Санкт-Петербургский Государственный университет
Направление Физика

Разностные уравнения на комплексной плоскости

Выпускная квалификационная работа
студента дневного отделения
Филонича В.А.
Научный руководитель
проф. **Федотов А.А.**
Рецензент
Симонов С.А.

Санкт-Петербург
2018

Введение

Разностные уравнения представляют большой интерес в связи с тем, что возникают в различных физических задачах: дифракция волн на клине, движение электрона в периодической решетке и т.д. Количество работ по этим темам колоссально.

Работа состояла из двух частей: реферативной и исследовательской. Реферативная часть состояла в том, чтобы изучить технику работы с разностными уравнениями на основании [1], посвящённой уравнению $\sigma(z+h) = (1+e^{-iz})\sigma(z-h)$ и провести строгие доказательства недоказанных утверждений и в статье. Исследовательская часть заключается в изучении уравнения $f(z+h) = \dfrac{1}{z} + f(z-h)$ методами комплексного анализа.

Реферативная часть

1 Постановка задачи

Данная часть работы посвящена восстановлению некоторых доказательств из статьи А.А.Федотова "Квазиклассические ассимптотики функций Малюжинца" [3]. Будет использоваться следующее соглашение:

def. $f(z) = O(g(z)) \iff |f(z)| \le \mathrm{Const}|g(z)|$.

Рассматривается следующее уравнение:

$$\sigma(z+h) = (1+e^{-iz})\,\sigma(z-h), \tag{1}$$

где h - фиксированное положительное число: $0 < h < \pi$.

σ-функция аналогична Γ-функции Эйлера, так как в разностном уравнеии для последней $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$ коэффициент суть степенной полином первого порядка, а в уравнении (1) это тригонометрический полином первого порядка.

Существует единственное решение σ_0 уравнения (1), которое аналитично и не имеет нулей в полосе $S_0 = \{|\mathrm{Re}\, z| < \pi + h\}$ и допускает в ней асимптотические представления

$$\sigma_0(z) = 1 + o(1), \quad z \to -i\infty \tag{2}$$

$$\sigma_0(z) = e^{-i\frac{z^2}{4h}+i\frac{\pi^2}{12h}+i\frac{h}{12}}\left(1+o(1)\right), \quad z \to i\infty. \tag{3}$$

Заметим, что отношение любых двух решений уравнения (1)

$$\frac{\sigma_i(z)}{\sigma_j(z)} = \frac{\sigma_i(z-2h)}{\sigma_j(z-2h)} \tag{4}$$

является $2h$-периодической функцией. Поэтому имеют место два факта:

1. Если два решения удовлетворяют условиям на $\sigma_0(z)$, то их отношение по теореме Лиувилля тождественная единица.

2. Если имеется решение $\sigma(z)$. аналитичное в полосе S_0, а отношение $\sigma(z)/\sigma_0(z)$ остается ограниченным при $\operatorname{Im} z \to \pm\infty$ и стремится к нулю при $\operatorname{Im} z \to -\infty$ и/или $\operatorname{Im} z \to \infty$, то $\sigma(z) \equiv 0$

Таким образом σ_0 можно назвать минимальным решением в полосе S_0.

2 Нули и полюса $\sigma_0(z)$

Функция $\sigma_0(z)$ аналитически продолжается до мероморфной с помощью (1). Тогда её полюса оказываются в точках

$$-\pi - h - 2\pi l - 2hk, \quad l, k = 1, 2, ..., \tag{5}$$

А нули в точках

$$\pi + h + 2\pi l + 2hk, \quad l, k = 1, 2, \ldots . \tag{6}$$

Нуль в $\pi + h$ и полюс в $\pi - h$ являются простыми. Остальные нули и полюса оказываются простыми, если отношение h/π иррационально.

