САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Факультет Прикладной Математики - Процессов Управления
Кафедра Моделирования Социально - Экономических Систем

Липко Иван Владимирович

Выпускная квалификационная работа бакалавра

Динамическая теоретико-игровая модель рынка с формированием сети поставок

Направление 01.03.02
«Прикладная математика и информатика»

Зав. кафедрой д.ф.-м.н. профессор	Малафеев Олег Алексеевич
Научный руководитель к.ф.-м.н.	Парфенов Андрей Павлович
Рецензент к.ф.-м.н. доцент	Седаков Артем Александрович

Санкт-Петербург
2018

Оглавление

Введение

Теория игр – раздел прикладной математики, исследующий модели принятия решений в условиях несовпадения интересов сторон (игроков). Каждая сторона стремится повлиять на обстановку так, чтобы увеличить свой выигрыш. Результаты, полученные в теории игр, нашли множество приложений в самых разных областях в социологии, экономике, организационном управлении, экологии, военном деле и др. Моделирование реальной системы посредством теории игр, анализ этой модели и решений игры позволяют сделать выводы о системе и принять оптимальные решения.

Весьма перспективным аппаратом для моделирования структуры некоторой системы представляется теория сетевых игр. Сетевые игры (игры с сетевой структурой) являются разделом теории игр, который изучает как методы формирования связей между игроками в конфликтно-управляемых системах, так и правила определения выигрышей игроков с учётом этих связей. В теории сетевых игр делается акцент на взаимодействии игроков, и то какова структура системы, которая формируется из действий игроков, являющихся частью этой системы.

Цель данной работы заключается в нахождении рыночного равновесия в системе с множеством фирм, каждая из которых выполняет некоторую задачу (добыча сырья, переработка сырья, производство промежуточных товаров, производство конечного товара, сбыт товара на рынке) в процессе проиводства товара. Система фирм и связей между ними моделируется посредством дискретной теоретико-игровой модели формирования сети[3]. В качестве принципа равновесия используется равновесие по Нэшу[5]. За основу берется модель торговой сети, описанная Губко М.В. в статье [1]. Далее она видоизменяется: вводится разделение фирм на добывающие, перерабатывающие предприятия и те которые занимаются сбытом конечного товара. Изменяются стратегии игроков в соответствии с их задачами, вводятся новые параметры сети и запрещенные ситуации. Сеть, сформированная из стратегий фирм, представляется древовидный граф.

Глава 1

Модель формирования торговой сети

1.1 Описание модели формирования торговой сети

Начнем с описания модели, предложенной в статье [1]. Рассматривается множество $N = \{1...n\}$ компаний (агентов). Все они занимаются покупкой, производством и продажей одного товара. Каждая из компаний $i \in N$ может производить товар в объеме $0 \le \upsilon_i^s \le V_i^s$, где V_i^s – максимум производственных возможностей фирмы i, с себестоимостью p_i^s, и может продавать его на своем рынке по цене π_i^c в объеме $0 \le \upsilon_i^c \le V_i^c$, где V_i^c – объем рынка. Любой из агентов $i \in N$ может предложить другому агенту $j \in N$ купить товар в произвольном объеме υ_{ij} по цене p_{ij} за единицу товара. Доход i-й компании в результате продажи единицы товара равен π_{ij}. Значения p_{ij} и π_{ij} могут различаться, если учитываются налоги, транспортные расходы и прочее.

Цены купли, продажи, себестоимость товара считаются фиксированными величинами. Каждый агент i может влиять только на объемы производства υ_i^s товара, продажи товара на рынке υ_i^c, объем товара предлагаемого другим агентам x_{ij}^{out} и объем товара, который он хочет купить у других агентов x_{ij}^{in}. Таким образом, стратегия i-го игрока есть пара векторов $(x_i^{\text{out}}, x_i^{\text{in}})$ и значения $\upsilon_i^s, \upsilon_i^c$. Элементами первого вектора являются значения, выражающие объем товара, который i-й агент предлагает купить остальным участникам $x_i^{\text{out}} = (x_{i1}^{\text{out}}, x_{i2}^{\text{out}}, ..., x_{ij}^{\text{out}}, ..., x_{in-1}^{\text{out}})$, для $i, j \in N, i \neq j$. Значения второго вектора указывают сколько i-й агент, готов купить у j-го агента $x_i^{\text{in}} = (x_{i1}^{\text{in}}, x_{i2}^{\text{in}}, ..., x_{ij}^{\text{in}}, ..., x_{in-1}^{\text{in}})$, для $i, j \in N, i \neq j$.

Таким образом, стратегии игроков формируют сеть $g =< v^s, v^c, v >$, где v^s, v^c вектора объемов производимого товара и продаваемого на своем рынке товара соответственно. $v = (\upsilon_{ij})$ – матрица, элементом υ_{ij} которой является объем товара продаваемого i-ой фирмой j-й фирме. Значения этой матрицы определяются по правилу $\upsilon_{ij} = \min\{x_{ij}^{\text{out}}, x_{ji}^{\text{in}}\}$, $i \neq j$, то есть количество товара, продаваемого i-ой фирмой j-ой фирме определяется как минимальное из того, что было предложено к покупке i-ой фирмой, и того объема, который готова купить j-я фирма. Полагаем что $\upsilon_{ii} = 0$. Игра, в которой для каждого агента определена конкретная стратегия, задает сеть, которая имеет следующую структуру. В вершинах графа расположены агенты. Если $\upsilon_{ij} > 0$, то между вершинами i, j имеется дуга, которой приписан вес υ_{ij}.

Выигрыш, который получает i-й игрок в сформировавшейся сети, вычисляется по формуле:

$$f_i = \sum_{i \neq j} \pi_{ij} \upsilon_{ij} - \sum_{i \neq j} p_{ij} \upsilon_{ij} + \pi_i^c \upsilon_i^c - p_i^s \upsilon_i^s$$

Также вводится условие товарного баланса. Оно заключается в том, что каждый агент продает на своем рынке или другим агентам столько же, сколько производит сам и скупает у других агентов:

$$\sum_{i \neq j} \upsilon_{ij} + \upsilon_i^c = \sum_{i \neq j} \upsilon_{ji} + \upsilon_i^s$$

Можем положить, что $x_{ii}^{\text{in}} = \upsilon_i^s$ и $x_{ii}^{\text{out}} = \upsilon_i^c$, и тогда стратегии игроков будут представлять пару векторов $(x_i^{\text{out}}, x_i^{\text{in}})$. Набор стратегий всех игроков задает ситуацию в игре $x = (x_i^{in}, x_i^{out}), i \in N$. Пользуясь этими обозначениями введем следующие определения [2]:

Определение 1.1. Будем говорить, что ситуация $x = (x_i^{in}, x_i^{out})_{i \in N}$ является допустимой, если в построенной сети для каждого агента выполнено условие товарного баланса

Определение 1.2. Для заданной ситуации $x = (x_i^{in}, x_i^{out})_{i \in N}$ обстановкой x_{-i} i-го агента называется набор действий всех агентов, кроме i-го, $x_{-i} = (x_j^{in}, x_j^{out})_{j \in N, i \neq j}$ То есть обстановка игрока i есть стратегии, выбранные всеми игроками, за исключением самого i.

Определение 1.3. Будем говорить, что действие x_i агента $i \in N$ допустимо в обстановке x_{-i} , если ситуация $x = (x_i, x_{-i})$ допустима.

Определение 1.4. Ситуацию $\breve{x} = (\breve{x}_i^{in}, \breve{x}_i^{out})_{i \in N}$, приводящую к сети $\breve{g}$, будем называть равновесием Нэша, если она допустима и для любого агента $i \in N$ и любого допустимого в обстановке $\breve{x}_{-i}$ действия x_i выигрыш i-го агента $f_i(g)$ в сети g не превышает его выигрыша в сети $\breve{g}$, то есть действие $\breve{x}_i$ является наилучшим ответом на обстановку $\breve{x}_{-i}$.

