УДК 539.192 Вестник СПбГУ. Физика и химия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 2

А. М. Пучков

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ КВАНТОВОЙ ОБОБЩЁННОЙ ЗАДАЧИ ДВУХ КУЛОНОВСКИХ ЦЕНТРОВ

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

В данной работе получены асимптотические формулы для собственных функций и термов квантовой обобщённой задачи двух кулоновских центров. Для этого применены квазиклассическое приближение, теория возмущений и метод эталонного уравнения. Показано, что результаты, полученные различными методами в асимптотических областях при $R \to 0$ и $R \to \infty$, хорошо согласуются друг с другом. Обнаружен интересный эффект вырождения спектра, в частности основного состояния, с ростом параметра межцентрового расстояния R. Возможное применение полученных результатов в физических приложениях связано прежде всего с описанием одноэлектронных состояний в потенциальных моделях, учитывающих трёхмерную структуру нанообъектов кольцевой, сфероидальной формы и ридбергоподобных состояний электронов в кольцевых молекулах.

Ключевые слова: квантовая задача двух кулоновских центров, потенциальные модели.

Для цитирования: *Пучков А. М.* Асимптотическое поведение квантовой обобщённой задачи двух кулоновских центров // Вестник Санкт-Петербургского университета. Физика и химия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 2. С. 97–105. https://doi.org/10.21638/11701/spbu04.2018.203

A. M. Puchkov

ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF THE GENERALIZED QUANTUM MECHANICAL TWO COULOMB CENTERS PROBLEM

St. Petersburg State University,
7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

In this paper, we obtain asymptotic formulas for the eigenfunctions and terms of the quantum generalized problem of two Coulomb centers. For this purpose, we used the quasiclassical approximation, perturbation theory, and the method of reference equations. It is shown that results of different methods in asymptotic regions $R \to 0$ and $R \to \infty$ are in a good agreement with each other. An interesting effect of the degeneration of the energy spectrum with an increase in the inter-center distance parameter R is obtained. Possible applications in physics are related to the description of one-electron states in potential models which take into account the 3D-structure of nano-objects of a ring-like and spheroidal shape as well as Rydberg-like states of electrons in ring molecules.

Keywords: two-Coulomb-center problem, potential models.

For citation: Puchkov A. M. Asymptotic behavior of the generalized quantum mechanical two Coulomb centers problem. *Vestnik of Saint Petersburg University. Physics and Chemistry.* 2018. Vol. 5 (63), iss. 2. P. 97–105. https://doi.org/10.21638/11701/spbu04.2018.203

Введение. Настоящая статья является продолжением цикла работ [1–6], посвящённых исследованию квантовой обобщённой задачи двух кулоновских центров[1]. Для удобства напомним некоторые факты, установленные в этих работах. Проблема $(Z_1 e Z_2)$ [7], получившая название обобщённой, рассматривалась при чисто мнимых значениях

[1] В статье используется атомная система едининц.

параметра межцентрового расстояния R и комплексно-сопряжённых зарядах. Потенциал этой задачи может быть представлен в следующем виде:

$$\widehat{V} = \frac{q_1 + iq_2}{\sqrt{x^2 + y^2 + \left(z - i\dfrac{R}{2}\right)^2}} + \frac{q_1 - iq_2}{\sqrt{x^2 + y^2 + \left(z + i\dfrac{R}{2}\right)^2}}. \tag{1}$$

В определённом смысле эта задача дополняет задачу двух кулоновских центров, поскольку уравнение Шрёдингера с потенциалом (1) допускает разделение переменных в сплюснутых сфероидальных координатах, а не в вытянутых, как это было в проблеме $(Z_1 e Z_2)$. Кроме того, очевидно, что сингулярности (1) сосредоточены на окружности $x^2 + y^2 = R^2/4$, а не в точках $z_{1,2} = \pm R/2$. Такая локализация особенностей приводит к различным интерпретациям потенциала и, как следствие, к богатому выбору граничных условий и разнообразию в постановке краевых задач. Подробная классификация различных вариантов постановки квантовой обобщённой задачи двух кулоновских центров приведена в работах [2, 5]. Специфика и решение краевых задач описаны в работах [3, 4, 6]. Во всех упомянутых публикациях были также приведены результаты численных расчётов. Однако ряд вопросов, связанных с поведением собственных функций и термов при $R \to 0$ и $R \to \infty$ остался не до конца разобранным. В настоящей работе получены необходимые для контроля численных расчётов асимптотические формулы, описывающие решение квантовой обобщённой задачи двух кулоновских центров в указанных областях.