3 Интегральное представление для $\sigma_0(z)$

Опишем интегральное представление для решения σ_0. В полосе $|\operatorname{Re} z| < \pi$ выберем главную ветвь логарифма, тогда

$$\ln(1 + e^{-iz}) \to 0, \quad z \to -i\infty. \tag{7}$$

Логарифмируем (1). Тогда получим уравнение

$$\theta(z+h) = \ln(1+e^{-iz}) + \theta(z-h), \tag{8}$$

где $\theta(z)$ аналитична в S_0 и $\sigma_0(z) = e^{\theta(z)}$. Считая, что $\operatorname{Re} z < \pi$, положим

$$L(z) = \int\limits_{-i\infty}^{z} \ln(1+e^{-iz'})\mathrm{d}z' \quad , \tag{9}$$

где интегрирование идёт по вертикальной прямой $\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} z'$.
Тогда в S_0

$$\theta(z) = \frac{\pi}{8ih^2} \int\limits_{\gamma} \frac{L(z')}{\cos^2\left(\frac{\pi(z-z')}{2h}\right)}\mathrm{d}z' \quad . \tag{10}$$

Здесь γ - прямая $\operatorname{Re} z = \mathrm{Const}$, проходящая между точками $\pi \pm h$.
В самом деле рассмотрим разность:

$$\theta(z+h) - \theta(z-h) =$$

$$= \frac{\pi}{8ih^2}\left(\int\limits_{\gamma+h} \frac{L(z')}{\cos^2\left(\frac{\pi(z+h-z')}{2h}\right)}\mathrm{d}z' - \int\limits_{\gamma-h} \frac{L(z')}{\cos^2\left(\frac{\pi(z-h-z')}{2h}\right)}\mathrm{d}z' \right) =$$

$$= \frac{\pi}{8ih^2} \oint\limits_{z} \frac{L(z')}{\sin^2\left(\frac{\pi(z-z')}{2h}\right)}\mathrm{d}z' = 2\pi i \underset{z'=z}{res}\left[\frac{\pi}{8ih^2} \frac{L(z')}{\sin^2\left(\frac{\pi(z-z')}{2h}\right)} \right] = \ln(1+e^{-iz})$$

Последнее равенство вытекает из общеизвестного факта, что вычет это коэффициент при $\frac{1}{z'}$ разложения в ряд Лорана.

4 Асимптотики $\sigma_0(z)$ при $z \to \pm i\infty$

Докажем теперь асимптотические формулы (2) и (3). Чтобы это сделать, потребуются асимптотики функции $L(z)$ при $z \to \pm\infty$.
Пусть сначала $z \to -i\infty$, тогда верна оценка

$$L(z) = \int\limits_{-i\infty}^{z} \ln(1+e^{-iz'})\mathrm{d}z' = \int\limits_{-i\infty}^{z} (e^{-iz'} + o(e^{-iz'}))\mathrm{d}z' = O(e^{-|\operatorname{Im} z|}) \tag{11}$$

Если же $z \to +i\infty$, то

$$L(z) = \int\limits_{-i\infty}^{z} \ln(1+e^{-iz'})\mathrm{d}z' = \int\limits_{-i\infty}^{0} \ln(1+e^{-iz'})\mathrm{d}z' +$$

$$+ \int\limits_{0}^{z} \ln(e^{-iz'})\mathrm{d}z' + \int\limits_{0}^{i\infty} \ln(1+e^{iz'})\mathrm{d}z' + \int\limits_{i\infty}^{z} \ln(1+e^{iz'})\mathrm{d}z'.$$

Последний интеграл с точностью до знака повторяет (11), второй равен $-i\frac{z^2}{2}$, а первый и третий совпадают. Вычислим один из них

$$\int\limits_{0}^{i\infty} \ln(1+e^{iz})\mathrm{d}z = -i\int\limits_{1}^{0} \frac{\ln(1+t)}{t}\mathrm{d}t = i\int\limits_{0}^{1} \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{t^{k-1}}{k}\mathrm{d}t =$$

$$= i\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = i\frac{\pi^2}{12}.$$

Предпоследнее равенство обосновывается интегрированием от 0 до 1-ε, т.е. там, где ряд равномерно сходится, и последующим предельным переходом $\varepsilon \to 0$. Последнее равенство следует из разложения в ряд Фурье функции x^2 на промежутке от $-\pi$ до π, если положить $x = 0$:

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4\cos(kx)}{k^2}$$

Таким образом при $z \to i\infty$

$$L(z) = -i\frac{z^2}{2} + i\frac{\pi^2}{6} + O(e^{-|\operatorname{Im} z|}) \tag{12}$$

