

Линейный фильтр Калмана—Бьюси с авторегрессионным сигналом и шумом*

Т. М. Товстик

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Товстик Т. М.* Линейный фильтр Калмана—Бьюси с авторегрессионным сигналом и шумом // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 3. С. 452–463. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.309>

В задаче фильтрации Калмана—Бьюси наблюдаемый процесс является суммой полезного сигнала и шума, причем начало фильтрации совпадает с началом наблюдений. В литературе рассматривается фильтрация Калмана—Бьюси как для скалярных, так и для векторных марковских процессов. В настоящей работе рассматривается линейная задача фильтрации Калмана—Бьюси для системы, у которой как сигнал, так и шум не являются марковскими процессами. Сигнал и шум являются независимыми стационарными процессами авторегрессии, порядок которых больше единицы. Выводятся рекуррентные уравнения для фильтрации, ошибки фильтрации и для ее условных взаимных корреляций. Рекуррентные соотношения используют ранее найденные оценки и несколько последних наблюдаемых значений. Предлагается оптимальный способ задания начальных данных. Получаются алгебраические уравнения для предельных значений ошибки (дисперсии) фильтрации и взаимных корреляций. Корни этих уравнений позволяют судить о сходимости процесса фильтрации. Приводятся примеры, в которых процесс фильтрации сходится, и примеры, в которых он не сходится. Для контроля теоретических формул фильтрации и ее ошибки используется метод Монте-Карло.

Ключевые слова: фильтр Калмана—Бьюси, процессы авторегрессии высокого порядка.

1. Введение. В математической модели динамической системы на вход поступает случайный сигнал со случайным шумом, на выходе системы ведутся наблюдения суммы сигнала и шума. По этой сумме нужно найти линейную или нелинейную оценки сигнала. Такая оценка одного процесса по наблюдениям за другим процессом, который коррелирует с первым, называется фильтрацией. Исторически сначала были разработаны методы фильтрации, основанные на наблюдениях по всему прошлому [1–4].

В фильтрации Калмана—Бьюси начальный момент фильтрации совпадает с начальным моментом наблюдений. Первоначально этот вид фильтрации для дискретного времени был предложен в [5], а для непрерывного времени — в [6]. В последующих работах [7–10] для обоих видов фильтрации рассматриваются векторные динамические системы, в основном, в марковском варианте.

В случае фильтра Калмана—Бьюси задача фильтрации решается с помощью рекуррентных уравнений. В связи с этим исследуются вопросы существования и устойчивости решения.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 17-01-00267а).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2018

2. Алгоритм рекуррентных уравнений фильтрации Кальмана—Бьюси и ошибки фильтрации. Пусть наблюдаемый процесс ζ_t является суммой двух независимых процессов, представляющих сигнал θ_t и шум η_t :

$$\zeta_t = \theta_t + \eta_t. \quad (1)$$

Процессы θ_t и η_t предполагаются некоррелированными стационарными в широком смысле последовательностями авторегрессии порядков n и m (АР(n) и АР(m)) с известными параметрами

$$\sum_{k=0}^n a_k \theta_{t-k} = \sigma_1 \varepsilon_1(t), \quad a_0 = 1, \quad \sum_{k=0}^m b_k \eta_{t-k} = \sigma_2 \varepsilon_2(t), \quad b_0 = 1. \quad (2)$$

Здесь $\varepsilon_1(t)$ и $\varepsilon_2(t)$ — некоррелированные последовательности, причем

$$\mathbf{E}\varepsilon_i(t) = 0, \quad \mathbf{E}\varepsilon_i^2(t) = 1, \quad \mathbf{E}\varepsilon_i(t)\varepsilon_j(s) = \delta_{ts}\delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \quad (3)$$

где δ_{kj} — символ Кронекера. У характеристических полиномов $a(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^{n-k}$ и $b(z) = \sum_{k=0}^m b_k z^{m-k}$ корни по модулю меньше единицы, что обеспечивает стационарность процессов [3].

Стационарные последовательности θ_t и η_t имеют спектральные плотности [3]

$$f_\theta(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_1^2}{|\sum_{k=0}^n a_k e^{-i\lambda k}|^2}, \quad f_\eta(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_2^2}{|\sum_{k=0}^m b_k e^{-i\lambda k}|^2}.$$

Из (1)–(3) следует, что $\mathbf{E}\zeta_t = \mathbf{E}\theta_t = \mathbf{E}\eta_t = 0$. Дисперсии σ_θ^2 , σ_η^2 и корреляции $R_\theta(k) = \mathbf{E}\theta_{t+k}\theta_t$, $R_\eta(k) = \mathbf{E}\eta_{t+k}\eta_t$, $k = 0, 1, \dots$, процессов θ_t и η_t можно найти из уравнений Юла—Уокера [11], которые, например, для процесса θ_t имеют вид

$$\sum_{k=0}^n a_k R_\theta(i-k) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \sum_{k=0}^n a_k R_\theta(k) = \sigma_1^2. \quad (4)$$

Коэффициенты корреляций процессов θ_t и η_t будем обозначать $\rho_\theta(k)$, $\rho_\eta(k)$, $k = 0, 1, \dots$. При сделанных предположениях вторые моменты процессов θ_t и η_t ограничены [3] и, следовательно, $\mathbf{E}\zeta_t^2 = \mathbf{E}\theta_t^2 + \mathbf{E}\eta_t^2 < \infty$.

