

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»



**Рождение электрон-позитронных пар в сильных
лазерных полях в рамках квантового
кинетического подхода**

Бакалаврская работа
студента 4-го курса дневного отделения
Севостьянова Дениса Геннадьевича

Научный руководитель:
д. ф.-м. н., проф. **В.М. Шабаев**

Рецензент:
д. ф.-м. н., проф. **С.В. Ульянов**

Санкт-Петербург
2018

Содержание

Введение	3
1. Случай внешнего однородного поля, зависящего от времени	5
1.1. Квантование в картине Фарри	5
1.2. Вывод квантовых кинетических уравнений	8
1.3. Пример численного расчета	12
2. Случай внешнего поля, зависящего от времени и одной из координат	15
2.1. Обобщение квантового кинетического подхода	15
2.2. Явный вывод уравнений в случае ступеньки Клейна с временной зависимостью	16
Заключение	21
Список литературы	23

Введение

Настоящая работа посвящена такому фундаментальному явлению, как рождение электрон-позитронных пар в присутствии сильных внешних полей, которое было предсказано много лет назад в работах О. Клейна и Ф. Заутера [1, 2]. Под сильным полем в данном контексте понимают такое поле, для которого отношение характерной силы, действующей на электрон, к частоте этого поля в единицах $1/(mc)$ много больше единицы. Такой режим отвечает туннельному (непертурбативному) процессу, который носит название эффекта Швингера по имени Ю. Швингера, впервые строго описавшего распад вакуума с рождением пар в рамках квантовой электродинамики (КЭД) в своей классической статье [3]. Важно отметить, что между работами [1, 2] и работой [3] был опубликован ряд других важных результатов, наиболее значимым из которых является получение Х. Эйлером и В. Гейзенбергом замкнутого выражение для однопетлевого эффективного действия в присутствии однородного электрического и магнитного полей [4]. Вместе со стремительным развитием методов квантовой теории поля во второй половине прошлого века возникали все более строгие и эффективные теоретические подходы, позволяющие рассматривать более реалистичные модели внешних полей и подробно исследовать различные характеристики процесса, включая дифференциальные плотности распределения рождаемых частиц. Несмотря на это, эффект Швингера еще ни разу не наблюдался экспериментально в силу того, что характерная напряженность электрического поля, необходимая для рождения частиц, имеет порядок $E_{кр} = m^2 c^3 / (|e| \hbar) \approx 1.3 \times 10^{18}$ В/м. Данную оценку легко получить, рассмотрев процесс туннелирования частицы из отрицательного континуума в положительный в присутствии потенциала Заутера [2] и перейдя к пределу однородного поля. В настоящий момент максимальная напряженность, которая достигается в лазерных импульсах, примерно на 3 порядка меньше, чем $E_{кр}$.

Однако, можно ожидать, что с появлением новых лазерных установок интенсивность лазерных импульсов заметно возрастет, что даст возможность экспериментального исследования механизма Швингера в рамках различных сценариев (см., например, обзор [5]). Важно отметить, что наличие осцилляций внешнего поля во времени эффективно снижает требуемое значение напряженности. С точки зрения теории, становится необходимым исследование различных конфигураций внешних полей, что в свою очередь требует развития эффективных непертурбативных методов КЭД. Одним из таких методов является квантование электрон-позитронного поля в картине Фарри [6] с полным учетом взаимодействия с внешним классическим полем. В случае внешнего поля, нарушающего стабильность вакуумного состояния, данный формализм подробно описан в монографии [7]. Оказывается, что в рамках строгой КЭД-теории можно показать, что все необходимые вероятности рождения пар могут быть извлечены из одночастичных решений уравнения Дирака, включающего взаимодействие с внешним полем. Однако есть и альтернативный метод, также основанный на процедуре квантования в картине Фарри. В рамках так называемого кинетического подхода [8, 9] можно получить замкнутое интегро-дифференциальное уравнение на скалярную функцию времени и импульса, которая на больших временах переходит в плотность распределения рождаемых электронов (позитронов). Численное решение данного интегро-дифференциального уравнения (или эквивалентной ему системы трех дифференциальных уравнений первого порядка) позволяет находить спектр частиц в случае внешнего поля, имеющего произвольную зависимость от времени. Данный метод успешно применялся в течение последних двух десятков лет (см., например, работы [13, 12, 15, 14, 10, 11]), но при этом никогда не учитывалась пространственная зависимость внешнего поля, которая в ряде случаев имеет огромное влияние на качественное и количественное описание процесса [16, 17, 18, 20, 21, 23, 22, 19]. Целью настоящей работы является исследование вопроса о том, возможно ли обобщить метод квантовых кинетических уравнений (ККУ) на случай внешних полей, включающих пространственно-временные неоднородности.

