

Санкт-Петербургский государственный университет  
Физический факультет  
Кафедра радиофизики



**НИЗКОЧАСТОТНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ЗАРЯДА,  
ДВИЖУЩЕГОСЯ ВДОЛЬ ГОФРИРОВАННОЙ  
ПРОВОДЯЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ**

Направление 011800 - радиофизика

Бакалаврская работа студента

дневного отделения

\_\_\_\_\_ Симакова Евгения Сергеевича

Научный руководитель:

\_\_\_\_\_ д. ф.-м. н., проф. Тюхтин А.В.

Рецензент:

\_\_\_\_\_ к.ф.-м.н., доцент Альтмарк А.М.

Санкт-Петербург

2018

# Оглавление

Введение	3
1. Общее решение задачи	6
1.1 Эквивалентные граничные условия	6
1.2 Падающее поле	7
1.3 Отражённое поле	10
2. Исследование отражённого поля	12
2.1 Анализ особенностей в выражениях для вектора Герца отражённого поля	12
2.2 Интеграл по контуру наибыстрейшего спуска	15
2.3 Поверхностные волны	18
2.4 Потери энергии заряда на излучение поверхностных волн	22
2.5 Результаты численных расчётов	24
Заключение	27
Литература	28

## Введение

Данная работа посвящена исследованию излучения заряда, движущегося вдоль гофрированной проводящей поверхности. При этом период структуры предполагается малым по сравнению с характерными длинами рассматриваемых электромагнитных волн.

Необходимо отметить, что периодические структуры широко применяются в науке и технике, прежде всего в электронике СВЧ [1]. Кроме того, периодические структуры находят широкое применение в антенно-волноводной технике, где они выполняют функции периодических излучающих антенн, антенн бегущей волны, линий передачи на поверхностных волнах и многих других [1]. К тому же, периодические структуры являются основными элементами во многих микроэлектронных приборах, например, в полосовых и режекторных фильтрах [1].

В задачах об излучении заряда, движущегося вблизи поверхности, имеющей периодическую структуру, обычно выделяют три случая в зависимости от соотношения между периодом структуры  $d$  и длиной волны  $\lambda$  рассматриваемого электромагнитного излучения:

- $\lambda \gg d$  - длинноволновая область, где длина волны много больше периода структуры;
- $\lambda \ll d$  - область длин волн, которые малы по сравнению с периодом структуры;
- $\lambda \sim d$  - резонансная область, когда период структуры сравним с длиной волны.

В данной работе рассматривается длинноволновое (относительно периода структуры  $d$ ) излучение заряда, движущегося параллельно гофре – непрозрачной проводящей поверхности. Поскольку длина волны много больше периода структуры, то становится возможным использование так называемых эквивалентных граничных условий (ЭГУ), которые в общем случае обладают анизотропными свойствами и имеют вид

$$\vec{E}_\tau = \hat{W} \vec{H}_\tau,$$

где  $\vec{E}_\tau$  и  $\vec{H}_\tau$  - тангенциальные составляющие полного поля на границе раздела двух сред, а  $\hat{W}$  - некоторый интегро-дифференциальный оператор [1]. Метод ЭГУ в этом случае эффективен, так как позволяет заменить точные граничные условия на сложной поверхности некоторыми условиями на более простой (гладкой) поверхности. Таким образом, задача значительно упрощается, и, во многих случаях, мы можем провести строгий аналитический расчёт усреднённого по периоду структуры электромагнитного поля.

Следует отметить, что в современной научной литературе существует довольно много работ, посвященных задаче об излучении зарядов, движущихся вблизи периодических структур. Однако в большинстве из них рассматривается излучение в диапазоне длин волн, которые по порядку величины сравнимы с периодом структуры (резонансная область). Это так называемое излучение Смита-Парселла. Но, поскольку в настоящей работе рассматривается другой волновой диапазон, данная проблематика не пересекается с темой нашего исследования.

Необходимо подчеркнуть, что задачам об излучении заряда в области длин волн, которые много больше периода структуры, в научной литературе уделено не так много внимания. Далее будут кратко рассмотрены некоторые работы по этой тематике.

В статье [2] описывается задача, в которой пучок релятивистских электронов с конечными продольными и поперечными размерами движется с постоянной скоростью вдоль гофрированной поверхности, глубина которой много меньше периода структуры. Авторами было исследовано терагерцевое излучение, генерируемое пучком электронов, и показано, что данное излучение представляет собой короткие импульсы длиной в десятки пс на частоте около 1 ТГц и мощностью несколько МВт.

В работе [3] рассматривается ситуация, в которой пучок релятивистских электронов движется внутри цилиндрического волновода, стенки которого представляют собой гофрированную поверхность. Как и в работе [2], предполагается, что глубина гофры много меньше её периода. В данном случае результаты исследования терагерцевого излучения оказались несколько другими: длительность импульсов на частоте 0.14 ТГц составила 150 пс, а пиковая мощность, по сравнению с пиковой мощностью в задаче, описываемой в статье [2], возросла в несколько раз и оказалась в пределах 50-70 МВт.

В работе [4] описывается задача с прямоугольным волноводом, у которого две противоположные стенки имеют периодическую структуру с прямоугольной образующей, имеющей выступы малой ширины (практически речь идёт о диафрагмах). Авторы охарактеризовали зависимость частоты и амплитуды кильватерного волноводного поля от высоты диафрагм.

В работе [5] рассматривается задача, в которой точечный заряд движется с постоянной скоростью вдоль оси цилиндрического волновода, стенки которого представляют собой гофрированную поверхность с прямоугольной образующей. При этом период и глубина гофры много меньше радиуса волновода и длины волны исследуемого электромагнитного излучения. Авторами были получены зависимости частоты и амплитуды поля от скорости движения заряда. Было показано, что частота излучения уменьшается с увеличением скорости заряда, а также с увеличением ширины канавок гофры и её глубины. Амплитуды компонент поля, «наведённого» гофрированной структурой стенок волновода, с ростом скорости заряда, напротив, увеличиваются.

Помимо работ, посвященных задачам об излучении заряженных частиц, движущихся вблизи гофрированных поверхностей, можно также отметить аналогичные работы, в которых вместо гофры рассматривается металлическая сетка. В одной из таких работ [6] был исследован случай волновода, стенки которого образованы мелкой сеткой с квадратными ячейками.

Учитывая тематику данной работы, существенный интерес для нас представляют также задачи, которые рассматривались в работах [7-10] и некоторых других (см. литературу в [7-10]). В них было исследовано излучение пучка заряженных частиц, движущегося с постоянной скоростью вблизи периодической структуры из тонких параллельных проводов. При этом предполагалось, что длина волны электромагнитного излучения много больше расстояния между проводами. Было рассмотрено два случая движения пучка относительно структуры. В одном из них пучок движется параллельно структуре и перпендикулярно проводам [7,9]. В частности, была исследована поверхностная волна, генерируемая пучком и распространяющаяся вдоль проводов. В другом случае пучок

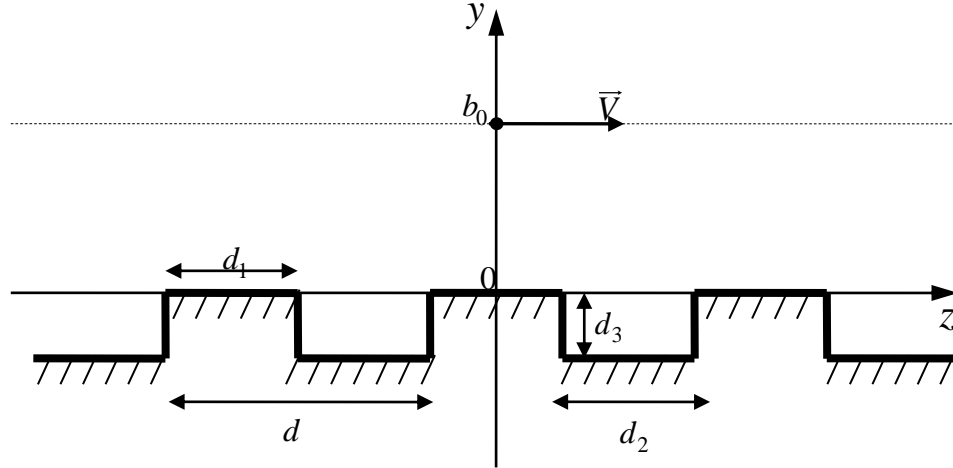
движется перпендикулярно плоскости проводов и пересекает её [8,9]. В данной ситуации излучаются объёмные, так и поверхностные волны. В [9,10] было показано, что структура поверхностных волн в обоих случаях позволяет определить размеры пучка. В работе [10] рассматривался случай, когда область, занимаемая проводами, представляет собой полуплоскость, а пучок заряженных частиц движется перпендикулярно ей вблизи края полуплоскости. В этой работе также было исследовано как объёмное, так и поверхностное излучение, и показана возможность применения последнего для определения размера пучка.

Цель данной работы – исследование относительно низкочастотного излучения заряда, движущегося вдоль гофрированной проводящей поверхности. Для достижения поставленной цели были решены следующие задачи: нахождение компонент падающего и отражённого электромагнитных полей с использованием метода ЭГУ, аналитическое исследование найденных полей, получение некоторых численных результатов.

# 1. Общее решение задачи

## 1.1 Эквивалентные граничные условия

Рассмотрим гофрированную поверхность, изображенную на рис. 1.1.