Пусть $F_t^\zeta = \sigma\{\omega : \zeta_0, \dots, \zeta_t\}$ — наименьшая σ -алгебра, порожденная величинами $\{\zeta_0, \dots, \zeta_t\}$.

Задача фильтрации Калмана—Бьюси состоит в прогнозе процесса θ_t при $t \geq 0$ по наблюдениям за процессом ζ_t , $t \geq 0$.

В работе [9] рассмотрен случай $m = n = 1$. Ниже исследуется более общий случай $n \geq 1$, $m \geq 1$.

Исключив из рассмотрения процесс η_t , который является шумом, получим уравнения для процесса ζ_t при $n \geq m$ в виде

$$\zeta_{t+1} = - \sum_{k=1}^m b_k \zeta_{t+1-k} - \sum_{k=1}^m (a_k - b_k) \theta_{t+1-k} - \sum_{k=m+1}^n a_k \theta_{t+1-k} + \sigma_1 \varepsilon_1(t+1) + \sigma_2 \varepsilon_2(t+1)$$

и при $n \leq m$ в виде

$$\zeta_{t+1} = - \sum_{k=1}^m b_k \zeta_{t+1-k} - \sum_{k=1}^n (a_k - b_k) \theta_{t+1-k} + \sum_{k=n+1}^m b_k \theta_{t+1-k} + \sigma_1 \varepsilon_1(t+1) + \sigma_2 \varepsilon_2(t+1).$$

В связи с тем, что изучение случаев $n > m$, $n = m$ и $n < m$ проводится аналогично, будем рассматривать их одновременно, введя следующие обозначения:

$$w = \max\{n, m\}, \quad a_k = 0, \quad k > n, \quad b_i = 0, \quad i > m. \quad (5)$$

Тогда процессы θ_t и ζ_t будут удовлетворять системе уравнений

$$\begin{aligned} \theta_{t+1} &= - \sum_{k=1}^n a_k \theta_{t+1-k} + \sigma_1 \varepsilon_1(t+1), \\ \zeta_{t+1} &= - \sum_{k=1}^m b_k \zeta_{t+1-k} - \sum_{k=1}^w (a_k - b_k) \theta_{t+1-k} + \sigma_1 \varepsilon_1(t+1) + \sigma_2 \varepsilon_2(t+1). \end{aligned} \quad (6)$$

Так как из двух зависимых процессов ζ_t и θ_t наблюдается только один, то пару (ζ, θ) называют частично наблюдаемой последовательностью.

Оценку процесса θ_t и ее ошибку относительно σ -алгебры F_t^ζ обозначим, соответственно,

$$\mu_t = \mathbf{E}(\theta_t | F_t^\zeta), \quad \gamma_t = \mathbf{E}[(\theta_t - \mu_t)^2 | F_t^\zeta]. \quad (7)$$

При $w > 1$ в рекуррентные уравнения, по которым можно вычислять μ_t и γ_t , входят взаимные условные ковариации

$$K_t[s] = \mathbf{E}[(\theta_t - \mu_t)(\theta_{t-s} - \mu_{t-s}) | F_t^\zeta]. \quad (8)$$

В случае фильтра Кальмана–Бьюси условные ошибки γ_t , как и условные ковариации $K_t[s]$, совпадают с безусловными [9].

Введем случайные величины

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_{t+1} &= \theta_{t+1} - \mathbf{E}(\theta_{t+1} | F_t^\zeta), \\ \tilde{\zeta}_{t+1} &= \zeta_{t+1} - \mathbf{E}(\zeta_{t+1} | F_t^\zeta) \end{aligned}$$

и их условные ковариации относительно σ -алгебры F_t^ζ

$$\begin{aligned} B_{11}(t) &= \mathbf{cov}(\tilde{\theta}_{t+1}, \tilde{\theta}_{t+1} | F_t^\zeta) = \mathbf{E}\{(\tilde{\theta}_{t+1})^2 | F_t^\zeta\}, \\ B_{12}(t) &= \mathbf{cov}(\tilde{\theta}_{t+1}, \tilde{\zeta}_{t+1} | F_t^\zeta) = \mathbf{E}\{\tilde{\theta}_{t+1} \tilde{\zeta}_{t+1} | F_t^\zeta\}, \\ B_{22}(t) &= \mathbf{cov}(\tilde{\zeta}_{t+1}, \tilde{\zeta}_{t+1} | F_t^\zeta) = \mathbf{E}\{(\tilde{\zeta}_{t+1})^2 | F_t^\zeta\}. \end{aligned} \quad (9)$$

В [9] рассматривается задача фильтрации Калмана–Бьюси, в которой процессы θ_t и η_t являются стационарными процессами авторегрессии первого порядка (марковскими процессами). В случае, когда процессы θ_t и η_t гауссовские, оценки μ_t и γ_t находятся на основании теоремы о нормальной корреляции [9], которая для гауссовской случайной величины дает формулу оптимальной оценки и ее ошибки по значениям другой (зависимой) случайной величины. Согласно теореме о нормальной корреляции имеем

$$\mu_{t+1} = \mathbf{E}(\theta_{t+1} | \{F_t^\zeta, \zeta_{t+1}\}) = \mathbf{E}(\theta_{t+1} | F_t^\zeta) + \frac{B_{12}(t)}{B_{22}(t)} [\zeta_{t+1} - \mathbf{E}(\zeta_{t+1} | F_t^\zeta)], \quad (10)$$

$$\gamma_{t+1} = \mathbf{cov}(\theta_{t+1}, \theta_{t+1} | \{F_t^\zeta, \zeta_{t+1}\}) = B_{11}(t) - \frac{B_{12}^2(t)}{B_{22}(t)}. \quad (11)$$

В [9] доказывается, что если процессы θ_t и η_t не гауссовские, но некоррелированы, а вторые моменты процессов (6) ограничены, то оптимальная (в среднеквадратическом смысле) линейная оценка θ_t относительно ζ_s , $0 \leq s \leq t$, и ее ошибка удовлетворяют равенствам (10), (11).