Данная работа состоит из двух частей, первая из которых посвящена ККУ в случае однородного поля, зависящего от времени. Несмотря на то, что вывод ККУ может быть найден в литературе (см. [8, 15, 11]), в данной работе этот вывод представлен в форме, являющейся

наиболее удобной для дальнейшего обобщения. Во второй части работы показано в общем случае, каким образом можно модифицировать метод для учета координатной зависимости поля. Для этого необходимо построить полный набор собственных функций одночастичного гамильтониана Дирака, фиксированного в произвольный момент времени. В данной работе в качестве примера рассматривается явный вид этих функций в случае ступеньки Клейна, зависящей от времени. В работе показано, что в результате перехода к базису собственных функций гамильтониана задача сводится к системе уравнений, допускающей эффективное решение численными методами.

1. Случай внешнего однородного поля, зависящего от времени

Прежде чем переходить к выводу ККУ, мы кратко обсудим процедуру квантования электрон-позитронного поля в картине Фарри. Работая в представлении Гейзенберга, мы покажем, каким образом вычисляется среднее число частиц в заданном конечном состоянии.

1.1. Квантование в картине Фарри

Лагранжиан квантовой электродинамики имеет следующий вид:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_\gamma + \mathcal{L}_e + \mathcal{L}_{\text{int}}, \quad (1)$$

где член $\mathcal{L}_\gamma = -(1/4)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ с $F_{\mu\nu} = \partial_\mu\mathcal{A}_\nu(x) - \partial_\nu\mathcal{A}_\mu(x)$ является лагранжианом свободного фотонного поля, $\mathcal{A}_\mu(x)$ — 4-потенциал электромагнитного поля, $\mathcal{L}_e = \bar{\psi}(x)(i\partial_\mu\gamma^\mu - m)\psi(x)$ — лагранжиан свободного электрон-позитронного поля. Здесь $\psi(x)$ — поле Дирака, а γ^μ — матрицы Дирака, удовлетворяющие алгебре Клиффорда $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$. Кроме того, также использовано стандартное обозначение для дираковского сопряжения $\bar{\psi}(x) = \psi^\dagger(x)\gamma^0$. Последнее слагаемое в (1) отвечает взаимодействию между электромагнитным и дираковским полями: $\mathcal{L}_{\text{int}} = -j_\mu(x)\mathcal{A}^\mu(x)$, где $j^\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$. Здесь и далее принято обозначение $x \equiv \{t, \mathbf{x}\}$.

Рассмотрим взаимодействие поля Дирака $\hat{\psi}(x)$, с внешним классическим электромагнитным полем $\mathcal{A}_\mu(x)$, которое вводится формальной подстановкой $\hat{A}^\mu(x) \rightarrow \hat{A}^\mu(x) + \mathcal{A}^\mu(x)$. Мы не будем учитывать взаимодействие поля Дирака с квантованным электромагнитным полем $\hat{A}^\mu(x)$, полностью отбросив фотонные степени свободы. Таким образом, будет рассматриваться следующий лагранжиан:

$$\mathcal{L}(x) = \bar{\psi}(x)(i\partial_\mu - e\mathcal{A}_\mu)\gamma^\mu\psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x). \quad (2)$$

