УДК 517.537 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 3
MSC 30E10

Приближение целыми функциями на счетном объединении отрезков вещественной оси. 4. Обратная теорема

О. В. Сильванович[1], *Н. А. Широков*[2]

[1] Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики,
Российская Федерация, 197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49

[2] Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Сильванович О. В., Широков Н. А.* Приближение целыми функциями на счетном объединении отрезков вещественной оси. 4. Обратная теорема // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 3. С. 441–451. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.308

Вопрос о конструктивном описании классов функций в терминах скорости их возможного приближения заданным множеством аппроксимирующих функций уже более ста лет является одним из основных в общей теории аппроксимации. Важным оказалось обстоятельство, состоящее в возможной неравномерности скорости приближения приближающими функциями в различных точках области задания приближаемой функции. Так, лишь в середине 1950-х годов удалось конструктивно описать классы Гёльдера на отрезке $[-1; 1]$ в терминах аппроксимации алгебраическими полиномами. Для этого конкретного случая конструктивное описание требует приближения в окрестностях концов отрезка $[-1; 1]$ существенно лучшего, чем в окрестности его середины. Одним из своеобразных тестов качества приближения после упомянутых результатов стало выяснение, дает ли предлагаемая скорость приближения возможность восстановить гладкость приближаемой функции. В серии наших работ рассматривалось приближение классов гладких функций на счетном объединении отрезков вещественной оси. В данной статье мы покажем, что полученная скорость приближения с помощью целых функций экспоненциального типа позволяет восстановить гладкость приближаемой функции, т. е. конструктивное описание классов гладких функций в терминах указанного способа приближения возможно. В работе одного из авторов был приведен результат для классов Гёльдера, при этом доказательство использовало некоторую функцию, построение которой было опущено. В настоящей статье используется другое доказательство, не предполагающее применения указанной функции.

Ключевые слова: гладкие функции, аппроксимация, целые функции.

Формулировка основного результата требует введения ряда обозначений, которые встречались в работах [1, 2]. Пусть $I_n \stackrel{\text{def}}{=} [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{Z}$, — отрезки вещественной оси, которые попарно дизъюнктны, $b_n < a_{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}$, и с некоторыми $\alpha_0, \beta_0 > 0$ выполняются соотношения

$$\alpha_0 \le \frac{|I_n|}{|I_m|} \le \beta_0, \quad n, m \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Далее, полагаем $J_n = [b_n, a_{n+1}]$ и пусть с некоторыми $\alpha_1, \beta_1 > 0$ справедливы неравенства

$$\alpha_1 \le \frac{|J_n|}{|J_m|} \le \beta_1, \quad n, m \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

Пусть $E = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} I_n$. Через $\Lambda^{\omega}_M(E)$ обозначим множество комплекснозначных функций f, заданных на E и удовлетворяющих условию $|f(x)| \le M$, $x \in E$ и таких, что для $x_1, x_2 \in I_n, n \in \mathbb{Z}$ справедлива оценка $|f(x_2) - f(x_1)| \le c_f \omega(|x_2 - x_1|)$. Для $r \in \mathbb{N}$ через $\Lambda^{r+\omega}_M(E)$ обозначаем множество всех комплекснозначных функций f, для которых справедливо соотношение $|f(x)| \le M$, $x \in E$ и $f^{(r)} \in \Lambda^{\omega}_r(E)$. Предполагаем, что $\omega(x)$ — модуль непрерывности, удовлетворяющий условию Дини

$$\int\limits_0^x \frac{\omega(t)}{t} dt + x \int\limits_x^{\infty} \frac{\omega(t)}{t^2} dt \le c \cdot \omega(x), \quad x > 0. \tag{3}$$

Нам понадобится специальный масштаб скорости приближения [1]. Пусть $\rho > 1$, $E_\rho([-1,1])$ — образ окружности $\{\xi : |\xi| = \rho\}$ при отображении функцией Жуковского $z = \frac{1}{2}(\xi + \frac{1}{\xi})$. Для произвольного отрезка $[a,b] \subset \mathbb{R}$ полагаем

$$E_\rho([a,b]) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} E_\rho([-1,1]), \tag{4}$$

$$d_\rho(z; [a,b]) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{dist}(z, E_\rho([a,b])), \quad z \in \mathbb{C}, \tag{5}$$

при $x \in I_{n_0} \subset E$:

$$d_\rho(x, E) \stackrel{\text{def}}{=} d_\rho(x, I_{n_0}). \tag{6}$$

В качестве множества приближающих функций будем рассматривать целые функции F_σ экспоненциального типа, не превосходящие σ, ограниченные на вещественной оси. Их совокупности обозначим через T_σ. Известно, что $F_\sigma \in T_\sigma$ тогда и только тогда, когда с некоторой постоянной $M = M_{F_\sigma}$ выполняется соотношение

$$|F_\sigma(z)| \le M \exp(\sigma |\mathrm{Im} z|), \quad z \in \mathbb{C}. \tag{7}$$

Сформулируем основной результат работы.

Теорема. *Пусть $f(x)$ — комплекснозначная функция, заданная на множестве E, для которой при каждом $\sigma \ge 1$ найдется функция $F_\sigma \in T_\sigma$ такая, что справедливы оценки*

$$|f(x) - F_\sigma(x)| \le c_0 d^r_{1+\frac{1}{\sigma}}(x, E) \omega(d_{1+\frac{1}{\sigma}}(x, E)), \quad x \in E, \tag{8}$$

с некоторой постоянной c_0, не зависящей от σ, и с фиксированным $r \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Тогда $f \in \Lambda^{r+\omega}_{M_0}(E)$, где $M_0 = M_0(c_0, E, F_1)$.

