УДК 519.2 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 3
MSC 60E15

О неравенствах для вероятностей совместного осуществления нескольких событий*

А. Н. Фролов

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Фролов А. Н.* О неравенствах для вероятностей совместного осуществления нескольких событий // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 3. С. 464–476. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.310

Неравенства для вероятностей совместного осуществления нескольких событий играют важную роль в комбинаторном анализе, теории вероятностей и многочисленных приложениях. В работе описан метод построения оценок сверху и снизу для вероятностей одновременного осуществления ровно r из n событий. Метод основан на использовании различных представлений рассматриваемых вероятностей в виде сумм и отдельной оценке слагаемых. Это дает неравенства более точные, чем полученные ранее оценки, соответствующие тривиальным представлениям. Полученные новые неравенства оптимальны. Можно построить примеры, показывающие, что они могут обращаться в равенства. Аналогичные неравенства доказаны для условных вероятностей соответствующих событий относительно некоторой σ-алгебры. Усреднение обеих частей неравенств для условных вероятностей может давать более точные оценки безусловных вероятностей.

Ключевые слова: неравенства Бонферрони, вероятности объединений событий, вероятности совместного осуществления нескольких событий.

1. Введение. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — события и $\mathcal{A}$ — σ-алгебра событий такая, что $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$. Положим

$$\xi_n = \sum_{i=1}^{n} I_{A_i},$$

где I_{A_i} — индикатор события A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда события $B_i = \{\xi_n = i\}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, происходят только тогда, когда одновременно происходят ровно i событий из $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Положим

$$p_i = \mathbf{P}(B_i) \quad \text{и} \quad p_i^{\mathcal{A}} = \mathbf{P}(B_i|\mathcal{A}), \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

В настоящей работе мы получим новые оценки сверху и снизу для p_r и $p_r^{\mathcal{A}}$, где r — фиксированное число такое, что $1 \leqslant r \leqslant n$.

Для $1 \leqslant r \leqslant n$ событие $U_r^n = \bigcup_{i=r}^{n} B_i$ состоит в одновременном осуществлении не менее r событий из $A_1, A_2, \ldots, A_n$. В работе [1] мы получили оптимальные оценки

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 18-01-00393).

сверху и снизу для вероятностей

$$P_r = P(U_r^n) = \sum_{i=r}^{n} p_i \quad \text{и} \quad P_r^{\mathcal{A}} = P(U_r^n|\mathcal{A}) = \sum_{i=r}^{n} p_i^{\mathcal{A}}, \quad \text{где} \quad 1 \leqslant r \leqslant n.$$

С помощью этих оценок, в силу равенств $p_r = P_r - P_{r+1}$ и $p_r^{\mathcal{A}} = P_r^{\mathcal{A}} - P_{r+1}^{\mathcal{A}}$ п. н. (почти наверное), мы можем легко получить неравенства для p_r и $p_r^{\mathcal{A}}$. Однако это не дает гарантии того, что две оценки P_r и P_{r-1} (одна сверху, другая снизу) будут когда-нибудь одновременно обращаться в равенства. Если бы это произошло, мы автоматически получили бы оптимальную оценку для p_r. Ситуация с $p_r^{\mathcal{A}}$ аналогична. В связи с этим мы модифицируем метод из [1] для получения искомых неравенств.

Неравенства для вероятностей совместного осуществления событий широко применяются в комбинаторном анализе, теории вероятностей и ее приложениях. С вероятностной точки зрения особенно важны оценки для вероятностей объединений событий. Они, в частности, применяются при доказательстве леммы Бореля—Кантелли. Получению неравенств для P_r с помощью различных методов посвящено значительное число работ (см., например, [2–21]). Для P_1 один из таких методов предложен в статьях автора [17–20]. В [1] этот метод был распространен на случай P_r с $r \geqslant 2$. Оценки для $P_1^{\mathcal{A}}$ получены автором в [21], а для $P_r^{\mathcal{A}}$ при $r \geqslant 2$ — в [1]. При этом использовались различные представления для вероятностей событий U_r^n. В большом числе работ кроме неравенств для P_r были получены также оценки для p_r (см., например, [6, 7, 9–12]). В этой работе мы получим новые оценки для p_r, опираясь на представления вероятностей событий B_r из [1].

Отметим, что неравенства для условных вероятностей можно использовать для получения оценок безусловных вероятностей. Если, например, $p_r^{\mathcal{A}} \geqslant \alpha$ п. н., где α — некоторая положительная случайная величина, то

$$p_r = \mathbf{E} p_r^{\mathcal{A}} \geqslant \mathbf{E}\alpha.$$

Это неравенство может быть точнее, чем неравенство для безусловных вероятностей.

Опишем наш метод на примере. Построим оценку сверху для p_1, основанную на первых трех факториальных моментах случайной величины ξ_n. Положим

$$s_k^f = \mathbf{E}(\xi_n)_k = \sum_{i=1}^{n} (i)_k p_i, \quad k = 1, 2, 3,$$

где

$$(x)_k = x(x-1)\cdot \ldots \cdot (x-k+1) \quad \text{и} \quad (x)_0 = 1$$

для любых $x \in \mathbb{R}$ и $k \in \mathbb{N}$. Здесь и далее $\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел, а $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел.

Несложно проверить равенства

$$s_1^f = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i), \quad s_2^f = 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathbf{P}(A_i A_j), \quad s_3^f = 6 \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} \mathbf{P}(A_i A_j A_k).$$

Возьмем и зафиксируем натуральное число m такое, что $3 \leqslant m \leqslant n$. Положим

$$c_i = \left(1 - \frac{i}{m-1}\right)\left(1 - \frac{i}{m}\right), \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} c_i p_i = \sum_{i=1}^{n} p_i - \frac{2}{m} s_1^f + \frac{1}{(m)_2} s_2^f, \tag{1}$$

$$\sum_{i=2}^{n} c_i \left(1 + \frac{2i}{m-2}\right) p_i = \sum_{i=2}^{n} p_i - \frac{3}{(m)_2} s_2^f + \frac{2}{(m)_3} s_3^f. \tag{2}$$

Перенося $c_1 p_1$ из левой части (1) в его правую часть и вычитая из получившегося равенства соотношение (2), мы получим

$$0 \geqslant -\frac{2}{m-2} \sum_{i=2}^{n} i c_i p_i = \frac{2}{m} p_1 - \frac{2}{m} s_1^f + \frac{4}{(m)_2} s_2^f - \frac{2}{(m)_3} s_3^f. \tag{3}$$

Неравенство здесь следует из того, что $c_i \geqslant 0$ для всех i. Следовательно, имеем

$$p_1 \leqslant s_1^f - \frac{2}{m-1} s_2^f + \frac{1}{(m-1)_2} s_3^f = s_1^f + a_1 s_2^f + a_2 s_3^f. \tag{4}$$