Из (6) следует

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\theta_{t+1}|F_t^\zeta) &= - \sum_{k=1}^n a_k \mu_{t+1-k}, \\ \mathbf{E}(\zeta_{t+1}|F_t^\zeta) &= - \sum_{k=1}^m b_k \zeta_{t+1-k} - \sum_{k=1}^w (a_k - b_k) \mu_{t+1-k}. \end{aligned}$$

Для вычисления ковариаций (9) находим соответствующие составляющие

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_{t+1} &= - \sum_{k=1}^n a_k (\theta_{t+1-k} - \mu_{t+1-k}) + \sigma_1 \varepsilon_1(t+1), \\ \tilde{\zeta}_{t+1} &= - \sum_{k=1}^w (a_k - b_k) (\theta_{t+1-k} - \mu_{t+1-k}) + \sigma_1 \varepsilon_1(t+1) + \sigma_2 \varepsilon_2(t+1). \end{aligned} \quad (12)$$

Вычисление ковариаций случайных величин (12) приводит к равенствам

$$\begin{aligned} B_{11}(t) &= \sum_{k=1}^n a_k^2 \gamma_{t+1-k} + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{r=k+1}^n a_k a_r K_{t+1-k}[r-k] + \sigma_1^2, \\ B_{12}(t) &= \sum_{k=1}^n a_k (a_k - b_k) \gamma_{t+1-k} + \sum_{k=1}^{w-1} \sum_{r=k+1}^w (a_k (a_r - b_r) + a_r (a_k - b_k)) K_{t+1-k}[r-k] + \sigma_1^2, \\ B_{22}(t) &= \sum_{k=1}^w (a_k - b_k)^2 \gamma_{t+1-k} + 2 \sum_{k=1}^{w-1} \sum_{r=k+1}^w (a_k - b_k) (a_r - b_r) K_{t+1-k}[r-k] + \sigma_1^2 + \sigma_2^2. \end{aligned} \quad (13)$$

Теорема. Пусть (ζ, θ) – частично наблюдаемая последовательность, удовлетворяющая уравнениям (6). Тогда при выполнении равенств (5) величины μ_{t+1} , γ_{t+1} и $K_{t+1}[s]$ при $t \geq w-1$, $w = \max\{n, m\}$, подчиняются следующим рекуррентным уравнениям:

$$\mu_{t+1} = - \sum_{k=1}^n a_k \mu_{t+1-k} + \frac{B_{12}(t)}{B_{22}(t)} \left[\zeta_{t+1} + \sum_{k=1}^m b_k \zeta_{t+1-k} + \sum_{k=1}^w (a_k - b_k) \mu_{t+1-k} \right], \quad (14)$$

$$\gamma_{t+1} = B_{11}(t) - \frac{B_{12}^2(t)}{B_{22}(t)}, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} K_{t+1}[s] &= - \sum_{k=1}^n a_k [(1 - \delta_{ks}) K_{t+1-\min(k,s)}[|k-s|] + \delta_{ks} \gamma_{t+1-s}] + \\ &+ \frac{B_{12}(t)}{B_{22}(t)} \sum_{k=1}^w (a_k - b_k) [(1 - \delta_{ks}) K_{t+1-\min(k,s)}[|k-s|] + \delta_{ks} \gamma_{t+1-s}], \end{aligned} \quad (16)$$

где $s = 1, 2, \dots, w - 1$, условные корреляции $K_{t+1}[s]$ определены в (8), а корреляции $B_{ij}(t)$ находятся по формулам (13).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формулы (10) следует (14).

Из (6) и (10) получаем

$$\theta_{t+1} - \mu_{t+1} = \tilde{\theta}_{t+1} - \frac{\mathbf{E}(\tilde{\theta}_t \tilde{\zeta}_t)}{\mathbf{E}(\tilde{\zeta}_t)^2} \tilde{\zeta}_{t+1} = \tilde{\theta}_{t+1} - \frac{B_{12}(t)}{B_{22}(t)} \tilde{\zeta}_{t+1}. \quad (17)$$

Вычисление математических ожиданий от квадратов случайных величин с обеих сторон равенства (17) приводит к формуле (15).

Используя формулы (12) и (17), получаем

$$\begin{aligned} \theta_{t+1} - \mu_{t+1} = & - \sum_{k=1}^n a_k (\theta_{t+1-k} - \mu_{t+1-k}) + \sigma_1 \varepsilon_1 (t+1) - \\ & - \frac{B_{12}(t)}{B_{22}(t)} \left[- \sum_{k=1}^w (a_k - b_k) (\theta_{t+1-k} - \mu_{t+1-k}) + \sigma_1 \varepsilon_1 (t+1) + \sigma_2 \varepsilon_2 (t+1) \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Умножение обеих частей равенства (18) на $(\theta_{t+1-s} - \mu_{t+1-s})$ с последующим вычислением условных математических ожиданий относительно σ -алгебры F_t^ζ приводит к равенству (16). Здесь учитывается равенство

$$\mathbf{E}\{(\theta_t - \mu_t)(\theta_s - \mu_s) | F_{\max(t,s)}^\zeta\} = \begin{cases} \gamma_t, & t = s, \\ K_{\max(t,s)} [|t - s|], & t \neq s. \end{cases} \quad (19)$$

Теорема доказана.