Здесь и далее, мы будем опускать шляпки у операторов. Уравнением движения для $\psi(x)$ является уравнение Дирака во внешнем поле:

$$[(i\partial_\mu - e\mathcal{A}_\mu)\gamma^\mu - m]\psi(x) = 0. \quad (3)$$

В представлении Шредингера оператор поля Дирака не зависит от времени, а гамильтониан имеет вид:

$$H(t) = \int \psi^\dagger(\mathbf{x})\mathcal{H}(t)\psi(\mathbf{x})d\mathbf{x}, \quad \text{где } \mathcal{H}(t) = \boldsymbol{\alpha}[-i\nabla - e\mathbf{A}(x)] + e\mathcal{A}_0(x) + \beta m. \quad (4)$$

Оператор поля удовлетворяет следующим антикоммутиационным соотношениям:

$$\{\psi_i(\mathbf{x}), \psi_j^\dagger(\mathbf{y})\} = \delta_{ij}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (5)$$

Мы будем считать, что внешнее электромагнитное поле включается в момент времени $t = t_{\text{in}}$ и выключается в момент $t = t_{\text{out}}$. Кроме того, в данной главе мы будем работать в калибровке $\mathcal{A}_0 = 0$. Таким образом, $\mathcal{A}^\mu(t \leq t_{\text{in}}) = \mathcal{A}_{\text{in}}^\mu$ и $\mathcal{A}^\mu(t \geq t_{\text{out}}) = \mathcal{A}_{\text{out}}^\mu$. Введём две набора собственных функций одночастичного гамильтониана $\mathcal{H}(t)$, фиксированного в моменты времени $t = t_{\text{in}}$ и $t = t_{\text{out}}$, соответственно:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(t_{\text{in}}) \pm \varphi_n(\mathbf{x}) &= \pm \varepsilon(t_{\text{in}}) \pm \varphi_n(\mathbf{x}), \\ \mathcal{H}(t_{\text{out}}) \pm \varphi_n(\mathbf{x}) &= \pm \varepsilon(t_{\text{out}}) \pm \varphi_n(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (6)$$

где $\pm \varepsilon(t_{\text{in}}) \geq 0$ и $\pm \varepsilon(t_{\text{out}}) \geq 0$. Разложим оператор электрон-позитронного поля по этим двум базисам:

$$\psi(\mathbf{x}) = \sum_n [a_n(t_{\text{in}})_+ \varphi_n(\mathbf{x}) + b_n^\dagger(t_{\text{in}})_- \varphi_n(\mathbf{x})], \quad (7)$$

$$\psi(\mathbf{x}) = \sum_n [a_n(t_{\text{out}})^+ \varphi_n(\mathbf{x}) + b_n^\dagger(t_{\text{out}})^- \varphi_n(\mathbf{x})], \quad (8)$$

где для операторов выполняются следующие антикоммутиационные соотношения:

$$\{a_n(t_{\text{in}}), a_m^\dagger(t_{\text{in}})\} = \{a_n(t_{\text{out}}), a_m^\dagger(t_{\text{out}})\} = \{b_n(t_{\text{in}}), b_m^\dagger(t_{\text{in}})\} = \{b_n(t_{\text{out}}), b_m^\dagger(t_{\text{out}})\} = \delta_{nm}, \quad (9)$$

а все остальные антикоммутиаторы равны нулю. В терминах этих операторов полевые гамильтонианы $H(t_{\text{in}})$ и $H(t_{\text{out}})$ принимают диагональный вид:

$$H(t_{\text{in}}) = \sum_n [+\varepsilon_n(t_{\text{in}})a_n^\dagger(t_{\text{in}})a_n(t_{\text{in}}) + |-\varepsilon_n(t_{\text{in}})|b_n^\dagger(t_{\text{in}})b_n(t_{\text{in}})], \quad (10)$$

$$H(t_{\text{out}}) = \sum_n [+\varepsilon_n(t_{\text{out}})a_n^\dagger(t_{\text{out}})a_n(t_{\text{out}}) + |-\varepsilon_n(t_{\text{out}})|b_n^\dagger(t_{\text{out}})b_n(t_{\text{out}})]. \quad (11)$$