Квазиклассическое приближение (метод ВКБ)[2]. Метод ВКБ [1] позволяет найти приближённое решение квантовой обобщённой задачи двух кулоновских центров в простой и компактной форме. Для этого необходимо представить квазиимпульсы по каждой переменной в следующем виде:

$$P_1(\xi) = \sqrt{-p^2 + \frac{a\xi - \lambda^{(\xi)}}{\xi^2 + 1} + \frac{m^2}{(\xi^2+1)^2}}, \; P_2(\eta) = \sqrt{p^2 + \frac{b\eta + \lambda^{(\eta)}}{1 - \eta^2} - \frac{m^2}{(1-\eta^2)^2}}.$$

Заметим, что эти выражения совпадают с соответствующими классическими обобщёнными импульсами в методе Гамильтона — Якоби [8]. Асимптотические формулы для термов получаются из правил квантования. В частности, правило квантования по квазирадиальной переменной ξ имеет вид обычной формулы Бора — Зоммерфельда:

$$\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} P_1(\xi) d\xi = \pi \left(k + \frac{1}{2}\right), \tag{2}$$

поскольку соответствующий потенциал выглядит как осцилляторная яма. Для квазиугловой переменной η все обстоит значительно сложнее, так как потенциал имеет сложную форму и приходится учитывать эффект надбарьерного отражения [1]. Однако опыт численных расчётов показывает, что в подавляющем большинстве случаев этот эффект мал. Им можно пренебречь, тогда условие квантования вырождается в обычное правило Бора — Зоммерфельда:

$$\int\limits_{\eta_1}^{\eta_2} P_2(\eta) d\eta = \pi \left(q + \frac{1}{2}\right). \tag{3}$$

[2] Метод Вентцеля — Крамерса — Бриллюэна (и Джефриса), в иностранной литературе: Jeffreys — Wentzel — Kramers — Brillouin method.

Рассмотрим предельные случаи $R \to 0$ и $R \to \infty$, и найдём из условий (2) и (3) явные выражения для нескольких поправок к энергии.

Прежде всего заметим, что при $R \to 0$ в квантовой обобщённой задаче двух кулоновских центров появляется сферическая симметрия, поэтому точки поворота должны располагаться снаружи от сингулярной окружности таким образом, чтобы выполнялись условия $\xi_2 > \xi_1 \gg 1$, $\eta_1 \to -1$ и $\eta_2 \to +1$. В этом случае классификацию состояний удобно производить с помощью приближённых сферических квантовых чисел $N = k + l + 1$, $l = q + |m|$. Оценка интеграла в условии (2) при помощи метода Зоммерфельда [9] приводит к следующему разложению для $\lambda^{(\xi)}$:

$$\sqrt{\lambda^{(\xi)}} = \frac{a}{2p} - \left(k + \frac{1}{2}\right) - \frac{p^2}{4(l+1/2)}\left[1 - \frac{m^2}{(l+1/2)^2}\right] + \\ + \frac{a^2}{8(l+1/2)^3}\left[1 - \frac{3m^2}{(l+1/2)^2}\right]. \quad (4)$$

Несколько первых членов разложения $\lambda^{(\eta)}$ получаются после регуляризации фазового интеграла в (3):

$$\lambda^{(\eta)} = \left(l + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{2}\left[1 - \frac{m^2}{(l+1/2)}\right] + \frac{b^2}{8(l+1/2)^2}\left[1 - \frac{3m^2}{(l+1/2)^2}\right]. \quad (5)$$