3. Предельная ошибка фильтрации. Будем говорить, что предельная ошибка фильтрации существует, если пределы

$$\gamma_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma_t, \quad K_\infty[s] = \lim_{t \rightarrow \infty} K_t[s], \quad s = 1, 2, \dots, w - 1, \quad (20)$$

полученные из уравнений (14)–(16), конечны и удовлетворяют **условиям А**:

1) $0 < \gamma_\infty < \infty$,

2) $|K_\infty[s]| \leq \gamma_\infty$, $1 \leq s \leq w - 1$,

3) ковариационная матрица, составленная из предельных дисперсии и ковариаций (20), является положительно-определенной.

Уравнения (13) и (14)–(16), если в них перейти к пределу при $t \rightarrow \infty$ и воспользоваться обозначениями $B_{i,j} = \lim_{t \rightarrow \infty} B_{i,j}(t)$, $i, j = 1, 2$, $i \leq j$, принимают вид

$$\begin{aligned} \gamma_\infty = & \gamma_\infty \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{r=k+1}^n a_k a_r K_\infty[r - k] + \sigma_1^2 - B_{12}^2 / B_{22}, \\ K_\infty[s] = & - \sum_{k=1}^n a_k [(1 - \delta_{ks}) K_\infty[|k - s|] + \delta_{ks} \gamma_\infty] + \\ & + \frac{B_{12}}{B_{22}} \sum_{k=1}^w (a_k - b_k) [(1 - \delta_{ks}) K_\infty[|k - s|] + \delta_{ks} \gamma_\infty], \end{aligned} \quad (21)$$

где корреляции B_{ij} определяются равенствами

$$B_{12} = \sum_{k=1}^n a_k(a_k - b_k)\gamma_\infty + \sum_{k=1}^{w-1} \sum_{r=k+1}^w (a_k(a_r - b_r) + a_r(a_k - b_k))K_\infty[r - k] + \sigma_1^2,$$

$$B_{22} = \sum_{k=1}^w (a_k - b_k)^2\gamma_\infty + 2 \sum_{k=1}^{w-1} \sum_{r=k+1}^w (a_k - b_k)(a_r - b_r)K_\infty[r - k] + \sigma_1^2 + \sigma_2^2.$$

Назовем уравнения (21) *предельными*. Если предельные уравнения дают несколько решений, удовлетворяющих условиям А, то одно из них совпадает с решением, полученным из рекуррентных уравнений (14)–(16) при $t \rightarrow \infty$ (см. ниже пример 3 при $\sigma_\eta = 0.3$). Если предельные уравнения не имеют решений, удовлетворяющих условиям А, то и уравнения (14)–(16) не дают такого решения. Подтверждением является пример 3 при $\sigma_\eta = 1$ и пример 2, в котором ошибка фильтрации $\gamma_t \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$ (см. раздел 5 статьи).

Если решение рекуррентных уравнений не приводит к конечным значениям, это свидетельствует о том, что шум «поглощает» сигнал.

4. Задание начальных данных. Процесс ζ_t наблюдается в моменты времени $t = 0, 1, \dots$, и при этих же значениях t вычисляется прогноз μ_t и его ошибка γ_t процесса θ_t . Рекуррентные формулы (14)–(16) действуют при $t \geq w$, поэтому их нужно дополнить начальными данными при $0 \leq t \leq w - 1$.

Согласно теореме о нормальной корреляции при $t = 0$ получаем

$$\mu_0 = \frac{\mathbf{cov}(\theta_0, \zeta_0)}{\mathbf{cov}(\zeta_0, \zeta_0)} \zeta_0, \quad \gamma_0 = \frac{\sigma_\theta^2 \sigma_\eta^2}{\sigma_\theta^2 + \sigma_\eta^2}, \quad (22)$$

остальные начальные значения μ_t и γ_t тоже выводятся из этой теоремы.

В начальные прогнозы μ_t при $1 \leq t \leq w - 1$ входят ζ_t и, соответственно, θ_t и η_t . Но процессы θ_t при $t < n$ и η_t при $t < m$ не могут подчиняться уравнениям (2), так как они наблюдаются с момента $t = 0$, а при $t < 0$ они не заданы. С другой стороны, корреляции процесса ζ_t при $1 \leq t \leq w - 1$ должны совпадать с заданными. Чтобы удовлетворить этим требованиям, процессы θ_t и η_t при $1 \leq t \leq w - 1$ будем аппроксимировать процессами авторегрессии, порядок которых может быть меньше, чем n и m , соответственно, но первые t корреляций у каждого из них будут совпадать с корреляциями исходных процессов (2). Процессы θ_t и η_t представим в виде процессов авторегрессии

$$\theta_{t+1} = - \sum_{k=1}^{n_0} a_k^{(t+1)} \theta_{t+1-k} + \sigma_1^{(t+1)} \varepsilon_1(t+1), \quad n_0 = \min(t+1, n), \quad 0 \leq t \leq w-2,$$

$$\eta_{t+1} = - \sum_{k=1}^{m_0} b_k^{(t+1)} \eta_{t+1-k} + \sigma_2^{(t+1)} \varepsilon_2(t+1), \quad m_0 = \min(t+1, m).$$

(23)