Проведем теперь в этом неравенстве оптимизацию по m. За счет выбора c_i неравенство в (3) превращается в равенство для распределений ξ_n, имеющих атомы в 0, 1, $m-1$ и m и не имеющих атомов в других точках. Для такого распределения, зная s_2^f и s_3^f, найдем массы атомов в точках $m-1$ и m. Для этого решим систему

$$(m-1)_2\, p_{m-1}^* + (m)_2\, p_m^* = s_2^f,$$
$$(m-1)_3\, p_{m-1}^* + (m)_3\, p_m^* = s_3^f.$$

Получим

$$p_{m-1}^* = \frac{(m-2)s_2^f - s_3^f}{(m-1)_2}, \quad p_m^* = \frac{s_3^f - (m-3)s_2^f}{(m)_2}.$$

Из условий $p_{m-1}^* \geqslant 0$ и $p_m^* \geqslant 0$ следует, что $2 + s_3^f/s_2^f \leqslant m \leqslant 3 + s_3^f/s_2^f$. Заметим, что $s_3^f \leqslant (n-2)s_2^f$. Подставляя $m = \min\{3 + [s_3^f/s_2^f], n\}$ в (2), мы приходим к следующему неравенству:

$$p_1 \leqslant s_1^f - \frac{(s_3^f + 2(1-\theta)s_2^f)(s_2^f)^2}{(s_3^f + (1-\theta)s_2^f)(s_3^f + (2-\theta)s_2^f)}, \tag{5}$$

где θ — дробная часть s_3^f/s_2^f. Заметим, что θ может быть положительным. При этом θ — не параметр с возможностью оптимизации, а некоторая числовая характеристика системы событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Вследствие этого для получения более простого неравенства приходится выбирать худшую оценку, справедливую при любых θ. Правая часть (5) максимальна при $\theta = 0$. Следовательно,

$$p_1 \leqslant s_1^f - \frac{(s_2^f)^2}{s_2^f + s_3^f}. \tag{6}$$

Неравенства (5) и (6) можно найти, например, в [12].

Ясно, что заменив вероятности на условные вероятности относительно σ-алгебры $\mathcal{A}$, мы получим аналогичные (5) и (6) неравенства для $p_1^{\mathcal{A}}$. Разумеется, они будут справедливы с вероятностью 1, а θ будет случайной величиной.

Отметим, что ключевым моментом в нашем примере были соотношения (1) и (2). Здесь мы их просто предъявили. Однако они являются частным примером более общих схем. Ясно, что соотношения (1) и (2) можно использовать отдельно и получить две оценки для вероятностей осуществления не менее одного и не менее двух событий из $A_1, A_2, \ldots, A_n$, т. е. для вероятностей P_1 и P_2. В работе автора [1] изложен метод построения оценок для P_r и $P_r^{\mathcal{A}}$. Оттуда мы будем брать аналоги соотношений (1) и (2), определения c_i и множителей при c_i в (2). Например, для оценивания p_r нам понадобятся соотношения из [1], связанные с оценками для P_r и P_{r+1}.

Итак, (1) и (2) представляют собой соотношения, лежащие в основе получения оценок снизу, для P_1 и P_2. Чтобы оценить p_1 снизу, нужно взять соотношения из [1], приводящие к оценкам сверху. При этом оказывается, что нужно брать соотношение, дающее оценку сверху для P_1, основанную на большем числе моментов. Кроме того, в силу специфики оценок сверху для P_1 минимальное число используемых моментов будет равно четырем. В случае $r \geqslant 2$ ситуация аналогична.

Метод из [1] применим не только к вероятностям. В [1] получены неравенства для неотрицательных чисел, которые применяются к вероятностям. Это дает возможность получать оценки для P_r следующим способом. Представим, что вместо равенства

$$P_r = \sum_{i=r}^{n} p_i$$

мы воспользуемся другим представлением P_r, например, в виде

$$P_r = \sum_{i=r}^{n} \sum_{j} q_{ij}.$$

Здесь не имеет значения возможное отсутствие вероятностного смысла у набора неотрицательных чисел q_{ij}. Суммируя по j оценки для сумм $\sum_{i=r}^{n} q_{ij}$, полученные по методу из [1], мы придем к оценке для P_r. Ниже мы поступим аналогичным образом при оценивании p_r.

Оставшаяся часть статьи организована следующим образом. Параграф 2 содержит представления вероятностей p_r и $p_r^{\mathcal{A}}$. В параграфе 3 изложен метод получения числовых неравенств, а в параграфе 4 на их основе с использованием представлений параграфа 2 доказаны неравенства для p_r и $p_r^{\mathcal{A}}$.

2. Представления вероятностей p_r и $p_r^{\mathcal{A}}$. Положим $J_0 = \{0\}$, $J_d = \{j = (j_1, \ldots, j_d) :\ j_k \in \mathbb{N}$ и $1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_d \leqslant n$ при всех $1 \leqslant k \leqslant d\}$ для всех $d \in \mathbb{N}$.

Далее мы будем использовать следующий результат, вытекающий из леммы 1 работы [1].

Лемма 1. *Пусть d — фиксированное целое число такое, что $0 \leqslant d \leqslant r$. Положим $p_{i,j}^{\mathcal{A}} = \mathbf{P}(B_i A_{j_1} \ldots A_{j_d} | \mathcal{A})$ для всех $j \in J_d$ при $d \geqslant 1$ и $p_{i,j}^{\mathcal{A}} = p_i^{\mathcal{A}} = \mathbf{P}(B_i | \mathcal{A})$ для $j \in J_0$ при $d = 0$. Положим также $p_{i,j} = \mathbf{P}(B_i A_{j_1} \ldots A_{j_d})$ для всех $j \in J_d$ при $d \geqslant 1$ и $p_{i,j} = p_i = \mathbf{P}(B_i)$ для $j \in J_0$ при $d = 0$.*

Тогда

$$p_r^{\mathcal{A}} = \sum_{j\in J_d} \frac{1}{C_r^d}\, p_{r,j}^{\mathcal{A}} \quad \text{п. н.}, \tag{7}$$

$$p_r = \sum_{j\in J_d} \frac{1}{C_r^d}\, p_{r,j}. \tag{8}$$

Здесь C_r^d — число сочетаний из r по d.

Отметим, что в нашем примере мы использовали тривиальное представление $p_r = p_r$, соответствующее случаю $d = 0$. Лемма 1 открывает следующую возможность для обобщения неравенств (5) и (6). Зафиксировав $j \in J_1$ и проводя все вычисления нашего примера для набора $\{p_{i,j}\}$ вместо $\{p_i\}$, мы придем к оценкам для $p_{1,j}$. Просуммировав их по всем $j \in J_1$, мы получим неравенство для p_1.