Для доказательства теоремы будет нужна масштабирующая функция, соизмеримая с функцией $d_\rho(z, E)$. Нам потребуется следующий результат Б. Я. Левина [3].

Теорема А. *Для множества E, удовлетворяющего условиям (1), (2) существует вещественная функция $g_E(z)$ со следующими свойствами:*

$$g_E \text{ субгармонична и непрерывна в } \mathbb{C}, \tag{9}$$

$$g_E \text{ гармонична в } \mathbb{C} \setminus E, \tag{10}$$

$$g_E(z) = 0 \text{ при } z \in E, \quad g_E(z) > 0 \text{ при } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{E}; \tag{11}$$

по значениям $g_E(x)$ при $x \in \mathbb{R}$ можно построить интеграл Пуассона $h_E(z)$ по отдельности в $\mathbb{C}_+$ и в $\mathbb{C}_-$, для которого будет выполняться соотношение

$$g_E(z) = h_E(z) + |\mathrm{Im} z|, \; z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \tag{12}$$

где

$$h_E(x + iy) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} g_E(t) \frac{|y|}{(t-x)^2 + y^2} dt; \tag{13}$$

существует $C(E)$ такое, что

$$g_E(x) \leq C(E), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{14}$$

Пусть $E_\rho \overset{\mathrm{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} : g_E(z) = \rho\}$, $\rho > 0$,

$$\delta_\rho(x) = \mathrm{dist}(x, E_\rho), \quad x \in E. \tag{15}$$

Для нас будет важно следующее свойство характеристики $\delta_\rho(x)$.

Лемма 1. *Существуют $C_1(E), C_2(E) > 0$ такие, что справедливо следующее соотношение:*

$$C_1(E)\delta_{\rho-1}(x) \leq d_\rho(x, E) \leq C_2(E)\delta_{\rho-1}(x), \quad x \in E, \quad 1 \leq \rho \leq 2. \tag{16}$$

Доказательство. Выберем $1 < \rho_0 \leq 2$, зависящее от $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1$, из условий (1), (2) так, чтобы внутренние области эллипсов $\mathrm{int}E_{\rho_0}([a_n, b_n])$ и $\mathrm{int}E_{\rho_0}([a_m, b_m])$ при $n \neq m$, $n, m \in \mathbb{Z}$, не пересекались. Если $1 < \rho_0 < 2$, то установим оценки (16) в начале при $1 < \rho \leq \rho_0$. Пусть $x \in I_{n_0} : I_{n_0} = [a_{n_0}, b_{n_0}]$. Обозначим через $G_{n_0}(z)$ функцию Грина с логарифмическим полюсом в бесконечности для области $\mathbb{C} \setminus I_{n_0}$. Она выражается через функцию, обратную к функции Жуковского. При $z \in E_\rho(I_{n_0})$ выполнено $G_{n_0}(z) = \log \rho$. Установим, что с некоторыми $C_{01}(E), C_{02}(E) > 0$ при $z \in \mathrm{int}E_{\rho_0}(I_{n_0}) \setminus I_{n_0}$ справедливо неравенство

$$C_{01}(E)G_{n_0}(z) \leq g_E(z) \leq C_{02}G_{n_0}(z). \tag{17}$$

Пусть

$$y^*_{\rho_0} \overset{\mathrm{def}}{=} \sup_{z \in E_{\rho_0}(I_n), n \in \mathbb{Z}} |\mathrm{Im} z|. \tag{18}$$

Свойства (12)–(14) функции g_E и определение (18) влекут оценку

$$g_E(z) \leq y^*_{\rho_0} + C(E), \quad z \in E_\rho([a_n, b_n]), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Положим

$$C_{02}(E) = \frac{y^*_{\rho_0} + C(E)}{\log \rho_0}.$$

Тогда для гармонической в $\mathrm{int}E_{\rho_0}(I_{n_0}) \setminus I_{n_0}$ функции $g_E(z)$ и гармонической в упомянутой области функции $C_{02}(E)G_{n_0}(z)$ с учетом (11) справедливы соотношения

$$g_E(z) \le C_{02}(E)G_{n_0}(z), \quad z \in E_{\rho_0}(I_{n_0}) \cup I_{n_0}. \tag{19}$$

Значит, правое неравенство в (17) следует из (19) и принципа максимума.

Выберем $\rho_1 > \rho_0,\ \rho_1$ достаточно близко к ρ_0 так, чтобы при $m \ne n,\ m, n \in \mathbb{Z}$, выполнялось свойство $\mathrm{int}E_{\rho_1}(I_m) \cap I_n = \varnothing$. При достаточной близости ρ_1 к ρ_0 такой выбор возможен. Положим

$$y^0_{\rho_1} = \frac{1}{2} \inf_{z \in E_{\rho_1}(I_n), n \in \mathbb{Z}} \max |\mathrm{Im} z|. \tag{20}$$

Свойство (1) множества E влечет неравенство $y^0_{\rho_1} > 0$ и при $n \in \mathbb{Z}$

$$\max_{z \in E_{\rho_1}(I_n)} |\mathrm{Im} z| \ge 2y^0_{\rho_1}. \tag{21}$$

Пусть

$$\gamma_{\rho_1}(I_n) = E_{\rho_1}(I_n) \cap \{z : |\mathrm{Im} z| \ge y^0_{\rho_1}\}. \tag{22}$$