Из условия $\lambda^{(\xi)} = \lambda^{(\eta)}$ находим выражения для уровней энергии

$$E = -\frac{2q_1^2}{N^2} + \frac{q_1^2(q_1^2 - q_2^2)}{N^3\,(l+1/2)^3}\left[1 - \frac{3m^2}{(l+1/2)^2}\right] R^2 + O(R^2). \quad (6)$$

Заметим, что формула (6) получается из соответствующего выражения для $E_j(R)$ с вещественным R, полученного в работе [10], если в нём произвести замену $Z_1 + Z_2 \to$ $\to 2q_1$, $Z_1 - Z_2 \to 2q_2$, $R^2 \to -R^2$.

В другом предельном случае, при $R \to \infty$, для состояний с малыми квантовыми числами имеет место ситуация близких точек поворота:

$$\xi_1 \to 0,\ \xi_2 \to 0,\ \xi_1 \neq \xi_2 \neq 0;\ \eta_1 \to 0,\ \eta_2 \to 0,\ \eta_1 \neq \eta_2 \neq 0.$$

Таким образом, наша система ведёт себя как двумерный осциллятор со смещённым положением равновесия, возмущённый малой ангармонической добавкой. В этом случае для построения асимптотических разложений $\lambda^{(\xi)}$ и $\lambda^{(\eta)}$ можно использовать метод С. Ю. Славянова [12–14]. В результате получается следующее разложение для квазирадиальной константы разделения:

$$\lambda^{(\xi)} = -p^2 - p(2k+1) - \frac{(2k+1)^2}{8} + m^2 - \frac{(2k+1)^3}{32p} - \frac{m^2(2k+1)}{2p} + \frac{a^2}{4p^2} + O(p^{-2}), \quad (7)$$

и совершенно аналогично для квазиугловой:

$$\lambda^{(\eta)} = -p^2 + p(2q+1) - \frac{(2q+1)^2}{8} + m^2 + \frac{(2q+1)^3}{32p} + \frac{m^2(2q+1)}{2p} - \frac{b^2}{4p^2} + O(p^{-2}). \quad (8)$$

Сравнивая параметры при соответствующих степенях p в условии $\lambda^{(\xi)} = \lambda^{(\eta)}$, находим выражение для уровней энергии

$$E_{kqm}(R) = -\frac{2^{1/3}(q_1^2 + q_2^2)^{2/3}}{(k+q+1)^{2/3}R^{2/3}} + \frac{2^{2/3}}{6}\frac{(q_1^2 + q_2^2)^{1/3}(k-q)}{(k+q+1)^{1/3}R^{4/3}} + O(R^{-2})\,. \quad (9)$$

Отсюда видно, что при $R \to \infty$ весь спектр энергий накапливается у нуля. Это есть следствие того, что потенциальная яма становится мелкой и в ней с трудом образуются связанные состояния. Обратим внимание также на то, что в разложении (9) старший порядок $\sim R^{2/3}$ и содержит квантовые числа k и q только в виде суммы $k+q$, а зависимость от m в нём вообще отсутствует. Таким образом, в старшем порядке появляется вырождение, кратность которого равна $k+q+1$. Во втором порядке это вырождение частично снимается, но остаётся вырождение по m, а также для состояний с одинаковыми k и q. В частности, термы с $k = 0, q = 0$ и с разными m стремятся к терму основного состояния. Таким образом, даже основное состояние вырождается в пределе $R \to \infty$. В следующем, третьем порядке вырождение снимается полностью, а зависимость этой поправки от азимутального квантового числа пропорциональна m^2/R^2.

Теория возмущений при $\boldsymbol{R \to 0}$. Когда параметр R в потенциале (1) стремится к нулю, сингулярная окружность сжимается в точку. Тогда в квантовой обобщённой задаче двух кулоновских центров появляется сферическая симметрия, и естественно её рассматривать в сферических координатах (r, ϑ, φ). Чтобы построить теорию возмущений, необходимо разложить потенциал (1) в ряд по степеням малого параметра (R/r). Для этого воспользуемся формулой (см., например, [11]):

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tu+t^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k P_k(u), \;\; |t| < \min |u \pm \sqrt{u^2-1}|,$$

где $P_k(u)$ — полиномы Лежандра.