3. Числовые неравенства. Далее мы используем следующие обозначения. Все векторы из $\mathbb{R}^k$ мы считаем столбцами. Для любого $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^k$ обозначим через v_j, $j = 1, 2, \ldots, k$, его координаты. Запись $\mathbf{v} \leqslant \mathbf{u}$ для $\mathbf{v}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^k$ является сокращением записи $v_j \leqslant u_j$ при всех $j = 1, 2, \ldots, k$. Положим $\mathbf{0}_k = (0, 0, \ldots, 0)^T \in \mathbb{R}^k$ и $\mathbf{1}_k = (1, 1, \ldots, 1)^T \in \mathbb{R}^k$, где верхний индекс T обозначает транспонирование.

Нам понадобится следующий результат из работы автора [22].

Теорема 1. *Пусть $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{z} \geqslant \mathbf{0}_n$ и $\mathbf{F} = \|f_{ki}\|_{k=1,i=1}^{\ell,n}$ — вещественная матрица, где $2 \leqslant \ell \leqslant n$. Положим $Z = \sum\limits_{i=1}^{n} z_i$ и*

$$\bar{\mathbf{s}} = \mathbf{F}\mathbf{z}. \tag{9}$$

Пусть для некоторого $\mathbf{i} \in \mathbb{N}^\ell$ такого, что $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_\ell \leqslant n$, вектор $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^\ell$ является решением следующей системы линейных уравнений:

$$\mathbf{F}_{\mathbf{i}}^T \mathbf{a} = \mathbf{1}_\ell, \tag{10}$$

где $\mathbf{F}_{\mathbf{i}} = \|f_{ki_j}\|_{k=1,j=1}^{\ell,\ell}$. Пусть $\mathbf{z}^* \in \mathbb{R}^n$ — вектор такой, что $\mathbf{z}_{\mathbf{i}}^* = (z_{i_1}^*, z_{i_2}^*, \ldots, z_{i_\ell}^*)^T$ удовлетворяет системе линейных уравнений

$$\mathbf{F}_{\mathbf{i}}\mathbf{z}_{\mathbf{i}}^* = \bar{\mathbf{s}} \tag{11}$$

и $z_i^* = 0$ для всех $i \neq i_k$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Положим $\mathbf{c} = \mathbf{1}_n - \mathbf{F}^T\mathbf{a}$.

Если $\mathbf{c} \geqslant \mathbf{0}_n$, то $Z \geqslant z^* = z_{i_1}^* + z_{i_2}^* + \cdots + z_{i_\ell}^* = \sum\limits_{k=1}^{\ell} a_k \bar{s}_k$. Если $\mathbf{c} \leqslant \mathbf{0}_n$, то $Z \leqslant Z^*$.

Эта теорема позволяет построить оценки для сумм $Z_r = \sum_{i=r}^n z_i$ следующим образом. Возьмем в теореме 1 вместо вектора $\mathbf{z}$ вектор $\mathbf{z}_r = (0, \ldots, 0, z_r, \ldots, z_n)^T \in \mathbb{R}^n$, а вместо матрицы $\mathbf{F}$ — матрицу $\mathbf{F}_r$, где $1 \leqslant r \leqslant n-1$. Обозначим через $\bar{\mathbf{s}}_r$, $\mathbf{c}_r$ и $\mathbf{a}_r$ векторы $\bar{\mathbf{s}}$, $\mathbf{c}$ и $\mathbf{a}$, получаемые при таком выборе. Координаты введенных векторов будут обозначаться $\bar{s}_{rj}$, c_{rj} и a_{rj} соответственно. Тогда по теореме 1 мы получим оценку для Z_r. Как мы уже отмечали, оценка для z_r может быть получена как разность двух оценок для Z_r и Z_{r+1}. Однако при этом мы не можем гарантировать, что эта оценка будет когда-либо обращаться в равенство. Поэтому мы применим другой подход. В силу (9) и (10) мы имеем

$$Z_r = \mathbf{z}_r^T \mathbf{1}_n = \mathbf{z}_r^T \mathbf{c}_r + \mathbf{z}_r^T \mathbf{F}_r^T \mathbf{a}_r = \mathbf{z}_r^T \mathbf{c}_r + \bar{\mathbf{s}}_r^T \mathbf{a}_r.$$

Аналогично можем записать

$$Z_{r+1} = \mathbf{z}_{r+1}^T \mathbf{c}_{r+1} + \bar{\mathbf{s}}_{r+1}^T \mathbf{a}_{r+1}.$$

Учитывая равенства $\mathbf{z}_r^T \mathbf{c}_r = z_r c_{rr} + \mathbf{z}_{r+1}^T \mathbf{c}_r$ и $z_r = Z_r - Z_{r+1}$, для $c_{rr} \neq 1$ мы получим

$$z_r = \frac{\mathbf{z}_{r+1}^T(\mathbf{c}_r - \mathbf{c}_{r+1}) + \bar{\mathbf{s}}_r^T \mathbf{a}_r - \bar{\mathbf{s}}_{r+1}^T \mathbf{a}_{r+1}}{1 - c_{rr}}. \tag{12}$$

Это соотношение приводит нас к следующему результату.

Теорема 2. *Пусть $c_{rr} < 1$. Если $c_{ri} - c_{r+1,i} \geqslant 0$ для всех $i \geqslant r+1$, то*

$$z_r \geqslant \frac{\bar{\mathbf{s}}_r^T \mathbf{a}_r - \bar{\mathbf{s}}_{r+1}^T \mathbf{a}_{r+1}}{1 - c_{rr}}. \tag{13}$$

Если $c_{ri} - c_{r+1,i} \leqslant 0$ для всех $i \geqslant r+1$, то

$$z_r \leqslant \frac{\bar{\mathbf{s}}_r^T \mathbf{a}_r - \bar{\mathbf{s}}_{r+1}^T \mathbf{a}_{r+1}}{1 - c_{rr}}. \tag{14}$$

Если $\mathbf{z}_{r+1}^T(\mathbf{c}_r - \mathbf{c}_{r+1}) = 0$, то неравенства (13) и (14) обращаются в равенства.