Множество допустимых действий игроков очень узко. Любое изменение i-м агентом объемов продаж другим агентам или объемов закупок от других агентов приведет к нарушению товарного баланса. То есть допустимыми действиями, являются только изменение объема производства υ_i^s и объема продаж на своем рынке υ_i^c. Концепция равновесия по Нэшу предполагает, что все игроки действуют независимо, и на основании этого вводится понятие индивидуальной допустимости.

Определение 1.5. Действие x_i агента $i \in N$ назовем индивидуально допустимым в обстановке x_{-i} , если в сети $g = \nu(x_i, x_{-i})$ выполнено условие товарного баланса i-го агента.

На основе понятия индивидуальной допустимости вводится понятие индивидуально рациональной ситуации. Это понятие повторяет концепцию равновесной по Нэшу ситуации, за исключением того, что любой из игроков может отклоняться от своей стратегии, выбирая индивидуально допустимые стратегии:

Определение 1.6. Ситуацию $\breve{x} = (\breve{x}_i^{in}, \breve{x}_i^{out})_{i \in N}$, приводящую к сети $\breve{g}$, назовем индивидуально рациональной, если она допустима и для любого агента $i \in N$ и любого его индивидуально допустимого в обстановке $\breve{x}_{-i}$ действия x_i выигрыш i-го агента $f_i(g)$ в сети $g = \nu(x_i, x_{-i})$ не превышает его выигрыша в сети $\breve{g}$.

Определение 1.7. Сеть g назовем индивидуально стабильной, если существует индивидуально рациональная ситуация x, приводящая к данной сети g.

Введем условие невыгодности спекуляций. Именно, будем считать, что для произвольной последовательности компаний $i_1, i_2, ..., i_k$ не может быть верной система неравенств

$$p_{i_k i_1} \leq \pi_{i_1 i_2}, p_{i_1 i_2} \leq \pi_{i_2 i_3}, p_{i_2 i_3} \leq \pi_{i_3 i_4}, ..., p_{i_{k-1} i_k} \leq \pi_{i_k i_1}$$

. Тогда каждая индивидуально стабильная сеть не будет содержать циклов. Иначе говоря, для любой последовательности фирм $i_1, i_2, ..., i_k$ хотя бы одно из этих неравенств не выполняется, то есть найдется хотя бы одна фирма, которая терпит убытки, участвуя в цикличной перепродаже товаров.

1.2 Основные леммы

Для этой модели верны следующие леммы [1]:

Лемма 1.1. Пусть ситуация (x_i^{in}, x_i^{out}) равновесна по Нэшу и приводит к сети $g = (\upsilon_{i,j})_{i,j \in N, i \neq j}$. Тогда ситуация $\breve{x}$ в которой для всех $i, j \in N : i \neq j$, $\breve{x}_{ij}^{in} = \breve{x}_{ij}^{out} = \upsilon_{ij}$, $\breve{x}_{ii}^{in} = x_{ii}^{in}$ $\breve{x}_{ii}^{out} = x_{ii}^{out}$ будет равновесием по Нэшу приводящим к той же сети g.

Лемма 1.2. Пусть ситуация $x = (x_i^{in}, x_i^{out})$ индивидуально рациональна и приводит к сети $g = (\upsilon_{ij})_{i,j \in N, j \neq i}$. Тогда ситуация $\breve{x}$, в которой для всех $i, j \in N : i \neq j, \breve{x}_{ij}^{in} = \breve{x}_{ij}^{out} = \upsilon_{ij}, \breve{x}_{ii}^{in} = x_{ii}^{in}, \breve{x}_{ii}^{out} = x_{ii}^{out}$ будет индивидуальной рациональной и приводить к той же сети g.

Лемма 1.3. Сеть $\breve{g} =< \breve{\upsilon}, \breve{\upsilon}^s, \breve{\upsilon}^c >$ индивидуально стабильна тогда и только тогда, когда ситуация, в которой $x_{ij}^{in} = x_{ij}^{out} = \breve{\upsilon}_{ij}, x_{ii}^{in} = \breve{\upsilon}_i^s, x_{ii}^{out} = \breve{\upsilon}_i^c$, $i, j \in N, i \neq j$ индивидуально рациональна.

Из последней леммы получаем:

Следствие 1.1. Допустимая сеть $\breve{g} =< \breve{\upsilon}, \breve{\upsilon}^s, \breve{\upsilon}^c >$ индивидуально стабильна тогда и только тогда, когда любой агент $i \in N$ не может увеличить свой выигрыш, уменьшая объемы $\upsilon_{ij}, \upsilon_{ji}, j \in N, j \neq i$ в диапазонах $0 \leq \upsilon_{ij} \leq \breve{\upsilon}_{ij}, 0 \leq \upsilon_{ji} \leq \breve{\upsilon}_{ji}$ где $\breve{\upsilon}_{ij}$ это текущий объем товара, а также варьируя объемы собственного производства υ_i^s в диапазоне $0 \leq \upsilon_i^s \leq V_i^s$ и собственных продаж υ_i^c в диапазоне $0 \leq \upsilon_i^c \leq V_i^c$при условии соблюдения его товарного баланса.

Также в работе [1] показано, что в индивидуально рациональной сети верно следующее. В индивидуально рациональной сети максимальная стоимость закупки или производства не должна превышать минимальную стоимость продажи. То есть, для любого игрока i выполняется $\max_{j\in N} \{p_{ji}, p_1^s\} \leq \min_{j\in N} \{\pi_i^c, \pi_{ij}\}, j \neq i$.

Глава 2

Модель с уровнями производства

Теперь рассмотрим следующую модель рынка с формированием сети поставок, основанную на описанной выше модели.

Пусть имеется множество фирм, часть которых занимается добычей сырья, другая часть занимается производством промежуточного товара, который используется другими фирмами и наконец последняя часть занимается сбытом конечного продукта потребителю. То есть множество игроков N разбивается на уровни, или по-другому, рассматривается разбиение множества агентов N на попарно непересекающиеся подмножества $N_1, N_2, ..., N_m \in N$, такие что $\bigcup\limits_{k=1}^{m} N_k = N$. Агенты из N_1, или агенты первого уровня занимаются добычей сырья. Агенты из множеств $N_2, N_3, ...N_{m-1}$ занимаются производством промежуточного товара, то есть фирмы из N_2 закупают сырье у фирм из N_1 и производят товар для фирм из множества N_3, которые в свою очередь производят товар, который используется как ресурс фирмами из N_4 и так далее. Наконец фирмы m-го уровня N_m занимаются сбытом товара конечному потребителю. Предполагаем, что все фирмы в пределах одного уровня N_k занимаются производством (добычей, сбытом) одних и тех же товаров или взаимозаменяемых товаров. То есть фирме из N_i не важно у какой фирмы из N_{i-1} покупать товар. Её интересует только количество приобретаемого товара и цена покупки. Также считаем, что товарами фирм $N_k, k \neq m$ заинтересованы только фирмы из N_{k+1} для любого $k \neq m$.

Эту ситуацию на рынке можно представить, как частный случай модели, предложенной Губко. Самостоятельно производством товара могут заниматься только агенты из N_1, то есть $V_i^s > 0,$ для всех $i \in N_1$, $V_i^s = 0,$ для всех $i \notin N_1$. Сбытом товара на свой рынок могут заниматься только фирмы из N_m, то есть $V_i^c > 0,$ для всех $i \in N_m$, $V_i^c = 0,$ для всех $i \notin N_m$. Тот факт, что фирмы из N_i могут продавать товар только на своем рынке или фирмам из множества N_{i+1}, можно представить, установив для любого i-го агента из $N_k, k \neq m$ чистую прибыль от продажи товара j-й фирме $\pi_{ij} = -\infty, j \notin N_{k+1}$. Необходимо заметить, что положив $\pi_{ij} = -\infty, j \notin N_{k+1}$, мы не отнимаем у i-го агента возможность предложить товар j-й фирме, несмотря на очевидную неоптимальность такого решения. Это отличается от нашего предположения о том, что фирма $i \in N_k$ может продавать товар только фирмам $j \in N_{k+1}$. Но легко видеть, что в обоих случаях множество индивидуально рациональных ситуаций одинаково. Если в сети g есть $v_{ij} > 0$, такое что $i \in N_k, j \notin N_k + 1$, то выигрыш i-го игрока $f_i = -\infty$. Такое действие всегда является индивидуально допустимым. А это значит, что любая сеть, в которой сложилась запрещенная ситуация, не является стабильной. В такой сети i-й игрок всегда может отклониться от своей текущей стратегии, положив $x_{ij}^{\text{out}} = 0$ и уменьшив объем закупок у других игроков или производство v_i^s на величину v_{ij} , и тем самым увеличить свой выигрыш. Также эту игру можно рассматривать как игру с запрещенными ситуациями. Запрещенными являются ситуации, в которых $v_{ij} > 0$ для $i \in N_k, j \notin N_k + 1$.