В результате простых, но довольно громоздких преобразований получается выражение

$$V = \frac{2q_1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{R}{2r}\right)^{2n} P_{2n}(\cos\vartheta) + \frac{2q_2}{r} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{R}{2r}\right)^{2n+1} P_{2n+1}(\cos\vartheta)\,. \tag{10}$$

Очевидно, что все чётные гармоники в разложении (10), которые отвечают за симметрию потенциала (1) относительно плоскости xy, ассоциируются с параметром q_1, а все нечётные, которые отвечают за антисимметрию, — с параметром q_2.

В качестве невозмущённого потенциала следует выбрать $2q_1/r$ — первый член разложения (10), который не содержит малого параметра. Тогда ясно, что в пределе $R \to 0$ термы $E_j(R)$ должны непрерывно переходить в уровни энергии водородоподобного атома с зарядом $2q_1$:

$$E_j(R) \xrightarrow[R \to 0]{} E_{Nlm} = -\frac{2q_1^2}{N^2}, \tag{11}$$

где (Nlm) — набор сферических квантовых чисел.

Радиальная $X_{mk}(\xi; R)$ и угловая $Y_{mq}(\eta; R)$ части собственной функции Ψ_j будут преобразовываться соответственно в радиальную и угловую части одноцентровой задачи:

$$\Psi_{kqm}(\xi, \eta, \varphi; 0) = N_{kqm}(0) X_{mk}(\xi; 0) Y_{mq}(\eta; 0) e^{im\varphi} = \overline{N} R_{Nl}(r) Y_{lm}(\vartheta, \varphi). \tag{12}$$

Поскольку спектр невозмущённого гамильтониана вырожден по l и m, то для вычисления поправок к энергии (11) необходимо составить и решить секулярное уравнение. В качестве возмущения берём не только дипольный член разложения (10), но и квадрупольный. Матричные элементы оператора возмущения вычисляются при помощи рекуррентных соотношений для полиномов Лагерра и присоединённых полиномов Лежандра [11]. В итоге получается выражение для энергии терма $E_j(R)$, содержащее первые два члена разложения при малых R:

$$E_{Nlm}(q_1,q_2,R) = -\frac{2q_1^2}{N^2} + \frac{8q_1^2(q_1^2-q_2^2)[l(l+1)-3m^2]R^2}{N^3 l(l+1)(2l-1)(2l+1)(2l+3)} + O((R)^2). \qquad (13)$$

Отметим, что квазиклассическая асимптотическая формула (6) для энергии при малых R связана с (13) преобразованием $(l+1/2)^2 \mapsto l(l+1)$.

Вообще говоря, практика показывает, что формула (13) достаточно хорошо идентифицирует и контролирует численные расчёты термов $E_j(R)$ в области малых R. При $q_1 > q_2$ её применение оправдывается вплоть до $R \sim 1$, а при $q_1 < q_2$ эта область существенно сужается.

Отметим особенность применения формулы (13) к основному состоянию. Для раскрытия неопределённости в правой части (13) можно воспользоваться правилом Лопиталя. А можно поступить иначе: сначала положить $m = 0$, затем сократить числитель и знаменатель на l и в оставшемся выражении перейти к пределу $l \to 0$. В итоге формула (13) для основного состояния будет иметь вид

$$E_{100}(q_1,q_2,R) = -2q_1^2 - \frac{8q_1^2(q_1^2-q_2^2)R^2}{3} + O((R)^2). \qquad (14)$$

Заметим также, что при $q_1 = q_2$ поправка к энергии (11) в формулах (13) и (14) обращается в нуль. Это означает, что при малых R терм почти горизонтален. Однако наблюдать такой эффект для основного состояния довольно сложно, поскольку асимптотическая область очень узкая. Напротив, для высоковозбуждённых состояний с $N \geqslant 3$ это уже существенно, поскольку область расширяется вплоть до $R \sim 1$.