При использовании этого результата важно выбрать матрицы $\mathbf{F}_r$ и $\mathbf{F}_{r+1}$ с таким расчетом, чтобы среди координат векторов $\bar{\mathbf{s}}_r$ и $\bar{\mathbf{s}}_{r+1}$ было максимальное количество одинаковых моментов. Мы возьмем $\mathbf{F}_r = \|(i)_{r+k-1}\|$ для всех r. Тогда получим

$$\bar{s}_{rk} = \sum_{i=1}^{n} (i)_{r+k-1} z_i = \sum_{i=r+k-1}^{n} (i)_{r+k-1} z_i. \tag{15}$$

В случае оценок сверху мы возьмем ℓ одинаковым при r и $r+1$. Это дает $\bar{\mathbf{s}}_r = (\bar{s}_{r1}, \ldots, \bar{s}_{r\ell})^T$ и $\bar{\mathbf{s}}_{r+1} = (\bar{s}_{r2}, \ldots, \bar{s}_{r,\ell+1})^T$. Следовательно, правая часть неравенства (14) будет линейной комбинацией наименьшего числа подлежащих вычислению величин $\bar{s}_{r1}, \ldots, \bar{s}_{r,\ell+1}$, т. е. $(\ell+1)$-й численной характеристики случайной величины ξ_n в случае вероятностей. При $r = 1$, $\ell = 2$, $i_1 = m-1$, $i_2 = m$ соотношение (14) будет аналогом (4), превращаясь в него при $z_i = p_i$ для всех i. При этом будем иметь $\bar{\mathbf{s}}_1 = (s_1^f, s_2^f)^T$ и $\bar{\mathbf{s}}_2 = (s_2^f, s_3^f)^T$. В случае оценок сверху для $r+1$ мы возьмем ℓ на единицу меньше, чем для r. Тогда правая часть неравенства (13) также будет линейной комбинацией $\bar{s}_{r1}, \ldots, \bar{s}_{r,\ell+1}$. Различный подход к оценкам сверху и снизу связан с проверкой условий на разности $c_{ri} - c_{r+1,i}$ в теореме 2.

Ясно также, что соотношение (12) может быть использовано для получения неравенств для сумм $z_r + z_{r+1} + \cdots + z_{r+k}$.

4. Вероятностные неравенства. В этом параграфе мы с помощью теоремы 2 получим оценки для $p_{r,j}/C_r^d$ при всех фиксированных $j \in J_d$, а затем, воспользовавшись представлением (8), получим оценки для p_r. Аналогично мы докажем неравенства для $p_r^{\mathcal{A}}$.

Зафиксируем $j \in J_d$. Положим $z_i = p_{i,j}/C_i^d$ при $r \leqslant i \leqslant n$ и $z_i = 0$ при $1 \leqslant i \leqslant r-1$. Тогда соотношение (15) превратится в

$$\bar{s}_{rk}(j) = d! \sum_{i=r+k-1}^{n} (i-d)_{r+k-1-d}\, p_{i,j}.$$

Так как $p_{i,j} = 0$ при $i \leqslant d-1$ и $(i-d)_{r+k-1-d} = 0$ при $d \leqslant i \leqslant r+k-2$, мы получим

$$\bar{s}_{rk}(j) = d! \sum_{i=1}^{n} (i-d)_{r+k-1-d}\, p_{i,j}. \tag{16}$$

Заметим, что $\bar{s}_{rk}(j)$ можно записать в виде сумм вероятностей пересечений событий A_i. Например, при $d = r$ мы имеем

$$\bar{s}_{r1}(j) = r!\mathbf{P}(A_{j_1}\ldots A_{j_r}), \quad \bar{s}_{r2}(j) = r! \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i A_{j_1}\ldots A_{j_r}) - r!\, r\, \mathbf{P}(A_{j_1}\ldots A_{j_r}),$$

$$\bar{s}_{r3}(j) = r! \sum_{i,k=1}^{n} \mathbf{P}(A_i A_k A_{j_1}\ldots A_{j_r}) - r!\,(2r+1) \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i A_{j_1}\ldots A_{j_r}) + \\ + (r+1)!\, r\, \mathbf{P}(A_{j_1}\ldots A_{j_r}).$$

Кроме того, при $d = 0$ и $r = 1$ эти величины совпадают с s_1^f, s_2^f и s_3^f, формулы для которых в терминах вероятностей пересечений событий выписаны в первом параграфе. Ясно также, что при $d = 0$ величина $\bar{s}_{rk}$ представляет собой $(r+k-1)$-й факториальный момент ξ_n.

Для построения оценок можно брать $\bar{s}_{rk}(j)$ с различным диапазоном изменения индекса $k \geqslant 1$. Мы рассмотрим простейшие варианты: $k \leqslant 3$ для оценок сверху и $k \leqslant 4$ для оценок снизу. В первом случае это приводит к одинаковому значению размерностей $\ell = 2$ векторов $\bar{\mathbf{s}}_r$ и $\bar{\mathbf{s}}_{r+1}$. При этом число используемых (различных) моментов равно $2\ell - 1 = 3$, так как один из моментов входит в оба вектора. Во втором случае мы возьмем $\ell = 4$ для $\bar{\mathbf{s}}_r$ и $\ell = 3$ для $\bar{\mathbf{s}}_{r+1}$. Здесь все компоненты второго вектора входят в первый вектор, поэтому число используемых моментов будет равно четырем. Таким образом, параметр ℓ определяет число моментов, на которых основана соответствующая оценка.

Сформулируем теперь наш первый результат.

Теорема 3. *Для всех $j \in J_d$ определим $\bar{s}_{r1}(j)$, $\bar{s}_{r2}(j)$ и $\bar{s}_{r3}(j)$ по формуле (16). Положим $\bar{\delta}_r(j) = \bar{s}_{r3}(j)/\bar{s}_{r2}(j)$, $\bar{\theta}(j) = \bar{\delta}(j) - [\bar{\delta}(j)]$. Тогда*

$$p_r \leqslant \sum_{j\in J_d} \frac{1}{r!}\left(\bar{s}_{r1}(j) - \frac{\bar{s}_{r2}(j)(2-2\bar{\theta}_r(j)+\bar{\delta}_r(j))}{(2+\bar{\delta}_r(j)-\bar{\theta}_r(j))_2}\right) \leqslant \sum_{j\in J_d} \frac{1}{r!}\left(\bar{s}_{r1}(j) - \frac{\bar{s}_{r2}(j)}{1+\bar{\delta}_r(j)}\right). \tag{17}$$

Доказательство. Пусть $\ell = 2$. Положим $i_1 = m-1$ и $i_2 = m$, где $r+2 \leqslant m \leqslant n$. Тогда система (10) имеет вид

$$(m-1)_r a_{r1} + (m-1)_{r+1} a_{r2} = 1,$$
$$(m)_r a_{r1} + (m)_{r+1} a_{r2} = 1.$$

Отсюда следует, что

$$a_{r1} = \frac{r+1}{(m)_r}, \quad a_{r2} = -\frac{r}{(m)_{r+1}}.$$

Это дает

$$c_{ri} = 1 - (i)_r \frac{r+1}{(m)_r} + (i)_{r+1} \frac{r}{(m)_{r+1}}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Поэтому $c_{rr} = 1 - (r+1)!/(m)_r < 1$, а для $r+1 \leqslant i \leqslant n$ мы имеем

$$\begin{aligned} c_{ri} - c_{r+1,i} = -(i)_r \frac{r+1}{(m)_r} + (i)_{r+1} \frac{2r+2}{(m)_{r+1}} - (i)_{r+2} \frac{r+1}{(m)_{r+2}} = \\ = -(i)_r \frac{r+1}{(m)_{r+2}} \left((m-r)(m-r-1) - 2(i-r)(m-r-1) + (i-r)(i-r-1)\right) = \\ = -(i)_r \frac{r+1}{(m)_{r+2}} (m-i)(m-i-1) \leqslant 0. \quad (18) \end{aligned}$$