**Рис.1.1.** Гофрированная поверхность и движущийся заряд.

Поверхность является идеально проводящей и имеет параметры  $d$ ,  $d_1$ ,  $d_2$ ,  $d_3$ , показанные на рис. 1.1. В случае, когда период структуры  $d$  и глубина гофры  $d_3$  много меньше характерных длин рассматриваемых электромагнитных волн  $\lambda$ , то есть

$$d \ll \lambda, \quad d_3 \ll \lambda, \quad (1.1.1)$$

гофрированную структуру можно заменить гладкой поверхностью, на которой выполняются эквивалентные граничные условия, имеющие вид [1]

$$\begin{cases} E_z = \eta^m H_x \\ E_x = \eta^e H_z \end{cases}, \quad (1.1.2)$$

где

$$\eta^m = ik_0 \left( \frac{d_2 d_3}{d} - \delta \frac{\alpha_z^2}{1 - \alpha_x^2} \right), \quad \eta^e = -ik_0 \delta (1 - \alpha_x^2). \quad (1.1.3)$$

Здесь  $\alpha_x = \frac{k_x}{k_0}$ ,  $\alpha_z = \frac{k_z}{k_0}$ ,  $k_0 = \frac{\omega}{c}$ ,  $\omega$  - частота электромагнитного поля,  $c$  - скорость света в

вакууме,  $k_x$  и  $k_z$  - компоненты трёхмерного волнового вектора  $\vec{k}$ . Параметр гофры  $\delta$  может быть найден по формуле [1]

$$\delta = d_3 + \frac{d}{2\pi} \ln \left( \frac{\sigma - 1}{\sigma} \right) + \frac{td}{2\pi} \int_0^{\frac{1}{\sigma}} \frac{du}{\sqrt{(1-u)(1-\sigma u)}(\sqrt{1-tu}+1)}, \quad (1.1.4)$$

где величины  $t$  и  $\sigma$  определяются из следующей системы трансцендентных уравнений:

$$\int_0^t \frac{\sqrt{t-u}}{\sqrt{u(1-u)(\sigma-u)}} du = \pi \frac{d_1}{d}, \quad \int_t^1 \frac{\sqrt{u-t}}{\sqrt{u(1-u)(\sigma-u)}} du = 2\pi \frac{d_3}{d}. \quad (1.1.5)$$

Отметим, что в случае системы диафрагм ( $d_1 \rightarrow 0, d_2 \rightarrow d$ ) параметр  $\delta$  определяется простой формулой [1]:

$$\delta = d_3 - \frac{d}{\pi} \ln \left( \cosh \left( \frac{\pi d_3}{d} \right) \right). \quad (1.1.6)$$

## 1.2 Падающее поле

Мы предполагаем, что пучок заряженных частиц движется с постоянной скоростью  $\vec{V} = V_z \vec{e}_z$  ( $V_z \equiv V$ ) параллельно поверхности и перпендикулярно канавкам гофры. Будем считать, что пучок имеет бесконечно малые поперечные размеры и произвольное распределение заряда вдоль оси движения. Объёмные плотности заряда и тока можно записать в виде

$$\rho = q\delta(x)\delta(y-b_0)\eta(z-Vt), \quad j_z \equiv j = Vq\delta(x)\delta(y-b_0)\eta(z-Vt), \quad (1.2.1)$$

где  $\eta(z-Vt)$  - плотность распределения заряда в пучке (профиль пучка) вдоль оси движения,  $q$  - заряд пучка,  $\delta(x)$  - дельта-функция Дирака,  $b_0$  - расстояние от траектории пучка до периодической структуры (рис. 1.1; ось « $x$ » направлена перпендикулярно плоскости рисунка, “от нас”).

Для описания электромагнитного поля воспользуемся вектором Герца. Полное электромагнитное поле будем представлять в виде суммы собственного поля пучка (т. е. поля пучка в безграничном вакууме) и поля, возникающего за счет гофрированной поверхности:

$$\vec{\Pi} = \vec{\Pi}^i + \vec{\Pi}^r. \quad (1.2.2)$$

Как известно, из уравнений Максвелла для вакуума

$$\begin{cases} \text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \\ \text{div} \vec{D} = 4\pi\rho \\ \text{div} \vec{B} = 0 \end{cases} \quad (1.2.3)$$

при использовании калибровки Лоренца  $\text{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$  вытекает уравнение Гельмгольца

для векторного потенциала:

$$\left\{ \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (1.2.4)$$

Связь вектора Герца с векторным потенциалом  $\vec{A}$  даётся формулой

$$\vec{A} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\Pi}}{\partial t} = -\frac{i\omega}{c} \vec{\Pi} = -ik_0 \vec{\Pi}. \quad (1.2.5)$$

Рассмотрим сначала собственное поле пучка (падающее поле, то есть поле пучка в неограниченном вакууме). Так как плотность тока  $\vec{j}$  имеет только z-компоненту, то, согласно уравнению Гельмгольца (1.2.4), только z-компоненту имеет и потенциал  $\vec{A}$ . Тогда, используя связь (1.2.5), мы видим, что падающее поле описывается однокомпонентным вектором Герца

$$\vec{\Pi} = \Pi_z^i \vec{e}_z. \quad (1.2.6)$$

Подставив (1.2.5) в (1.2.4), получим уравнение Гельмгольца для потенциала Герца

$$\{\Delta + k_0^2\} \Pi_z^i = \frac{4\pi}{ick_0} j. \quad (1.2.7)$$

Перейдём в этом уравнении к Фурье-образам по частоте и трёхмерному волновому вектору:

$$\{-k^2 + k_0^2\} \Pi_{z\omega, \vec{k}}^i = \frac{4\pi}{ick_0} j_{\omega, \vec{k}}, \quad (1.2.8)$$

где

$$j_{\omega, \vec{k}} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} d^3 \vec{r} \int_{-\infty}^{+\infty} dt j(\vec{r}, t) e^{-i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} = \frac{1}{(2\pi)^2} q \eta_\omega e^{-ik_y b_0} \delta\left(k_z - \frac{k_0}{\beta}\right). \quad (1.2.9)$$

Здесь  $\beta = \frac{V}{c}$ , а  $\eta_\omega$  - Фурье-образ профиля пучка:

$$\eta_\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\zeta \eta(\zeta) e^{-ik_z \zeta}, \quad \zeta = z - Vt. \quad (1.2.10)$$

Таким образом, Фурье-образ вектора Герца  $\vec{\Pi} = \Pi_z^i \vec{e}_z$  по частоте и волновому вектору имеет вид

$$\Pi_{z\omega, \vec{k}}^i = \frac{iq \eta_\omega e^{-ik_y b_0} \delta\left(k_z - \frac{k_0}{\beta}\right)}{\pi \omega (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - k_0^2)}. \quad (1.2.11)$$

Применяя обратное преобразование Фурье, можем найти z-компоненту вектора Герца падающего поля

$$\begin{aligned} \Pi_z^i(\vec{r}, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} d^3 \vec{k} d\omega \Pi_{z\omega, \vec{k}}^i e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} = \\ &= \frac{iq}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y \int_{-\infty}^{+\infty} dk_z \frac{\eta_\omega}{\omega} \delta\left(k_z - \frac{k_0}{\beta}\right) \frac{e^{ik_x x + ik_y (y-b_0) + ik_z z - i\omega t}}{k_y^2 + k_x^2 + k_z^2 - k_0^2}. \end{aligned} \quad (1.2.12)$$

Интеграл по  $k_z$  легко берётся за счет дельта-функции  $\delta\left(k_z - \frac{k_0}{\beta}\right)$ :



$$\Pi_z^i(\vec{r}, t) = \frac{iq}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y \frac{\eta_\omega e^{ik_x x + ik_y(y-b_0) + i\frac{k_0}{\beta} z - i\omega t}}{\omega \left( k_y^2 + k_x^2 + k_0^2 \frac{1-\beta^2}{\beta^2} \right)}. \quad (1.2.13)$$

Теперь отдельно рассмотрим интеграл по  $k_y$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y \frac{e^{ik_y(y-b_0)}}{k_y^2 + k_x^2 + k_0^2 \frac{1-\beta^2}{\beta^2}}. \quad (1.2.14)$$

Будем брать этот интеграл по вычетам. Для этого дополним контур интегрирования (вещественную ось  $R$ ) полуокружностью бесконечно большого радиуса  $\Gamma_+$  в верхней полуплоскости, если  $y > b_0$ , и полуокружностью бесконечно большого радиуса  $\Gamma_-$  в нижней полуплоскости, если  $y < b_0$ . Подынтегральная функция имеет два полюса

$$k_y = \pm k_{y0} = \pm i \sqrt{k_x^2 + k_0^2 \frac{1-\beta^2}{\beta^2}}. \text{ Зафиксируем знак мнимой части } k_{y0} \text{ по правилу } \text{Im } k_{y0} > 0.$$

Тогда контур  $C_+ = R + \Gamma_+$  охватывает полюс со знаком “+”, а контур  $C_- = R + \Gamma_-$  охватывает полюс со знаком “-“. Вычисляя интеграл  $I$  для  $y > b_0$  (верхний знак) и  $y < b_0$  (нижний знак), получаем

$$I = \int_{C_\pm} dk_y \frac{e^{ik_y(y-b_0)}}{k_y^2 + k_x^2 + k_0^2 \frac{1-\beta^2}{\beta^2}} = \pm 2\pi i \text{ res}_{k_y = \pm k_{y0}} \frac{e^{ik_y(y-b_0)}}{k_y^2 - k_{y0}^2} = \pi i \frac{e^{ik_{y0}|y-b_0|}}{k_{y0}}, \quad (1.2.15)$$

Таким образом, выражение для z-компоненты вектора Герца падающего поля имеет вид

$$\Pi_z^i(\vec{r}, t) = -qe^{i\frac{k_0 z}{\beta} + \dots} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{\eta_\omega}{\omega k_{y0}} e^{ik_x x + ik_{y0}|y-b_0| - i\omega t}, \quad (1.2.16)$$

где  $k_{y0} = i \sqrt{k_x^2 + k_0^2 \frac{1-\beta^2}{\beta^2}}$ , причём  $\text{Im } k_{y0} > 0$ .

Фурье-образ электрического поля выражается через вектор Герца по формуле

$$\vec{E}_\omega = \vec{\nabla} \text{div} \vec{\Pi}_\omega + k_0^2 \vec{\Pi}_\omega. \quad (1.2.17)$$

В случае собственного поля пучка:

$$\vec{\Pi}_\omega = \Pi_{z\omega}^i \vec{e}_z, \quad \Pi_{z\omega}^i = -\frac{q}{\omega} \eta_\omega e^{i\frac{k_0 z}{\beta} + \dots} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \frac{e^{ik_x x + ik_{y0}|y-b_0|}}{k_{y0}}. \quad (1.2.18)$$

Для дальнейших рассуждений удобно записать полученный по формуле (1.2.17) Фурье-образ электрического поля по частоте и x-компоненте волнового вектора:

$$E_{x\omega, k_x}^i = \frac{q\eta_\omega}{c\beta} \frac{k_x}{k_{y0}} e^{ik_{y0}|y-b_0| + i\frac{k_0 z}{\beta}}, \quad (1.2.19)$$

$$E_{y\omega, k_x}^i = \frac{q\eta_\omega}{c\beta} \text{sgn}(y-b_0) e^{ik_{y0}|y-b_0| + i\frac{k_0 z}{\beta}}, \quad (1.2.20)$$

$$E_{z\omega,k_x}^i = \frac{1-\beta^2}{\beta^2} \frac{q\eta_\omega k_0}{ck_{y0}} e^{ik_{y0}|y-b_0|+i\frac{k_0z}{\beta}}. \quad (1.2.21)$$

Магнитную составляющую падающего поля найдем через связь напряженности  $\vec{H}$  и векторного потенциала  $\vec{A}$ :

$$\vec{H} = \text{rot } \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}. \quad (1.2.22)$$