При $t+1 \geq n$ получаем $n_0 = n$ и коэффициенты процесса θ_{t+1} в (23) совпадают с коэффициентами θ_t в (2):

$$a_k^{(t+1)} = a_k, \quad k = 1, \dots, n, \quad \sigma_1^{(t+1)} = \sigma_1, \quad n_0 = n, \quad t+1 \geq n.$$

При $t + 1 < n$ коэффициенты в (23) находим из системы Юла—Уокера

$$\sum_{k=0}^{t+1} a_k^{(t+1)} R_\theta(i-k) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, t+1, \quad a_0^{(t+1)} = 1, \quad \sum_{k=0}^{t+1} a_k^{(t+1)} R_\theta(k) = (\sigma_1^{(t+1)})^2, \quad (24)$$

в которой исходными данными являются $R_\theta(k)$ — корреляции процесса (2), и поэтому первые $t + 1$ корреляций процесса θ_{t+1} из (23) такие же как и у процесса (2). Однозначное решение системы (24) при любом t , $0 \leq t \leq n - 1$, следует из положительной определенности корреляционной матрицы вектора $(\theta_{s+1}, \theta_{s+2}, \dots, \theta_{s+n})$ при любом s .

Аналогичный результат получаем для процесса η_t в (23), а именно, при $t+1 \geq m$ имеем

$$b_k^{(t+1)} = b_k, \quad k = 1, \dots, m, \quad \sigma_2^{(t+1)} = \sigma_2, \quad m_0 = m, \quad t + 1 \geq m,$$

а если $t + 1 < m$, то коэффициенты в (23) получаем из системы Юла—Уокера

$$\sum_{k=0}^{t+1} b_k^{(t+1)} R_\eta(i-k) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, t+1, \quad b_0^{(t+1)} = 1, \quad \sum_{k=0}^{t+1} b_k^{(t+1)} R_\eta(k) = (\sigma_2^{(t+1)})^2. \quad (25)$$

Если у процесса ζ_{t+1} при $0 \leq t \leq w - 2$ составляющие имеют вид (23), то начальные значения пары процессов (6) при $n_0 = \min(t + 1, n)$ и $m_0 = \min(t + 1, m)$ принимают вид

$$\begin{aligned} \theta_{t+1} &= - \sum_{k=1}^{n_0} a_k^{(t+1)} \theta_{t+1-k} + \sigma_1^{(t+1)} \varepsilon_1(t+1), & v &= \max(m_0, n_0), \\ \zeta_{t+1} &= - \sum_{k=1}^{m_0} b_k^{(t+1)} \zeta_{t+1-k} - \sum_{k=1}^v (a_k^{(t+1)} - b_k^{(t+1)}) \theta_{t+1-k} + \\ &+ \sigma_1^{(t+1)} \varepsilon_1(t+1) + \sigma_2^{(t+1)} \varepsilon_2(t+1). \end{aligned} \quad (26)$$

Система (26) отличается от системы (6) тем, что величины

$$n, m, w, a_k, \sigma_1, b_k, \sigma_2,$$

входящие в (6), заменяются, соответственно, на

$$n_0, m_0, v, a_k^{(t+1)}, \sigma_1^{(t+1)}, b_k^{(t+1)}, \sigma_2^{(t+1)}.$$

Значит, с учетом этих замен при $t < w$ будут справедливы формулы (13) и (14)–(16). При $t \geq w$ переходим к основному алгоритму, описываемому формулами (14)–(16).

Итак, для вычисления начальных значений фильтрации μ_t и ее ошибки γ_t при $0 \leq t \leq w - 1$ были найдены начальные представления (23)–(25) процессов θ_t и η_t при тех же t , причем их корреляции при $0 \leq t, s \leq w - 1$ совпадают с корреляциями процессов (2).

5. Примеры. Во всех примерах сигнал θ_t будет процессом AP(3) с $\sigma_\theta^2 = 1$,

$$\theta_t - 2.5\theta_{t-1} + 2.33\theta_{t-2} - 0.801\theta_{t-3} = 0.093\varepsilon_1(t), \quad \rho_\theta(1) = 0.924.$$