Так как уровневая модель представляет собой частный случай модели Губко, все леммы, описанные выше, верны и для уровневой модели. Также как и в предыдущей модели, стабильной будет та сеть, в которой ни один из агентов i не может увеличить свой выигрыш, уменьшая объемы продаж v_{ij} другим агентам и объемы закупок v_{ji} у других агентов, уменьшая при этом объемы производства v_i^s или продаж на рынке v_i^c .В такой сетевой игре всегда есть как минимум одна индивидуально рациональная ситуация, порождающая индивидуально стабильную сеть. Это ситуация, в которой $x_{ij}^{in} = x_{ij}^{out} = 0$ для всех $i, j \in N, i \neq j$. Действительно, ни один из игроков не может увеличить свой выигрыш, потому что не может заключить договор с другим игроком, и отсутствуют игроки, которые могли бы и производить товар, и сбывать его самостоятельно.

Глава 3

Модель с выбором цен и функцией спроса рынка

3.1 Описание модели

Теперь позволим агентам в сети самим устанавливать цену $p_{ij}, i \notin N_m$, по которой они собираются продавать товар другим игрокам, и цену $p_i^c, i \in N_m$, по которой они собираются сбывать товар на конечном рынке. Естественно предполагать, что конечный потребитель может снизить объемы закупок из-за слишком высокой цены или вообще отказаться покупать товар. Таким образом, объем продаж на конечном рынке агентов из N_m должен зависеть от цены, которую они устанавливают. Поэтому введем функции спроса $D^c(p)$, которые показывают, как много товара готовы купить потребители по цене p, причем при возрастании цены функции убывают. Предполагаем, что количество товара и значения функции спроса задаются натуральными числами или нулем.

Для удобства, положим что $p_{ij} = \pi_{ij}, i \in N_k$, $k \neq m$, что значит, что цена продажи и прибыль равны. Это допущение оправдано, циклы в этой модели невозможны, так как товар движется в одном направлении от игроков из N_1 к игрокам из N_m, а прибыль фирмы будут получать за счет того, что на разных уровнях будут определяться разные цены, как будет показано далее. Будем рассматривать выбор цены продажи как выбор из двух цен «высокой» – b, и «низкой» – a. Конечно же считаем, что $0 < a < b$. Так как мы полагаем, что цена может принимать только два значения, функция спроса $D_i^c(p)$ определяется на двухточечном множестве, и может принимать только два различных значения. Но если все игроки будут иметь возможность выбирать цену только из двух цен {a,b}, тогда любой игрок кроме тех, которые из множества N_1, закупая и продавая товар по одной и той же цене a или b будет получать нулевую прибыль. То есть вне зависимости от объема продаж выигрыши игроков из множества $N \setminus N_1$ будут равны нулю. Чтобы игроки стремились наращивать объем производства или перепродажи, введем множества $P_1, P_2, ..., P_m$, $P_i = \{a_i, b_i\}$. Игроки i-го уровня выбирают цену продажи из множества P_i, $p_{ij} \in P_i$, для $i \notin N_m$, и $p_i^c \in P_m$ для $i \in N_m$. Теперь игроки всегда получают дополнительную прибыль от продажи дополнительного товара. Можно описать это так: игроки, распологающиеся на разных уровнях продают разные товары, и для разных товаров разное понимание «высокой», и «низкой» цены.

Также предполагаем, что себестоимость товара $p_i^s = 0$. Заметим, что если себестоимость товара больше, чем некоторая цена, по которой может быть продан этот товар, например $p_i^s > a$ то эту цену при поиске стабильных сетей можно просто не рассматривать, так как продавать по этой цене никогда не выгодно. Сеть, в которой игрок продает по такой цене никогда не будет стабильной. Если же себестоимость ненулевая, но меньше «низкой» цены, то вне зависимости от того, какая эта цена, фирмы, занимающиеся добычей сырья, все равно будут стремится продавать как можно больше. Они будут получать прибыль с каждой дополнительно проданной единицы товара. Следоваетльно, допущение о том, что себестоимость равна нулю, не изменит множество стабильных сетей.

3.2 Пример игры, условия стабильности сети и выводы

Рассмотрим такую модель на простом примере.

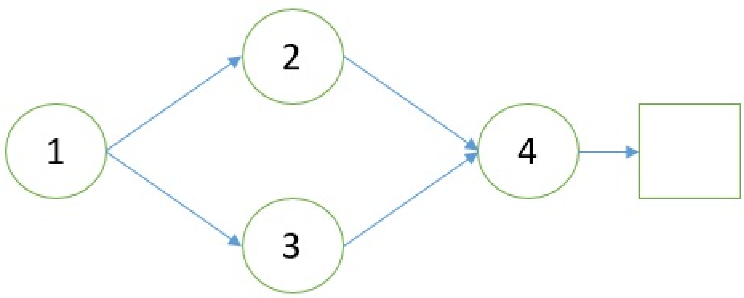

Рис. 3.1: Пример модели с выбором цен и функцией спроса рынка

Пусть имеется четыре агента $N = \{1, 2, 3, 4\}$. Разбиение на уровни выглядит следующим образом:

$$N_1 = \{1\}, N_2 = \{2, 3\}, N_3 = \{4\}$$

На рис. 5.1 показан граф, который образуется в этом примере. Кругами отмечены игроки, стрелки показывают направление продажи товара, квадрат обозначает рынок сбыта.

В такой игре ситуация будет индивидуально рациональной тогда и только тогда, когда стратегии выбранные игроками, удовлетворяют следующим условиям.

Для игрока $1 \in N_1$, стратегия которого $(\upsilon_1^s, x_{12}^{\text{out}}, x_{13}^{\text{out}}, p_{12}, p_{13})$:

$$\max_{x_{12}^{\text{out}}, x_{13}^{\text{out}}, p_{12}, p_{13}} p_{12}x_{12}^{\text{out}} + p_{13}x_{13}^{\text{out}}$$

$$0 \le x_{1j}^{\text{out}} \le x_{j1}^{\text{in}}, j \in N_2$$

$$\upsilon_1^s = x_{12}^{\text{out}} + x_{13}^{\text{out}} \le V_1^s$$

То есть первый игрок стремится максимизировать прибыль, варьируя объем продаж игрокам из N_2 и цену. Объем продаж j-му агенту ограничен объемом, который он хочет купить у первого игрока. Количество производимого товара равно количеству продаваемого товара и ограничено производственными возможностями V_1^s первого игрока. Стратегия, удовлетворяющая соотношениям, является наилучшим ответом на сложившуюся обстановку и является индивидуально допустимой, то есть при выборе игроком этой стратегии для него выполняется условие товарного баланса. Так как цена дискретна, поиск максимума распадается на несколько задач, для различно выбранных первым игроком цен p_{12}, p_{13}.