Таким образом, мы можем интерпретировать операторы в правой части (7) и (8) как операторы рождения и уничтожения электронов и позитронов в начальный и конечный момент времени. Определим вакуумные состояния в моменты времени $t = t_{\text{in}}$ и $t = t_{\text{out}}$, соответственно:

$$a_n(t_{\text{in}})|0, t_{\text{in}}\rangle = b_n(t_{\text{in}})|0, t_{\text{in}}\rangle = 0, \quad (12)$$

$$a_n(t_{\text{out}})|0, t_{\text{out}}\rangle = b_n(t_{\text{out}})|0, t_{\text{out}}\rangle = 0. \quad (13)$$

В дальнейшем будет удобно работать в представлении Гейзенберга, переход к которому осуществляется посредством унитарного оператора эволюции

$$U(t, t') = T \exp \left(-i \int_{t'}^t H(\tau) d\tau \right), \quad (14)$$

удовлетворяющего уравнению

$$[i\partial_t - H(t)]U(t, t') = 0 \quad (15)$$

и обладающего свойствами

$$U(t, t) = 1, \quad U^\dagger(t, t') = U^{-1}(t, t') = U(t', t). \quad (16)$$

Переход в представление Гейзенберга осуществляется в соответствии с правилом

$$\psi(x) = U(0, t)^\dagger \psi(\mathbf{x}) U(0, t). \quad (17)$$

Отсюда следует, что оператор поля в представлении Гейзенберга удовлетворяет уравнению Дирака с одночастичным гамильтонианом:

$$i\partial_t \psi(x) = \mathcal{H}(t)\psi(x). \quad (18)$$

С помощью оператора эволюции построим in- и out-состояния в картине Гейзенберга:

$$|\text{in}\rangle = U(0, t_{\text{in}})|t_{\text{in}}\rangle, \quad |\text{out}\rangle = U(0, t_{\text{out}})|t_{\text{out}}\rangle. \quad (19)$$

Далее введем новые in- и out-операторы рождения/уничтожения частиц (античастиц):

$$a_n(\text{in}) = U(0, t_{\text{in}})a_n(t_{\text{in}})U^\dagger(0, t_{\text{in}}), \quad (20)$$

$$a_n(\text{out}) = U(0, t_{\text{out}})a_n(t_{\text{out}})U^\dagger(0, t_{\text{out}}). \quad (21)$$

Аналогичным образом определяются остальные операторы рождения/уничтожения. Теперь in- и out-состояния могут быть получены действием in- и out-операторов рождения на in- и out-вакуумы:

$$|\text{in}\rangle = b_n^\dagger(\text{in}) \dots a_m^\dagger(\text{in}) \dots |0, \text{in}\rangle, \quad (22)$$

$$|\text{out}\rangle = b_n^\dagger(\text{out}) \dots a_m^\dagger(\text{out}) \dots |0, \text{out}\rangle, \quad (23)$$

где

$$|0, \text{in}\rangle = U(0, t_{\text{in}}) |0, t_{\text{in}}\rangle, \quad |0, \text{out}\rangle = U(0, t_{\text{out}}) |0, t_{\text{out}}\rangle. \quad (24)$$

Новый набор операторов рождения/уничтожения удовлетворяет тем же антикоммутиационным соотношениям:

$$\{a_n(\text{in}), a_m^\dagger(\text{in})\} = \{a_n(\text{out}), a_m^\dagger(\text{out})\} = \{b_n(\text{in}), b_m^\dagger(\text{in})\} = \{b_n(\text{out}), b_m^\dagger(\text{out})\} = \delta_{nm}. \quad (25)$$