Обозначим через $\omega_n(z)$ гармоническую меру множества $\gamma_{\rho_1}(I_n)$ относительно области $E_{\rho_1}(I_n) \setminus I_n,\ n \in \mathbb{Z}$. Тогда существует $C(\rho_0, \rho_1) > 0$ такое, что справедливо неравенство

$$\omega_n(z) \ge C(\rho_0, \rho_1), \quad z \in E_{\rho_0}(I_n), \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{23}$$

Свойства (11)–(13) функции $g_E(z)$ и (21), (22) влекут оценку

$$g_E(z) \ge y^0_{\rho_1}\omega_n(z), \quad z \in E_{\rho_1}(I_n) \cup I_n. \tag{24}$$

Тогда (23), (24) и принцип максимума дают соотношение

$$g_E(z) \ge C(\rho_0, \rho_1)y^0_{\rho_1}, \quad z \in E_{\rho_0}(I_n). \tag{25}$$

Положим

$$C_{01}(E) = C(\rho_0, \rho_1)\frac{y^0_{\rho_1}}{\log \rho_0}.$$

Тогда из (25) следует соотношение

$$g_E(z) \ge C_{01}(E)G_{n_0}(z), \quad z \in E_{\rho_0}(I_n) \cup I_{n_0}, \tag{26}$$

и левое неравенство в (17) следует из (26) и принципа максимума. Выберем $\rho_1 > 1$ из равенства

$$\log \rho_0 = \max\left(\frac{1}{C_{01}(E)}, 1\right) \log \rho_2. \tag{27}$$

Возьмем $t,\ 0 < t \le \log \rho_2$, и пусть $\rho_3(t)$ определено равенством

$$C_{01}(E) \log \rho_3(t) = t. \tag{28}$$

Определения (27), (28) величин ρ_2 и $\rho_3(t)$ влекут соотношение $\rho_3(t) \le \rho_0$. Левое неравенство в (17) дает включение

$$E_t \cap \mathrm{int}E_{\rho_0}(I_{n_0}) \subset \mathrm{int}E_{\rho_3(t)}(I_{n_0}). \tag{29}$$

Из включения (29) и геометрических свойств эллипсов $E_\rho(I_{n_0})$ с учетом определения (28) при $x \in I_{n_0}$ получим

$$\delta_t(x) = \operatorname{dist}(x, E_t) \le \operatorname{dist}(x, E_{\rho_3(t)}(I_{n_0})) \le b_1(E) d_{1+t}(x, E). \tag{30}$$

Выберем $\rho_4(t)$ из соотношения

$$C_{02}(E) \log \rho_4(t) = t. \tag{31}$$

Тогда (27) и (31) влекут $\rho_4(t) \le \rho_0$, и правое неравенство в (17) дает включение

$$E_{\rho_4(t)}(I_{n_0}) \subset \operatorname{int} E_t. \tag{32}$$

Из формулы (32) и свойств эллипсов получаем соотношение

$$\delta_t(x) = \operatorname{dist}(x, E_t) \ge \operatorname{dist}(x, E_{\rho_4(t)}(I_{n_0})) \ge b_2(E) d_{1+t}(x, E), \tag{33}$$

если $x \in I_{n_0}$. Неравенства (30) и (33) влекут (16) при $1 < \rho \le \rho_2$ с $C_2'(E) = 1/b_1(E)$, $C_1'(E) = 1/b_2(E)$. Если $\rho_2 < 2$, то при $\rho_2 \le \rho \le 2$ неравенства (16) следуют, возможно, со значениями $C_1(E) < C_1'(E)$, $C_2(E) > C_2'(E)$ из того, что свойства (11)–(13) функции g_E дают включение $E_2 \subset \{z = x + iy : |y| \le 2\}$. Лемма 1 доказана.

Следующая лемма позволяет обойтись без построения функции $v_\sigma(x)$, упомянутой во введении.

Лемма 2. *Пусть F_σ — целая функция экспоненциального типа, не превосходящая σ, удовлетворяющая при $x \in E$ оценке*

$$|F_\sigma(x)| \le \delta^r_{\frac{1}{\sigma}}(x) \omega(\delta_{\frac{1}{\sigma}}(x)), \quad r \in \{0\} \cup \mathbb{N}. \tag{34}$$

Тогда существует постоянная $C_{3r}(E)$ такая, что при $z \in E_{1+\frac{1}{\sigma}}(I_n)$, $n \in \mathbb{Z}$, при условии $C_{01} \log \rho_0 \ge \frac{1}{\sigma}$ выполняется неравенство

$$|F_\sigma(z)| \le C_{3r}(E) \delta^r_{\frac{1}{\sigma}}(x(z)) \omega(\delta_{\frac{1}{\sigma}}(x(z))), \tag{35}$$

где $x(z) \in I_n$ такая точка, что $|z - x(z)| = \min\limits_{x \in I_n} |z - x|$.