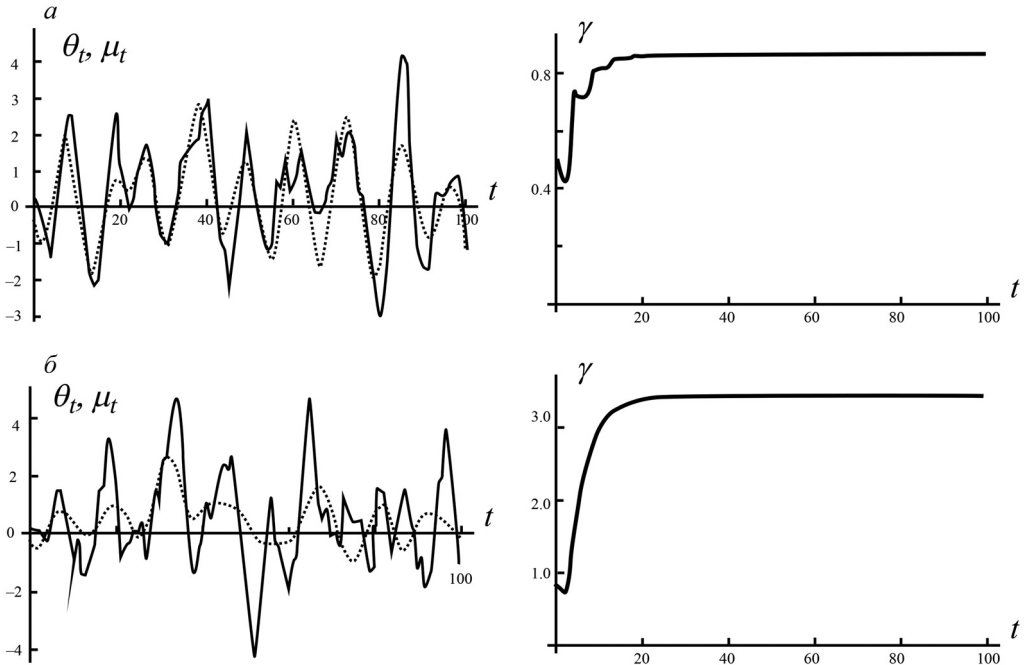


Рис. 1. Графики функций θ_t (пунктирная линия), μ_t (сплошная линия) и γ_t при $\sigma_\eta = 1$ (а); $\sigma_\eta = 2$ (б) в условиях примера 1.

В первом примере пределы (20) существуют и конечны. Во втором примере $\gamma_t \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$ и, следовательно, прогноз процесса θ_t невозможен. В третьем примере при $\sigma_\eta \leq 0.3$ пределы (20) существуют, а при $\sigma_\eta \geq 0.4$ не существуют, но ошибки фильтрации γ_t колеблются, оставаясь ограниченными, и поэтому фильтрация Кальмана–Бьюси возможна.

Пример 1. Пусть шум η_t является процессом AP(2):

$$\eta_t - 1.4\eta_{t-1} + 0.85\eta_{t-2} = 0.344\varepsilon_2(t), \quad \sigma_\eta = 1, \quad \rho_\eta(1) = 0.757.$$

В этом и других примерах начальные значения фильтрации μ_t и ошибки γ_t при $t = 0, 1, 2$ определяем согласно п. 4.

На рис. 1, как и на остальных рисунках, приведены графики процесса θ_t , его фильтрации μ_t и ошибки фильтрации γ_t .

С целью оценки влияния дисперсии шума на фильтрацию были проведены также расчеты с $\sigma_\eta = 2$ и $\sigma_\eta = 0.5$. Для $\sigma_\eta = 2$ графики приведены на рис. 1, б. Видим, что увеличение дисперсии шума приводит к большему расхождению сигнала и фильтрации.

Ошибка фильтрации γ_t и ковариации $K_t[i], i = 1, 2$, стабилизируются при $t \approx 40$, их предельные значения при трех значениях σ_η даны в табл. 1.

Замечание. Подтверждением того, что предложенный способ выбора начальных данных является оптимальным, послужил эксперимент с использованием метода Монте-Карло. Были промоделированы гауссовские процессы θ_t и η_t с исходными

данными из примера 1. Пусть $x_t^{(s)}, y_t^{(s)}, z_t^{(s)}, 0 \leq t \leq M, 1 \leq s \leq N$ — реализации процессов θ_t, η_t и ζ_t . При $M = 100$ моделирование было повторено $N = 5000$ раз.

Рассмотрим две статистики $\phi^{(T)}$ и Ψ^T , которые будем использовать для получения соответствующих критериев. Статистика

$$\phi^{(T)} = \max_{0 \leq t \leq T} \frac{|\bar{x}_t - \bar{\mu}_t|}{\sqrt{\hat{\gamma}_t}} \sqrt{N}, \quad \bar{x}_t = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^N x_t^{(s)}, \quad \bar{\mu}_t = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^N \mu_t^{(s)},$$

вычисляет максимальное при $0 \leq t \leq T$ расхождение нормированных выборочных средних \bar{x}_t и $\bar{\mu}_t$. Статистика

$$\Psi^{(T)} = \max_{0 \leq t \leq T} \frac{|\hat{\gamma}_t - \gamma_t|}{S_t} \sqrt{N}, \quad \hat{\gamma}_t = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^N (x_t^{(s)} - \mu_t^{(s)})^2, \quad S_t^2 = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^N (x_t^{(s)} - \mu_t^{(s)})^4 - (\hat{\gamma}_t)^2,$$

дает аналогичную оценку для ошибок фильтрации γ_t и их выборочных оценок $\hat{\gamma}_t$. В последней формуле S_t^2 обозначает выборочную дисперсию $\hat{\gamma}_t$. При уровне значимости $\beta = 0.05$ и $\lambda_\beta = 1.96$, где $\int_{-\lambda_\beta}^{\lambda_\beta} f(z) dz = 1 - \beta, f(z) = \exp(-z^2/2)/\sqrt{2\pi}$ выполнение неравенств $\phi^{(T)} < \lambda_\beta, \Psi^{(T)} < \lambda_\beta$ при $T > w$ согласуется с гипотезой, что $\mathbf{D}(\theta_t - \mu_t) = \gamma_t$ при $t < T$. В табл. 1 для трех значений σ_η приведены величины статистик $\phi^{(10)}$ и $\Psi^{(10)}$, из рассмотрения которых можно судить о согласовании начальных данных с решением, полученным с помощью рекуррентных уравнений.

Таблица 1.