Продожлаем доказательство асимптотик (2) и (3). Вычисление основывается на том, что $\cos^2\left(\frac{\pi(z-z')}{2h}\right)$ по модулю быстро возрастает при отдалении от точки z параллельно мнимой оси, поэтому асимптотика $\theta(z)$ получается, за счёт z' порядка z. Пусть сначала $z \to -i\infty$. Пусть $z' = x' + iy'$, $z = x + iy$, контур γ это прямая $x' = \mathrm{Const}$, проходящая между точками $z - h$ и $z + h$.
Подставив в (10) асимптотику $L(z)$ получим

$$\left|\theta(z)\right| = \left|\frac{\pi}{8ih^2}\int\limits_{\gamma}\frac{L(z')}{\cos^2\left(\frac{\pi(z-z')}{2h}\right)}\mathrm{d}z'\right| \le \left|\frac{\pi}{8ih^2}\int\limits_{\gamma,\, y'\ge 0}\frac{-i\frac{z'^2}{2}+i\frac{\pi^2}{6}}{\cos^2\left(\frac{\pi(z-z')}{2h}\right)}\mathrm{d}z'\right| +$$

$$+\left|\frac{\pi}{8ih^2}\int\limits_{\gamma, y'\ge 0}\frac{O(e^{-|\operatorname{Im} z'|})}{\cos^2\left(\frac{\pi(z-z')}{2h}\right)}\mathrm{d}z'\right| + \left|\frac{\pi}{8ih^2}\int\limits_{\substack{\gamma\\ y\le y'\le 0}}\frac{O(e^{-|\operatorname{Im} z'|})}{\cos^2\left(\frac{\pi(z-z')}{2h}\right)}\mathrm{d}z'\right| + \left|\frac{\pi}{8ih^2}\int\limits_{\gamma, y'\le y}\frac{O(e^{-|\operatorname{Im} z'|})}{\cos^2\left(\frac{\pi(z-z')}{2h}\right)}\mathrm{d}z'\right| \le$$

$$\le \left|\frac{\pi}{2ih^2}\int\limits_{\gamma,\, y'\ge 0}\frac{-i\frac{z'^2}{2}+i\frac{\pi^2}{6}}{e^{i\frac{\pi(z-z')}{h}}}\mathrm{d}z'\right| + \left|\frac{\pi}{2ih^2}\int\limits_{\gamma, y'\ge 0}\frac{O(e^{-|\operatorname{Im} z'|})}{e^{i\frac{\pi(z-z')}{h}}}\mathrm{d}z'\right| + \left|\frac{\pi}{2ih^2}\int\limits_{\substack{\gamma\\ y\le y'\le 0}}\frac{O(e^{-|\operatorname{Im} z'|})}{e^{i\frac{\pi(z-z')}{h}}}\mathrm{d}z'\right| +$$

$$+\left|\frac{\pi}{2ih^2}\int\limits_{\gamma, y'\le y}\frac{O(e^{-|\operatorname{Im} z'|})}{e^{i\frac{\pi(z'-z)}{h}}}\mathrm{d}z'\right| \le C_1 e^{-\frac{\pi|y|}{h}} + C_2 e^{-\frac{\pi|y|}{h}}\int\limits_{\gamma, y'\ge 0} e^{-|y'|-\frac{\pi}{h}|y'|}\mathrm{d}y' +$$

$$+ C_3 e^{-\frac{\pi|y|}{h}}\int\limits_{\substack{\gamma\\ y\le y'\le 0}} e^{-|y'|+\frac{\pi|y'|}{h}}\mathrm{d}y' + C_4 e^{\frac{\pi|y|}{h}}\int\limits_{\gamma, y'\le y} e^{-|y'|-\frac{\pi|y'|}{h}}\mathrm{d}y' \le$$

$$\le O(e^{-i\pi|y|/h}) + |y|\cdot\max\{1, \exp(e^{-|y|+\frac{\pi|y|}{h}})\} + O(e^{-|y|}) = o(1)$$

Таким образом

$$\sigma_0(z) = e^{o(1)} = 1 + o(1), \quad z \to -i\infty \tag{13}$$

Теперь рассмотрим случай $z \to i\infty$

$$\theta(z) = \frac{\pi}{8ih^2}\int\limits_{\gamma, y'\ge 0}\frac{-i\frac{z'^2}{2}+i\frac{\pi^2}{6}+O(e^{-|y'|})}{\cos^2\left(\frac{\pi(z-z')}{2h}\right)}\mathrm{d}z' + \frac{\pi}{8ih^2}\int\limits_{\gamma, y'\le 0}\frac{O(e^{-|y'|})}{\cos^2\left(\frac{\pi(z-z')}{2h}\right)} =$$