Используя соотношение (1.2.5) и учитывая тот факт, что векторный потенциал падающего поля имеет только z-компоненту  $\vec{A}^i = A_z^i \vec{e}_z$ , получим

$$H_{x\omega,k_x}^i = -\frac{q\eta_\omega}{c} \text{sgn}(y-b_0) e^{ik_{y0}|y-b_0|+i\frac{k_0z}{\beta}}, \quad (1.2.23)$$

$$H_{y\omega,k_x}^i = \frac{q\eta_\omega}{c} \frac{k_x}{k_{y0}} e^{ik_{y0}|y-b_0|+i\frac{k_0z}{\beta}}, \quad (1.2.24)$$

$$H_{z\omega,k_x}^i = 0. \quad (1.2.25)$$

### 1.3 Отражённое поле

Теперь обратимся к полю, возникающему за счет гофрированной поверхности. Учитывая вид эквивалентных граничных условий (1.1.2), данное поле можно представить через двухкомпонентный вектор Герца  $\vec{\Pi}^r = \Pi_x^r \vec{e}_x + \Pi_z^r \vec{e}_z$ . Введём произвольные коэффициенты «отражения»  $R_z$  и  $R_x$  и воспользуемся полученной формулой для вектора Герца падающего поля (1.2.16). Тогда

$$\Pi_{z\omega,k_x}^r = -\frac{q\eta_\omega}{\omega k_{y0}} R_z e^{ik_{y0}(y+b_0)+i\frac{k_0z}{\beta}}, \quad (1.3.1)$$

$$\Pi_{x\omega,k_x}^r = -\frac{q\eta_\omega}{\omega k_{y0}} R_x e^{ik_{y0}(y+b_0)+i\frac{k_0z}{\beta}}. \quad (1.3.2)$$

В этом случае компоненты электромагнитного поля, «наведённого» периодической структурой, примут вид:

$$E_{x\omega,k_x}^r = \frac{q\eta_\omega}{ck_{y0}} \left( R_x \left( \frac{k_x^2}{k_0} - k_0 \right) + R_z \frac{k_x}{\beta} \right) e^{ik_{y0}(y+b_0)+i\frac{k_0z}{\beta}}, \quad (1.3.3)$$

$$E_{y\omega,k_x}^r = \frac{q\eta_\omega}{c} \left( R_x \frac{k_x}{k_0} + R_z \frac{1}{\beta} \right) e^{ik_{y0}(y+b_0)+i\frac{k_0z}{\beta}}, \quad (1.3.4)$$

$$E_{z\omega,k_x}^r = \frac{q\eta_\omega}{ck_{y0}} \left( R_x \frac{k_x}{\beta} + R_z k_0 \frac{1-\beta^2}{\beta^2} \right) e^{ik_{y0}(y+b_0)+i\frac{k_0z}{\beta}}, \quad (1.3.5)$$

$$H_{x\omega,k_x}^r = -\frac{q\eta\omega}{c} R_z e^{ik_{y0}(y+b_0)+i\frac{k_0z}{\beta}}, \quad (1.3.6)$$

$$H_{y\omega,k_x}^r = \frac{q\eta\omega}{ck_{y0}} \left( R_z k_x - R_x \frac{k_0}{\beta} \right) e^{ik_{y0}(y+b_0)+i\frac{k_0z}{\beta}}, \quad (1.3.7)$$

$$H_{z\omega,k_x}^r = \frac{q\eta\omega}{c} R_x e^{ik_{y0}(y+b_0)+i\frac{k_0z}{\beta}}, \quad (1.3.8)$$

где коэффициенты «отражения»  $R_z$  и  $R_x$  - неизвестные величины. Найдём их, решив систему, вытекающую из граничных условий:

$$\begin{cases} E_{z\omega,k_x}^i + E_{z\omega,k_x}^r = \eta^m (H_{x\omega,k_x}^i + H_{x\omega,k_x}^r) \\ E_{x\omega,k_x}^i + E_{x\omega,k_x}^r = \eta^e (H_{z\omega,k_x}^i + H_{z\omega,k_x}^r) \end{cases}. \quad (1.3.9)$$

Величины  $\eta^m$  и  $\eta^e$  здесь определены соотношениями (1.1.3). В итоге получим

$$R_z = -\frac{k_x^2 k_0 + \left( (1-\beta^2)k_0 - k_{y0}\beta^2\eta^m \right) (k_0^2 - k_x^2 + k_{y0}k_0\eta^e)}{k_x^2 k_0 + \left( (1-\beta^2)k_0 + k_{y0}\beta^2\eta^m \right) (k_0^2 - k_x^2 + k_{y0}k_0\eta^e)}, \quad (1.3.10)$$

$$R_x = \frac{2k_0 k_x k_{y0} \beta \eta^m}{k_x^2 k_0 + \left( (1-\beta^2)k_0 + k_{y0}\beta^2\eta^m \right) (k_0^2 - k_x^2 + k_{y0}k_0\eta^e)}, \quad (1.3.11)$$

где  $k_{y0} = i\sqrt{k_x^2 + k_0^2 \frac{1-\beta^2}{\beta^2}}$ .

## 2. Исследование отражённого поля

### 2.1 Анализ особенностей в выражениях для вектора Герца отражённого поля

Согласно (1.3.1) и (1.3.2), Фурье-образы для компонент вектора Герца по частоте имеют вид

$$\begin{Bmatrix} \Pi_{z\omega}^r \\ \Pi_{x\omega}^r \end{Bmatrix} = -\frac{q}{\omega} \eta_\omega e^{i\frac{k_0 z}{\beta} + \infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \begin{Bmatrix} R_z \\ R_x \end{Bmatrix} \frac{e^{i\Phi(k_x)}}{k_{y0}}, \quad (2.1.1)$$

где  $\Phi(k_x) = k_x x + k_{y0}(y + b_0)$ . В подынтегральном выражении имеется функция

$$k_{y0} = i \sqrt{k_x^2 + k_0^2 \frac{1 - \beta^2}{\beta^2}}, \quad (2.1.2)$$

обладающая двумя точками ветвления  $k_x = k_{x1,2} = \pm i \frac{k_0}{\beta} \sqrt{1 - \beta^2}$  (точке  $k_{x1}$  соответствует

знак «+», а точке  $k_{x2}$  - знак «-»). Как отмечалось выше, на вещественной оси данная

функция определена правилом  $\text{Im} k_{y0} > 0$ , то есть  $\text{Re} \sqrt{k_x^2 + k_0^2 \frac{1 - \beta^2}{\beta^2}} > 0$ . Целесообразно

распространить это правило на весь «верхний лист» римановой поверхности для данной функции. Тогда разрезы будут проходить по мнимой оси на  $\pm i\infty$ .

Другими особенностями подынтегральной функции в формуле (2.1.1) являются нули знаменателя в выражениях для коэффициентов «отражения» (1.3.10) и (1.3.11). Найдём данные полюса, решив уравнение

$$k_x^2 k_0 + \left( (1 - \beta^2) k_0 + k_{y0} \beta^2 \eta^m \right) (k_0^2 - k_x^2 + k_{y0} k_0 \eta^e) = 0, \quad (2.1.3)$$

где величины

$$\eta^m = ik_0 \left( \frac{d_2 d_3}{d} - \delta \frac{k_0^2}{\beta^2 (k_0^2 - k_x^2)} \right), \quad (2.1.4)$$

$$\eta^e = -i \frac{\delta}{k_0} (k_0^2 - k_x^2), \quad (2.1.5)$$

$$k_{y0} = i \sqrt{k_x^2 + k_0^2 \frac{1 - \beta^2}{\beta^2}} \quad (2.1.6)$$

также зависят от  $k_x$ . Напомним, что мы рассматриваем электромагнитное излучение с длинами волн  $\lambda \gg d$ , где  $d$  - период структуры. Отсюда следует, что  $k_0 d \ll 1$ , то есть произведение  $k_0 d$  - малый параметр задачи. Если к тому же учесть, что параметр гофры  $\delta$ , стоящий в выражениях для  $\eta^m$  и  $\eta^e$ , также порядка  $d$ , то получим

$$|\eta^m| \sim |\eta^e| \ll 1. \quad (2.1.7)$$

Если в уравнении (2.1.3) пренебречь величинами  $\eta^m$  и  $\eta^e$ , то получим простое уравнение

$$k_x^2 k_0 + (1 - \beta^2)(k_0^2 - k_x^2) = 0, \quad (2.1.8)$$

которое имеет два чисто мнимых решения  $k_{x1,2} = \pm i k_0 \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{\beta}$ . Вклад таких полюсов

экспоненциально убывает с ростом  $|x|$ , то есть не относится к волновому полю (полю излучения). Это естественно, так как фактически мы заменили гофрированную поверхность на идеально проводящую плоскость, при движении вдоль которой никакого излучения нет.

Вернёмся к исходному уравнению (2.1.3) и перепишем его, раскрыв скобки:

$$k_x^2 k_0 + (1 - \beta^2)(k_0^2 - k_x^2) k_0 + k_{y0} \beta^2 (k_0^2 - k_x^2) \eta^m + (1 - \beta^2) k_0^2 k_{y0} \eta^e + k_0 k_{y0} \beta^2 \eta^m \eta^e = 0. \quad (2.1.9)$$

Подставив сюда формулы (2.1.4)-(2.1.6) и сделав некоторые преобразования, получим

$$\begin{aligned} & \sqrt{k_x^2 + k_0^2 \frac{1 - \beta^2}{\beta^2}} \left\{ \sqrt{k_x^2 + k_0^2 \frac{1 - \beta^2}{\beta^2}} \left( \beta^2 (k_x^2 d_0 \delta - k_0^2 d_0 \delta + 1) + k_0^2 \delta^2 \right) + \right. \\ & \left. + k_x^2 \left( \beta^2 d_0 - (1 - \beta^2) \delta \right) + k_0^2 \left( (2 - \beta^2) \delta - \beta^2 d_0 \right) \right\} = 0. \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

Здесь введено обозначение  $d_0 = \frac{d_2 d_3}{d}$ .