Для игрока $j \in N_2$, стратегия которого $(x_{j1}^{\text{in}}, x_{j4}^{\text{out}}, p_{j4})$:

$$\max_{p_{j4}, x_{j4}^{\text{out}}} [(p_{j4} - p_{1j})x_{j4}^{\text{out}}]$$

$$x_{j4}^{\text{out}} = x_{j1}^{\text{in}} \le x_{1j}^{\text{out}}$$

У этих игроков есть только один источник товара и один источник сбыта. Основной вопрос здесь заключается в том, по какой цене лучше продавать. Второе соотношение гарантирует выполнение условия товарного баланса

Для игрока $4 \in N_3$, стратегия которого $(x_{42}^{in}, x_{43}^{in}, \upsilon_4^c, p_4^c)$:

$$\max_{x_{42}^{in}, x_{43}^{in}, p_4^c} [p_4^c \upsilon_4^c - p_{24}x_{42}^{in} - p_{34}x_{43}^{in}]$$

$$x_{4j}^{in} \le x_{j4}^{out}, \text{для всех } j \in N_2$$

$$\upsilon_4^c = x_{42}^{in} + x_{43}^{in} \le D_4^c(p_4^c)$$

Таким образом, чтобы решить, по какой цене лучше продавать товар, четвертому игроку надо решить, что будет лучше, продать много и дешево или мало, но дорого. Очевидно, что для игрока из N_3 скупать товар лучше сначала у тех фирм из N_2, которые продают по меньшей цене. Выполнение условия товарного баланса гарантируют второе и третье соотношения. Ситуации игры задаваемые этими условиями являются индивидуально рациональными, а значит порождают индивидуально стабильные сети по определению индивидуально стабильной сети.

Обратим внимание на следующие проблемы построенной модели. Во-первых, посмотрим на условия индивидуальной рациональности для первого игрока в рамках статической игры, в которой мы рассматриваем индивидуальные отклонения игроков. Первому игроку в любой обстановке выгодно выбирать высокую цену, увеличивая таким образом свой выигрыш, даже если это приведет к ситуации, в которой игрокам из N_2 будет выгодно вообще отказаться от товара первого игрока. У игроков из N_2 нет возможности автоматически среагировать на действия первого игрока или ограничить его выбор цены. Из этого следует, что сеть, в которой первый игрок установил низкую цену для какого-то игрока из N_2, не будет стабильной. То же самое верно и для игроков из N_2. Несмотря на то, что они борются за одного покупателя – четвертого игрока, в рамках индивидуальных отклонений им выгодно всегда устанавливать высокую цену, так как четвертый игрок не может автоматически среагировать на изменение ситуации. Только для четвертого игрока может сложиться ситуация. в которой он получит наибольший выигрыш, выбрав «низкую» цену, так как его выбор цены ограничен функцией спроса рынка $D_4^c(p_4^c)$ зависящей от выбранной им цены. Можно заметить, что если цены удовлетворяют условию $a_2 < a_3 < b_2 < b_3$, то четвертый игрок всегда терпит убытки, выбирая низкую цену a_3. В таком случае игроки из N_2 вынуждают четвертого игрока выбирать высокую цену. Таким образом, если в сети есть игрок $i \in N \backslash N_m$, установивший низкую цену, то эта сеть не может быть стабильной, за исключением случая, когда $\upsilon_{ij} = 0,$ для всех j и $\upsilon_i^c = 0$.

Теперь можно сформулировать более точные условия для индивидуальной рациональности ситуации. Эти условия задают все ситуации, которые порождают инидивидуально стабильные сети за исключением тривиального случая, когда сеть пуста. Как мы уже выяснили, во всех стабильных сетях, кроме пустой сети, все цены продажи $p_{ij} = b_i$.

Для первого игрока, стратегия которого $(\upsilon_1^s, x_{12}^{\text{out}}, x_{13}^{\text{out}}, p_{12}, p_{13})$:

$$p_{12} = p_{13} = b_1$$

$$\upsilon_1^s = \min\{V_1^s, x_{21}^{in} + x_{31}^{in}\}$$

$$x_{12}^{out} + x_{13}^{out} = \upsilon_1^s$$

$$x_{12}^{out} \leq x_{21}^{in}, x_{13}^{out} \leq x_{31}^{in}$$

Второе уравнение вытекает из того, что производство товара ограничено либо производственными возможностями, либо объемом, который готовы купить игроки из N_2.

Третье уравнение гарантирует то, что весь произведенный товар будет продан. Как конкретно будет распределен товар по игрокам из N_2 не имеет значения, так как цена для обоих покупателей одинакова.

Для игрока $j \in N_2$, стратегия которого $(x_{j1}^{\text{in}}, x_{j4}^{\text{out}}, p_{j4})$:

$$p_{j4} = b_2$$

$$x_{j1}^{in} = x_{j4}^{out} = \min \{x_{1j}^{out}, x_{4j}^{in}\}$$

Для четвертого игрока, стратегия которого $(x_{42}^{in}, x_{43}^{in}, \upsilon_4^c, p_4^c)$:

$$\max_{x_{42}^{in}, x_{43}^{in}, p_4^c} [p_4^c \upsilon_4^c - b_2(x_{42}^{in} + x_{43}^{in})]$$

$$x_{4j}^{in} \leq x_{j4}^{out}, \text{для всех } j \in N_2$$

$$\upsilon_4^c = x_{42}^{in} + x_{43}^{in} \leq D_4^c(p_4^c)$$

Цена p_4^c, по которой 4-й игрок сбывает товар на свой рынок не может быть равна a, так как в таком случае 4-й игрок будет терпеть убытки, покупая товар по цене b_2 у игроков из N_2. Так как у обоих игроков из N_2 цена равна b_2, то распределение покупок товаров не имеет значение, важно только количество купленного товара. Соберем все уравнения вместе и запишем условие для индивидуально стабильных сетей. Напомним, что $\upsilon_{ij} = \min \{x_{ij}^{out}, x_{ji}^{in}\}$.

$$\max_{p_4^c} \upsilon_4^c (p_c^4 - b_2)$$

$$\upsilon_4^c = \upsilon_{12} + \upsilon_{13} = \upsilon_1^s \leq \min \{V_1^s, D_4^c(b_3)\}$$

$$p_{12} = p_{13} = b_1, p_{24} = p_{34} = b_2$$

$$\upsilon_{12} = \upsilon_{24}, \upsilon_{13} = \upsilon_{34}$$

Выбрав произвольное неотрицательное значение υ_1^s и произвольные значения $\upsilon_{12}, \upsilon_{13}$ так, чтобы они удовлетворяли условию во второй строке системы, мы получим индивидуально стабильную сеть. Перебрав все такие значения, получим все индивидуально стабильные сети в игре, кроме пустой сети, в которой цены могут отличаться от «высокой».

Теперь, когда построены все индивидуально стабильные сети, можно оценить слабые места данной модели. Как уже было замечено ранее, любой игрок из $N \backslash N_m$ в рамках индивидуальных отклонений будет стремиться установить максимальную цену на свой товар вне зависимости от конкуренции на рынке и последствиям к которым приведет это решение. Эту проблему можно решить, расширив стратегии игроков так, чтобы они могли определять свой спрос и для высокой цены и для низкой. Мы переопределим стратегии игроков в следующей главе.

К тому же, возможности фирм сильно ограничены, они не могут наращивать темпы производства и продажи, хотя это и было бы выгодно. Возьме ситуацию, описанную в примере, в котором $v_1^s < D_4^c(b_3)$, $x_{12}^{out} = x_{21}^{in}, x_{13}^{out} = x_{31}^{in}$, а остальные переменные удовлетворяют условиям индивидуальной стабильности. Хотя для игрока 1 было бы выгодно добывать и продавать больше, он не увеличит (а если мы полагаем стоимость добычи ненулевой, то уменьшит) свою прибыль, увеличив объемы добычи, так как он не может увеличить объемы продаж в одностороннем порядке. Очевидно, что такой подход неэффективен для моделирования процесса, в котором предполагается заключение некоторого договора между агентами. Мы попытаемся решить эту проблему, перейдя к динамической игре в последней главе.

Глава 4

Модель с выбором цен и функциями спроса игроков

4.1 Описание модели

Имеется множество игроков $N = \{1...n\}$. Множество игроков разбивается на непересекающиеся подмножества $N = \{N_1 \cup N_2 \cup ... \cup N_m\}$. Также определяем систему множеств $M = \{M_1...M_l\}$, состоящую из непересекающихся подмножеств множества N_m, причем $\bigcup_{i=1}^{l} M_i = N_m$. Тот факт, что $i \in M_c$ означает, что i-й игрок может продавать свой товар на c-м рынке. Для каждого множества $M_c \in M$ на двухточечном множестве цен P_m определена убывающая функция спроса $D^c(p)$, которая показывает сколько товара готовы купить потребители на рынке по цене p.