$$= \frac{\pi}{8ih^2}\int\limits_{\gamma}\frac{-i\frac{z'^2}{2}+i\frac{\pi^2}{6}}{\cos^2\left(\frac{\pi(z-z')}{2h}\right)}\mathrm{d}z' + o(1) = \frac{\pi}{8ih^2}\int\limits_{\gamma}\frac{-i\frac{(z-z')^2}{2}+iz(z-z')-i\frac{z^2}{2}+i\frac{\pi^2}{6}}{\cos^2\left(\frac{\pi(z-z')}{2h}\right)}\mathrm{d}z' + o(1) =$$

$$= -i\frac{z^2}{4h} + i\frac{\pi^2}{12h} + i\frac{h}{12} + o(1)$$

Где интегралы с $O(e^{-|y'|})$ аналогичны случаю $z \to -i\infty$, а остальные вычисления сводится к интегралам

$$\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{-i\frac{(z-z')^2}{2}\mathrm{d}z'}{\cos^2\left(\frac{\pi(z-z')}{2h}\right)} = -\frac{2h^3}{3\pi} \tag{14}$$

и

$$\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{(-i\frac{z^2}{2}+i\frac{\pi^2}{6})\mathrm{d}z'}{\cos^2\left(\frac{\pi(z-z')}{2h}\right)} = \frac{4ih}{\pi}(-i\frac{z^2}{2}+i\frac{\pi^2}{6}). \tag{15}$$

В итоге

$$\theta(z) = -i\frac{z^2}{4h} + i\frac{\pi^2}{12h} + i\frac{h}{12} + o(1)$$

и, таким образом

$$\sigma_0(z) = e^{\theta}(z) = e^{-i\frac{z^2}{4h}+i\frac{\pi^2}{12h}+i\frac{h}{12}}(1+o(1)), \quad z \to i\infty. \tag{16}$$

5 Функциональные соотношения для $\sigma_0(z)$

Для $\sigma_0(z)$ имеется функциональное соотношение

$$\sigma_0(z+\pi) = \left(1 + e^{-\frac{i\pi}{h}z}\right)\sigma_0(z-\pi). \tag{17}$$

Действительно, рассмотрим следующую функцию

$$r(z) = \frac{\sigma_0(z)}{\sigma_0(z-2\pi)} = \frac{(1-e^{-i(z-h)})\sigma_0(z-2h)}{(1-e^{-i(z-h-2\pi)})\sigma_0(z-2\pi-2h)} = \frac{\sigma_0(z-2h)}{\sigma_0(z-2\pi-2h)}$$

$r(z)$, очевидно, $2h$-периодична. $\sigma_0(z)$ аналитична при $\mathrm{Re}\, z > -\pi - h$, а $1/\sigma(z-2\pi)$ аналитична при $\mathrm{Re}\, z < 3\pi + h$, значит $r(z)$ - аналитична при $-\pi - h < \mathrm{Re}\, z < 3\pi + h$. С учётом $2h$-периодичности $r(z)$ - целая функция. Асимптотика (2) влечет за собой $r \to 1$, при $z \to -i\infty$, а асимптотика (3), $r(z) \to e^{-i\pi z/h + i\pi^2/h}(1+o(1))$ при $z \to i\infty$. Но при таких свойствах $r(z) = 1 + e^{-i\frac{\pi z}{h}+i\frac{\pi^2}{h}}$, откуда (17).

Также имеется другое соотношение

$$\overline{\sigma_0(\overline{z})} = \frac{1}{\sigma_0(-z)} \quad . \tag{18}$$

Оно получается аналогичным образом, а именно, сначала проверяется, что $1/\overline{\sigma_0(-\overline{z})}$ удовлетворяет уравнению (1):

$$\sigma_0(z+h) = (1+e^{-iz})\sigma_0(z-h) \iff \overline{\sigma_0(-\overline{z}+h)} = \left(1+e^{-iz}\right)\overline{\sigma_0(-\overline{z}-h)} \iff$$
$$\iff 1/\overline{\sigma_0(-(\overline{z}+h))} = \left(1+e^{-iz}\right)1/\overline{\sigma_0(-(\overline{z}-h))} \iff$$
$$\iff 1/\overline{\sigma_0(-(\overline{z+h}))} = \left(1+e^{-iz}\right)1/\overline{\sigma_0(-(\overline{z-h}))}.$$

Но тогда, как и выше

$$r(z) = \sigma_0(z)\cdot\overline{\sigma_0(-\overline{z})} \tag{19}$$

является $2h$-периодичной. Где $\sigma_0(z)$ аналитична при $\operatorname{Re} z > -\pi - h$, а $\overline{\sigma_0(-\overline{z}-2\pi)}$ аналитична при $\operatorname{Re} z < \pi + h$. Таким образом $r(z)$ аналитична при $-\pi - h < \operatorname{Re} z < \pi + h$, а с учётом $2h$-периодичности целая функция. Из асимптотик (2) и (3) следует, что при $z \to \pm i\infty$, $r(z) \equiv 1$, откуда и получается (16).