Вакуумное состояние имеет свойства

$$a_n(\text{in}) |0, \text{in}\rangle = b_n(\text{in}) |0, \text{in}\rangle = 0, \quad (26)$$

$$a_n(\text{out}) |0, \text{out}\rangle = b_n(\text{out}) |0, \text{out}\rangle = 0. \quad (27)$$

Введём “одночастичный” оператор эволюции, являющийся решением уравнения

$$i\partial_t G(t, t') = \mathcal{H}(t)G(t, t') \quad (28)$$

с условием $G(t, t) = \mathbb{1}$. Ядро этого оператора в координатном представлении обозначим за $G(x, y)$. Так как оператор поля удовлетворяет уравнению (18), то его динамика во времени задаётся выражением

$$\psi(x) = \int G(x; t, \mathbf{y}) \psi(t, \mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad (29)$$

Рассмотрим гейзенберговский оператор поля в момент времени $t = t_{\text{in}}$:

$$\psi(t_{\text{in}}, \mathbf{x}) = U(0, t_{\text{in}})^\dagger \psi(\mathbf{x}) U(0, t_{\text{in}}). \quad (30)$$

С использованием разложения (7) получаем

$$\psi(t_{\text{in}}, \mathbf{x}) = \sum_n [a_n(\text{in})_+ \varphi_n(\mathbf{x}) + b_n^\dagger(\text{in})_- \varphi_n(\mathbf{x})]. \quad (31)$$

Дальнейшую динамику волнового оператора можно определить из (29), что дает

$$\psi(t, \mathbf{x}) = \sum_n \left[a_n(\text{in}) \int G(x; t_{\text{in}}, \mathbf{y})_+ \varphi_n(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + b_n^\dagger(\text{in}) \int G(x; t_{\text{in}}, \mathbf{y})_- \varphi_n(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right]. \quad (32)$$

Таким образом, мы получаем разложение оператора поля по решениям одночастичного уравнения Дирака, которые задаются начальными условиями $\pm \varphi_n(t_{\text{in}}, \mathbf{x}) = \pm \varphi_n(\mathbf{x})$:

$$\psi(x) = \sum_n \{a_n(\text{in})_+ \varphi_n(x) + b_n^\dagger(\text{in})_- \varphi_n(x)\}. \quad (33)$$

Аналогичным образом из уравнения (8) получаем

$$\psi(x) = \sum_n \{a_n(\text{out})^+ \varphi_n(x) + b_n^\dagger(\text{out})^- \varphi_n(x)\}, \quad \pm \varphi_n(t_{\text{out}}, \mathbf{x}) = \pm \varphi_n(\mathbf{x}). \quad (34)$$

Рассмотрим гамильтониан в картине Гейзенберга

$$\tilde{H}(t) = U^\dagger(t, 0) H(t) U(t, 0) = \int \psi^\dagger(x) \tilde{\mathcal{H}}(t) \psi(x) dx. \quad (35)$$

В соответствии с условиями $\pm \varphi_n(t_{\text{in}}, \mathbf{x}) = \pm \varphi_n(\mathbf{x})$ и $\pm \varphi_n(t_{\text{out}}, \mathbf{x}) = \pm \varphi_n(\mathbf{x})$ гамильтониан в представлении Гейзенберга (всюду ниже мы будем опускать тильду над ним) диагонализуется в моменты времени t_{in} и t_{out} в терминах in- и out-операторов рождения и уничтожения:

$$H(t_{\text{in}}) = \sum_n [{}_{+\varepsilon_n}(t_{\text{in}}) a_n^\dagger(\text{in}) a_n(\text{in}) + |{}_{-\varepsilon_n}(t_{\text{in}})| b_n^\dagger(\text{in}) b_n(\text{in})], \quad (36)$$

$$H(t_{\text{out}}) = \sum_n [{}_{+\varepsilon_n}(t_{\text{out}}) a_n^\dagger(\text{out}) a_n(\text{out}) + |{}_{-\varepsilon_n}(t_{\text{out}})| b_n^\dagger(\text{out}) b_n(\text{out})]. \quad (37)$$