Стратегия игрока $i \in N_1$ состоит из объема ресурса, который он производит или добывает υ_i^s себестоимость которого p^s , объема товара который он предлагает купить другим игрокам $\upsilon_{ij}, j \in N_2$ и цены по которой он предлагает товар $p_{1j} \in P_1 = \{a_1, b_1\}, j \in N_2$. Стратегия игрока $i \in N_k, k \neq 1, k \neq m$ состоит из объема товара который он предлагает купить другим игрокам $\upsilon_{ij}, j \in N_{k+1}$, цены по которой он предлагает товар $p_{ij} \in P_k = \{a_k, b_k\}, j \in N_{k+1}$ и определения функции спроса $D_i(q)$ для игроков из N_{k-1}. Стратегия игрока $i \in N_m$, который привязан к рынку M_c, состоит из определения цены $p_i^c \in P_m = \{a_m, b_m\}$, по которой он хочет продавать товар на рынке под номером c (раньше c просто обозначало, что речь идет о рынке сбыта, теперь это номер конкретного рынка сбыта), объемов продажи на рынке υ_i^c и определения своей функции спроса $D_i(q)$ для игроков из N_{m-1}. Значения, которыми нагружены ребра сети определяются по правилу $\min\{x_{ij}, D_j(p_{ij})\}$.

Таким образом мы избавились от игроков выполнявших роль рынка сбыта, определив множество рынков M, за которые конкурируют игроки, привязанные к ним. Учитывая предположение о том, что товар, который производится (или перепродается) игроками из каждого множества N_k один и тот же или же товары различны, но взаимозаменяемы, можно заключить, что игроку в целом не важно, у какой конкретно фирмы покупать товар. Каждого игрока волнует лишь то, сколько он может купить и по какой цене. Поэтому, вместо определения вектора объемов, который i-й игрок хочет купить, он определяет функцию спроса, то есть сколько товара, в зависимости от его цены, он готов купить. Если в предыдущей модели i-й игрок стремился повысить цену p_{ij} даже если j-му игроку выгодно вообще ничего не покупать по высокой цене, то теперь каждый игрок знает какой объем товара он может продать по высокой цене и какой объем по низкой. Дав игрокам возможность заявлять о своих потребностях, с помощью задания функции спроса, мы изменили множество равновесных ситуаций, и соответственно изменили множество стабильных сетей.

До этого мы полагали, что любой игрок из множеств $N_2, N_3, ..., N_{m-1}$ имеет возможность продавать столько товара, сколько он купил у других игроков. Однако в силу того, что фирмы из этих множеств занимаются производством товара с использованием купленного ресурса, возможна ситуация, когда из одной единицы ресурса будет произведено несколько единиц товара. Этот товар далее может использоваться как ресурс игроками последующих уровней. Поэтому введем положительные коэффициенты $d_2, d_3, ..., d_m$ для тех игроков, которые занимаются производством товара. Коэффициент d_i показывает сколько единиц товара может быть произведено игроком из уровня N_i за единицу товара из уровня N_{i-1}. Будем полагать, что различиями коэффициентов у игроков одного уровня можно пренебречь. Это предположение опирается на то, что в рамках одного уровня производится и продается один и тот же товар или взаимозаменяемый. Конечно, этот коэффициент на некотором уровне может быть равен единице, если игроки занимаются перепродажей или перевозкой товара.

4.2 Простейший пример игры

Рассмотрим пример, схожий с тем, что был в предыдущем параграфе. На рис. 4.2 показан граф, который образуется в этом примере. Кругами отмечены игроки, стрелки показывают направление продажи товара, квадрат обозначает рынок сбыта.

$$v_{ij} = \min\{x_{ij}, D_j(p_{ij})\}$$

Имеется множество игроков $N = \{1, 2, 3\}$, разбиение $N_1 = 1, N_2 = 2, 3$ и рынок $M_1 = 2, 3$. Переобозначим $x_{ij} = x_{ij}^{out}$, так как мы избавились от переменных x_{ij}^{in}, заменив их функцией спроса $D_i(p)$ i-го игрока. Условия индивидуальной рациональности имеют

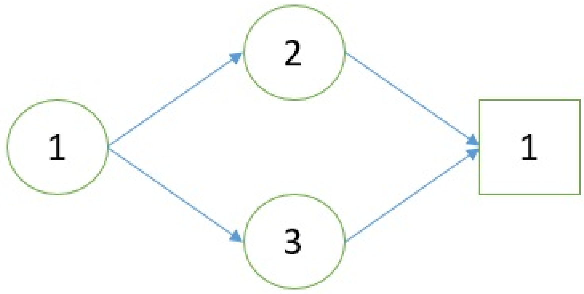

Рис. 4.1: Пример модели с общим рынком

следующий вид:
Для игрока 1:

$$\max_{p_{12},x_{12},p_{13},x_{13},v_1^s}[p_{12}x_{12}+p_{13}x_{13}-p^s v_1^s]$$

$$x_{12}\le D_2(p_{12}), x_{13}\le D_3(p_{13})$$

$$v_{12}+v_{13}\le v_1^s\le V_1^s$$

Первый игрок пытается максимизировать свою прибыль. Цены p_{1j} и объемы продаж x_{1j}, $j\in N_2$, должны доставлять максимум функции прибыли. Объемы который он может предложить другим игрокам по ценам p_{12}, p_{13} ограничены функциями спроса $D_2(p_{12})$, $D_3(p_{13})$, определенными для этих игроков. Сумма производимого товара ограничена производственными возможностями игрока.

Для игрока $2\in N_2$:

$$\max_{p_2^1,v_2^1,D_2(p)}[p_2^1 v_2^1-p_{12}x_{12}]$$

$$0\le v_2^1=x_{12}d_2\le D^1(p_2^1)-v_3^1$$

Для игрока 3 аналогично.

Если функция спроса с нижним индексом $D_i(p)$, то это функция спроса определяемая игроком под номером i для других игроков. Если же она с верхним индексом $D^c(p)$, то это функция спроса рынка под номером c.

Игрок из N_2 выбирает цену и объем товара, так, чтобы они доставляли максимум функции прибыли. Объем продаж на рынке ограничен разницой между количеством товара, которое потребитель готов купить и количеством товара, который уже продает ему другой игрок.Теперь первому игроку не всегда выгодно устанавливать высокую цену, так как его объем продаж ограничен функцией спроса, которая зависит от установленной им цены. Второй и третий игрок определяют свою функцию спроса, которая задана на двухточечном множестве цен. То есть они определяют два значения спроса, одно для низкой цены, другое для высокой. Легко найти число, которыми эти значения ограничены сверху. На примере игрока 2:

$$D_2(p) \leq \lceil (D^1(a_2) - \upsilon_2^1 - \upsilon_3^1)/d_1 \rceil, p \in P_1$$

Тут $\lceil x \rceil$ означает округление ввверх числа x до целого. Пусть значение функции от цены p меньше выбранного нами $D_2(p) < (D^1(p) - \upsilon_2^1 - \upsilon_3^1)/d_1$. В таком случае на конечном рынке останется неудовлетворенный спрос равный $D^1(p) - \upsilon_2^1 - \upsilon_3^1$, который фирма могла бы удовлетворить, произведя $D_2(a_1)d_1$ товара, из $D_2(a_1)$ сырья, и возможно (зависит от цен и коэффициентов d) тем самым увеличить свой выигрыш. Если же задать функции спроса большее значение $D_2(p) > (D^1(a_2) - \upsilon_2^1 - \upsilon_3^1)/d_1$, тогда фирма 1 будет иметь возможность продать фирме 2 сырья больше, чем та сможет использовать, что приведет к потере прибыли фирмой 2 из-за закупок лишнего сырья. А значит такие значения функции спроса не важны при поиске стабильных сетей.