Неравенство (14) превращается в следующее соотношение:

$$z_r \leqslant \frac{1}{r!} \left(\bar{s}_{r1}(j) - \frac{2}{(m-r)} \bar{s}_{r2}(j) + \frac{1}{(m-r)_2} \bar{s}_{r3}(j) \right). \quad (19)$$

Из соотношения (18) следует, что условие $\mathbf{z}_{r+1}^T(\mathbf{c}_r - \mathbf{c}_{r+1}) = 0$ теоремы 2, при котором неравенство (19) обращается в равенство, выполнено для векторов $\mathbf{z}_{r+1}$, все координаты которых равны нулю за исключением $(m-1)$-й и m-й. Вместе с тем нам подходит только тот вектор из них, который имеет вектор «моментов» $\bar{\mathbf{s}}_{r+1}(j) = (\bar{s}_{r2}(j), \bar{s}_{r3}(j))^T$. Это означает, что он совпадает с вектором $\mathbf{z}^*$ из теоремы 1, построенным с заменой матрицы $\mathbf{F}$ на $\mathbf{F}_{r+1}$. Такой вектор мы обозначим $\mathbf{z}_{r+1}^*(j)$. Заметим, что до сих пор все векторы, аналогичные векторам из теоремы 1, не зависели от j. Вектор $\mathbf{z}_{r+1}^*(j)$, а вместе с ним и оптимальное m в (19), разумеется, зависят от j. С учетом (15) (или (11)) система для отыскания ненулевых координат $\mathbf{z}_{r+1}^*(j)$ имеет вид

$$\begin{aligned} (m-1)_{r+1} z_{r+1,m-1}^*(j) + (m)_{r+1} z_{r+1,m}(j) = \bar{s}_{r2}(j), \\ (m-1)_{r+2} z_{r+1,m-1}^*(j) + (m)_{r+2} z_{r+1,m}(j) = \bar{s}_{r3}(j). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$z_{r+1,m-1}^*(j) = \frac{(m-r-1)\bar{s}_{r2}(j) - \bar{s}_{r3}(j)}{(m-1)_{r+1}}, \quad z_{r+1,m}^*(j) = \frac{\bar{s}_{r3}(j) - (m-r-2)\bar{s}_{r2}(j)}{(m)_{r+1}}.$$

Так как $z_{r+1,m-1}^*(j) \geqslant 0$ и $z_{r+1,m}^*(j) \geqslant 0$, мы получим $r+1+\bar{s}_{r3}(j)/\bar{s}_{r2}(j) \leqslant m \leqslant r+2+\bar{s}_{r3}(j)/\bar{s}_{r2}(j)$. Положим $m = \min\{r+2+[\bar{\delta}_r(j)], n\}$, где $\bar{\delta}_r(j) = \bar{s}_{r3}(j)/\bar{s}_{r2}(j)$. Соотношение (19) приобретает вид

$$\frac{p_{r,j}}{C_r^d} = z_r \leqslant \frac{1}{r!} \left(\bar{s}_{r1}(j) - \frac{\bar{s}_{r2}(j)(2(1-\bar{\theta}_r(j)) + \bar{\delta}_r(j))}{(2+\bar{\delta}_r(j) - \bar{\theta}_r(j))_2} \right). \quad (20)$$

Суммируя левые и правые части этого неравенства по j и учитывая (8), мы получим первое неравенство в (17). Для доказательства второго неравенства воспользуемся следующим результатом из [1].

Лемма 2. *Для любых $k \in \mathbb{N}$, $u > 0$ и $x \in [0,1]$ выполняется неравенство*

$$(u+k+x)_{k+1} \leqslant (u+k)_k(u+(k+1)x).$$

Положим $k = 1$, $u = \bar{\delta}_r(j)$, $x = 1 - \bar{\theta}_r(j)$. По лемме 2 мы получим

$$(2+\bar{\delta}_r(j)-\bar{\theta}_r(j))_2 \leqslant (1+\bar{\delta}_r(j))(2(1-\bar{\theta}_r(j))+\bar{\delta}_r(j)).$$

Отсюда следует, что правая часть неравенства (20) максимальна при $\bar{\theta}_r(j) = 0$. Это дает второе неравенство в (17). Напомним, что мы выбираем худшее неравенство, так как $\bar{\theta}_r(j)$ не параметр, а некоторая характеристика со значениями из $[0,1)$. □

При $d = 0$ неравенство (17) можно найти в работе [12]. При $d = 0$ и $r = 1$ неравенство (17) превращается в (5) и (6). Для $d > 0$ неравенство (17) новое.

Перейдем к оценке снизу.

Теорема 4. *Для всех $j \in J_d$ определим $\bar{s}_{r1}(j)$, $\bar{s}_{r2}(j)$, $\bar{s}_{r3}(j)$ и $\bar{s}_{r4}(j)$ по формуле (16). Положим $\bar{\delta}_r(j) = \bar{s}_{r4}(j)/\bar{s}_{r3}(j)$, $\bar{\theta}(j) = \bar{\delta}(j) - [\bar{\delta}(j)]$. Тогда*

$$p_r \geqslant \sum_{j\in J_d} \frac{1}{r!}\left(\bar{s}_{r1}(j) - \bar{s}_{r2}(j) + \bar{s}_{r3}(j)\frac{3+\bar{\delta}_r(j)-2\bar{\theta}_r(j)}{(3+\bar{\delta}_r(j)-\bar{\theta}_r(j))_2}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{j\in J_d} \frac{1}{r!}\left(\bar{s}_{r1}(j) - \bar{s}_{r2}(j) + \frac{\bar{s}_{r3}(j)}{2+\bar{\delta}_r(j)}\right). \quad (21)$$

Доказательство. Зафиксируем r. Возьмем m такое, что $r+2 \leqslant m \leqslant n$. Положим $\ell = 4$, $i_1 = r$, $i_2 = r+1$, $i_3 = m-1$, $i_4 = m$. Решив систему уравнений (10), мы получим

$$\begin{aligned}
a_{r,1} &= \frac{1}{r!}, \quad a_{r,2} = -\frac{r}{(r+1)!},\\
a_{r,3} &= -\frac{3}{r!(m-r)_2} + \frac{2r}{(r+1)!(m-r-1)} + \frac{m-r-2}{(m-1)_{r+2}} - \frac{m-r-3}{(m)_{r+2}},\\
a_{r,4} &= \frac{2}{r!(m-r)_3} - \frac{r}{(r+1)!(m-r-1)_2} - \frac{1}{(m-1)_{r+2}} + \frac{1}{(m)_{r+2}}.
\end{aligned}$$