Число рожденных частиц вычисляется как среднее значение оператора числа частиц в момент времени $t = t_{\text{out}}$. Так как в представлении Шредингера динамика векторов состояний определяется оператором эволюции для полевого гамильтониана (14), для числа электронов в квантовом состоянии n можно записать:

$$n_n^- = \langle 0, t_{\text{in}} | U^\dagger(t_{\text{out}}, t_{\text{in}}) a_n^\dagger(t_{\text{out}}) a_n(t_{\text{out}}) U(t_{\text{out}}, t_{\text{in}}) | 0, t_{\text{in}} \rangle. \quad (38)$$

Далее воспользуемся определением in- и out-векторов (19) и in- и out-операторов (20), а также свойством транзитивности оператора эволюции $U(t_{\text{out}}, t_{\text{in}}) = U(t_{\text{out}}, 0)U(0, t_{\text{in}})$ и его унитарностью. Окончательно имеем:

$$n_n^- = \langle 0, \text{in} | a_n^\dagger(\text{out}) a_n(\text{out}) | 0, \text{in} \rangle. \quad (39)$$

В следующем пункте выражение (39) будет использовано при выводе ККУ.

1.2. Вывод квантовых кинетических уравнений

Основная идея данного подхода заключается в том, что удобно ввести операторы рождения/уничтожения, заданные в фиксированный момент времени и выразить их через in-операторы. Зная соответствующие коэффициенты разложения и перейдя к пределу $t \rightarrow t_{\text{out}}$ легко вычислить выражение (39). Основной задачей является получение уравнений на эти коэффициенты. Ниже мы представим подробный вывод этих уравнений.

Введём набор собственных функций одночастичного Гамильтониана $\mathcal{H}(t)$, параметрически зависящих от времени:

$$\mathcal{H}(t)\varphi_n^{(\pm)}(\mathbf{x}; t) = (\pm)\varepsilon(t)\varphi_n^{(\pm)}(\mathbf{x}; t). \quad (40)$$

Знаки в этом выражении как и раньше определяют знак энергии. В этой главе мы предполагаем, что 4-потенциал не имеет координатной зависимости. Базис, составленный из функций (40), мы будем называть инстантонным базисом. Найдём их явный вид. Так как $[\mathcal{H}(t), \mathbf{p}] = 0$, мы можем отделить пространственную зависимость и искать решения двух видов:

$$\varphi^{(+)} = e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}}\chi^{(+)}(t), \quad \varphi^{(-)} = e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}}\chi^{(-)}(t), \quad (41)$$

где биспиноры удовлетворяют следующим уравнениям:

$$[\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{p} - e\mathbf{A}(t)) + \beta m]\chi^{(+)} = (+)\varepsilon\chi^{(+)}, \quad (42)$$

$$[\boldsymbol{\alpha}(-\mathbf{p} - e\mathbf{A}(t)) + \beta m]\chi^{(-)} = (-)\varepsilon\chi^{(-)}. \quad (43)$$

Определим систему постоянных биспиноров:

$$\begin{aligned} u_{\mathbf{p},+1} &= \sqrt{\frac{m+p^0}{2p^0}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{m+p^0} \\ \frac{p_x + ip_y}{m+p^0} \end{pmatrix}, & u_{\mathbf{p},-1} &= \sqrt{\frac{m+p^0}{2p^0}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x - ip_y}{m+p^0} \\ \frac{-p_z}{m+p^0} \end{pmatrix}, \\ v_{\mathbf{p},+1} &= \sqrt{\frac{m+p^0}{2p^0}} \begin{pmatrix} \frac{-p_x + ip_y}{m+p^0} \\ \frac{p_z}{m+p^0} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & v_{\mathbf{p},-1} &= \sqrt{\frac{m+p^0}{2p^0}} \begin{pmatrix} \frac{-p_z}{m+p^0} \\ \frac{-p_x - ip_y}{m+p^0} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (44)$$