Аналогично можно ограничить функцию спроса для каждого игрока из N_m, опираясь на функцию спроса $D^c(p)$ c-го рынка и количество товара, который на этот рынок сбывают другие игроки.

4.3 Пример игры с древовидной сетью и общие условия равновесия для древовидной сети

Теперь рассмотрим игру в которой фирмы образуют дерево.

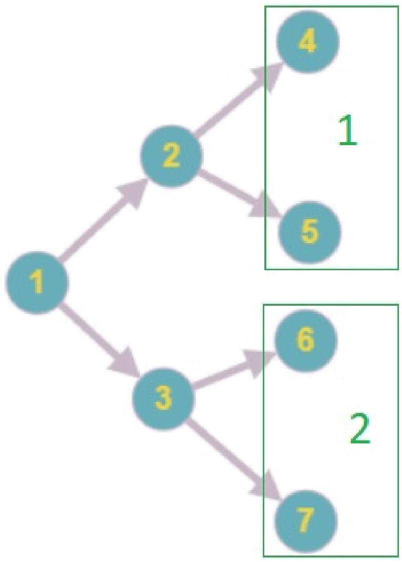

Рис. 4.2: Древовидная игра

Имеется множество игроков $N = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, уровни $N_1 = 1, N_2 = 2,3, N_3 = 4,5,6,7$, рынки $M_1 = 4,5, M_2 = 6,7$. Заданы цены $P_1 = \{a_1, b_1\}, P_2 = \{a_2, b_2\}, P_3 = \{a_3, b_3\}$, предел производственных воможностей V_1^s, коэффициенты d_2, d_3 и спросы рынков $D^1(p), D^2(p)$. Условия индивидуальной рациональности имеют следующий вид:

Для фирмы 1:

$$\max_{p_{12},x_{12},p_{13},x_{13}} [p_{12}x_{12} + p_{13}x_{13} - p^s \upsilon_1^s]$$

$$x_{12} \le D_2(p_{12})$$

$$x_{13} \le D_3(p_{13})$$

$$\upsilon_1^s = x_{12} + x_{13} \le V_1^s$$

Для фирмы 2:

$$\max_{p_{24},p_{25},x_{24},x_{25},D_2(p)} [p_{24}x_{24} + p_{25}x_{25} - p_{12}x_{12}]$$

$$x_{24} \le D_4(p_{12})$$

$$x_{25} \le D_5(p_{13})$$

$$x_{24} + x_{25} = \upsilon_{12}d_2$$

Функция спроса этой фирмы для цены $p \in P_1$ ограничена сверху:

$$D_2(p) \le \lceil (D_4(a_2) + D_5(a_2))/d_2 \rceil$$

Условия для игрока 3 аналогичны.

Для фирмы 4:

$$\max_{p_4^1,\upsilon_4^1,D_4(p)} [p_4^1\upsilon_4^1 - p_{24}x_{24}]$$

$$\upsilon_4^1 = \upsilon_{24}d_3 \le D^1(p_4^1) - \upsilon_5^1$$

Функция спроса этой фирмы для цены $p \in P_2$ ограничена сверху:

$$D_4(p) \le \lceil (D^1(a_3) - \upsilon_4^1 - \upsilon_5^1)/d_3 \rceil$$

Условия для игроков 5,6,7 аналогичны

Теперь построим условия для произвольного дерева. В этом дереве имеется m уровней $N_1, N_2, ..., N_m$. Будем считать, что те игроки из N_m, которые привязаны к одной и той же ветви дерева, торгуют на одном конечном рынке. То есть рынков сбыта будет столько же сколько игроков на уровне N_{m-1}. Условия для игрока 1 из множества N_1, который может продавать товар любому игроку $j \in N_2$:

$$\max_{p_{1j}, x_{1j} | j \in N_2} [\sum_{j \in N_2} p_{1j} x_{1j} - p^s \upsilon_1^s]$$

$$x_{1j} \leq D_j(p_{1j}), j \in N_2$$

$$\upsilon_1^s = \sum_{j \in N_2} x_{1j} \leq V_1^s$$

Условия для игрока i из множества $N_k, k \neq 1, k \neq m$ который покупает товар у игрока l и может продавать товар некоторым игрокам $j \in J(i) \subset N_{k+1}$:

$$\max_{p_{ij}, x_{ij}, D_i(p) | j \in J(i)} [\sum_{j \in J} p_{ij} x_{ij} - p_{li} x_{li}]$$

$$x_{ij} \leq D_j(p_{ij}), j \in N_{k+1}$$

$$\upsilon_{li} d_k = \sum_{j \in J(i)} x_{ij}$$

$$D_i(p) \leq \lceil (\sum_{j \in J(i)} D_j(a_k))/d_k \rceil$$

Условия для игрока i из множества N_m который покупает товар у игрока l и продает товар на рынке M_c:

$$\max_{p_i^c, \upsilon_i^c, D_i(p)} [p_i^c \upsilon_i^c - p_{li} x_{li}]$$

$$\upsilon_i^c = x_{li} d_m \leq D^c(p_i^c) - \sum_{j \in M_c} \upsilon_j^c$$

$$D_i(p) \leq \lceil (D^c(a_m) - \sum_{j \in M_c} \upsilon_j^c)/d_m \rceil$$

Глава 5

Динамическая сетевая игра

5.1 Формализация модели как динамической игры с одновременными ходами

Теперь формализуем игру как многошаговую игру с одновременными ходами. Будем рассматривать только те сети, которые задаются древовидным графом. Воспользуемся определением представленным в работе [4].

Для игрока 1 множество состояний $S_i = \{\upsilon_i^s\}$. Множество состояний взаимодействия $U_{1j}^{\alpha} = \{(x_{1j})_{j\in N_2}\}$ состоит из всевозможных векторов, определяющих количество товара предлагемого каждому игроку j. Множество состояний влияния игрока 1 $U_{1j}^{\beta} = \{a, b\}, a, b \in P_1, j \in N_2$, это множество значений, которыми нагружены динамические дуги E^d. Эти значения определяют цену, по которой игрок 1 предлагает товар игрокам j.

Для игрока $i \in N_k, k \neq m, k \neq 1$ множества состояний взаимодействия $U_{ij}^{\alpha} = \{(x_{ij}), D_i(p)\}$, где p определяется через дугу влияния от того игрока$j \in N_{k-1}$, к которому привязан i. Множество состояний влияния на игроков $j \in J \in N_{k+1}$ аналогично: $U_{ij}^{\beta} = \{a, b\}, a, b \in P_k, j \in J$. Множество состояний узла пусто.

Для игрока $i \in N_m$ множество состояний узла $S_i = \{(\upsilon_i^c, p_i^c)\}$. Множество состояний взаимодействия $U_{ij}^{\alpha} = \{D_i(p)\}$, где p определяется через дугу влияния от того игрока $j \in N_{k-1}$, к которому привязан i. .Множество состояний влияния пусто.

Все ограничения на стратегии игроков такие же, как и в предыдущей главе. При одновременном ходе игроков, который переводит сеть из состояния x_k в x_{k+1}, множество возможных действий каждого игрока строится исходя из стратегий других игроков и ребер взаимодействия в состоянии x_k.

Будем искать равновестные траектории в динамической игре. То есть при поиске равновесий будем рассматривать только изменения параметров сети, а не стратегии, которые порождают эти изменения. Это значительно упрощает задачу, так как одна и та же траектория может быть порождена множеством различных стратегий.

Алгоритм поиска равновесных траекторий похож на алгоритм поиска равновесий в позиционной игре с очередностью ходов. Алгоритм представлен в [4], и может быть описан следующим образом:

- На основе изначального состояния сети и параметров игры построить всевозможные траектории игры. Рассматриваются только те стратеии, где игроки устанавливают одинаковые значения ребер взаимодействия.

- Начиная с последнего момента времени $t = T$, для каждого момента t, для каждого (x, t), для каждого игрока i с выигрышем $H_i = (h_i(x(0)), h_i(x(1), ...h_i(x(T))$, рассмотреть всевозможные индивидуальные отклонения $u_i(t)$ игрока i. Если $t \neq T$, то из возможных индивидуальных отклонений игроков рассматриваются только те, которые приводят к подыгре, в которой есть равновесные управления. Остальные управления отбрасываются.