Доказательство. В силу соотношения (16) в лемме 1 величины $\delta_{\frac{1}{\sigma}}(x)$ и $d_{1+\frac{1}{\sigma}}(x, I_n)$ при $x \in I_n$ и $\sigma \ge 1$ соизмеримы, поэтому для доказательства оценки (35) достаточно установить, что при указанном в условии σ справедливо неравенство

$$|F_\sigma(z)| \le C_{4r}(E) d^r_{1+\frac{1}{\sigma}}(x(z), I_n) \omega(d_{1+\frac{1}{\sigma}}(x(z), I_n)). \tag{36}$$

Выберем ρ_5' из соотношения $C_{01} \log \rho_0 = \log \rho_5'$ и пусть $\rho_5 = \min(\rho_5', \rho_0)$. Неравенства (16) и условие $C_{01} \log \rho_0 \ge \frac{1}{\sigma}$ влекут, что внутренняя область кривой $\lambda_{n,\frac{1}{\sigma}} \subset E_{\frac{1}{\sigma}}$, т. е. одной из связных кривых, из которых состоит множество $E_{\frac{1}{\sigma}}$, содержащее отрезок I_n, расположена во внутренней части эллипса $E_{\rho_0}(I_n)$. Это означает, что внутренние области кривых $\lambda_{n,\frac{1}{\sigma}}$ и $\lambda_{m,\frac{1}{\sigma}}$ при $n \ne m$ не пересекаются в силу выбора ρ_0. Обозначим $\xi = \frac{1}{\sigma}$, пусть $M_n(\xi) = \max\limits_{x \in I_n} \delta^r_\xi(x) \omega(\delta_\xi(x))$. Используя условие (1) и неравенства (19), найдем, что с некоторой $C_{6r}(E)$ имеется оценка

$$M_n(\xi) \le C_{6r}(E) \xi^r \omega(\xi). \tag{37}$$

Из результатов Б. Я. Левина [3] и неравенства (37) следует существование величины $C_7(E)$ такой, что для целой функции F_σ экспоненциального типа, не превосходящей σ, удовлетворяющей условию (34), при $z = x + iy$ справедливо неравенство

$$\log|F_\sigma(x+iy)| \le \log(C_{6r}(E)\xi^r\omega(\xi)) + C_{7r}(E)\sigma + \sigma|y|. \tag{38}$$

Пусть

$$C_{8r}(E) \stackrel{\text{def}}{=} C_{7r}(E) + \sup_{n\in\mathbb{Z}}\max_{z}|y|, \tag{39}$$

где $z = x + iy \in E_{\rho_5}(I_n)$. Из оценки (38) и определения (39) следует, что при $z \in E_{\rho_5}(I_n)$ выполняется соотношение

$$\log|F_\sigma(x+iy)| \le \log(C_{6r}(E)\xi^r\omega(\xi)) + C_{8r}(E)\sigma. \tag{40}$$

Обозначим через $\Omega_n(z)$ гармоническую меру эллипса $E_{\rho_5}(I_n)$ относительно области $\mathrm{int}E_{\rho_5}(I_n)\setminus I_n$, а через $\widetilde{W}_{n,\xi}(z)$ гармоническую в области $\mathrm{int}E_{\rho_5}(I_n)\setminus I_n$ функцию, которая равна $\log(d^r_{1+\xi}(x,I_n)\omega(d_{1+\xi}(x,I_n)))$ при $x \in I_n$ и равна нулю при $z \in E_{\rho_5}(I_n)$. Из неравенства (40) заключаем, что при $z \in E_{\rho_5}(I_n) \cup I_n$ имеется соотношение

$$\log|F_\sigma(z)| \le (\log(C_{6r}(E)\xi^r\omega(\xi)) + C_{8r}(E)\sigma)\,\Omega_n(z) + \widetilde{W}_{n,\xi}(z). \tag{41}$$

Поскольку $\log|F_{\sigma(z)}|$ субгармонична в $\mathbb{C}$, то оценка (41) справедлива при всех $z \in \mathrm{int}E_{\rho_5}(I_n)\setminus I_n$.

Пусть $\zeta = \lambda(z)$ — обратная функция к функции Жуковского $z = \frac{1}{\zeta}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)$. Тогда функция $\Omega_n(z)$ выражается в виде

$$\Omega_n(z) = \frac{1}{\log\rho_5}\log|\lambda(z)|.$$

Отсюда следует для $\zeta > 0,\ 1+\zeta < \rho_5,\ z \in E_{1+\zeta}(I_n)$ оценка

$$\Omega_n(z) = \frac{1}{\log\rho_5}\log(1+\zeta) < \frac{\zeta}{\log\rho_5}, \tag{42}$$

что при $z \in E_{1+\xi}(I_n)$ влечет неравенства

$$(\log(C_{6r}(E)\xi^r\omega(\xi)) + C_{8r}(E)\sigma)\,\Omega_n(z) < \log(C_{6r}(E)\xi^r\omega(\xi))\cdot\frac{\xi}{\log\rho_5} + C_{8r}(E)\cdot\sigma\xi \le C_{9r}(E). \tag{43}$$

Воспользуемся следующим свойством эллипсов: существует абсолютная постоянная $C_{abs} > 0$ такая, что для любых $r > 1$ и $z \in E_r(I_n)$ справедливы соотношения

$$C_{abs}\cdot|z - x(z)| \le d_r(x(z), I_n) \le |z - x(z)|. \tag{44}$$

Пусть $x_0 = x(z) \in I_n$. Для расстояний до $E_r(x, I_n)$ справедлива следующая оценка, не зависящая от $r > 1$ и $n \in \mathbb{Z}$ (см. [4, гл. 6]):

$$d_r(x, I_n) \le C_{1abs} d_r^{\frac{1}{2}}(x_0, I_n)\cdot(|x - x_0| + d_r(x_0, I_n))^{\frac{1}{2}} \quad \text{для} \quad x \in I_n. \tag{45}$$