Метод эталонного уравнения при $R \to \infty$ в случае близких точек поворота. В некоторых случаях формул (13) и (14) оказывается недостаточно для идентификации термов. Например, когда $q_1 = 0$ (аналог конечного диполя) термы при $R \to 0$ выходят в сплошной спектр. Тогда формулы (13) и (14) становятся просто неприменимыми. В данной ситуации можно использовать асимптотическое разложение $E_{mkq}(R)$ при $R \to \infty$. Выше, в рамках метода ВКБ, была получена формула (9) и показано, что точки поворота начинают сближаться. Любопытно было бы получить несколько первых членов асимптотики при помощи другого метода и сравнить результат с формулой (9). Также для этой цели можно использовать теорию возмущений в разделённых уравнениях, но мы применим метод эталонного уравнения в случае близких точек поворота, который подробно описан С. Ю. Славяновым [12–14].

Сначала путём подстановок приведём одномерные уравнения, которые получаются после разделения переменных [2, 5], к нормальному или шрёдингеровскому виду:

$$X_{mk}(\xi;R) = \frac{\widetilde{X}_{mk}(\xi;R)}{\sqrt{1+\xi^2}}, \quad Y_{mq}(\eta;R) = \frac{\widetilde{Y}_{mq}(\eta;R)}{\sqrt{1-\eta^2}}.$$

Тогда краевая задача для квазирадиального уравнения примет вид

$$\frac{d^2}{d\xi^2}\widetilde{X}_{mk}(\xi;R) + \left[-p^2 + \frac{(a\xi-\lambda)}{(\xi^2+1)} + \frac{(m^2-1)}{(\xi^2+1)^2}\right]\widetilde{X}_{mk}(\xi;R) = 0, \qquad (15)$$

$$|\widetilde{X}_{mk}(\xi;R)| \xrightarrow[\xi\to\pm\infty]{} 0, \quad \xi \in (-\infty,\infty). \qquad (16)$$

Аналогичные вычисления приводят к следующей краевой задачи для квазиуглового уравнения:

$$\frac{d^2}{d\eta^2}\,\widetilde{Y}_{mq}(\eta;R)+\left[p^2+\frac{(b\eta+\lambda)}{(1-\eta^2)}-\frac{(m^2-1)}{(1-\eta^2)^2}\right]\widetilde{Y}_{mq}(\eta;R)=0, \tag{17}$$

$$|\widetilde{Y}_{mq}(\pm 1;R)|<\infty\,,\quad \eta\in(-1,+1). \tag{18}$$

Покажем, как применяется метод эталонного уравнения для построения асимптотики (15)–(16), поскольку для (17)–(18) все вычисления выполняются аналогично. Прежде всего необходимо перейти к новой переменной

$$x=\xi-\frac{a}{2p^2},$$

так как изучается смещённый ангармонический осциллятор. Тогда эталонным уравнением для (15) будет уравнение параболического цилиндра:

$$\frac{d^2}{dx^2}\,\widetilde{X}_{mk}(x;R)+\left[p\left(\nu+\frac{1}{2}\right)-p^2x^2\right]\widetilde{X}_{mk}(x;R)=0, \tag{19}$$

Теперь представим уравнение (15) в следующей форме:

$$\frac{d^2}{dx^2}\,\widetilde{X}_{mk}(x;R)+\left[p\mu-p^2Q(x)\right]\widetilde{X}_{mk}(x;R)=0, \tag{20}$$

где μ — спектральный параметр, а $Q(x)$ — потенциал, который необходимо в окрестности минимума разложить с точностью до членов $O(x^5)$:

$$Q(x)=\frac{\omega^2x^2}{2}+\alpha x^3+\beta x^4+O(x^5),$$

причём надо удерживать в коэффициентах ω^2, α, β слагаемые до порядка $O(1)$ включительно.

