275	1982	240 – 271	2289
1	153 – 521	248	211 – 314	723	232 – 296	991	226 – 290	1144
2	102 – $\infty$	124	177 – 347	362	194 – 348	496	201 – 339	572
5	41 – $\infty$	49	113 – $\infty$	145	137 – 865	189	147 – 573	229

Видим, что влияние продольных волн убывает при увеличении амплитуды возмущения  $a$ , а также при увеличении толщины стержня (при приближении радиуса инерции сечения к критическому значению  $r_* = 2.45$ ). При рассматриваемых значениях параметров частота возмущения  $\omega$  находится вблизи первого резонанса продольных колебаний  $\nu_1$  (точнее,  $\nu < \nu_1$ ), что приводит к увеличению коэффициента  $c_1(\nu)$  в формуле (6.4) и к уменьшению параметра перегрузки  $\zeta_*$  по сравнению со значением  $\zeta_s$ , найденным без учета продольных волн.

**8. Заключение.** Получены условия устойчивости гибкого вертикального стержня со свободным верхним концом, находящегося под действием вертикальных вибраций основания, в предположении, что при отсутствии вибраций положение равновесия неустойчиво. Решение построено в виде разложения по собственным функциям вспомогательных краевых задач. Первой из этих задач является задача бифуркации вертикального равновесия стержня под действием собственного веса. Другая задача — это задача свободных поперечных колебаний сжатой балки. Оказалось, что разложение по первой системе собственных функций более удобно в связи с тем, что одномодовое приближение, учитывающее только первую форму бифуркации, дает достаточную точность несмотря на то, что эквивалентная нагрузка может превышать старшие точки бифуркации. Установлено также, что учет влияния продольных колебаний является обязательным.

В случае шарнирно опертого нижнего конца стержня без учета продольных колебаний критическое значение перегрузки близко к постоянной величине, равной его значению для недеформируемого стержня. При учете продольных колебаний перегрузка убывает с ростом параметра  $f$ , пропорционального кубу длины стержня, и обратно пропорционального квадрату амплитуды возмущения и квадрату скорости звука в стержне.

В случае жесткого закрепления нижнего конца при учете продольных волн перегрузка зависит уже от двух параметров. Для частного примера установлено, что учет влияния продольных волн может приводить к уменьшению перегрузки в 3–7 раз. Их влияние убывает при увеличении амплитуды возмущения, а также при увеличении толщины стержня.

Нерешенными остались вопросы об устойчивости построенного стационарного решения (при этом нужно вводить силы сопротивления), а также об области притяжения этого решения.

Авторы выражают благодарность И. И. Блехману, который обратил их внимание на рассматриваемые задачи.

## Литература

1. Stephenson A. On an induced stability // *Phil. Mag.* 1908. Vol. 15. P. 233–236.
2. Кавица П. Л. Маятник с вибрирующим подвесом // *Успехи физических наук.* 1951. Т. 44, № 1. С. 7–20.
3. Блехман И. И. Вибрационная механика. М.: Наука, 1994.
4. Беляев А. К., Морозов Н. Ф., Товстик П. Е., Товстик Т. П. Параметрические резонансы в задаче о продольном ударе по тонкому стержню // *Вестник СПбГУ. Сер. 1.* 2016. Т. 3(61). Вып. 1. С. 77–94.
5. Беляев А. К., Товстик П. Е., Товстик Т. П. Тонкий стержень при продольном динамическом сжатии // *Изв. РАН. МТТ.* 2017. № 4. С. 19–34.
6. Лаврентьев М. А., Ишлинский А. Ю. Динамические формы потери устойчивости упругих систем // *Доклады АН СССР.* 1949. Т. 64, № 6. С. 776–782.
7. Якубович В. А., Старжинский В. М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972. 720 с.
8. Справочник по специальным функциям / под ред. М. Абрамовиц, И. Стиган. М.: Наука, 1979.
9. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1969.
10. Андрианов И. В., Баранцев Р. Г., Маневич Л. И. Асимптотическая математика и синергетика. М.: Изд-во УРСС, 2004.

Статья поступила в редакцию 23 февраля 2018 г.; рекомендована в печать 22 марта 2018 г.

#### Контактная информация:

Беляев Александр Константинович — д-р физ.-мат. наук, проф.; vice.ipme@gmail.com  
Морозов Никита Федорович — акад. РАН, д-р физ.-мат. наук, проф.; morozov@nm1016.spb.edu  
Товстик Петр Евгеньевич — д-р физ.-мат. наук, проф.; peter.tovstik@mail.ru  
Товстик Татьяна Петровна — канд. физ.-мат. наук; tovstik\_t@mail.ru

## Stability of a flexible vertical rod on the vibrating support

A. K. Belyaev<sup>1</sup>, N. F. Morozov<sup>2</sup>, P. E. Tovstik<sup>2</sup>, T. P. Tovstik<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Institute for Problems in Mechanical Engineering RAS,  
Bolshoy pr. V. O., 61, St. Petersburg, 199178, Russian Federation