Рассмотрим наиболее важный для нас ультрарелятивистский режим движения заряда, то есть случай, когда параметр  $\beta \rightarrow 1$ . Тогда выражение (2.1.10) примет вид

$$\sqrt{k_x^2} \left\{ \sqrt{k_x^2} \left( 1 + k_x^2 d_0 \delta - k_0^2 d_0 \delta + k_0^2 \delta^2 \right) + k_x^2 d_0 + k_0^2 (\delta - d_0) \right\} = 0. \quad (2.1.11)$$

Поскольку  $k_0 d$  - малый параметр задачи, сумма в фигурных скобках имеет слагаемые нулевого, первого и второго порядка малости. Ограничимся линейным приближением и, приравняв к нулю выражение в скобках, найдём

$$\sqrt{k_x^2} = -k_x^2 d_0 + k_0^2 (d_0 - \delta). \quad (2.1.12)$$

В нулевом приближении есть только одно решение  $k_x = 0$ . Поэтому в первом приближении (2.1.12) имеем

$$\sqrt{k_x^2} = k_0^2 (d_0 - \delta). \quad (2.1.13)$$

Учитывая, что, как показывают расчёты, обычно  $d_0 > \delta$ , в первом приближении получаем два вещественных решения:

$$\pm k_{x0} = \pm k_0^2 (d_0 - \delta). \quad (2.1.14)$$

В случае произвольной скорости заряда решения уравнения (2.1.11) в нулевом приближении имеют вид  $k_x^2 = -k_0^2 \frac{1-\beta^2}{\beta^2}$ . Тогда в первом приближении получим

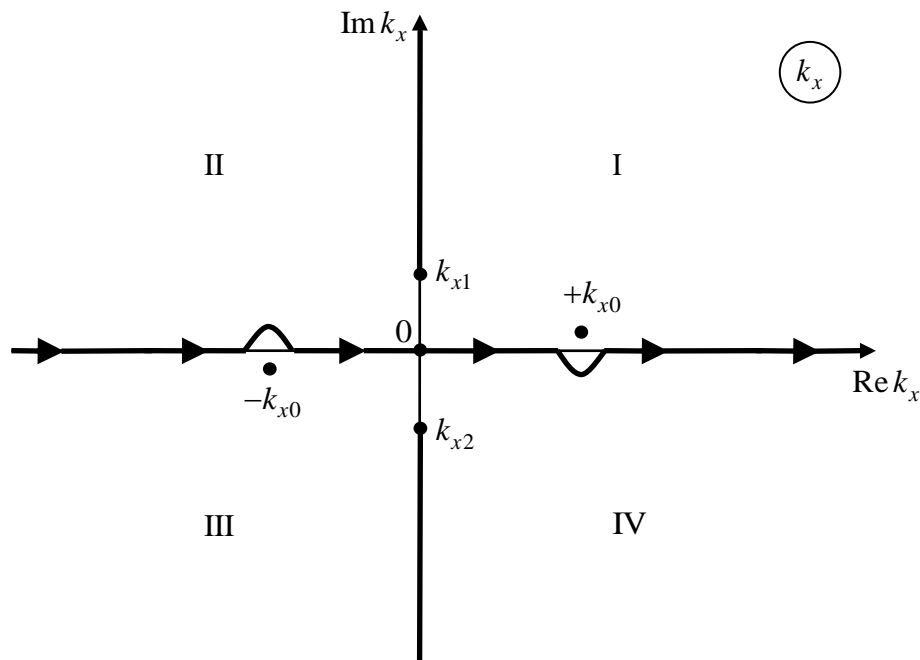
$$\begin{aligned} \sqrt{k_x^2 + k_0^2 \frac{1-\beta^2}{\beta^2}} \beta^2 &= k_0^2 \frac{1-\beta^2}{\beta^2} (\beta^2 d_0 - (1-\beta^2)\delta) - k_0^2 ((2-\beta^2)\delta - \beta^2 d_0) = \\ &= k_0^2 \left( d_0 - \frac{\delta}{\beta^2} \right). \end{aligned} \quad (2.1.15)$$

Откуда следует, что

$$k_x^2 = -k_0^2 \frac{1-\beta^2}{\beta^2} + \frac{k_0^4}{\beta^4} \left( d_0 - \frac{\delta}{\beta^2} \right)^2. \quad (2.1.16)$$

Решение получилось мнимым, поскольку поправка меньше главного члена. Это показывает, что вещественных решений при значениях параметра  $\beta$ , не близких к единице, не существует. А при значениях  $\beta$ , близких к единице, использовать (2.1.16) нельзя, так как поправка становится больше нулевого члена.

На рис. 2.1 показаны точки ветвления  $k_{x1,2}$ , разрезы, полюсы  $\pm k_{x0}$  и контур интегрирования с учётом правила обхода полюсов.



**Рис.2.1.** Расположение полюсов, точек ветвления, разрезов и контура интегрирования на комплексной плоскости  $k_x$ .

Такое расположение полюсов относительно контура интегрирования может быть получено с помощью метода введения малого затухания. Это легко проследить на

примере ультрарелятивистского случая, когда справедливо приближение (2.1.14). Для учёта исчезающе малого затухания достаточно сделать замену  $k_0 \equiv \frac{\omega}{c}$  на  $k_0 + i\sigma$ , где  $\sigma \rightarrow +0$ . Тогда вместо (2.1.14) имеем

$$\pm k_{x0} \approx \pm k_0 (d_0 - \delta)(k_0 + 2i\sigma). \quad (2.1.17)$$

Как видим, вещественная и мнимая части в этом выражении для полюса  $+k_{x0}$  всегда положительны, а для полюса  $-k_{x0}$  всегда отрицательны. Положительность вещественной и мнимой частей  $+k_{x0}$  означает, что соответствующая волна затухает с ростом  $x$  и, в то же время, проекция её фазовой скорости на ось  $x$  положительна. Аналогичный вывод можно сделать и в общем случае произвольной скорости движения заряда.

## 2.2 Интеграл по контуру наибо́льшего спуска

Будем исследовать асимптотическое поведение интеграла (2.1.1) методом перевала. Для удобства сначала сделаем замену переменной интегрирования

$$k_x = \frac{k_0}{\beta} \sqrt{1 - \beta^2} \operatorname{sh} \chi, \quad (2.2.1)$$

где  $\operatorname{sh} \chi$  - гиперболический синус. Тогда  $k_{y0} = i \frac{k_0}{\beta} \sqrt{1 - \beta^2} \operatorname{ch} \chi$ , и интеграл (2.1.1) примет следующий вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \Pi_{z\omega}^r \\ \Pi_{x\omega}^r \end{array} \right\} = i \frac{q}{\omega} \eta_\omega e^{i \frac{k_0 z}{\beta} + \infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\chi \left\{ \begin{array}{l} R_z \\ R_x \end{array} \right\} e^{i\Phi(\chi)}, \quad (2.2.2)$$

где фаза  $\Phi(\chi) = \frac{k_0}{\beta} \sqrt{1 - \beta^2} (x \operatorname{sh} \chi + i(y + b_0) \operatorname{ch} \chi)$ . Следует отметить, что замена (2.2.1) позволила нам избавиться от точек ветвления в выражении (2.1.1).

Стационарные точки  $\chi = \chi_s$  определяются из условия

$$\left. \frac{d\Phi(\chi)}{d\chi} \right|_{\chi=\chi_s} = \frac{k_0}{\beta} \sqrt{1 - \beta^2} (x \operatorname{ch} \chi_s + i(y + b_0) \operatorname{sh} \chi_s) = 0. \quad (2.2.3)$$

Отсюда найдём, что  $\operatorname{sh} \chi_s = i \frac{x}{y + b_0} \operatorname{ch} \chi_s$ , и, воспользовавшись тригонометрическим тождеством  $\operatorname{ch}^2 \xi - \operatorname{sh}^2 \xi = 1$ , получим

$$\operatorname{ch} \chi_{s\pm} = \pm \frac{y + b_0}{\sqrt{x^2 + (y + b_0)^2}}, \quad (2.2.4)$$

где  $\chi_{s+}$  соответствует знаку «+» в правой части равенства, а  $\chi_{s-}$  - знаку «-». Из данного выражения видно, что  $\operatorname{ch} \chi_{s\pm} < 1$ . Следовательно, на комплексной плоскости  $\chi$  стационарные точки являются чисто мнимыми величинами

$$\chi_{s\pm} = i\chi_{s\pm}'''. \quad (2.2.5)$$

Учитывая данный факт, равенство (2.2.4) можно переписать в виде

$$\operatorname{ch} \chi_{s\pm} = \cos \chi''_{s\pm} = \pm \frac{y+b_0}{\sqrt{x^2 + (y+b_0)^2}}. \quad (2.2.6)$$

Здесь было использовано тригонометрическое тождество  $\operatorname{ch}(i\xi) = \cos \xi$ .

Ранее мы зафиксировали  $\operatorname{Im} k_{y_0} > 0$ . Отсюда следует, что (в новой переменной  $\chi$ )

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{k_0}{\beta} \sqrt{1-\beta^2} \operatorname{ch} \chi \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{k_0}{\beta} \sqrt{1-\beta^2} \left( \operatorname{ch} \chi' \cos \chi'' + i \operatorname{sh} \chi' \sin \chi'' \right) \right\} > 0 \Rightarrow \cos \chi'' > 0. \quad (2.2.7)$$

Таким образом, отображение «верхнего» листа плоскости  $k_x$  на плоскость  $\chi$  есть «полосы»

$$\begin{cases} \chi = \chi' + i\chi'' \\ -\infty < \chi' < +\infty \\ -\frac{\pi}{2} + \pi m < \chi'' < \frac{\pi}{2} + \pi m \end{cases}, \quad (2.2.8)$$

где  $m$  - чётное число. «Нижний» лист отображается на аналогичные полосы с нечётным значением  $m$ . Мы будем рассматривать далее области, где  $m = 0, 1$ , то есть  $-\frac{\pi}{2} < \chi'' < \frac{3\pi}{2}$ .

Из равенства (2.2.4) видно, что стационарная точка  $\chi_{s+}$  лежит в полосе  $\chi'' \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  (при  $m = 0$ ), а стационарная точка  $\chi_{s-}$  - в полосе  $\chi'' \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$  (при  $m = 1$ ).

Поскольку отображение «верхнего» листа плоскости  $k_x$  есть полоса

$$\begin{cases} \chi = \chi' + i\chi'' \\ -\infty < \chi' < +\infty \\ -\frac{\pi}{2} < \chi'' < \frac{\pi}{2}, m = 0 \end{cases}, \quad (2.2.9)$$

то нас интересует только точка  $\chi_{s+} = i\chi''_{s+}$ .

Контур наибоыстрейшего спуска  $\Gamma_+^*$  (КНС) проходит через стационарную точку  $\chi_{s+}$  и удовлетворяет следующим условиям

$$\begin{cases} \operatorname{Re} \Phi(\chi) = \operatorname{Re} \Phi(\chi_{s+}) \\ \operatorname{Im} \Phi(\chi) > \operatorname{Im} \Phi(\chi_{s+}) \end{cases}. \quad (2.2.10)$$

Первое условие принимает вид

$$x \operatorname{sh} \chi' \left( \cos \chi'' - \frac{(y+b_0)}{x} \sin \chi'' \right) = 0. \quad (2.2.11)$$

Перепишем его следующим образом



$$\pm |x| \operatorname{sh} \chi' \left( \cos \chi'' \mp \frac{(y+b_0)}{|x|} \sin \chi'' \right) = 0, \quad (2.2.12)$$

где верхний знак соответствует положительным значениям  $x$ , а нижний знак – отрицательным значениям  $x$ . Поскольку  $\cos \chi''_{s+} = \frac{y+b_0}{\sqrt{x^2+(y+b_0)^2}}$ , то можно показать, что

$$\operatorname{ctg} \chi''_{s+} = \pm \frac{y+b_0}{|x|}. \quad (2.2.13)$$

Пусть  $\chi''_{s+} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ . Тогда  $\operatorname{ctg} \chi''_{s+} = \frac{y+b_0}{|x|}$ . Подставив данное равенство в уравнение (2.2.12), получим

$$\pm \frac{|x| \operatorname{sh} \chi'}{\sin \chi''_{s+}} \sin \left( \chi''_{s+} \mp \chi'' \right) = 0. \quad (2.2.14)$$

Отсюда следует, что при  $x > 0$  (верхний знак)  $\chi'' = \chi''_{s+}$ , а при  $x < 0$  (нижний знак)  $\chi'' = -\chi''_{s+}$ . Аналогичный результат получим, если  $\chi''_{s+} \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ , то есть когда  $\operatorname{ctg} \chi''_{s+} = -\frac{y+b_0}{|x|}$ . Поскольку значение  $\chi = i\chi'' = i\chi''_{s+}$  не противоречит второму условию в системе (2.2.10), то мы можем заключить, что КНС является прямой линией, параллельной вещественной оси на плоскости  $\chi$ , и лежит при  $x > 0$  в области  $\chi'' \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , а при  $x < 0$  - в области  $\chi'' \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ .

На рис 2.2 изображена комплексная плоскость  $\chi$  с контуром интегрирования  $R$ , контуром наискорейшего спуска  $\Gamma_+^*$  (при  $x > 0$ ), полюсами  $\pm \chi_0$  и стационарными точками  $\chi_{s\pm} = i\chi''_{s\pm}$ . Римскими цифрами отмечены области, соответствующие квадрантам плоскости  $k_x$  (римские цифры со штрихом соответствуют квадрантам «нижнего листа» плоскости  $k_x$ ). Стоит отметить, что расположение полюсов  $\pm \chi_0$  на плоскости  $\chi$  имеет схожий вид с расположением данных полюсов на плоскости  $k_x$ .

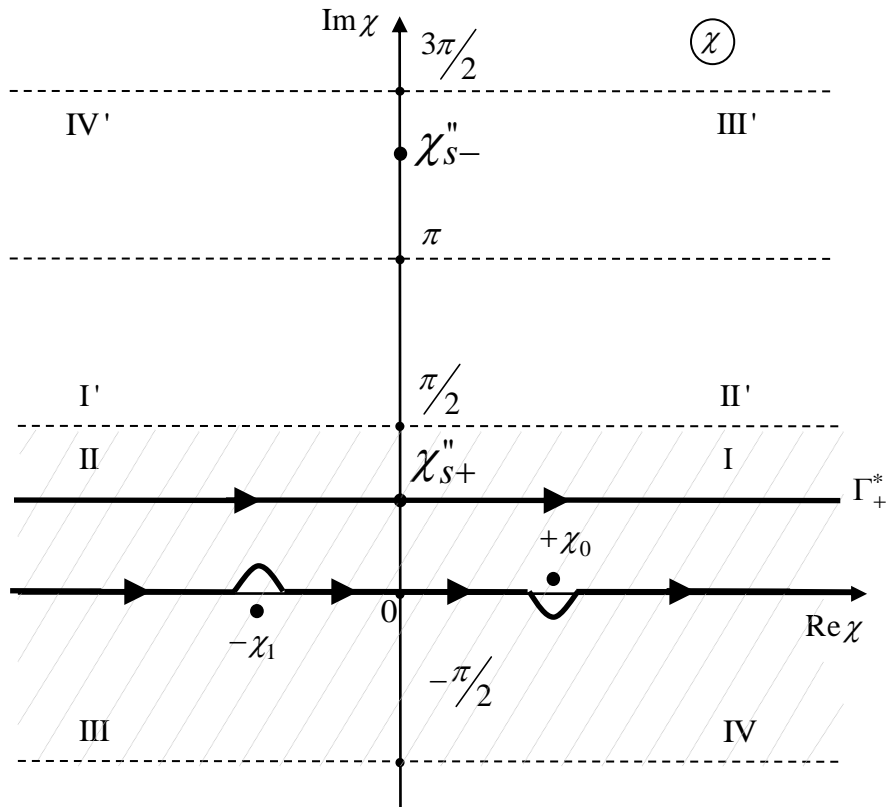
В результате, интеграл (2.2.2), идущий по КНС, можно оценить по стандартной формуле (для  $z$ -компоненты)

$$\Pi_{z\omega}^r \sim \sqrt{\frac{-2\pi}{i\Phi(\chi_{s+})}} f_z(\chi_{s+}) e^{i\Phi(\chi_{s+}) \pm i\frac{\pi}{4}}. \quad (2.2.15)$$

где  $f_z(\chi_{s+}) = i \frac{q}{\omega} \eta_\omega e^{i\frac{k_0 z}{\beta}} R_z(\chi_{s+})$  и  $\Phi(\chi_{s+}) = i \frac{k_0}{\beta} \sqrt{1-\beta^2} \frac{x^2+(y+b_0)^2}{y+b_0} \operatorname{ch} \chi_{s+}$ . Учитывая

выражение (2.2.4), функцию  $\Phi(\chi_{s+})$  можно записать в виде

$$\Phi(\chi_{s+}) = i \frac{k_0}{\beta} \sqrt{1-\beta^2} \sqrt{x^2+(y+b_0)^2}. \quad (2.2.16)$$



**Рис.2.2.** Расположение полюсов, исходного контура интегрирования и контура наибоыстрейшего спуска на комплексной плоскости  $\chi$ . Римскими цифрами обозначены области, соответствующие квадрантам плоскости  $k_x$  (для верхнего листа - без штриха, для нижнего листа - со штрихом).

Аналогичные результаты получаются и для  $x$ -компоненты вектора Герца.

Из выражения (2.2.15) видно, что, в силу мнимости  $\Phi(\chi_s)$ , вклад стационарной точки экспоненциально убывает с ростом расстояния от проекции траектории заряда на плоскость периодической структуры по закону  $\exp\left\{-\frac{k_0}{\beta}\sqrt{1-\beta^2}\sqrt{x^2+(y+b_0)^2}\right\}$ . При расчёте поля им можно пренебречь при условии  $\frac{k_0}{\beta}\sqrt{1-\beta^2}\sqrt{x^2+(y+b_0)^2} \gg 1$ . Данный вклад не представляет для нас интереса, так как не относится к полю излучения (не уносит энергию от источника).

Подчёркнём, что экспоненциальное убывание вклада КНС с ростом расстояния физически означает, что в рассматриваемой ситуации отсутствует объёмное излучение.

### 2.3 Поверхностные волны

Вернёмся к исходному интегралу (2.2.2). Можно показать, что подынтегральное выражение экспоненциально стремится к нулю, если  $\text{Re } \chi \rightarrow \pm\infty$ , а  $\text{Im } \chi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  при

$x > 0$ , и если  $\text{Re } \chi \rightarrow \pm\infty$ , а  $\text{Im } \chi \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$  при  $x < 0$ . Учитывая это обстоятельство, при  $x > 0$  мы можем образовать замкнутый контур  $C_+$ , состоящий из исходного контура  $R$ , контура, обратного к КНС  $\Gamma_+^*$ , и отрезков, параллельных мнимой оси и расположенных на бесконечности. Интеграл по такому контуру определяется вкладом одного полюса  $+\chi_0$ :

$$\oint_{C_+} = \int_{-\infty}^{+\infty} + \int_{+\infty}^{+\infty+i\chi_{s+}''} - \int_{\Gamma_+^*} + \int_{-\infty+i\chi_{s+}''}^{-\infty} = 2\pi i \text{ res}_{\chi=+\chi_0} . \quad (2.3.1)$$

При  $x < 0$  аналогичный контур  $C_-$  будет включать контур, обратный к КНС  $\Gamma_-^*$ , расположенный ниже вещественной оси. Соответственно, мы получаем

$$\oint_{C_-} = \int_{-\infty}^{+\infty} + \int_{+\infty}^{+\infty-i\chi_{s+}''} - \int_{\Gamma_+^*} + \int_{-\infty-i\chi_{s+}''}^{-\infty} = -2\pi i \text{ res}_{\chi=-\chi_0} . \quad (2.3.2)$$

Так как интегралы по удалённым на бесконечность вертикальным отрезкам равны нулю в силу экспоненциальной малости подынтегральных функций, то (2.2.2) можно записать в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} \Pi_{z\omega}^r \\ \Pi_{x\omega}^r \end{array} \right\} = a(\omega) \oint_{\Gamma_{\pm}^*} d\chi \left\{ \begin{array}{l} R_z(\chi) \\ R_x(\chi) \end{array} \right\} e^{i\Phi(\chi)} \pm 2\pi i a(\omega) \text{ res}_{\chi=\pm\chi_0} \left\{ \begin{array}{l} R_z(\chi) \\ R_x(\chi) \end{array} \right\} e^{i\Phi(\chi)}, \quad (2.3.3)$$

где знак «+» соответствует контуру  $C_+$  (случай  $x > 0$ ), а знак «-» - контуру  $C_-$  (случай  $x < 0$ ). Функция  $a(\omega)$  и фаза  $\Phi(\chi)$  здесь определены равенствами

$$a(\omega) = i \frac{q}{\omega} \eta_{\omega} e^{i \frac{k_0 z}{\beta}}, \quad (2.3.4)$$

$$\Phi(\chi) = \alpha (x \text{sh } \chi + i(y + b_0) \text{ch } \chi), \quad \alpha = \frac{k_0}{\beta} \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (2.3.5)$$

Поскольку вклад КНС экспоненциально мал, если выполнено неравенство

$$\frac{k_0}{\beta} \sqrt{1 - \beta^2} \sqrt{x^2 + (y + b_0)^2} \gg 1, \quad (2.3.6)$$

то наибольший интерес для нас имеют вклады полюсов, которые, при условии вещественности  $\chi_{1,2}$ , представляют собой поверхностные волны. Поэтому выражение (2.3.3) определяется в основном вторым слагаемым:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Pi_{z\omega}^r \\ \Pi_{x\omega}^r \end{array} \right\} \approx \pm 2\pi i a(\omega) \text{ res}_{\chi=\pm\chi_0} \left\{ \begin{array}{l} R_z(\chi) \\ R_x(\chi) \end{array} \right\} e^{i\Phi(\chi)}. \quad (2.3.7)$$

Сначала рассмотрим  $z$ -компоненту вектора Герца отражённого поля  $\Pi_{z\omega}^r$ . Коэффициент «отражения»  $R_z(\chi)$  представим в виде дроби

$$R_z(\chi) = \frac{\psi_z(\chi)}{(\chi - \chi_0)(\chi + \chi_0)}, \quad (2.3.8)$$

где  $\pm\chi_0$  - полюса, изображённые на рис. 2.2. Вычисляя вычеты, получаем

$$\Pi_{z\omega}^r = a(\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} d\chi \frac{\psi_z(\chi) e^{i\alpha x \operatorname{sh}\chi - \alpha(y+b_0)\operatorname{ch}\chi}}{(\chi - \chi_0)(\chi + \chi_0)} \approx \pi i a(\omega) \frac{\psi_z(\pm\chi_0)}{\chi_0} e^{i\alpha|x|\operatorname{sh}\chi_0 - \alpha(y+b_0)\operatorname{ch}\chi_0}. \quad (2.3.9)$$