Исследовательская часть

1 Постановака задачи

Рассматривается разностное уравнение

$$f(z+h) = \frac{1}{z} + f(z-h) \tag{20}$$

Для этого уравнения будут построены интегральные представления. Затем будет показано, что разность между решениями это 2h периодическая функция и найден её вид. А также найдено представление $f_1(z)$ в виде регуляризованных расходящихся рядов.

Рассматривая уравнение (20), легко видеть, что из-за особенности функции $\frac{1}{z}$ можно построить два решения: одно аналитично при $\operatorname{Re} z > -h$ и имеет полюса в точках $-h-2hk,\ k = 0,\,1,\,2\,\dots$ (назовём его $f_1(z)$), другое наоборот аналитично при $\operatorname{Re} z < h$ и имеет полюса в точках $h + 2hn,\ n = 0,\,1,\,2\,\dots$ (назовём его $f_2(z)$). Будем всё делать на примере $f_1(z)$, для $f_2(z)$ все вычисления аналогичны.

2 Решение $f_1(z)$

Решение $f_1(z)$ даётся формулой

$$f_1(z) = \frac{\pi}{8ih^2} \int\limits_{\gamma} \frac{\ln(z')\, dz'}{\cos^2\left(\frac{\pi(z-z')}{2h}\right)}, \qquad \operatorname{Re} z > -h \tag{21}$$

где контур γ это вертикальная прямая, направленная вверх, проходящая правее $z' = 0$, между точками $z \pm h$ (в точках $z \pm h$ находятся полюса подынтегральной функции). Ветвь логарифма аналитична на плоскости, разрезанной вдоль $-i\mathbb{R}_+$ и фиксирована условием $\ln 1 = 0$. Тогда

$$f_1(z+h) - f_1(z-h) = \frac{\pi}{8ih^2} \oint\limits_{z} \frac{\ln(z')\, dz'}{\sin^2\left(\frac{\pi(z-z')}{2h}\right)} = \frac{\pi^2}{4h^2} \operatorname*{res}_{z'=z} \frac{\ln(z')}{\sin^2\left(\frac{\pi(z-z')}{2h}\right)} =$$
$$= \frac{\pi^2}{4h^2} \operatorname*{res}_{z'=z} \frac{\ln z + \frac{1}{z}(z-z') + O((z-z')^2)}{\frac{\pi^2}{4h^2}(z-z')^2\,(1 + O(z-z')^4)} = \frac{1}{z}\,.$$

Аналитичность в полуплоскости $\operatorname{Re} z > -h$ вытекает из того, что, с одной стороны, контур γ должен проходить через h-окрестность точки z, а с другой стороны проходить справа от разреза логарифма, не пересекая его. Благодаря теореме Коши, контур можно свободно деформировать, не нарушая данных условий лишь в право.

Решение $f_2(z)$, аналитичное слева от $\operatorname{Re} z < h$ строится также, но контур γ проходит слева от разреза логарифма.

3 Разность решений

Итак, как обсуждалось выше, можно построить два решения. В связи с этим возникает вопрос, чем они отличаются? В этом пункте мы явно опишем разность решений для $\operatorname{Im} z > 0$.

Вычисление основано на разложении ядра $\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi(z-z')}{2h}\right)}$ в ряд Фурье.

Приведём несколько элементарных разложений, которые будут использоваться.