удовлетворяющую соотношениям ортогональности и полноты:

$$u_{\mathbf{p},s}^\dagger u_{\mathbf{p},s'} = v_{\mathbf{p},s}^\dagger v_{\mathbf{p},s'} = \delta_{s,s'}, \quad u_{\mathbf{p},s}^\dagger v_{\mathbf{p},s'} = v_{\mathbf{p},s}^\dagger u_{\mathbf{p},s'} = 0, \quad \sum_s [u_{\mathbf{p},s} u_{\mathbf{p},s}^\dagger + v_{\mathbf{p},s} v_{\mathbf{p},s}^\dagger] = \mathbb{1}. \quad (45)$$

Легко показать, что данные биспиноры являются решениями уравнений

$$[\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m] u_{\mathbf{p},s} = p^0 u_{\mathbf{p},s}, \quad (46)$$

$$[\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m] v_{\mathbf{p},s} = -p^0 v_{\mathbf{p},s}, \quad (47)$$

где $p^0 = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$. Таким образом, имеем

$$\chi_{\mathbf{p},s}^{(+)}(t) \sim u_{\mathbf{p}-e\mathbf{A}(t),s}, \quad \chi_{\mathbf{p},s}^{(-)}(t) \sim v_{-\mathbf{p}-e\mathbf{A}(t),s} \quad (48)$$

и с учетом нормировки:

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbf{p},s}^{(+)} &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}} u_{\mathbf{p}-e\mathbf{A}(t),s}, & (+)\varepsilon_{\mathbf{p}}(t) &= \sqrt{m^2 + [\mathbf{p} - e\mathbf{A}(t)]^2}, \\ \varphi_{\mathbf{p},s}^{(-)} &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}} v_{-\mathbf{p}-e\mathbf{A}(t),s}, & (-)\varepsilon_{\mathbf{p}}(t) &= -\sqrt{m^2 + [\mathbf{p} + e\mathbf{A}(t)]^2}. \end{aligned} \quad (49)$$

Определим два набора решений уравнения Дирака, включающего взаимодействие с внешним классическим полем $\{\pm\varphi_n(x)\}$ и $\{\pm\varphi_n(x)\}$ фиксированных условиями: $\pm\varphi_n(t_{\text{in}}, \mathbf{x}) = (\pm)\varphi_n(\mathbf{x}; t_{\text{in}})$ и $\pm\varphi_n(t_{\text{out}}, \mathbf{x}) = (\pm)\varphi_n(\mathbf{x}; t_{\text{out}})$. В дальнейшем будем называть их in- и out-решениями, соответственно. Иными словами, in-решения $\pm\varphi_n$ (out-решения $\pm\varphi_n$) в момент времени t_{in} (t_{out}) совпадают с собственными функциями гамильтониана $\mathcal{H}(t)$. Заметим, что знак энергии, соответствующий данному решению уравнения Дирака, в общем случае определяется лишь асимптотически. Таким образом, мы имеем возможность разложить оператор поля в представлении гейзенберга по разным системам функций:

$$\psi(x) = \sum_n [a_n(\text{in})_+ \varphi_n(x) + b_n^\dagger(\text{in})_- \varphi_n(x)] \quad (\text{по in-решениям}), \quad (50)$$

$$\psi(x) = \sum_n [a_n(\text{out})^+ \varphi_n(x) + b_n^\dagger(\text{out})^- \varphi_n(x)] \quad (\text{по out-решениям}), \quad (51)$$

$$\psi(x) = \sum_n [a_n(t) \varphi_n^{(+)}(\mathbf{x}; t) + b_n^\dagger(t) \varphi_n^{(-)}(\mathbf{x}; t)] \quad (\text{по инстантонному базису}). \quad (52)$$