Пусть $\widehat{W}_{n,\xi}(z)$ — гармоническая в области $\mathrm{int}E_{\rho_5}(I_n)\setminus I_n$ функция, равная при $x \in I_n$

$$\log[(C_{1abs}d_{1+\xi}^{\frac{1}{2}}(x_0,I_n)(|x-x_0|+d_{1+\xi}(x_0,I_n))^{\frac{1}{2}})^r]\times$$
$$\times\,\omega((C_{1abs}d_{1+\xi}^{\frac{1}{2}}(x_0,I_n)(|x-x_0|+d_{1+\xi}(x_0,I_n))^{\frac{1}{2}})] \stackrel{\text{def}}{=} \log\Delta(x)$$

и равная нулю при $z\in E_{\rho_5}(I_n)$. Неравенство (45) влечет, что $\widetilde{W}_{n,\xi}(z)\le \widehat{W}_{n,\xi}(z)$ при $z\in \mathrm{int}E_{\rho_5}(I_n)\setminus I_n$, следовательно, по принципу максимума оно сохранится при $z\in \mathrm{int}E_{\rho}(I_n)\setminus I_n$. Положим $\rho \stackrel{\text{def}}{=} C_{1abs}d_{1+\xi}^r(x_0,I_n)\omega(d_{1+\xi}(x_0,I_n))$, тогда с учетом соотношения $\omega(u)\le\omega(v)(2+\frac{u}{v})$ находим соотношения

$$d_{1+\xi}^{\frac{1}{2}}(x_0,I_n)(|x-x_0|+d_{1+\xi}(x_0,I_n))^{\frac{1}{2}} = d_{1+\xi}(x_0,I_n)\left(1+\frac{|x-x_0|}{d_{1+\xi}(x_0,I_n)}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\omega(C_{1abs}d_{1+\xi}(x_0,I_n))\left(1+\frac{|x-x_0|}{d_{1+\xi}(x_0,I_n)}\right)^{\frac{1}{2}}\le$$
$$\le\left(2+\left(1+\frac{|x-x_0|}{d_{1+\xi}(x_0,I_n)}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\omega(C_{1abs}d_{1+\xi}(x_0,I_n))\le$$
$$\le\left(3+\frac{|x-x_0|^{\frac{1}{2}}}{d_{1+\xi}^{\frac{1}{2}}(x_0,I_n)}\right)\omega(C_{1abs}d_{1+\xi}(x_0,I_n)). \quad (46)$$

Неравенства (46) дают оценку

$$\Delta(x)\le C_r\rho\left(3^{r+1}+\frac{|x-x_0|^{\frac{r+1}{2}}}{d_{1+\xi}^{\frac{r+1}{2}}(x_0,I_n)}\right). \quad (47)$$

Обозначим через $W_{n,\xi}(z)$ гармоническую в $\mathrm{int}E_{\rho_5}(I_n)\setminus I_n$ функцию, равную $\log C_r\rho$ при $z\in I_n$ и равную нулю при $z\in E_{\rho_5}(I_n)$, а через $U_{n,\xi}(z)$ гармоническую в $E_{\rho_5}(I_n)\setminus I_n$ функцию, равную $\log\left(3^{r+1}+|x-x_0|^{\frac{r+1}{2}}/d_{1+\xi}^{\frac{r+1}{2}}(x_0,I_n)\right)$ при $z\in I_n$ и равную нулю при $z\in E_{\rho_5}(I_n)$. Тогда будем иметь

$$\widehat{W}_{n,\xi}(z)=W_{n,\xi}(z)+U_{n,\xi}(z). \quad (48)$$

Для функции $W_{n,\xi}(z)$ с учетом оценки (42) получаем неравенство

$$W_{n,\xi}=(1-\Omega_n(z))\log(C_r\rho)=\log(C_r\rho)-\Omega_n(z)\log(C_r\rho)\le$$
$$\le\log\rho+\log C_r+\frac{\xi}{\log\rho_5}|\log(C_r\rho)|\le\log\rho+C_{9r}(E). \quad (49)$$

Пусть $V_{n,\xi}(z)$ — гармоническая и ограниченная в $\mathbb{C}\setminus I_n$ функция, такая что

$$V_{n,\xi}(x)=\log\left(3^{r+1}+\frac{|x-x_0|^{\frac{r+1}{2}}}{d_{1+\xi}^{\frac{r+1}{2}}(x_0,I_n)}\right),\quad x\in I_n.$$

Тогда $V_{n,\xi}(z)>0$ при любом $z\in\mathbb{C}\setminus I_n$ и по принципу максимума получаем, что при $z\in\mathrm{int}E_{\rho_5}(I_n)\setminus I_n$ справедливо соотношение

$$U_{n,\xi}(z)<V_{n,\xi}(z). \quad (50)$$

К функции $V_{n,\xi}$ применима теорема 2.1.1 П. М. Тамразова [5, гл. 2], которая влечет неравенство

$$V_{n,\xi}(z) < \log\left(C_{2abs}\left(3^{r+1} + \frac{|z-x_0|^{\frac{r+1}{2}}}{d_{1+\xi}^{\frac{r+1}{2}}(x_0, I_n)}\right)\right). \tag{51}$$