Затем для решения (20) можно выписать асимптотический анзац в форме Черри:

$$\widetilde{X}_{mk}(x;R)=(u'(x;p))^{-1/2}D_\nu(\sqrt{2p}\,u(x;p)), \tag{21}$$

где D_ν — функция Вебера, убывающая на бесконечности в соответствии с (16).

Замена переменных $u(x;p)$ и параметр $\nu(\mu;p)$ раскладываются в асимптотические ряды:

$$u(x;p)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u_n(x;p)}{p^n},\ \ \nu(\mu;p)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\nu_n(\mu;p)}{p^n}.$$

В итоге из рекуррентной процедуры, описанной в работе [13], получается разложение для квазирадиальной константы разделения:

$$\lambda^{(\xi)}_{mk}(p,a)=-p^2-p(2k+1)-\frac{(2k+1)^2}{8}+m^2-\frac{5}{8}+\frac{(2k+1)^3}{16p}-\\ -\frac{(8m^2-11)(2k+1)}{16p}+\frac{a^2}{4p^2}+O(p^{-2}), \tag{22}$$

и совершенно аналогично — для квазиугловой:

$$\lambda_{mq}^{(\eta)}(p,b) = -p^2 + p(2q+1) - \frac{(2q+1)^2}{8} + m^2 - \frac{5}{8} - \frac{(2q+1)^3}{16p} + \\ + \frac{(8m^2-11)(2q+1)}{16p} - \frac{b^2}{4p^2} + O(p^{-2}). \quad (23)$$

Сравнивая значения параметров при соответствующих степенях p в условии

$$\lambda_{mk}^{(\xi)}(p,a) = \lambda_{mq}^{(\eta)}(p,b),$$

находим выражения для уровней энергии

$$E_{kqm}(R) = -\frac{2^{1/3}(q_1^2+q_2^2)^{2/3}}{(k+q+1)^{2/3}R^{2/3}} + \frac{2^{2/3}}{6}\frac{(q_1^2+q_2^2)^{1/3}(k-q)}{(k+q+1)^{1/3}R^{4/3}} + O(R^{-2}). \quad (24)$$

Обратим внимание на то, что формула (24) полностью совпадает с квазиклассической асимптотикой (9), хотя разложения (22) и (23) отличаются от своих квазиклассических аналогов (7) и (8).

Заключение. В настоящей работе исследовано асимптотическое поведение квантовой обобщённой задачи двух кулоновских центров при $R \to 0$ и $R \to \infty$ при помощи метода квазиклассического приближения, теории возмущений и метода эталонного уравнения. Получены приближённые выражения для собственных функций и термов, включающие первые несколько поправок. Эти формулы могут быть полезны для контроля численных расчётов не только в обобщённой задаче двух кулоновских центров, но также и в других физических моделях, которые допускают разделение переменных в уравнении Шрёдингера в сплюснутых сфероидальных координатах. Здесь прежде всего следует упомянуть модели, учитывающие 3D-структуру нанообъектов кольцевой сфероидальной формы. Например, в работе [15] была рассмотрена одна из таких моделей для квантового кольца в виде потенциальной ямы с бесконечно высокими стенками. В принципе если пренебречь зависимостью эффективной массы электрона от координат, то можно перейти от этой простейшей идеализированной модели к моделям квантовых колец в виде потенциальных ям сфероидальной формы и конечной глубины. В них также будет иметь место разделение переменных в уравнении Шрёдингера в сплюснутых сфероидальных координатах. Тогда при исследовании влияния формы кольца на структуру энергетического спектра одночастичных состояний в этих моделях могут использоваться результаты настоящей работы.

Обратим внимание на то, что формула (13) может быть полезна при описании ридбергоподобных состояний сильно возбуждённых электронов в полях кольцевых молекул. Кроме того, результаты данной работы могут быть использованы для изучении спектра масс в одной из моделей дважды тяжёлых барионов, описанных в работе [16].