Согласно формуле (2.2.1), замена  $k_x$  на  $-k_x$  эквивалентна замене  $\chi$  на  $-\chi$ , а из выражения (1.3.10) видно, что  $R_z(k_x) = R_z(-k_x)$ . Следовательно, при замене (2.2.1) чётность функции  $R_z$  сохраняется. Учитывая данное обстоятельство, можно сделать вывод, что функция  $\psi_z(\chi)$ , стоящая в числителе выражения (2.3.8), также является чётной. Поэтому интеграл (2.3.9) можно записать в виде

$$\Pi_{z\omega}^r \approx \pi i a(\omega) \frac{\psi_z(\chi_0)}{\chi_0} e^{i\alpha|x|\operatorname{sh}\chi_0 - \alpha(y+b_0)\operatorname{ch}\chi_0}. \quad (2.3.10)$$

Теперь проведём аналогичные рассуждения для  $x$ -компоненты вектора Герца отражённого поля  $\Pi_{x\omega}^r$ . Коэффициент «отражения»  $R_x(\chi)$  тогда примет вид

$$R_x(\chi) = \frac{\psi_x(\chi)}{(\chi - \chi_0)(\chi + \chi_0)}. \quad (2.3.11)$$

Необходимо отметить, что в этом случае функция  $R_x(k_x)$ , заданная выражением (1.3.11), является нечётной. Отсюда следует, что  $R_x(-\chi) = -R_x(\chi)$  и, согласно формуле (2.3.11),  $\psi_x(-\chi) = -\psi_x(\chi)$ . Учитывая данный факт при вычислении интеграла (2.3.3), получим

$$\Pi_{x\omega}^r \approx \pm \pi i a(\omega) \frac{\psi_x(\chi_0)}{\chi_0} e^{i\alpha|x|\operatorname{sh}\chi_0 - \alpha(y+b_0)\operatorname{ch}\chi_0}, \quad (2.3.12)$$

где знак «+» соответствует положительным значениям  $x$ , а знак «-» - отрицательным.

Мы показали, что величина Фурье-образа вектора Герца по частоте на плоскости  $\chi$  определяется в основном вкладами полюсов  $\pm\chi_0$ . Соответствующие вычеты могут быть вычислены также и на плоскости  $k_x$ . Тогда те же выражения (2.3.9), (2.3.12) можно записать в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} \Pi_{z\omega}^r \\ \Pi_{x\omega}^r \end{array} \right\} = -\frac{q}{\omega} \eta_\omega e^{i\frac{k_0 z}{\beta} + \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} R_z \\ R_x \end{array} \right\} \frac{e^{i\Phi(k_x)}}{k_{y0}} dk_x \approx \mp \frac{q}{\omega} \eta_\omega e^{i\frac{k_0 z}{\beta}} 2\pi i \operatorname{res}_{k_x = \pm k_{x0}} \left( \left\{ \begin{array}{l} R_z \\ R_x \end{array} \right\} \frac{e^{i\Phi(k_x)}}{k_{y0}} \right). \quad (2.3.13)$$

где верхний знак относится к области  $x > 0$ , а нижний - к области  $x < 0$ ; фаза  $\Phi(k_x)$  здесь определена соотношением

$$\Phi(k_x) = k_x x + k_{y0} (y + b_0). \quad (2.3.14)$$

Напомним, что величина  $k_{x0}$  в общем случае находится из уравнения (2.1.10), а в частном случае ультрарелятивистского движения заряда при учёте только линейных (по  $k_0 d$ ) членов она определяется по формуле (2.1.14).

Далее мы будем рассматривать линейное приближение относительно малого параметра  $k_0 d_0$ , то есть во всех формулах пренебрегаем квадратичными слагаемыми типа  $k_0^2 d_0^2$ . Согласно выражению (2.1.16), если  $\beta$  существенно отлично от 1, то полюса подынтегральной функции в (2.1.1) являются чисто мнимыми, то есть вдоль гофрированной структуры поверхностная волна распространяться не будет. Поэтому

остановимся на наиболее интересном ультрарелятивистском режиме движения заряда, когда  $\beta \rightarrow 1$ . Как нам известно, в этой ситуации полюса  $\pm k_{x0}$  являются чисто вещественными и приближённо определяются соотношениями (2.1.14).

Получим выражения для компонент электромагнитного поля в случае, когда  $\beta \rightarrow 1$ . Запишем коэффициенты «отражения»  $R_z$  и  $R_x$  в виде

$$R_z = \frac{f_z(k_x)}{(k_x - k_{x0})(k_x + k_{x0})}, \quad R_x = \frac{f_x(k_x)}{(k_x - k_{x0})(k_x + k_{x0})}, \quad (2.3.15)$$

где

$$f_z(k_x) = k_0 \left\{ \frac{k_x^2}{\sqrt{k_x^2}} + (k_0^2 - k_x^2)(d_0 + \delta) - k_0^2 \delta \right\}, \quad (2.3.16)$$

$$f_x(k_x) = 2k_0^2 k_x \left\{ \frac{k_0^2}{k_0^2 - k_x^2} \delta - d_0 \right\}. \quad (2.3.17)$$

Сосчитаем вычеты в выражении (2.3.13) и для компонент вектора Герца найдём

$$\Pi_{z\omega}^r = -i\pi \frac{q}{\omega} \eta_\omega \frac{f_z(k_{x0})}{k_{x0}} e^{ik_{x0}|x| + ik_0 z - k_{x0}(y+b_0)}, \quad (2.3.18)$$

$$\Pi_{x\omega}^r = -i\pi \frac{q}{\omega} \eta_\omega \operatorname{sgn}(x) \frac{f_x(k_{x0})}{k_{x0}} e^{ik_{x0}|x| + ik_0 z - k_{x0}(y+b_0)}, \quad (2.3.19)$$

где  $k_{x0} = k_0^2(d_0 - \delta)$ ,  $\operatorname{sgn}(x)$  - функция знака переменной  $x$ . Воспользуемся соотношением (1.2.17) и для компонент отражённого электрического поля получим

$$E_{x\omega}^r = \operatorname{sgn}(x) \frac{\pi q \eta_\omega}{c} \left\{ i \left( \frac{k_{x0}}{k_0} f_x(k_{x0}) + f_z(k_{x0}) - \frac{k_0}{k_{x0}} f_x(k_{x0}) \right) + \frac{2\delta(x)}{k_0} f_x(k_{x0}) \right\} e^{ik_{x0}|x| + ik_0 z - k_{x0}(y+b_0)}, \quad (2.3.20)$$

$$E_{y\omega}^r = -\frac{\pi q \eta_\omega}{c} \left\{ \operatorname{sgn}(x) \frac{k_{x0}}{k_0} f_x(k_{x0}) + f_z(k_{x0}) \right\} e^{ik_{x0}|x| + ik_0 z - k_{x0}(y+b_0)}, \quad (2.3.21)$$

$$E_{z\omega}^r = \operatorname{sgn}(x) \frac{i\pi q \eta_\omega}{c} f_x(k_{x0}) e^{ik_{x0}|x| + ik_0 z - k_{x0}(y+b_0)}, \quad (2.3.22)$$

где  $\delta(x)$  - дельта-функция Дирака. Компоненты отражённого магнитного поля найдём, используя соотношения (1.2.5) и (1.2.22). В итоге имеем

$$H_{x\omega}^r = \frac{\pi q \eta_\omega}{c} f_z(k_{x0}) e^{ik_{x0}|x| + ik_0 z - k_{x0}(y+b_0)}, \quad (2.3.23)$$

$$H_{y\omega}^r = -\operatorname{sgn}(x) \frac{i\pi q \eta_\omega}{c} \left\{ \frac{k_0}{k_{x0}} f_x(k_{x0}) - f_z(k_{x0}) \right\} e^{ik_{x0}|x| + ik_0 z - k_{x0}(y+b_0)}, \quad (2.3.24)$$

$$H_{z\omega}^r = -\operatorname{sgn}(x) \frac{\pi q \eta_\omega}{c} f_x(k_{x0}) e^{ik_{x0}|x| + ik_0 z - k_{x0}(y+b_0)}. \quad (2.3.25)$$

## 2.4 Потери энергии заряда на излучение поверхностных волн

Рассмотрим полную энергию движущегося заряда, излучаемую в единицу времени в положительном направлении  $x$ ,

$$\frac{dW}{dt} = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_0^{+\infty} dy S_x|_{x>0}, \quad (2.4.1)$$

где

$$S_x = \frac{c}{4\pi} (E_y^r H_z^r - E_z^r H_y^r) \quad (2.4.2)$$

представляет собой  $x$ -компоненту вектора Пойнтинга. Множитель “2” в (2.4.1) объясняется тем, что поверхностные волны излучаются как в положительном, так и в отрицательном направлении  $x$ . Подставим (2.4.2) в (2.4.1) и запишем компоненты

электромагнитного поля через интегралы Фурье вида  $F(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega F_\omega e^{-i\omega t}$ . Получаем

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} = \frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_0^{+\infty} dy \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}_{y\omega}^r e^{-i\omega(t-\frac{z}{V})} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{H}_{z\omega'}^r e^{-i\omega'(t-\frac{z}{V})} d\omega' - \right. \\ \left. - \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}_{z\omega}^r e^{-i\omega(t-\frac{z}{V})} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{H}_{y\omega'}^r e^{-i\omega'(t-\frac{z}{V})} d\omega' \right\}, \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

где введены следующие обозначения

$$\tilde{E}_{y\omega}^r = E_{y\omega}^r e^{-i\omega\frac{z}{V}}, \quad \tilde{E}_{z\omega}^r = E_{z\omega}^r e^{-i\omega\frac{z}{V}}, \quad \tilde{H}_{y\omega}^r = H_{y\omega}^r e^{-i\omega\frac{z}{V}}, \quad \tilde{H}_{z\omega}^r = H_{z\omega}^r e^{-i\omega\frac{z}{V}}. \quad (2.4.4)$$

Под величинами  $E_{y\omega}^r$ ,  $E_{z\omega}^r$ ,  $H_{y\omega}^r$  и  $H_{z\omega}^r$  здесь подразумеваются компоненты поверхностной волны, то есть вклады полюса  $k_{x0}$ , который при  $\beta \rightarrow 1$  приближённо равен  $k_{x0} \approx k_0^2 (d_0 - \delta)$ . Формулы (2.3.21), (2.3.22), (2.3.24) и (2.3.25) в этом случае примут вид (для  $x > 0$ )

$$E_{y\omega}^r = -\frac{\pi q \eta \omega}{c} \left\{ \frac{k_{x0}}{k_0} f_x(k_{x0}) + f_z(k_{x0}) \right\} e^{ik_{x0}|x| - k_{x0}(y+b_0)}, \quad (2.4.5)$$

$$E_{z\omega}^r = \frac{i\pi q \eta \omega}{c} f_x(k_{x0}) e^{ik_{x0}|x| - k_{x0}(y+b_0)}, \quad (2.4.6)$$

$$H_{y\omega}^r = -\frac{i\pi q \eta \omega}{c} \left\{ \frac{k_0}{k_{x0}} f_x(k_{x0}) - f_z(k_{x0}) \right\} e^{ik_{x0}|x| - k_{x0}(y+b_0)}, \quad (2.4.7)$$

$$H_{z\omega}^r = -\frac{\pi q \eta \omega}{c} f_x(k_{x0}) e^{ik_{x0}|x| - k_{x0}(y+b_0)}. \quad (2.4.8)$$

Здесь функции  $f_{z,x}(k_x)$  заданы соотношениями (2.3.16) и (2.3.17) соответственно.