- Если для какого-либо игрока i какое-либо отклонение $u_i(t)$ приводит к подыгре, в которой выигрыш i-го игрока больше его выигрыша H_i в изначальной игре, то управления приводящие к этому (x, t) больше не рассматриваются. В противном случае присоединяем управление приводящее к (x, t) к равновесным управлениям, которые реализуются в (x,t+1).

- Получим множество векторов $(u(1), u(2), ..., u(T))$, каждый элемент которых является равновесным управлением. Этот вектор задает равновесную траекторию в игре.

5.2 Пример динамической сетевой игры

Рассмотрим пример такой игры. Имеются два игрока $N = 1, 2$. Первый игрок за-

Рис. 5.1: Динамическая игра

нимается производством товара и продажей игроку 2, игрок 2 продает товар на своем рынке. Пусть $p^s = 1$, множества цен $P_1 = \{2\}, P_2 = \{4\}$, то есть рассматриваем продажу только по одной цене. Значения $V^s = D^1(4) = 1$, то есть производиться и продаваться конечному потребителю может не больше одной единицы товара. Тогда функция спроса игрока 1 ограничена сверху значением $D_1(2) <= 1$. И пусть коэффицент $d_2 = 1$. В начальном состоянии x_0 товар не производится и не продается. Количество ходов $T = 2$. Этот пример позволит нам посмотреть на то, как может развиваться во времени такая игра. Построим игру в развернутой форме, её граф:

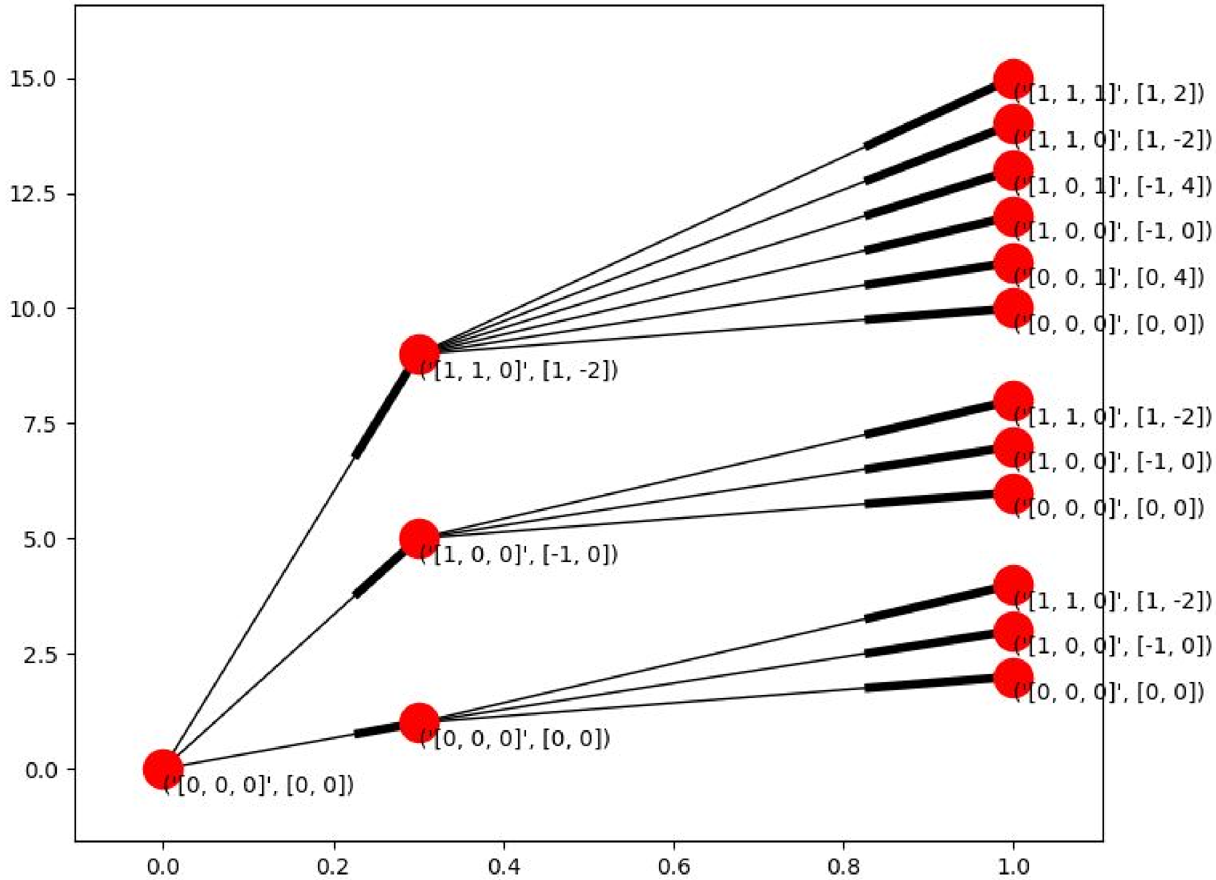

Рис. 5.2: Развернутая форма

Более жирная часть ребра показывает направление развития игры, от тонкой к жирной. Моменты времени идут слева направа. Узлы расположенные на одной вертикальной линии находятся в одном моменте времени. Узел в данном случае символизирует состояние сети. Любое состояние сети в такой игре можно описать тремя числами: количество производимого товара, количество продаваемого товара игроком 1 игроку 2 и количество продаваемого товара на конечном рынке игроком 2. На рисунке 5.2, под каждым узлом расположены два вектора в квадратных скобках, обозначающие состояние сети в этом узле и выигрыши первого и второго игрока соответственно.

Посмотрим сначала на то, какие состояния сети достижимы в разные моменты времени. Из состояния (0,0,0) игроки могут одновременно перейти в (1,0,0), то есть первый игрок начал производство, но один из игроков или оба отказались от формирования связи. В состояние (1,1,0), первый игрок может одновременно начать производить товар и предложить его второму и второй игрок в тоже время соглашается на обмен. И конечно сеть может остаться в том же положении (0,0,0). Состояния, где 3-й элемент вектора равен единице недостижимы из (0,0,0), так как второй игрок не может установить значение продажи товара на рынок больше значения передаваемого ему товара в предыдущий момент времени. Первый игрок не может установить значение продажи товара больше значения производства, поэтому состояния (0,1,1) и (0,0,1) также недостижимы.

Таким же образом можно сформировать те состояния, которые достигаются в момент времени $t = 2$. Не будем рассматривать все эти состояния, остановимся лишь на двух. Состояние (1,0,1) может показаться странным, но оно действительно достижимо из (1,1,0) в рамках представленной модели. Игрок 2 может установить значение продажи на рынке равное 1, основываясь на наличии связи с первым игроком в предыдущий момент времени. В то же время первый игрок может обнулить свое предложение, разорвав таким образом связь. Это можно интерпретировать следующим образом. В момент времени $t = 1$ в положении (1,1,0) второй игрок уже получал товар. Естественно, он может продать этот товар, даже если в следующий момент времени игрок 1 разорвет договор. В итоге игрок 2 получает доход от продажи, но с задержкой в один момент времени. Аналогичные рассуждения могут быть проведены для (0,0,1), которое также достижимо из (1,1,0).

Формулы, задающие выигрыши игроков в некоторой конкретной сети, такие же, как и в предыдущей главе. Основываясь на них можно построить значения выигрышей игроков в каждый момент времени. На рисунке отмечены эти выигрыши ниже каждого узла в виде [a,b], где a,b - выигрыши первого и второго игроков. Например в состоянии (1,1,1) первый игрок производит единицу товара по себестоимости 1 и продает по цене 2. Игрок 2 покупает единицу товара по цене 2 и продает по цене 4. В итоге выигрыши игроков равны (1,2).