σ_η	$\phi^{(10)}$	$\Psi^{(10)}$	γ_∞	$K_\infty[1]$	$K_\infty[2]$
0.5	1.53	1.54	0.222	0.154	0.045
1	1.19	1.47	0.864	0.595	0.175
2	1.30	0.92	3.432	2.358	0.697

Пример 2. Пусть шум η_t является процессом AP(2):

$$\eta_t + 1.6\eta_{t-1} + 0.89\eta_{t-2} = 0.243\varepsilon_2(t), \quad \sigma_\eta = 1, \quad \rho_\eta(1) = -0.847.$$

Модуль фильтрации $|\mu_t|$ и ее ошибка γ_t быстро растут, поэтому нет возможности прогнозировать процесс θ_t , используя формулы (14)–(16). Предельные уравнения не дают решений, удовлетворяющих условиям А. На рис. 2 приводятся графики процесса θ_t , фильтрации μ_t и ошибки фильтрации γ_t .

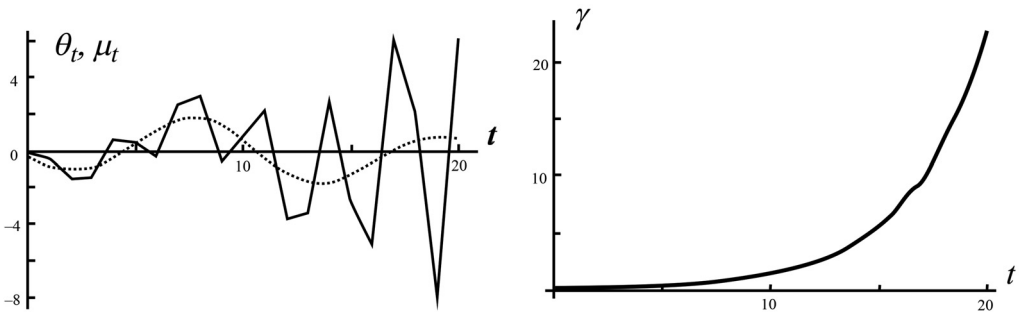


Рис. 2. Графики функций θ_t (пунктирная линия), μ_t (сплошная линия) и γ_t при $\sigma_\eta = 1$ в условиях примера 2.

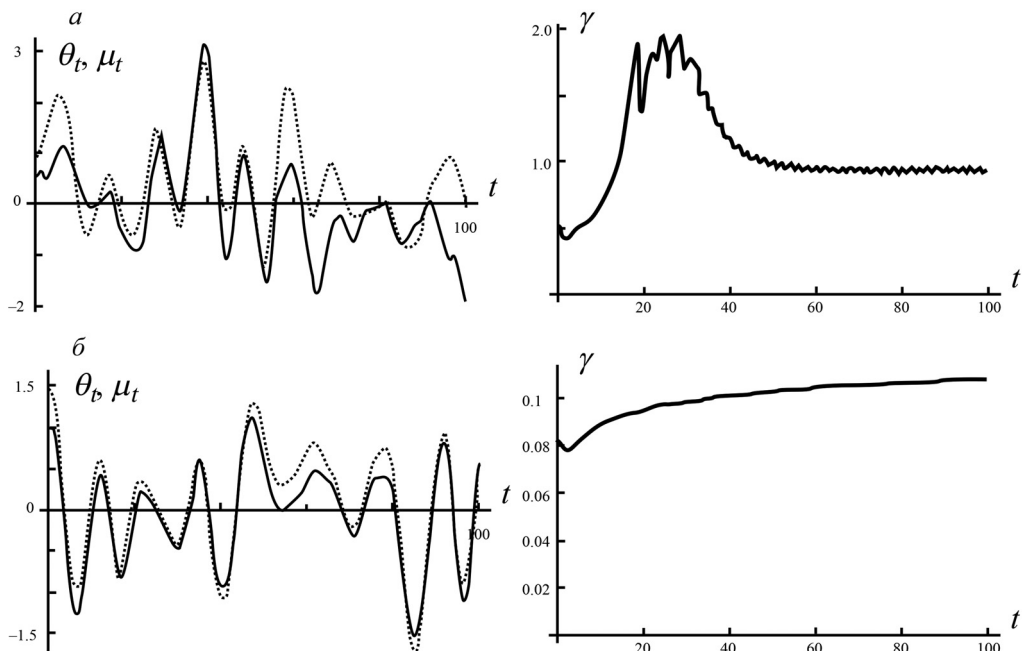


Рис. 3. Графики функций θ_t (пунктирная линия), μ_t (сплошная линия) и γ_t при $\sigma_\eta = 1$ (а); $\sigma_\eta = 0.3$ (б) в условиях примера 3.

Данный пример показывает, что не всегда можно пользоваться предложенным выше методом фильтрации.

Пример 3. Шум η_t является процессом AP(3):

$$\eta_t - 1.4\eta_{t-1} + 0.2\eta_{t-2} + 0.216\eta_{t-3} = 0.1087\varepsilon_2(t), \quad \rho_\eta(1) = 0.991.$$

При $\sigma_\eta \geq 0.4$ вычисления по рекуррентным формулам (14)–(16) приводят $(\gamma_t, K_t[1], K_t[2])$ к двум чередующимся вариантам, в частности, при $\sigma_\eta = 1$ и $t > 200$ их значения приведены в табл. 2.

Таблица 2.

γ_t	$K_t[1]$	$K_t[2]$	γ_{t+1}	$K_{t+1}[1]$	$K_{t+1}[2]$
0.951	0.902	0.812	0.906	0.882	0.812

Предельные уравнения (21) не дают ни одного решения, удовлетворяющего условиям А. На рис. 3, а приводятся графики процесса θ_t и фильтрации μ_t , а также график γ_t при $\sigma_\eta = 1$.