<sup>2</sup> St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

**For citation:** Belyaev A. K., Morozov N. F., Tovstik P. E., Tovstik T. P. Stability of a flexible vertical rod on the vibrating support. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2018, vol. 5 (63), issue 3, pp. 477–488. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.311>

The classic Kapitza problem is generalized to the case of inverted flexible pendulum. A thin homogeneous vertical elastic rod with a free upper end is considered for (i) simply supported and (ii) clamped support. In the both support cases a rod motion under action of its weight and vertical harmonic vibrations of the support is studied. The stability conditions of the vertical rod position are obtained. The influence of both axial and bending vibrations is taken into account, with the Bernoulli–Euler beam model being applied for modeling the bending effects. The solution is presented as a Fourier expansion using the eigen-functions of auxiliary boundary value problems. As a result the problem is reduced to a system of ordinary differential equations with periodic coefficients containing a small parameter. The asymptotic method of two-scale expansions is utilized for its solution and for determining the critical level of the support vibration. It is established that the longitudinal waves influence essentially decrease the critical level of vibrations. Calculations show that the one-mode approximation has an acceptable exactness. The explicit approximate solution is obtained in the case of simply support of a lower rod end. For the clamped end a numerical analysis of the critical level of vibrations on the problem parameters is performed.

*Keywords:* flexible Kapitza pendulum, compressed rod, bending vibrations, longitudinal vibrations, two-scale asymptotic expansions.

## References

1. Stephenson A., “On an induced stability”, *Phil. Mag.* **15**, 233–236 (1908).
2. Kapitza P. L., “Pendulum with a vibrating support”, *Uspekhi fizicheskikh nauk* **44**(1), 7–20 (1951) [in Russian].
3. Blekhman I. I., *Vibrating mechanics* (Nauka Publ., Moscow, 1994) [in Russian].
4. Belyaev A. K., Morozov N. F., Tovstik P. E., Tovstik T. P., “Parametric resonances in the problem of a longitudinal impact on a thin rod”, *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics* **49**, issue 1, 53–67 (2016).
5. Belyaev A. K., Tovstik P. E., Tovstik T. P., “Thin rod under longitudinal dynamic compression”, *Mechanics of Solids* **52**, issue 4, 364–377 (2017).
6. Lavrent’yev M. A., Ishlinskiy A. Yu., “Dynamic forms of the loss of stability of the elastic systems”, *Doklady AN SSSR* **64**, issue 6, 776–782 (1949) [in Russian].
7. Yakubovich V. A., Starzhinskiy V. M., *Linear differential equations with the periodic coefficients and their application* (Nauka Publ., Moscow, 1972, 720 p.) [in Russian].
8. *Handbook of Mathematical Functions* (eds M. Abramowitz, I. A. Stegun, National Bureau of Standards, 1972, 1060 p.).

9. Bogolyubov N. N., Mitropol'skiy Yu. A., *Asymptotic methods in theory of nonlinear vibrations* (Nauka Publ., Moscow, 1969) [in Russian].

10. Andrianov I. V., Barantsev R. G., Manevich L. I., *Asymptotic mathematics and synergetics* (URSS Publ., Moscow, 2004) [in Russian].

Author's information:

Alexander K. Belyaev — vice.ipme@gmail.com

Nikita F. Morozov — morozov@nm1016.spb.edu

Petr E. Tovstik — peter.tovstik@mail.ru

Tatiana P. Tovstik — tovtstik\_t@mail.ru

## ХРОНИКА

28 февраля 2018 г. на заседании секции теоретической механики им. проф. Н. Н. Поляхова в Санкт-Петербургском Доме ученых РАН был заслушан доклад кандидата физ.-мат. наук, доцента А. Л. Илехменева (БГТУ «Военмех») на тему «О перемещениях в аналитической механике».

Краткое содержание доклада:

Для систем с голономными связями рассмотрены перемещения, совместимые со связями, и допустимые воображаемые перемещения при остановленных связях. Отмечены три подхода разных авторов к введению этих перемещений: 1) возможные перемещения и действительные перемещения; 2) виртуальные (или возможные) и действительные перемещения; 3) возможные, виртуальные и действительные перемещения. Обсуждаются особенности каждого из подходов.

28 марта 2018 г. на заседании секции теоретической механики им. проф. Н. Н. Поляхова в Санкт-Петербургском Доме ученых РАН был заслушан доклад кандидата технических наук, доцента В. И. Щербакова и преподавателя А. О. Юлиной (ВКА имени А. Ф. Можайского) на тему «Механика развертывания и приведения космической тросовой системы в устойчивые режимы орбитального движения».

Краткое содержание доклада:

Составлены дифференциальные уравнения движения малого космического аппарата (КА), соединенного невесомым нерастяжимым тросом с базовым массивным КА в ньютоновском гравитационном поле. Методом оптимального управления исследован процесс развертывания космической тросовой системы из монолитного состояния на заданную длину троса. Конечные условия соответствуют устойчивым режимам орбитального движения. Рассмотрены режимы гравитационной стабилизации, либрационных колебаний и ротации. Получены приближенные интегралы решения. Приведены результаты расчетов.