Применяя свойство (44), из (43), (45), (47)–(51) заключаем, что

$$\log|F_\sigma(z)| \le \log\rho + C_{10,r}(E).$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть* $\xi_0 \in \mathrm{int}E_{1+\frac{1}{\sigma}}(I_n) \setminus I_n$, *функция* F_σ *удовлетворяет свойству (34) из леммы 2,* σ *удовлетворяет условию* $C_{01} \cdot \log\rho_0 \ge \frac{1}{\sigma}$, *точка* $x(\xi_0) \in I_n$ *такая, что* $|\xi_0 - x(\xi_0)| = \mathrm{dist}(\xi_0, I_n)$. *Обозначим через* $z(\xi_0)$ *пересечение луча с началом в точке* $x(\xi_0)$, *проходящего через точку* ξ_0, *с эллипсом* $E_{1+\frac{1}{\sigma}}(I_n)$. *Положим* $l_n(z) = \mathrm{dist}(z, I_n)$. *Тогда существует такое* $C_{11,r}(E)$, *что при* $z_1 \in [x(\xi_0), z(\xi_0)]$ *справедлива оценка*

$$|F_\sigma(z_1)| \le C_{11,r}(E)l_n^r(z(\xi_0))\omega(l_n(z(\xi_0))). \tag{52}$$

Доказательство. Из неравенств (44) находим, что установленное в лемме 2 соотношение (35) может быть переписано в форме

$$|F_\sigma(z)| \le C_{12,r}(E)l_n^r(z)\omega(l_n(z)), \quad z \in E_{1+\frac{1}{\sigma}}(I_n(z)). \tag{53}$$

Если $z_0 \in E_{1+\frac{1}{\sigma}}(I_n)$, $x_0 = x(z_0)$, то предполагаемое в условии леммы 3 неравенство (34) имеет вид

$$|F_\sigma(x_0)| \le C_{13,r}(E)l_n^r(z_0)\omega(l_n(z_0)), \quad z \in E_{1+\frac{1}{\sigma}}(I_n(z_0)). \tag{54}$$

Введем следующую характеристику $\lambda_n(z)$:

$$\lambda_n(z) = \begin{cases} l_n(z), & z \in E_{1+\frac{1}{\sigma}}(I_n), \\ l_n(z(x)), & x \in I_n. \end{cases} \tag{55}$$

Найдется $z(x) \in E_{1+\frac{1}{\sigma}}(I_n)$, для которого справедливо равенство $|x - z(x)| = l_n(z(x))$.

В определении (55) характеристика задана при всех $z \in E_{1+\frac{1}{\sigma}}(I_n) \cup I_n$, поскольку для любой точки $x \in I_n$ найдется $z(x) \in E_{1+\frac{1}{\sigma}}(I_n)$ со свойством $|x - z(x)| = l_n(z(x))$. Соединение соотношений (53)–(55) дает оценку

$$|F_\sigma(\zeta)| \le (C_{12,r}(E) + C_{13,r}(E))\lambda_n^r(\zeta)\omega(\lambda_n(\zeta)), \quad \zeta \in \partial E_{1+\frac{1}{\sigma}}(I_n) \cup I_n. \tag{56}$$

Свойства эллипсов влекут неравенство

$$\lambda_n(\zeta_2) \le C_{abs}\lambda_n^{\frac{1}{2}}(\zeta_1)(\lambda_n(\zeta_1) + |\zeta_2 - \zeta_1|)^{\frac{1}{2}}, \quad \zeta_1, \zeta_2 \in E_{1+\frac{1}{\sigma}}(I_n) \cup I_n. \tag{57}$$

Модуль непрерывности $\omega(\delta)$ удовлетворяет соотношению $\omega(t\sigma) \le 2t\omega(\delta)$, $t > 1$, $\delta > 0$, поэтому к правой части неравенства (56) применимо условие общей теоремы 2.1.1 из [5, гл. 2], которая и дает неравенство (52). Лемма доказана.

Построим теперь продолжение функции $f(z)$ с множества E на всю комплексную плоскость с определенными свойствами, которые позволят применить результаты Е. М. Дынькина [6] и доказать теорему. Обозначим через $\overline{B}_\delta(z)$ замкнутый круг с центром в точке z и радиуса $\delta, |\overline{B}_\delta(z)|$ — его площадь. Пусть $\rho_* = 1 + \frac{\rho_0 - 1}{2}$. Существует $\delta_0 = \delta_0(E) > 0$ такое, что при $z \in E_{\rho_8}(I_n)$ выполняется $B_{\delta_0}(z) \subset \operatorname{int} E_{\rho_0}(I_n)$, $n \in \mathbb{Z}$. Выберем N_0 из условия $2^{-N_0} \le \rho_* - 1 < 2^{-N_0+1}$ и определим функцию $f_0(z)$ при $z \in \mathbb{C} \setminus E$ следующим образом:

$$f_0(z) = \begin{cases} F_{2^N}(z), \quad z \in \operatorname{int} E_{1+2^{-N-2}}(I_m) \setminus \operatorname{int} E_{1+2^{-N-3}}(I_m), \quad m \in \mathbb{Z}, \quad N \ge N_0 + 2, \\ 0, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \bigcup\limits_{m \in \mathbb{Z}} \operatorname{int} E_{1+2^{-N_0}}. \end{cases} \tag{58}$$

Определение ρ_* и N_0 показывает, что функция f_0 определена корректно. Зададим характеристику $\delta(z)$ при $z \in \mathbb{C} \setminus E$ следующим образом:

$$\delta(z) = \min \left(\frac{1}{100} \operatorname{dist}(z, E), \frac{1}{100} \delta_0 \right). \tag{59}$$