Перейдем к нахождению равновесных траекторий. Обратимся к рисунку 5.3. На нем, ниже каждого узла, там где раньше был вектор выигрышей игроков в сети, теперь обозначены сумарные выигрыши игроков в некоторой точке траектории (a,b,c,t) игры. Например в точке (1,1,1,1), которая расположена в верхнем правом углу рисунка 5.3, суммарные выигрыши равны $(0,0) + (1,-2) + (1,2) = (2,0)$. Равновесные траектории можно найти по описанному выше алгоритму. Выигрыши игроков в равновесных траекториях обозначены на рисунке после 'eq='.

Обратим внимание на то, что индивидуальные отклонения игрока не могут привести к образованию новой связи или увеличению значения связи. Образование связи или

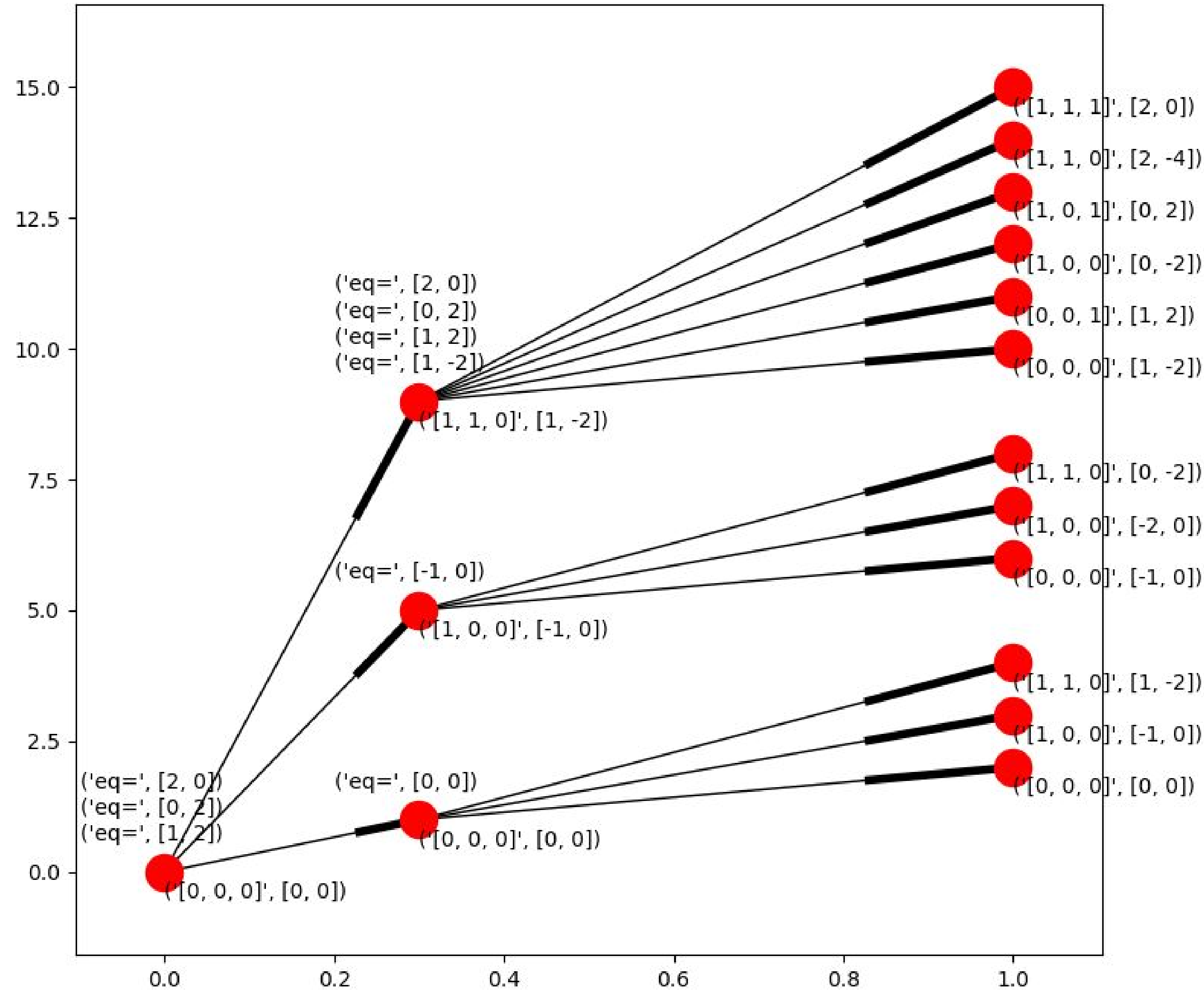

Рис. 5.3: Развернутая форма

увеличение нагруженности связи может произойти только в результате совместного отклонения двух игроков.

Рассмотрим на равновесность траекторию, которая приводит сеть в состояние (1,1,1) с суммарными выигрышами (2,0). Первый игрок может отклониться в (0,0,1), разорвав связь и прекратив производство, но в таком случае его выигрыш уменьшится до 1. Также первый игрок может отклониться в (1,0,1), но в этом состоянии его выигрыш тем более меньше. Второй же игрок из состояния (1,1,1) может отклониться только в (1,1,0) или в (1,0,0), уменьшив объемы продажи и потеряв прибыль. Значит состояние (1,1,1) равновесно. Аналогично можно проверить все состояния. Далее в момент времени $t = 1$ (второй вертикальный ряд на рисунке 5.3), действуем схожим образом, но рассматриваем отклонения только в те траектории, которые являются равновесными. В итоге получим все равновесные траектории. Все равновесные выигрыши, кроме тривиального случая, когда сеть остается в состоянии (0,0,0), в этих траекториях обозначены над первым узлом.

В этой модели, если игра начинается с состояния, в котором объемы производства и продаж нулевые, то траектория состоящая только из таких пустых сетей всегда будет равновесной. Это следует из того, что единственное индивидуальное отклонение доступное из этой сети - это увеличение объемов производства первым игроком. И это отклонение ведет к уменьшению выигрыша первого игрока.

Для поиска равновесных траекторий в таких играх была разработана программа на языке python 3.6. Программа работает для любых игр в рамках описанной модели, но только если сеть задана древовидным графом и множества рынков заданы как в главе 4. Для работы с графами была использована библиотека NetworkX[6]. Для создания иллюстраций игры в развернутой форме использованы библиотеки NetworkX и Matplotlib. Код программы может быть найден по ссылке, которая расположена в приложении к данной работе.

Приложение

https://pastebin.com/fw29Pmis

Заключение

В данной работе была рассмотрена дискретная модель формирования торговой сети, на основе которой была сформулирована новая модель для описания производственной цепочки фирм. Модель была рассмотрена с точки зрения статического бескоалиционного подхода и динамического бескоалиционного подхода, были даны условия, которым должна удовлетворять стабильная сеть для обоих подходов, в том случае, когда взаимоотношения между фирмами представляются древовидным графом. Разработана и протестирована программа на языке python 3.6, в которой реализован алгоритм поиска равновесных траекторий в динамической сетевой игре.

Список литературы

[1] Губко М. В. *Теоретико-игровая модель формирования торговой сети* // Управление большими системами: сборник трудов 2004 вып. №6

[2] Губко М. В. *Управление организационными системами с сетевым взаимодействием агентов. Часть I Обзор теории сетевых игр* // Автомат. и телемех., 2004, № 8

[3] Новиков Д. А. *Игры и сети* // МТИП, 2:1 (2010), 107–124; Autom. Remote Control, 75:6 (2014), 1145–1154

[4] Парфенов А.П. *Алгоритм нахождения равновесий в динамической сетевой игре* // МТИП, 5:1 (2013), 45–60

[5] Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Шевкопляс Е.В. *Теория игр: учебник* // 2-е изд. СПб.: БХВ-Петербург, 2012 — 432 с.

[6] Aric A. Hagberg, Daniel A. Schult and Pieter J. Swart *Exploring network structure, dynamics, and function using NetworkX*// in Proceedings of the 7th Python in Science Conference (SciPy2008), Gäel Varoquaux, Travis Vaught, and Jarrod Millman (Eds), (Pasadena, CA USA), pp. 11–15, Aug 2008