Соответствующие величины для индекса $r+1$ определим иначе. Мы увеличим r и уменьшим ℓ. Возьмем $\ell = 3$. Положим $i_1 = r+1$, $i_2 = m-1$ и $i_3 = m$. Решая систему (10), мы получим

$$\begin{aligned}
a_{r+1,1} &= \frac{1}{(r+1)!}, \quad a_{r+1,2} = -\frac{2}{(r+1)!(m-r-1)} + \frac{m-r-2}{(m-1)_{r+2}} - \frac{m-r-3}{(m)_{r+2}},\\
a_{r+1,3} &= \frac{1}{(r+1)!(m-r-1)_2} - \frac{1}{(m-1)_{r+2}} + \frac{1}{(m)_{r+2}}.
\end{aligned}$$

Тогда будем иметь

$$\begin{aligned}
c_{r,i} &= 1 - (i)_r a_{r,1} - (i)_{r+1}a_{r,2} - (i)_{r+2}a_{r,3} - (i)_{r+3}a_{r,4},\\
c_{r+1,i} &= 1 - (i)_{r+1}a_{r+1,1} - (i)_{r+2}a_{r+1,2} - (i)_{r+3}a_{r+1,3}.
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$
\begin{aligned}
c_{r,i} - c_{r+1,i} = &-(i)_r a_{r,1} - (i)_{r+1}(a_{r,2} - a_{r+1,1}) - (i)_{r+2}(a_{r,3} - a_{r+1,2}) - \\
&- (i)_{r+3}(a_{r,4} - a_{r+1,3}) = -(i)_r \frac{1}{r!} + (i)_{r+1}\frac{1}{r!} - (i)_{r+2}\frac{2(m-r)-3}{r!(m-r)_2} + \\
&+ (i)_{r+3}\frac{1}{r!(m-r)_2} = (i)_r \frac{i-r-1}{r!} + (i)_{r+2}\frac{i+r-2m+1}{r!(m-r)_2} = \\
&= (i)_r (i-r-1)\frac{1}{r!}\left(1 + \frac{(i-r)(i+r-2m+1)}{(m-r)_2}\right) = \\
&= (i)_r (i-r-1)\frac{(m-i)(m-i-1)}{r!(m-r)_2} \geqslant 0 \quad \text{при} \quad i \geqslant r+2.
\end{aligned}
$$

Так как $c_{rr} = 0$, неравенство (13) в нашем случае имеет вид

$$
\begin{aligned}
z_r \geqslant a_{r,1}\bar{s}_{r1}(j) + (a_{r,2} - a_{r+1,1})\bar{s}_{r2}(j) + (a_{r,3} - a_{r+1,2})\bar{s}_{r3}(j) + (a_{r,4} - a_{r+1,3})\bar{s}_{r4}(j) = \\
= \frac{1}{r!}\bar{s}_{r1}(j) - \frac{1}{r!}\bar{s}_{r2}(j) + \frac{2(m-r)-3}{r!(m-r)_2}\bar{s}_{r3}(j) - \frac{1}{r!(m-r)_2}\bar{s}_{r4}(j).
\end{aligned}
$$

Система для отыскания ненулевых координат вектора $\mathbf{z}^*_{r+1}(j)$ здесь будет такой:

$$
\begin{aligned}
(r+1)_{r+1} z^*_{r+1,r+1} + (m-1)_{r+1} z^*_{r+1,m-1} + (m)_{r+1} z^*_{r+1,m} = \bar{s}_{r2}(j), \\
(r+1)_{r+2} z^*_{r+1,r+1} + (m-1)_{r+2} z^*_{r+1,m-1} + (m)_{r+2} z^*_{r+1,m} = \bar{s}_{r3}(j), \\
(r+1)_{r+3} z^*_{r+1,r+1} + (m-1)_{r+3} z^*_{r+1,m-1} + (m)_{r+3} z^*_{r+1,m} = \bar{s}_{r4}(j).
\end{aligned}
$$

Решая ее, мы получим

$$
\begin{aligned}
&z^*_{r+1,r+1} = \frac{(m-r-1)_2\bar{s}_{r2}(j) - 2(m-r-2)\bar{s}_{r3}(j) + \bar{s}_{r4}(j)}{(r+1)!(m-r-1)_2}, \\
&z^*_{r+1,m-1} = \frac{(m-r-2)\bar{s}_{r3}(j) - \bar{s}_{r4}(j)}{(m-1)_{r+2}}, \quad z^*_{r+1,m} = \frac{\bar{s}_{r4}(j) - (m-r-3)\bar{s}_{r3}(j)}{(m)_{r+2}}.
\end{aligned}
$$

Так как $z^*_{r+1,m-1}(j) \geqslant 0$ и $z^*_{r+1,m}(j) \geqslant 0$, мы получим $r + 2 + \bar{s}_{r4}(j)/\bar{s}_{r3}(j) \leqslant m \leqslant r + 3 + \bar{s}_{r4}(j)/\bar{s}_{r3}(j)$. Поэтому $m = \min\{r + 3 + [\bar{\delta}_r(j)], n\}$, где $\bar{\delta}_r(j) = \bar{s}_{r4}(j)/\bar{s}_{r3}(j)$. Подставляя это выражение в полученное неравенство, мы имеем

$$
z_r \geqslant \frac{1}{r!}\bar{s}_{r1}(j) - \frac{1}{r!}\bar{s}_{r2}(j) + \frac{1}{r!}\bar{s}_{r3}(j)\frac{3 + \bar{\delta}_r(j) - 2\bar{\theta}_r(j)}{(3 + \bar{\delta}_r(j) - \bar{\theta}_r(j))_2}.
$$

Это дает первое неравенство в (21). Положив $k = 1$, $u = 1 + \bar{\delta}_r(j)$, $x = 1 - \bar{\theta}_r(j)$ в лемме 2, мы получим

$$
(3 + \bar{\delta}_r(j) - \bar{\theta}_r(j))_2 \leqslant (2 + \bar{\delta}_r(j))(3 + \bar{\delta}_r(j) - 2\bar{\theta}_r(j)).
$$

Следовательно, наименьшее значение коэффициента при $\bar{s}_{r3}(j)$ будет при $\bar{\theta}_r(j) = 0$. Это приводит ко второму неравенству в (21). $\square$

При $d = 0$ неравенство (21) можно найти в [12]. Для $d > 0$ оно новое.

Мы ограничились построением неравенств, основанных на минимальном числе моментов (трех — для оценок сверху, и четырех — для оценок снизу). Увеличивая число моментов, можно получить более точные неравенства. Рассматриваемый метод позволяет это сделать, возрастает лишь объем необходимых вычислений.