Тогда в силу выбора δ_0 при $z_1 \in \operatorname{int} E_{\rho_*}(I_m)$ и $z_2 \in \operatorname{int} E_{\rho_*}(I_n)$ и $m \ne n$ круги $\overline{B}_{\delta_1(z)}(z_1)$ и $\overline{B}_{\delta_2(z)}(z_1)$ не пересекаются и в силу свойств эллипсов, если $\overline{B}_{\delta(z)}(z) \cap \operatorname{int} E_{1+2^{-N_1}}(I_n) \ne \emptyset$ и $\overline{B}_{\delta(z)}(z) \cap \operatorname{int} E_{1+2^{-N_2}}(I_m) \ne \emptyset$, то $|N_2 - N_1| \le 1$. Для $z \in \operatorname{int} E_{\rho_*}(I_m)$ обозначим через $N(z)$ следующую величину:

$$N(z) = \min \left(N : \operatorname{int} E_{1+2^{-N}}(I_m) \cap \overline{B}_{\delta(z)}(z) \ne \emptyset \right), \quad m \in \mathbb{Z}. \tag{60}$$

Тогда для $N \ge N(z)$ круг $\overline{B}_{\delta(z)}(z)$ и $\operatorname{int} E_{1+2^{-N}}(I_m)$, $m \in \mathbb{Z}$, не пересекаются. Пусть m_2 — двумерная мера Лебега и

$$f_1(z) \stackrel{def}{=} \frac{1}{|\overline{B}_\delta(z)|} \int_{\overline{B}_\delta(z)} f_0(\zeta) dm_2(\zeta), \quad z \in \mathbb{C} \setminus E. \tag{61}$$

Определения (58), (59) и (61) вместе с условием (8) теоремы показывают, что $f_1 \in C^1(\mathbb{C} \setminus E)$, $f_1 \in C(\mathbb{C})$, $f_1 \equiv 0$ при $z \in \mathbb{C} \setminus \bigcup\limits_{m \in \mathbb{Z}} \operatorname{int} E_{\rho_0}(I_m)$, т. е. f_1 является продолжением функции f на всю плоскость $\mathbb{C}$.

Пусть $z \in \operatorname{int} E_{1+2^{-N_0-2}}(I_{n_0}) \setminus I_{n_0}$. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 4. *Существует $C_{12,r}(E)$ такое, что*

$$|F_{2^{N(z)}}(z) - F_{2^{N(z)-1}}(z)| \le C_{12,r}(E) l_n^r(z) \omega(l_n(z)). \tag{62}$$

Доказательство. В силу условия (8) при $x \in E$ имеем оценку

$$|F_{2^{N(z)}}(x) - F_{2^{N(z)-1}}(x)| \le |F_{2^{N(z)}}(x) - f(x)| + |f(x) - F_{2^{N(z)-1}}(x)| \le$$

$$\le C_0(d^r_{1+2^{-N(z)}}(x, E) \omega(d_{1+2^{-N(z)}}(x, E)) + (d^r_{1+2^{-N(z)+1}}(x, E) \omega(d_{1+2^{-N(z)+1}}(x, E))) \le$$

$$\le 2C_0 d^r_{1+2^{-N(z)+1}}(x, E) \omega(d_{1+2^{-N(z)+1}}(x, E)). \tag{63}$$

Определение $N(z)$ показывает, что $\overline{B}_{\delta(z)}(z) \subset \operatorname{int} E_{1+2^{-N(z)}}(I_{n_0})$. Это включение позволяет применить к функции $F_{2^{N(z)}}(\zeta) - F_{2^{N(z)-1}}(\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{C}$, экспоненциального типа, не превосходящей $2^{N(z)}$, лемму 3, которая при $\zeta \in E_{1+2^{-N(z)}}(I_{n_0})$ приводит к соотношению

$$|F_{2^{N(z)}}(\zeta) - F_{2^{N(z)-1}}(\zeta)| \le C_{15,r}(E) l^r_{n_0}(\zeta) \omega(l_{n_0}(\zeta)). \tag{64}$$

Пусть $x(z) \in I_{n_0}$, $|x(z) - z| = l_{n_0}(z)$, точка $z_* \in E_{1+2^{-N(z)}}(I_{n_0})$ и $z \in [x(z), z_*]$. Тогда имеем соотношение $l_{n_0}(z_*) \le C_{abs} l_{n_0}(z)$, в таком случае из (64) и леммы 3 получаем неравенство

$$|F_{2^{N(z)}}(z) - F_{2^{N(z)-1}}(z)| \le C_{16,r} l_{n_0}^r(z_*)\omega(l_{n_0}(z_*)) \le C_{12,r}(E) l_{n_0}^r(z)\omega(l_{n_0}(z)),$$

что и доказывает лемму 4.