Дифференцированием формулы геометрической прогрессии можно получить, что:

$$\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{k\geq 1} (-1)^{k+1} k\, x^{k-1}\,, \qquad |x| < 1 \tag{22}$$

Используя это разложение, получим при $\operatorname{Im} z > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos^2(x-y)} &= \frac{4}{(e^{i(x-y)} + e^{-i(x-y)})^2} = \frac{4}{e^{-2i(x-y)}(1+e^{2i(x-y)})^2} = \\ &= \frac{4}{e^{-2i(x-y)}} \sum_{k\geq 1} (-1)^{k+1} k\, e^{2i(k-1)(x-y)} = 4 \sum_{k\geq 1} (-1)^{k+1} k\, e^{2ik(x-y)} \end{aligned} \tag{23}$$

Теперь, наконец, рассмотрим $f_1(z) - f_2(z)$. Контур интегрирования этой функции можно деформировать так, чтобы он обходил разрез логарифма, как показано на рисунке: контур обходится против часовой стрелки, чёрным пунктиром обозначен разрез логарифма. Обозначим контур символом $\cap$.

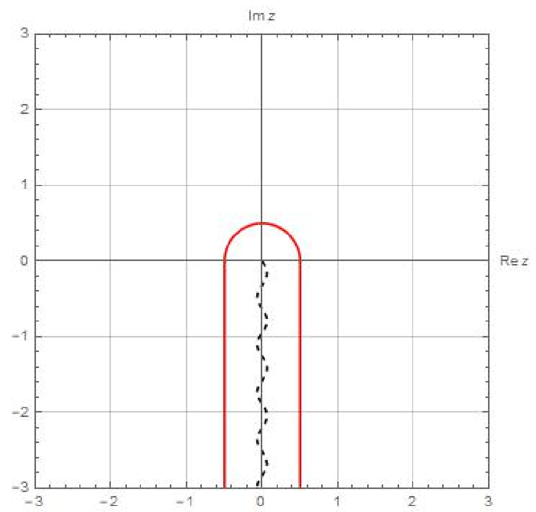

Рис. 1: Контур интегрирования

Считая, что $\operatorname{Im} z > 0$, а контур идёт ниже точки z, получим с помощью (21) и (23)

$$f_1(z)-f_2(z)=\frac{\pi}{8ih^2}\int\limits_{\cap}\frac{\ln(z')\,dz'}{\cos^2\left(\frac{\pi(z-z')}{2h}\right)}=\frac{\pi}{2ih^2}\sum_{k\geq 1}(-1)^{k+1}\,k\,e^{i\pi kz/h}\int\limits_{\cap}\ln(z')\,e^{-i\pi kz'/h}\,dz'=$$

$$=\left\{\begin{smallmatrix}s=z'k/h\\ z'=sh/k\end{smallmatrix}\right\}=\frac{\pi}{2ih^2}\sum_{k\geq 1}(-1)^{k+1}\,k\,e^{i\pi kz/h}\left(\int\limits_{\cap}\frac{h}{k}\,(\ln s+\ln h-\ln k)e^{-i\pi s}\,ds\right)=$$

$$=\frac{\pi}{2ih}\sum_{k\geq 1}(-1)^{k+1}\,e^{i\pi kz/h}\int\limits_{\cap}\ln s\;e^{-i\pi s}\,ds=\frac{\pi}{2ih}\left(1-\sum_{k\geq 0}(-1)^k e^{i\pi zk/h}\right)\int\limits_{\cap}\ln s\;e^{-i\pi s}\,ds=$$

$$=\frac{\pi}{2ih}\left(1-\frac{1}{1+e^{i\pi z/h}}\right)\int\limits_{\cap}\ln s\;e^{-i\pi s}\,ds=\frac{\pi}{2ih}\,\frac{1}{1+e^{-i\pi z/h}}\int\limits_{\cap}\ln s\;e^{-i\pi s}\,ds$$

Оставшийся интеграл это некая константа. Видно, что разность функций имеет полюса в точках $z=h+2hk,\ k\in \mathrm{Z}$.

4 Асимптотика $f_1(z)$ при $\operatorname{Im} z\to\infty$

В этом параграфе рассмотрим асимптотику $f_1(z)$ при $z\to +i\infty$. Будем считать, что контур в (2) это прямая, проходящая через точку z. Ввиду δ-обратного поведения ядра $\cos^{-2}\left(\frac{\pi(z-z')}{2h}\right)$, главный вклад в асимптотику вносит член с $\ln(z)$.

Обозначим $z=x+iy,\ x,y\in\mathbb{R}$ и разобъем контур на 3 части

$$f_1(z)=\frac{\pi}{8ih^2}\int\limits_{\gamma}\frac{\ln(z')\,dz'}{\cos^2\left(\frac{\pi(z-z')}{2h}\right)}=\frac{\pi}{8ih^2}\left(\int\limits_{-i\infty}^{x+iy/2}+\int\limits_{x+iy/2}^{x+3iy/2}+\int\limits_{x+3iy/2}^{i\infty}\right)\frac{\ln(z')\,dz'}{\cos^2\left(\frac{\pi(z-z')}{2h}\right)}$$

Рассмотрим каждый из интегралов по отдельности.