* * *

Автор выражает благодарность своим многочисленным коллегам за полезные обсуждения и интерес к работе.

Литература

1. *Пучков А. М., Кожедуб А. В.* Квазиклассическое приближение в обобщённой задаче двух кулоновских центров // Вестник СПбГУ. Физика и химия. 2002. Вып. 1. С. 105–112.

2. *Пучков А. М., Кожедуб А. В.* Квантовая обобщённая задача двух кулоновских центров // Вестник СПбГУ. Физика и химия. 2005. Вып. 3. С. 16–27.

3. *Пучков А. М.* Квадратично интегрируемые решения кулоновского сфероидального уравнения на мнимой оси // Вестник СПбГУ. Физика и химия. 2006. Вып. 2. С. 88–94.

4. *Пучков А. М., Керницкий И. Б.* Степенные разложения для квадратично интегрируемых кулоновских сфероидальных функций на мнимой оси // Вестник СПбГУ. Физика и химия. 2008. Вып. 1. С. 116–124.

5. *Puchkov A. M., Kozedub A. V., Bodnia E. O.* Generalized quantum mechanical two-Coulomb-center problem (Demkov problem) // Chinese Phys. (B). 2013. Vol. 22. 090306.

6. *Kovalenko V. N., Puchkov A. M.* New representations for square-integrable spheroidal functions // Proc. Int. Conf. “Days on Diffraction”. 2017. P. 189–193.

7. *Комаров И. В., Пономарёв Л. И., Славянов С. Ю.* Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции. М.: Наука, 1976. 320 с.

8. *Демин В. Г.* Движение искусственного спутника в нецентральном поле тяготения. М.: Наука, 1968. 352 с.

9. *Зоммерфельд А.* Строение атома и спектры. Т. 1. Математическое дополнение. М.: Изд-во технико-теоретической литературы, 1956. 529 с.

10. *Герштейн С. С., Пономарёв Л. И., Пузынина Т. П.* Квазиклассическое приближение в задаче двух центров // Журн. эксп. теор. физики. 1965. Т. 48. С. 632–643.

11. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1100 с.

12. *Славянов С. Ю.* Асимптотика сингулярных задач Штурма — Лиувилля по большому параметру в случае близких точек перехода // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5. С. 313–325.

13. *Славянов С. Ю.* Асимптотика решений одномерного уравнения Шрёдингера. Л.: Изд-во ЛГУ, 1991. 256 с.

14. *Коэн С., Славянов С. Ю.* Квазиклассическая асимптотика спектра для нижних состояний ангармонического осциллятора // Алгебра и анализ. 1991. Т. 3. С. 132–138.

15. *Puchkov A. M., Roudnev V. A., Kozedub A. V.* Influence of the shape of a quantum ring on the structure of its energy spectrum // Proc. Int. Conf. “Days on Diffraction”. 2015. P. 103–106.

16. *Puchkov A. M., Kozedub A. V.* Two potential quark models for double heavy baryons // Proc. AIP Conference. 2016. Vol. 1701. 100014.

References

1. Puchkov A. M., Kozhedub A. V. Kvaziklassicheskoe priblizhenie v obobshchennoi zadache dvukh kulonovskikh tsentrov [Quasiclassical approach in the generalized problem of two Coulomb centers]. *Vestnik SPbSU. Physics and Chemistry*, 2002, iss. 1, pp. 105–112. (In Russian)

2. Puchkov A. M., Kozhedub A. V. Kvantovaia obobshchennaia zadacha dvukh kulonovskikh tsentrov [Generalized quantum problem of two Coulomb centers]. *Vestnik SPbSU. Physics and Chemistry*, 2005, iss. 3, pp. 16–27. (In Russian)

3. Puchkov A. M. Kvadratichno integriruemye resheniia kulonovskogo sferoidal’nogo uravneniia na mnimoi osi [Square integrable solutions of spheroidal Coulomb equation of the imaginary variable]. *Vestnik SPbSU. Physics and Chemistry*, 2006, iss. 2, pp. 88–94. (In Russian)