Отметим, что выражения (2.4.5)-(2.4.8) не зависят от  $z$ , поэтому интеграл по  $z$  в формуле (2.4.3) сводится к  $\delta$ -функции:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-i\omega(t-\frac{z}{V})} e^{-i\omega'(t-\frac{z}{V})} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\zeta e^{i\frac{\zeta}{V}(\omega+\omega')} = 2\pi V \delta(\omega+\omega'), \text{ где } \zeta = z - Vt. \quad (2.4.9)$$

После интегрирования по  $\omega'$  соотношение (2.4.3) принимает следующий вид:

$$\frac{dW}{dt} = c^2 \beta \int_0^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \tilde{E}_{y\omega}^r \tilde{H}_{z,-\omega}^r - \tilde{E}_{z\omega}^r \tilde{H}_{y,-\omega}^r \right) d\omega. \quad (2.4.10)$$

Перейдём к интегралу по положительным частотам:

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= c^2 \beta \int_0^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \tilde{E}_{y\omega}^r \tilde{H}_{z,-\omega}^r - \tilde{E}_{z\omega}^r \tilde{H}_{y,-\omega}^r \right) d\omega = \\ &= c^2 \beta \int_0^{+\infty} dy \left\{ \int_0^{+\infty} \left( \tilde{E}_{y\omega} \tilde{H}_{z,-\omega} - \tilde{E}_{z\omega} \tilde{H}_{y,-\omega} \right) d\omega + \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \tilde{E}_{y\omega} \tilde{H}_{z,-\omega} - \tilde{E}_{z\omega} \tilde{H}_{y,-\omega} \right) d\omega \right\} = \\ &= c^2 \beta \int_0^{+\infty} dy \left\{ \int_0^{+\infty} \left( \tilde{E}_{y\omega} \tilde{H}_{z,-\omega} - \tilde{E}_{z\omega} \tilde{H}_{y,-\omega} \right) d\omega + \int_0^{+\infty} \left( \tilde{E}_{y,-\omega} \tilde{H}_{z\omega} - \tilde{E}_{z,-\omega} \tilde{H}_{y\omega} \right) d\omega \right\}. \end{aligned} \quad (2.4.11)$$

Далее воспользуемся тождествами типа  $\tilde{E}_{y,-\omega} = \tilde{E}_{y\omega}^*$  (звёздочка здесь обозначает комплексное сопряжение), вытекающими из вещественности исходных компонент поля, то есть  $E_y$  и всех остальных (аналогично для  $\tilde{E}_{z\omega}$ ,  $\tilde{H}_{y\omega}$  и  $\tilde{H}_{z\omega}$ ). Для выражения (2.4.11) получаем

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= c^2 \beta \int_0^{+\infty} dy \int_0^{+\infty} \left( \tilde{E}_{y\omega} \tilde{H}_{z\omega}^* - \tilde{E}_{z\omega} \tilde{H}_{y\omega}^* + \tilde{E}_{y\omega}^* \tilde{H}_{z\omega} - \tilde{E}_{z\omega}^* \tilde{H}_{y\omega} \right) d\omega = \\ &= 2c^2 \beta \int_0^{+\infty} dy \int_0^{+\infty} \text{Re} \left( \tilde{E}_{y\omega} \tilde{H}_{z\omega}^* - \tilde{E}_{z\omega} \tilde{H}_{y\omega}^* \right) d\omega. \end{aligned} \quad (2.4.12)$$

В теории излучения заряженных частиц обычно рассматривают потери энергии заряда на единицу длины пути  $\frac{dW}{dz}$ . Учитывая, что  $dz = Vdt$ , имеем

$$\frac{dW}{dz} = \frac{1}{V} \frac{dW}{dt} = 2c \int_0^{+\infty} dy \int_0^{+\infty} \text{Re} \left( \tilde{E}_{y\omega} \tilde{H}_{z\omega}^* - \tilde{E}_{z\omega} \tilde{H}_{y\omega}^* \right) d\omega. \quad (2.4.13)$$

Введём спектральную плотность потерь энергии заряда на излучение поверхностной волны  $\frac{dW}{d\omega}$ :

$$\frac{dW}{dz} = \int_0^{\infty} \frac{dW}{d\omega} d\omega. \quad (2.4.14)$$

Учитывая соотношение (2.4.13) и формулы (2.4.4), запишем выражение для спектральной плотности в виде

$$\frac{dW}{d\omega} = 2c \int_0^{+\infty} dy \text{Re} \left( E_{y\omega}^r H_{z\omega}^{r*} - E_{z\omega}^r H_{y\omega}^{r*} \right). \quad (2.4.15)$$

Подставим сюда соотношения (2.4.5)-(2.4.8) для компонент поля и получим

$$\frac{dW}{d\omega} = 2c \int_0^{+\infty} dy \text{Re} \left\{ \frac{\pi^2 q^2 |\eta_\omega|^2}{c^2} f_x(k_{x0}) \left( 2f_z(k_{x0}) + f_x(k_{x0}) \left( \frac{k_{x0}}{k_0} - \frac{k_0}{k_{x0}} \right) \right) e^{-2k_{x0}(y+b_0)} \right\}. \quad (2.4.16)$$

В силу вещественности функций  $f_{z,x}(k_{x0})$  и полюса  $k_{x0}$ , выражение в фигурных скобках также вещественно. Следовательно, имеем

$$\frac{dW}{d\omega} = \frac{2\pi^2 q^2 |\eta_\omega|^2}{c} f_x(k_{x0}) \left( 2f_z(k_{x0}) + f_x(k_{x0}) \left( \frac{k_{x0}}{k_0} - \frac{k_0}{k_{x0}} \right) \right) e^{-2k_{x0}b_0} \int_0^{+\infty} dy e^{-2k_{x0}y}. \quad (2.4.17)$$

После взятия интеграла по  $y$  для спектральной плотности окончательно получаем

$$\frac{dW}{d\omega} = \frac{\pi^2 q^2 |\eta_\omega|^2}{ck_{x0}} f_x(k_{x0}) \left( 2f_z(k_{x0}) + f_x(k_{x0}) \left( \frac{k_{x0}}{k_0} - \frac{k_0}{k_{x0}} \right) \right) e^{-2k_{x0}b_0}. \quad (2.4.18)$$

Для построения графических зависимостей удобно ввести безразмерную величину  $\frac{dW}{d\omega}$ :

$$\frac{dW}{d\omega} = \frac{q^2 |\eta_\omega|^2 k_0^3}{c} \frac{dW}{d\omega},$$

$$\frac{dW}{d\omega} = \frac{\pi^2}{k_0^3 k_{x0}} f_x(k_{x0}) \left( 2f_z(k_{x0}) + f_x(k_{x0}) \left( \frac{k_{x0}}{k_0} - \frac{k_0}{k_{x0}} \right) \right) e^{-2k_{x0}b_0}. \quad (2.4.19)$$

## 2.5 Результаты численных расчётов

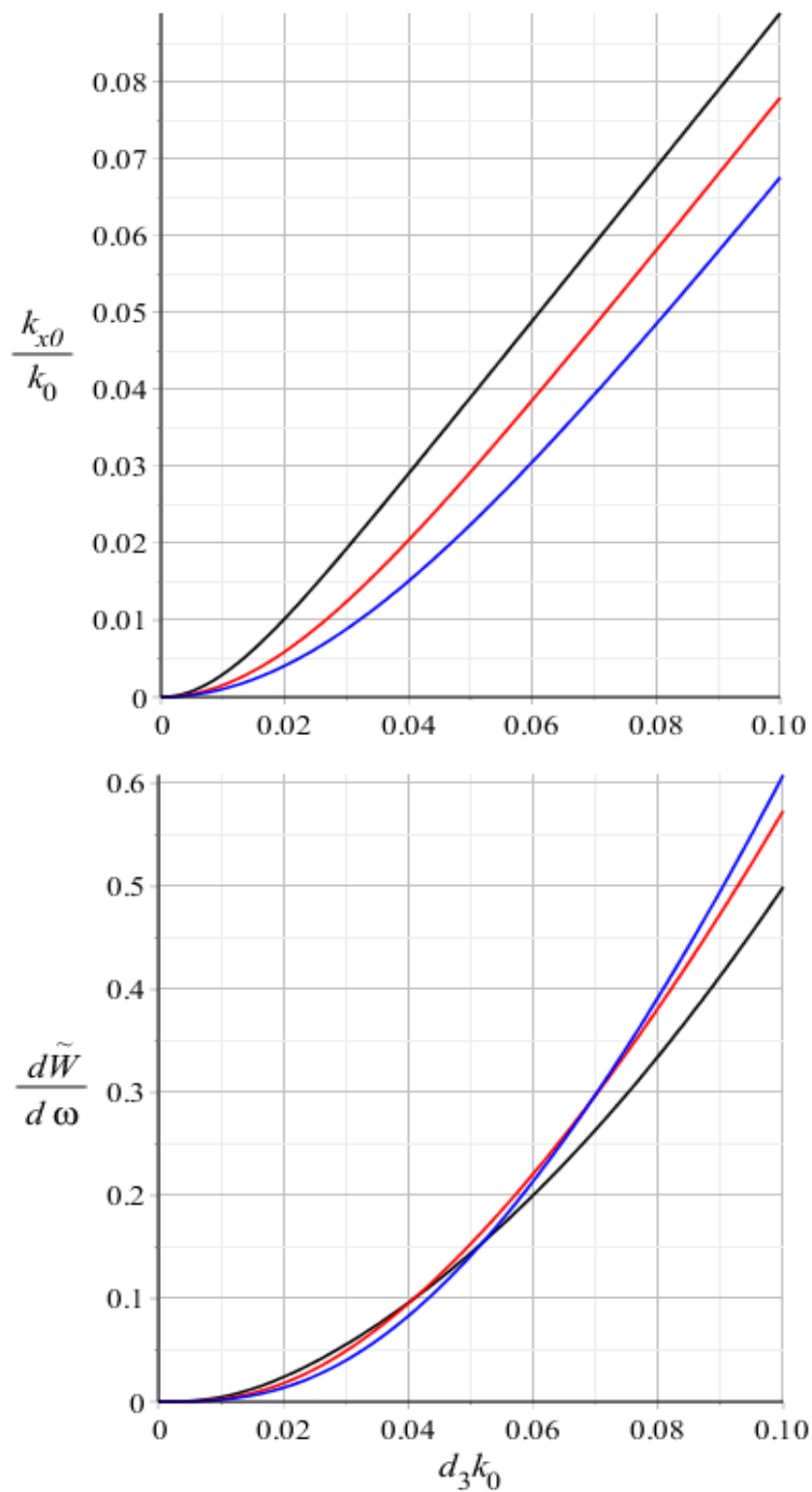
Ниже представлены зависимости спектральной плотности  $\frac{dW}{d\omega}$  и компоненты волнового вектора  $k_{x0}$  от глубины гофрированной поверхности, то есть от параметра  $d_3$ , при различных значениях остальных параметров структуры для ультрарелятивистского режима движения заряда ( $\beta \rightarrow 1$ ). Для удобства вышеперечисленные величины сделаны безразмерными:

$$\frac{dW}{d\omega} = \frac{c}{q^2 |\eta_\omega|^2 k_0^3} \frac{dW}{d\omega}, \quad k_{x0} = \frac{k_{x0}}{k_0}, \quad d_3 = d_3 k_0. \quad (2.5.1)$$