Если $\sigma_\eta \leq 0.3$, то предельные уравнения (21) дают два варианта предельных значений, при $\sigma_\eta = 0.3$ они приведены в табл. 3.

Таблица 3.

№	γ_∞	$K_\infty[1]$	$K_\infty[2]$
1	0.111	0.109	0.106
2	0.141	0.139	0.133

Вычисления по рекуррентным формулам (14)–(16) приходят к варианту № 1 в табл. 3. На рис. 3, б приведены графики θ_t , μ_t и γ_t при $\sigma_\eta = 0.3$.

6. Обсуждение. Во всех примерах модули корней характеристических полиномов близки к единице. Чем дальше модули корней от единицы, тем более устойчиво ведет себя система, что приводит к конечности предельных величин (21). Во всех примерах приведены первые коэффициенты корреляций сигнала и шума. Если $w \geq 2$ и у сигнала и шума коэффициенты корреляций по модулю близки к единице и противоположны по знакам, то это может привести к неограниченному росту ошибки фильтрации γ_t (см. пример 2).

Литература

1. Колмогоров А. Н. Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных процессов // Изв. АН СССР. Математика. 1941. № 5. С. 3–14.
2. Wiener N. Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time-series. Cambridge, 1949. 243 p.
3. Розанов Ю. А. Стационарные случайные процессы. М.: Наука, 1990. 271 с.
4. Товстик Т. М. Стационарные случайные процессы с рациональными спектральными плотностями. СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 2000. 84 с.
5. Kalman R. E. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems // Journal of Basic Engineering. 1960. P. 35–45.
6. Kalman R. E., Bucy R. S. New results in linear filtering and prediction theory // Journal of Basic Engineering. 1961. P. 95–108.
7. Браммер К., Зиффлинг Г. Фильтр Калмана—Бьюси. М., 1982. 200 с.
8. Фомин В. Н. Операторные методы теории линейной фильтрации случайных процессов. СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 1996. 306 с.
9. Ширяев А. Н. Вероятность — 2. М.: Изд-во МЦНМО, 2004. 408 с.
10. Граничин О. Н. Введение в методы стохастической оптимизации и оценивания. СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 2003. 131 с.
11. Yule G. U. On a method of investigating periodicities in disturbed series, with special reference to Wolfer's sunspot numbers // Phil. Trans. Royal Soc. A. 1927. Vol. 226. P. 267–298.

Статья поступила в редакцию 13 декабря 2017 г.; рекомендована в печать 22 марта 2018 г.

Контактная информация:

Татьяна Михайловна Товстик — канд. физ.-мат. наук, доц.; peter.tovstik@mail.ru

Linear Kalman—Bucy filter with an autoregressive signal and noise

T. M. Tovstik

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Tovstik T. M. Linear Kalman—Bucy filter with an autoregressive signal and noise. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2018, vol. 5 (63), issue 3, pp. 452–463. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.309>

In the Kalman—Bucy filter problem the observed process consists of a sum of a signal and of a noise. The filter begins simultaneously with the beginning of observation, and it is necessary to estimate a signal. As a rule, this problem is studied both for scalar and for vector Markovian processes. In this paper, the scalar linear problem is considered, but a signal and a noise are independent stationary autoregressive processes with orders larger than unit. The recurrent equations for the filter process, for its error, and for its condition

correlations are obtained. These recurrent equations contain the previous estimates and some last observed data. The optimal definition of initial data is proposed. The algebraic equations for the limit values of the filter error and for the limit cross-correlations are delivered. The roots of these equations lead to a criterion of the filter process convergence. Some examples at that the filter process converges or not converges are given. The Monte-Carlo method is used for a control of theoretical formulas for the filter and its error.

Keywords: Kalman—Bucy filter, autoregressive processes of high order.

References

1. Kolmogorov A. N., “Interpolation and extrapolation of stationary random processes”, *Izv. AN USSR. Mathematics* (5), 3–14 (1941) [in Russian].
2. Wiener N., *Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time-series* (Cambridge, 1949, 243 p.).
3. Rozanov Ju. A., *Stationary random processes* (Nauka, Moscow, 1990, 271 p.) [in Russian].
4. Tovstik T. M., *Stationary random processes with rational spectral densities* (St. Petersburg Univ. Publ., St. Petersburg, 2000, 84 p.) [in Russian].
5. Kalman R. E. “A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems”, *Journal of Basic Engineering*, 35–45 (1960).
6. Kalman R. E., Bucy R. S., “New results in linear filtering and prediction theory”, *Journal of Basic Engineering*, 95–108 (1961).
7. Brammer K., Siffing G., *Kalman—Bucy—Filter. Deterministische Beobachtung und Stochastische Filterung* (Munchen, 1975).
8. Fomin V. N., *Operator methods of linear filter random processes* (St. Petersburg Univ. Publ., St. Petersburg, 1996, 306 p.) [in Russian].
9. Shiryayev A. N., *Probability — 2* (MTsNMO Publ., Moscow, 2004, 408 p.) [in Russian].
10. Granichin O. N., *An introduction to methods stochastic optimization and estimation* (St. Petersburg Univ. Publ., St. Petersburg, 2003, 131 p.) [in Russian].
11. Yule G. U., “On a method of investigating periodicities in disturbed series, with special reference to Wolfer’s sunspot numbers”, *Phil. Trans. Royal Soc. A* **226**, 267–298 (1927).

Author’s information:

Tatiana M. Tovstik — peter.tovstik@mail.ru