Сформулируем теперь аналоги теорем 3 и 4 для условных вероятностей.

Теорема 5. *Для всех $j \in J_d$ определим $\bar{s}_{r1}^{\mathcal{A}}(j)$, $\bar{s}_{r2}^{\mathcal{A}}(j)$ и $\bar{s}_{r3}^{\mathcal{A}}(j)$ по формуле (16) с заменой $p_{i,j}$ на $p_{i,j}^{\mathcal{A}}$. Положим $\bar{\delta}_r^{\mathcal{A}}(j) = \bar{s}_{r3}^{\mathcal{A}}(j)/\bar{s}_{r2}^{\mathcal{A}}(j)$, $\bar{\theta}^{\mathcal{A}}(j) = \bar{\delta}^{\mathcal{A}}(j) - [\bar{\delta}^{\mathcal{A}}(j)]$. Тогда*

$$p_r^{\mathcal{A}} \leqslant \sum_{j \in J_d} \frac{1}{r!} \left(\bar{s}_{r1}^{\mathcal{A}}(j) - \frac{\bar{s}_{r2}^{\mathcal{A}}(j)(2 - 2\bar{\theta}_r^{\mathcal{A}}(j) + \bar{\delta}_r^{\mathcal{A}}(j))}{(2 + \bar{\delta}_r^{\mathcal{A}}(j) - \bar{\theta}_r^{\mathcal{A}}(j))_2} \right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j \in J_d} \frac{1}{r!} \left(\bar{s}_{r1}^{\mathcal{A}}(j) - \frac{\bar{s}_{r2}^{\mathcal{A}}(j)}{1 + \bar{\delta}_r^{\mathcal{A}}(j)} \right) \quad \text{п. н.}$$

Перейдем к оценке снизу.

Теорема 6. *Для всех $j \in J_d$ определим $\bar{s}_{r1}^{\mathcal{A}}(j)$, $\bar{s}_{r2}^{\mathcal{A}}(j)$, $\bar{s}_{r3}^{\mathcal{A}}(j)$ и $\bar{s}_{r4}^{\mathcal{A}}(j)$ по формуле (16) с заменой $p_{i,j}$ на $p_{i,j}^{\mathcal{A}}$. Положим $\bar{\delta}_r^{\mathcal{A}}(j) = \bar{s}_{r4}^{\mathcal{A}}(j)/\bar{s}_{r3}^{\mathcal{A}}(j)$, $\bar{\theta}^{\mathcal{A}}(j) = \bar{\delta}^{\mathcal{A}}(j) - [\bar{\delta}^{\mathcal{A}}(j)]$. Тогда*

$$p_r^{\mathcal{A}} \geqslant \sum_{j \in J_d} \frac{1}{r!} \left(\bar{s}_{r1}^{\mathcal{A}}(j) - \bar{s}_{r2}^{\mathcal{A}}(j) + \bar{s}_{r3}^{\mathcal{A}}(j) \frac{3 + \bar{\delta}_r^{\mathcal{A}}(j) - 2\bar{\theta}_r^{\mathcal{A}}(j)}{(3 + \bar{\delta}_r^{\mathcal{A}}(j) - \bar{\theta}_r^{\mathcal{A}}(j))_2} \right) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{j \in J_d} \frac{1}{r!} \left(\bar{s}_{r1}^{\mathcal{A}}(j) - \bar{s}_{r2}^{\mathcal{A}}(j) + \frac{\bar{s}_{r3}^{\mathcal{A}}(j)}{2 + \bar{\delta}_r^{\mathcal{A}}(j)} \right) \quad \text{п. н.}$$

Теоремы 5 и 6 доказываются также, как теоремы 3 и 4. Нужно лишь зафиксировать элементарное событие ω, не принадлежащее исключительному множеству нулевой вероятности. При проведении тех же операций, что и в теоремах 3 и 4, исключительное множество может меняться. Так как количество наших действий будет конечным, то объединение всех отдельных исключительных множеств будет иметь меру нуль. В связи с этим, если мы сразу возьмем ω, не принадлежащим этому объединению, то мы проведем все доказательство с реализациями наших случайных величин, т. е. с обычными числами.

Неравенства теорем 5 и 6 новые. Отметим, что усреднение всех частей этих неравенств даст оценки для p_r, отличающиеся от (17) и (21). Наш метод также позволяет получать более точные оценки для условных вероятностей при использовании большего числа условных моментов.

Автор выражает благодарность рецензентам за ряд замечаний, способствовавших улучшению текста статьи.

Литература

1. *Фролов А. Н.* О неравенствах для вероятностей осуществления не менее r из n событий // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4(62). Вып. 3. С. 477–488. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2017.310

2. *Chung K. L., Erdős P.* On the application of the Borel—Cantelli lemma // Trans. Amer. Math. Soc. 1952. Vol. 72. P. 179–186.

3. *Gallot S.* A bound for the maximum of a number of random variables // J. Appl. Probab. 1966. Vol. 3. P. 556–558.

4. *Dawson D. A., Sankoff D.* An inequality for probabilities. Proc. Amer. Math. Soc. 1967. Vol. 18. P. 504–507.

5. *Kounias E. G.* Bounds for the probability of a union, with applications // Ann. Math. Statist. 1968. Vol. 39. P. 2154–2158.

6. *Kwerel S. M.* Bounds on the probability of the union and intersection of m events // Adv. Appl. Probab. 1975. Vol. 7. P. 431–448.

7. *Kwerel S. M.* Most stringent bounds on aggregated probabilities of partially specified dependent probability systems // J. of Amer. Statist. Assoc. 1975. Vol. 70. P. 472–479.

8. *Kwerel S. M.* Most stringent bounds on the probability of the union and intersection of m events for systems partially specified by $S_1, S_2, \cdots S_k, 2 \leqq k < m$ // J. Appl. Probab. 1975. Vol. 12. P. 612–619.

9. *Móri T. F., Székely G. J.* A note on the background of several Bonferroni—Galambos-type inequalities // J. Appl. Probab. 1985. Vol. 22. P. 836–843.

10. *Boros E., Prékopa A.* Closed form two-sided bounds for probabilities that at least r and exactly r out of n events occurs // Math. Oper. Research. 1989. Vol. 14. P. 317–342.

11. *Sibuya M.* Bonferroni-type inequalities; Chebyshev-type inequalities for distributions on $[0, n]$ // Ann. Inst. Statist. Math. 1991. Vol. 43, N 2. P. 261–285.

12. *Kounias S., Sotirakoglou K.* Upper and lower bounds for the probability that r events occur // J. Math. Programming. Oper. Research. 1993. Vol. 27, N 1–2. P. 63–78.

13. *Galambos J., Simonelli I.* Bonferroni-type inequalities with applications. New-York: Springer-Verlag, 1996.