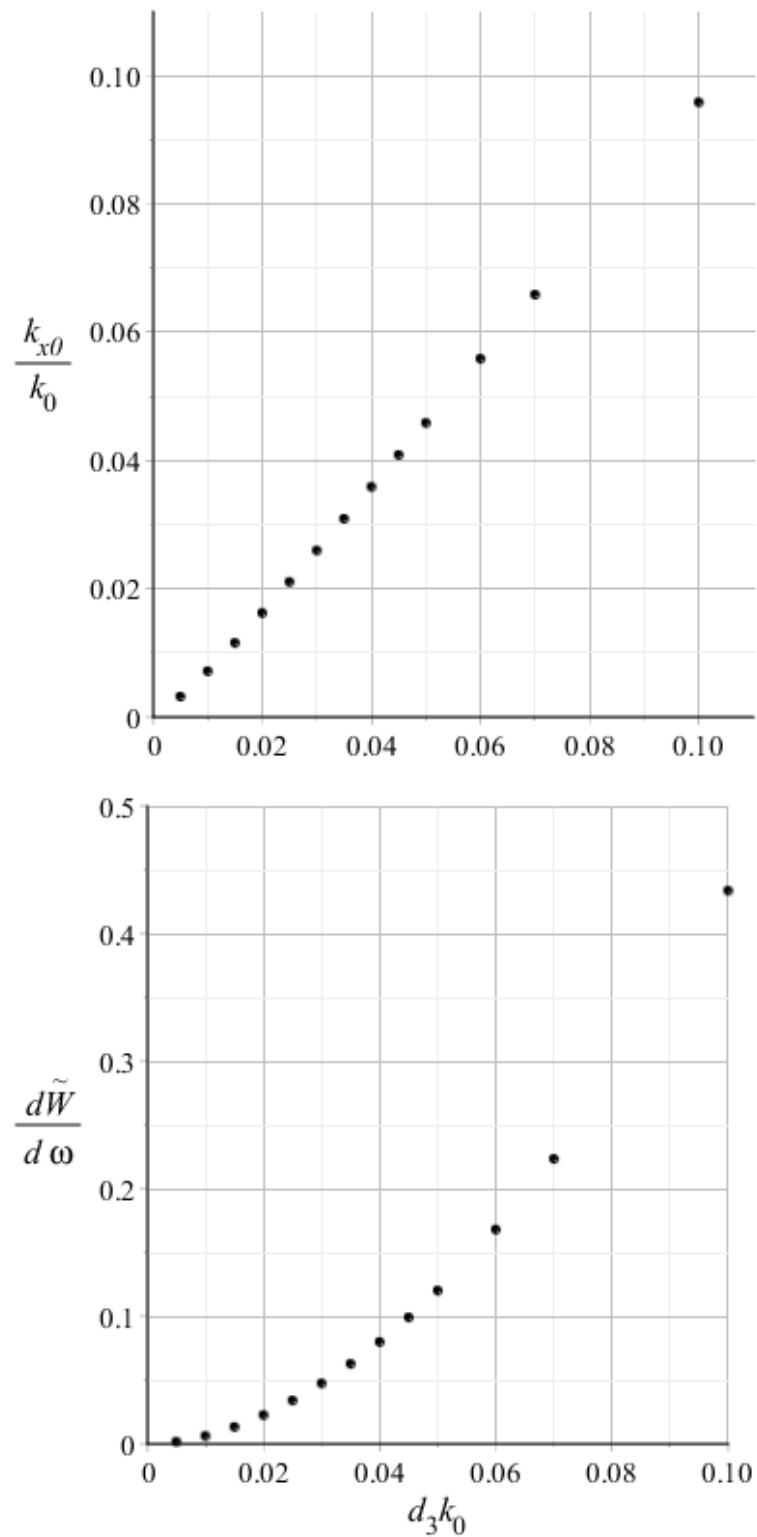
На рис. 2.3 данные зависимости показаны для случая системы диафрагм ( $d_1 \rightarrow 0$ ,  $d_2 \rightarrow d$ ) при различных значениях периода структуры  $d$ . Видно, что с увеличением глубины гофры параллельная гофре компонента волнового вектора растёт, причем в большей части графика - почти линейно. Это объясняется тем, что  $\delta$  слабо зависит от  $d_3$  при не малых значениях  $d_3/d$ , что и приводит к линейной функции  $k_{x0}(d_3)$ , согласно (2.1.14). Естественно, с ростом  $k_{x0}$  растёт и полный волновой вектор, так как  $k_z = \omega/V \approx k_0 = \omega/c$ , то есть длина поверхностной волны уменьшается. Потери энергии заряда на излучение поверхностной волны растут с увеличением глубины гофры, причем нелинейно (тем быстрее, чем больше  $d_3$ ).

На рис. 2.4 точками аналогичные зависимости показаны для случая гофры с равной шириной "канавок" и "холмиков". В целом они сходны со случаем системы диафрагм, однако обращает на себя внимание практически линейная зависимость  $k_{x0}(d_3)$  во всем диапазоне значений  $d_3/d$ .





**Рис.2.3.** Безразмерная проекция волнового вектора  $\frac{k_{x0}}{k_0}$  (вверху) и безразмерная спектральная плотность энергии излучения  $\frac{dW}{d\omega}$  (внизу) в случае системы диафрагм ( $d_1 \rightarrow 0, d_2 \rightarrow d$ ) для ультрарелятивистского заряда ( $\beta \rightarrow 1$ ) при следующих параметрах:  $d = 0.05 \cdot k_0$  (черные кривые),  $d = 0.1 \cdot k_0$  (красные кривые),  $d = 0.15 \cdot k_0$  (синие кривые). На горизонтальной оси - безразмерная глубина структуры  $d_3 k_0$ .



**Рис.2.4.** Безразмерная проекция волнового вектора  $\frac{k_{x0}}{k_0}$  (вверху) и безразмерная спектральная плотность энергии излучения  $\frac{d\tilde{W}}{d\omega}$  (внизу) для ультрарелятивистского заряда ( $\beta \rightarrow 1$ ) при следующих параметрах:  $d = 0.1 \cdot k_0$ ,  $d_1 = 0.05 \cdot k_0$ .

## Заключение

В настоящей работе анализировалось излучение пучка заряженных частиц, движущегося равномерно и прямолинейно вдоль гофрированной поверхности с прямоугольной образующей. При этом период и глубина структуры полагались малыми по сравнению с длинами рассматриваемых электромагнитных волн, что позволило использовать метод эквивалентных граничных условий.

Найдены интегральные представления для компонент полного электромагнитного поля. Показано, что при определённых условиях заряд излучает поверхностные волны, в то время как объёмное излучение отсутствует. Получены выражения для компонент поверхностных волн, проанализированы решения соответствующего дисперсионного уравнения. Показано, что поверхностные волны обязательно генерируются ультрарелятивистскими пучками. В то же время, в случае движения заряда со скоростями, существенно меньшими скорости света, поверхностное излучение отсутствует. Рассмотрены потери энергии заряда и было получено выражение для спектральной плотности потерь энергии на излучение поверхностных волн. Приведены типичные графические зависимости. Показано, в частности, что с ростом глубины гофрирования уменьшается длина поверхностной волны и растёт спектральная плотность потерь энергии заряда.

## Литература

1. Е.И. Нефедов, А.Н. Сивов. Электродинамика периодических структур. М., “Наука”, 1977, 208 с.
2. N.S. Ginsburg, A.M. Malkin, A.S. Sergeev, I.V. Zotova, V.Yu. Zaslavsky, I.V. Zheleznov. 3D Quasioptical Theory of Terahertz Superradiance of an Extended Electron Bunch Moving Over a Corrugated Surface // Physical review letters, vol. 110, 184801 (2013).
3. N.S. Ginsburg, A.M. Malkin, A.S. Sergeev, I.V. Zheleznov, I.V. Zotova, V.Yu. Zaslavsky, G. Sh. Boltachev, K.A. Sharypov, S.A. Shunailov, M.R. Ul'masculov, M.I. Yalandin. Generation of Subterahertz Superradiance Pulses Based on Excitation of a Surface Wave by Relativistic Electron Bunches Moving in Oversized Corrugated Waveguides // Physical review letters, vol. 117, 204801 (2016).
4. A. Mostacci, F. Ruggiero, M. Angelici, M. Migliorati, L. Palumbo, S. Ugoli. Wakefields due to surface waves in a beam pipe with a periodic rough surface // Physical review special topics – accelerators and beams, vol. 5, 044401 (2002).
5. A.V. Tyukhtin, V.V. Vorobev, E.R. Akhmatova, S. Antipov. Radiation of Charged Particle Bunches in Corrugated Waveguides with Small Period // JINST, vol. 13, C04009 (2018).
6. A.V. Tyukhtin. Method of Particle Energy Determination Based on Measurement of Waveguide Mode Frequencies // Journal of Physics: Conference Series, vol. 357, 012003 (2012).
7. К.А. Barsukov, L.G. Naryshkina // Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Radiofizika, vol. 10, No.4, p. 509 (1967).
8. В.Н.Красильников, А.В. Тюхтин. Излучение заряда, пересекающего систему тонких параллельных проводов // Изв. вузов. Радиофизика, т. 33, с. 1278–1283 (1990).
9. A.V. Tyukhtin, V.V. Vorobev, S.N. Galyamin. Radiation Excited by a Charged-Particle Bunch on a Planar Periodic Wire Structure // Physical review special topics – accelerators and beams, vol. 17, 122802 (2014).
10. A.V. Tyukhtin, V.V. Vorobev, S.N. Galyamin. Radiation of Charged-Particle Bunches Passing Perpendicularly by the Edge of a Semi-Infinite Planar Wire Structure // Physical review, vol. 91, 063202 (2015).