Закончим доказательство теоремы. Определения (58) и (61) показывают, что функция $f_1 \in C(\mathbb{C})$, $f_1|_E = f$, $f_1 \in C^1(\mathbb{C} \setminus E)$. Оценим выражение $f'_{1\overline{z}}(z)$. Пусть $N(z) = N_1$. Справедливы следующие оценки:

$$|f'_{1\overline{z}}(z)| = |(f_1(z) - F_{2^{N_1}}(z))'_{\overline{z}}| = \left| \left(\frac{1}{|\overline{B}_\delta(z)|} \int_{\overline{B}_\delta(z)} (f_0(\zeta) - F_{2^{N_1}}(\xi))\, dm_2(\xi) \right)'_{\overline{z}} \right| \le$$

$$\le \operatorname{grad} \left(\frac{1}{|\overline{B}_\delta(z)|} \int_{\overline{B}_\delta(z)} |F_{2^{N_1}}(\xi) - F_{2^{N_1+1}}(\xi)| dm_2(\xi) \right) \le$$

$$\le C_{abs} \frac{1}{l_{n_0}(z)} \max_{\xi \in \overline{B}_\delta(z)} |F_{2^{N_1}}(\xi) - F_{2^{N_1+1}}(\xi)| \le C_{17,r}(E) l_{n_0}^{r-1}(z)\omega(l_{n_0}(z)), \quad (65)$$

если $z \in \operatorname{int} E_{1+2^{-N_0-2}}(I_{n_0}) \setminus I_{n_0}$. В последнем неравенстве в (65) мы воспользовались леммой 4. Теперь к продолжению $f_1(z)$ функции f на $\operatorname{int} E_{\rho_0}(I_{n_0}) \setminus I_{n_0}$ оценка (65) позволяет применить результат Е. М. Дынькина [6], что влечет $f \in \Lambda^{\omega+r}(I_{n_0})$. Поскольку ограниченность функции f уже проверена, то теорема доказана.

Литература

1. *Сильванович О. В., Широков Н. А.* Приближение целыми функциями на счетном объединении отрезков вещественной оси. 1. Формулировка результатов // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2016. Т. 3 (61). Вып. 4. С. 644–650. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2016.414

2. *Сильванович О. В., Широков Н. А.* Приближение целыми функциями на счетном объединении отрезков вещественной оси. 2. Доказательство основной теоремы // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4(62). Вып. 1. С. 53–63. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2017.108

3. *Левин Б. Я.* Мажоранты в классах субгармонических функций. II // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. 1989. Т. 52. С. 3–33.

4. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука, 1977.

5. *Тамразов П. М.* Гладкости и полиномиальные приближения. Киев: Наукова думка, 1975.

6. *Dyn'kin E. M.* The pseudoanalytic extensions // J. Anal. Math. 1993. Vol. 60. P. 45–70.

7. *Широков Н. А.* Обратная теорема приближения на бесконечном объединении отрезков // Записки научных семинаров ПОМИ. 2002. Т. 290. С. 168–176.

Статья поступила в редакцию 25 января 2018 г.; рекомендована в печать 22 марта 2018 г.

Контактная информация:

Сильванович Ольга Васильевна — канд. физ.-мат. наук; olamamik@gmail.com

Широков Николай Алексеевич — д-р физ.-мат. наук, проф.; nikolai.shirokov@gmail.com

Approximation by entire functions on a countable union of segments on the real axis. 4. Inverse theorem

O. V. Silvanovich[1], *N. A. Shirokov*[2]

[1] St. Petersburg National Research University of Information Tehnologies, Mechanics and Optics, Kronverkskii prospect, 49, St. Petersburg, 197101, Russian Federation

[2] St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Silvanovich O. V., Shirokov N. A. Approximation by entire functions on a countable union of segments on the real axis. 4. Inverse theorem. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2018, vol. 5 (63), issue 3, pp. 441–451. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.308

A problem of a constructive description of functional classes in terms of a possible rate of approximation of its functions by means of functions chosen from a certain set is one of the leading problem of approximation theory for more than a century. It turned out that the non-uniformity of a rate of approximation due to the point of a set where a functional class is defined is a rather usual circumstance of those description. One of the possible test for approximation is a question whether the rate of it permits to recognise the functional class under consideration. We have investigated approximation of classes of smooth functions on a countable union segments on the real axis by means of entire functions of exponential type. The present paper is devoted to a proof of the so-called inverse theorem, i. e. to the finding out a scale of smoothness of functions with the help of a rate of its approximation by entire functions.

Keywords: smooth functions, entire functions, approximation.

References

1. Silvanovich O. V., Shirokov N. A., "Approximation by entire functions on a countable union of segments on the real axis. 1. Formulation of the results", *Vestn. St. Petersburg Univ.: Math.* **49**, issue 4, 373–378 (2016). https://doi.org/10.3103/S1063454116040130

2. Silvanovich O. V., Shirokov N. A., "Approximation by entire functions on a countable union of segments on the real axis. 2. Proof of the Main Theorem", *Vestn. St. Petersburg Univ.: Math.* **50**, issue 1, 35–43 (2017). https://doi.org/10.3103/S1063454117010125

3. Levin B. Ja., "Majorants in classes of subharmonic functions. II", *Theory of functions, functional analysis and applications* **52**, 3–33 (1989) [in Russian].

4. Dzjadyk V. K., *Introduction into theory of uniform approximation of functions by polynomials* (Nauka Publ., Moscow, 1977) [in Russian].

5. Tamrazov P. M., *Smothness and polynomial approximation* (Naukova dumka Publ., Kiev, 1975) [in Russian].

6. Dyn'kin E. M., "The pseudoanalytic extensions", *J. Anal. Math.* **60**, 45–70 (1993).

7. Shirokov N. A., "Inverse theorm of approximation on an infinite union of segments", *Zapiski nauch. sem. POMI* **290**, 168–176 (2002) [in Russian].

Author's information:

Olga V. Silvanovich — olamamik@gmail.com
Nikolai A. Shirokov — nikolai.shirokov@gmail.com