В первом интеграле косинус, можно заменить бОльшей экспонентой, изменив интеграл экспоненциально мало.

$$\int\limits_{-i\infty}^{x+iy/2}\frac{\ln(z')\,dz'}{\cos^2\left(\frac{\pi(z-z')}{2h}\right)}=e^{i\pi z/h}\int\limits_{-i\infty}^{x+iy/2}\ln z'\;e^{-i\pi z'/h}(1+o(1))\;dz'=O(e^{\pi y/2h}\ln y)$$

Во втором интеграле воспользуемся формулой Тейлора для $\ln(z')$ где остаточный член не превосходит половины максимума второй производной умножить на $(z'-z)^2$. И с точностью до экспоненциально малых поправок изменим пределы интегрирования.

$$\int\limits_{x+iy/2}^{x+3iy/2} \frac{\ln(z')\,dz'}{\cos^2\left(\frac{\pi(z-z')}{2h}\right)} = \int\limits_{x+iy/2}^{x+3iy/2} \frac{\left(\ln(z) + \frac{1}{z}(z'-z) + O\left(\frac{(z'-z)^2}{y^2}\right)\right)\,dz'}{\cos^2\left(\frac{\pi(z-z')}{2h}\right)} =$$

$$= \ln(z) \int\limits_{-i\infty}^{i\infty} \frac{dz'}{\cos^2\left(\frac{\pi(z-z')}{2h}\right)} + O(\frac{h}{y^2}) = \frac{4ih}{\pi}\ln(z) + O\left(\frac{h}{y^2}\right)$$

Наконец, третий интеграл стремится к нулю как первый.

Таким образом асимптотика $f_1(z)$ при $z \to i\infty$ в старшем порядке имеет вид

$$f_1(z) = \frac{1}{2h}\ln(z) + o(1)$$

5 Представление $f_1(z)$ в виде регуляризованного ряда

В интегральном представлении $f_1(z)$ будем тянуть контур γ вправо. В результате мы получим сумму из вычетов в точках $z+h+2kh$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, где n это число полюсов, через которые протянут контур, и остаточный интеграл, с контуром, который проходит между $z+h+2(n-1)h$ и $z+h+2nh$.

$$f_1(z) = \frac{\pi}{8ih^2}\left(\sum_{k=0}^{n-1} -2\pi i \operatorname*{res}_{z'=z+h+2kh} \frac{\ln z'}{\cos^2\left(\frac{\pi(z-z')}{2h}\right)} + \int\limits_{\gamma+2nh} \frac{\ln(z')\,dz'}{\cos^2\left(\frac{\pi(z-z')}{2h}\right)}\right) =$$
$$= -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{z+h+2kh} + \frac{\pi}{8ih^2} \int\limits_{\gamma+2nh} \frac{\ln(z')\,dz'}{\cos^2\left(\frac{\pi(z-z')}{2h}\right)}$$

В последнем интеграле контур проходит через точку $z+2nh$. Воспользуемся формулой Тейлора, чтобы оценить интеграл: на $\gamma+2nh$

$$\ln z' = \ln(z+2nh) + \frac{1}{z+2nh}(z'-z-2nh) + O\left(\frac{(z'-z-2nh)^2}{\mathrm{Re}\left\{z+2nh\right\}^2}\right)$$

Подстравляя это выражение в последний интеграл получим

$$f_1(z) = -\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{z+h+2kh} - \frac{1}{z+2nh} + \frac{1}{2h}\ln(z+2nh) + O\left(\frac{1}{(z+2nh)^2}\right) =$$
$$= -\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{z+h+2kh} + \frac{1}{2h}\ln(z+2nh) + O\left(\frac{1}{(z+2nh)^2}\right)$$

Таким образом,

$$f_1(z) = \lim_{n\to\infty}\left(-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{z+h+2kh} + \frac{1}{2h}\ln(z+2nh)\right)$$

.

Список используемой литературы

[1] А. А. Федотов - Квазиклассические асимптотики функций Малюжинца, Записки научных семинаров ПОМИ Том BABICH, 2016 г.