4. Puchkov A. M., Kernitsky I. B. Stepennye razlozheniia dlia kvadratichno integriruemykh kulonovskikh sferoidal’nykh funktsii na mnimoi osi [Series expantion for square integrable solutions of spheroidal Coulomb equation on image axis]. *Vestnik SPbSU. Physics and Chemistry*, 2008, iss. 1, pp. 116–124. (In Russian)

5. Puchkov A. M., Kozedub A. V., Bodnia E. O. Generalized quantum mechanical two-Coulomb-center problem (Demkov problem). *Chinese Phys. (B)*, 2013, vol. 22. 090306.

6. Kovalenko V. N., Puchkov A. M. New representations for square-integrable spheroidal functions. *Proc. Int. Conf. “Days on Diffraction”*, 2017, pp. 189–193.

7. Komarov I. V., Ponomarev L. I., Slavianov S. Iu. *Sferoidal’nye i kulonovskie sferoidal’nye funktsii* [*Spheroidal and Coulomb spheroidal functions*]. Moscow, Nauka Publ., 1976. 320 p. (In Russian)

8. Demin V. G. *Dvizhenie iskusstvennogo sputnika v netsentral’nom pole tiagoteniia* [*The movement of the artificial satellite in the noncentral gravity field*]. Moscow, Nauka Publ., 1968. 352 p. (In Russian)

9. Zommerfel’d A. *Stroenie atoma i spektry. T. 1. Matematicheskoe dopolnenie* [*Structure of atom and spectra. Vol. 1. Mathematical addition*]. Moscow, Izd-vo tekhniko-teoreticheskoi literatury, 1956. 529 p. (In Russian)

10. Gershtein S. S., Ponomarev L. I., Puzynina T. P. Kvaziklassicheskoe priblizhenie v zadache dvukh tsentrov [Quasiclassical approach in two centers problem]. *Zhurn. eksp. teor. fiziki.* [*J. Exp. Theor. Phys.*], 1965, vol. 48, pp. 632–643. (In Russian)

11. Gradshtein I. S., Ryzhik I. M. *Tablitsy integralov, summ, riadov i proizvedenii* [*Tables of integrals, sums, series and products*]. Moscow, Nauka Publ., 1971. 1100 p. (In Russian)

12. Slavianov S. Iu. Asimptotika singuliarnykh zadach Shturma — Liuvillia po bol'shomu parametru v sluchae blizkikh tochek perekhoda [Asymptotics of singular Sturm — Liouville problems in big parameter in case of close points of transition]. *Differentsial'nye uravneniia* [*Differential Equations*], 1969, vol. 5, pp. 313–325. (In Russian)

13. Slavianov S. Iu. *Asimptotika reshenii odnomernogo uravneniia Shredingera* [*Asymptotics of solutions of the one-dimensional Schrödinger equation*]. Leningrad, LGU Publ., 1991. 256 p. (In Russian)

14. Koen S., Slavianov S. Iu. Kvaziklassicheskaia asimptotika spektra dlia nizhnikh sostoianii angarmonicheskogo ostsilliatora [Quasiclassical asymptotics of a range for the lower conditions of the anharmonic oscillator]. *Algebra i analiz* [*St. Petersburg Mathematical Journal*], 1991, vol. 3, pp. 132–138. (In Russian)

15. Puchkov A. M., Roudnev V. A., Kozedub A. V. Influence of the shape of a quantum ring on the structure of its energy spectrum. *Proc. Int. Conf. “Days on Diffraction”*, 2015, pp. 103–106.

16. Puchkov A. M., Kozedub A. V. Two potential quark models for double heavy baryons. *Proc. AIP Conference*, 2016, vol. 1701, 100014.

Статья поступила в редакцию 17 апреля 2018 г.

К о н т а к т н а я   и н ф о р м а ц и я

Пучков Андрей Михайлович — e-mail: a.puchkov@spbu.ru

Andrey M. Puchkov — e-mail: a.puchkov@spbu.ru