14. *de Caen D.* A lower bound on the probability of a union // Discrete Math. 1997. Vol. 169. P. 217–220.

15. *Kuai H., Alajaji F., Takahara G.* A lower bound on the probability of a finite union of events // Discrete Math. 2000. Vol. 215. P. 147–158.

16. *Prékopa A., Gao L.* Bounding the probability of the union of events by aggregation and disaggregation in linear programs // Discrete Appl. Math. 2005. Vol. 145. P. 444–454.

17. *Frolov A. N.* Bounds for probabilities of unions of events and the Borel—Cantelli lemma // Statist. Probab. Lett. 2012. Vol. 82. P. 2189–2197.

18. *Фролов А. Н.* О неравенствах для вероятностей объединений событий и лемме Бореля—Кантелли // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 2014. Т. 1(59). Вып. 2. С. 201–210.

19. *Frolov A. N.* On lower and upper bounds for probabilities of unions and the Borel—Cantelli lemma // Studia Sci. Math. Hungarica. 2015. Vol. 52, N 1. P. 102–128.

20. *Фролов А. Н.* Об оценивании вероятностей объединений событий с приложениями к лемме Бореля—Кантелли // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 2015. Т. 2(60). Вып. 3. С. 399–404.

21. *Фролов А.Н.* О неравенствах для условных вероятностей объединений событий и условной лемме Бореля—Кантелли // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 2016. Т. 3(61). Вып. 4. С. 651–662. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2016.415

22. *Frolov A. N.* On inequalities for values of first jumps of distribution functions and Hölder's inequality // Statist. Probab. Lett. 2017. Vol. 126. P. 150–156.

Статья поступила в редакцию 15 февраля 2018 г.; рекомендована в печать 22 марта 2018 г.

Контактная информация:

Фролов Андрей Николаевич — д-р физ.-мат. наук, проф.; a.frolov@spbu.ru

On inequalities for probabilities of joint occurrence of several events

A. N. Frolov

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Frolov A. N. On inequalities for probabilities of joint occurrence of several events. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2018, vol. 5 (63), issue 3, pp. 464–476. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.310

Various inequalities for probabilities of joint occurrence of several events are widely used in combinatorial analysis, probability theory and numerous applications. We derive a method for construction of upper and lower bounds for probabilities that r from n events occur. We use resolutions of those probabilities in sums of positive items and bound them separately. This yields new inequalities sharper than earlier ones which correspond to trivial resolutions. New inequalities are optimal. There exist examples which show that they may turn to equalities. Note that the method will give more sharp bounds when the number of moments increases. But this imply more difficult calculations as well. By the same method, similar bounds are obtained for conditional probabilities of corresponding events given a σ-field. Here, the accuracy of bounds also increases when one enlarges the numbers of moments under consideration. Taking an expectation from both parts of inequalities for conditional probabilities, one can derive sharper bounds for unconditional probabilities.

Keywords: Bonferroni inequalities, probabilities of union of events, probabilities of joint occurrence of events.

References

1. Frolov A. N., "On inequalities for probabilities that at least r from n events occur", *Vestnik SPbSU. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **4(62)**, issue 3, 477–488 (2017) [in Russian]. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2017.310

2. Chung K. L., Erdős P., "On the application of the Borel–Cantelli lemma", *Trans. Amer. Math. Soc.* **72**, 179–186 (1952).

3. Gallot S., "A bound for the maximum of a number of random variables", *J. Appl. Probab.* **3**, 556–558 (1966).

4. Dawson D. A., Sankoff D., "An inequality for probabilities", *Proc. Amer. Math. Soc.* **18**, 504–507 (1967).

5. Kounias E. G., "Bounds for the probability of a union, with applications", *Ann. Math. Statist.* **39**, 2154–2158 (1968).

6. Kwerel S. M., "Bounds on the probability of the union and intersection of m events", *Adv. Appl. Probab.* **7**, 431–448 (1975).

7. Kwerel S. M., "Most stringent bounds on aggregated probabilities of partially specified dependent probability systems", *J. of Amer. Statist. Assoc.* **70**, 472–479 (1975).

8. Kwerel S. M., "Most stringent bounds on the probability of the union and intersection of m events for systems partially specified by $S_1, S_2, \cdots S_k, 2 \leqq k < m$", *J. Appl. Probab.* **12**, 612–619 (1975).

9. Móri T. F., Székely G. J., "A note on the background of several Bonferroni—Galambos-type inequalities", *J. Appl. Probab.* **22**, 836–843 (1985).

10. Boros E., Prékopa A., "Closed form two-sided bounds for probabilities that at least r and exactly r out of n events occurs", *Math. Oper. Research* **14**, 317–342 (1989).

11. Sibuya M., "Bonferroni-type inequalities; Chebyshev-type inequalities for distributions on $[0, n]$", *Ann. Inst. Statist. Math.* **43**(2), 261–285 (1991).

12. Kounias S., Sotirakoglou K., "Upper and lower bounds for the probability that r events occur", *J. Math. Programming. Oper. Research* **27**(1–2), 63–78 (1993).

13. Galambos J., Simonelli I., *Bonferroni-type inequalities with applications* (Springer-Verlag, New York, 1996).

14. de Caen D., "A lower bound on the probability of a union", *Discrete Math.* **169**, 217–220 (1997).

15. Kuai H., Alajaji F., Takahara G., "A lower bound on the probability of a finite union of events", *Discrete Math.* **215**, 147–158 (2000).

16. Prékopa A., Gao L., "Bounding the probability of the union of events by aggregation and disaggregation in linear programs", *Discrete Appl. Math.* **145**, 444–454 (2005).

17. Frolov A. N., "Bounds for probabilities of unions of events and the Borel—Cantelli lemma", *Statist. Probab. Lett.* **82**, 2189–2197 (2012).

18. Frolov A. N., "On inequalities for probabilities of unions of events and the Borel—Cantelli lemma", *Vestnik SPbSU. Series 1* **1(59)**, issue 2, 201–210 (2014).

19. Frolov A. N., "On lower and upper bounds for probabilities of unions and the Borel—Cantelli lemma", *Studia Sci. Math. Hungarica* **52**(1), 102–128 (2015).

20. Frolov A. N., "On estimation for probabilities of unions of events with applications to the Borel—Cantelli lemma", *Vestnik SPbSU. Series 1* **2(60)**, issue 3, 399–404 (2015).

21. Frolov A. N., "On inequalities for conditional probabilities of unions of events and the conditional Borel—Cantelli lemma", *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 1* **3(61)**, issue 4, 651–662 (2016) [in Russian]. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2016.415

22. Frolov A. N., "On inequalities for values of first jumps of distribution functions and Hölder's inequality", *Statist. Probab. Lett.* **126**, 150–156 (2017).

Author's information:

Andrei N. Frolov — a.frolov@spbu.ru