В терминах функций инстантонного базиса гамильтониан в представлении Гейзенберга диагонализирован в любой момент времени, так как для каждого t эти функции являются собственными функциями одночастичного гамильтониана:

$$H(t) = \sum_n \left[(+)\varepsilon_n(t) a_n^\dagger(t) a_n(t) + |(-)\varepsilon_n(t)| b_n^\dagger(t) b_n(t) \right]. \quad (53)$$

Для вычисления выражения (39) выразим out-операторы через in-операторы. Мы можем для каждого фиксированного t разложить in- и out-решения по инстантонному базису. Например, для in-решений имеем

$$+\varphi_n(x) = \sum_k d_{nk}(t) \varphi_k^{(+)}(\mathbf{x}; t) + \sum_k e_{nk}(t) \varphi_k^{(-)}(\mathbf{x}; t), \quad (54)$$

$$-\varphi_n(x) = \sum_k f_{nk}(t) \varphi_k^{(+)}(\mathbf{x}; t) + \sum_k g_{nk}(t) \varphi_k^{(-)}(\mathbf{x}; t), \quad (55)$$

где суммирование по k подразумевает интегрирование по импульсам и суммирование по двум возможным значениям квантового числа s . Коэффициенты разложения имеют вид

$$d_{nk} = d_{\mathbf{p},s;\mathbf{p}',s'}(t) = (\varphi_{\mathbf{p}',s'}^{(+)}, +\varphi_{\mathbf{p},s}), \quad e_{nk} = e_{\mathbf{p},s;\mathbf{p}',s'}(t) = (\varphi_{\mathbf{p}',s'}^{(-)}, +\varphi_{\mathbf{p},s}), \quad (56)$$

$$f_{nk} = f_{\mathbf{p},s;\mathbf{p}',s'}(t) = (\varphi_{\mathbf{p}',s'}^{(+)}, -\varphi_{\mathbf{p},s}), \quad g_{nk} = g_{\mathbf{p},s;\mathbf{p}',s'}(t) = (\varphi_{\mathbf{p}',s'}^{(-)}, -\varphi_{\mathbf{p},s}), \quad (57)$$

где (\cdot, \cdot) стандартное скалярное произведение $(\psi, \chi) = \int d\mathbf{x} \psi^\dagger \chi$. У решений уравнения Дирака можно также отделить пространственную часть:

$$\pm \varphi_{\mathbf{p},s}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \pm \varphi_{\mathbf{p},s}(t) e^{\pm i\mathbf{p}\mathbf{x}}. \quad (58)$$

В результате, для одного из коэффициентов имеем

$$d_{\mathbf{p},s;\mathbf{p}',s'}(t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{x} [\chi_{\mathbf{p}',s'}^{(+)}(t)]^\dagger e^{-i\mathbf{p}'\mathbf{x}} + \varphi_{\mathbf{p},s}(t) e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}} = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') [\chi_{\mathbf{p}',s'}^{(+)}(t)]^\dagger + \varphi_{\mathbf{p},s}(t). \quad (59)$$

Таким образом, в силу однородности внешнего поля матрицы коэффициентов диагональны по импульсу. Выберем систему координат, направив ось Ox по направлению внешнего электрического поля. В силу аксиальной симметрии задачи можно положить $p_z = 0$. В этом случае гамильтониан будет также коммутировать с квазиспиновым оператором $\tilde{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_z, -\sigma_z)$ с возможными собственными значениями $s = \pm 1$. Выбранная нами система спиноров (44) как раз расклассифицирована по этому квазиспиновому квантовому числу. Его сохранение приводит к диагональности и по s . Введём обозначения:

$$d_{\mathbf{p},s;\mathbf{p}',s'} = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta_{ss'} d_{\mathbf{p},s}(t), \quad e_{\mathbf{p},s;-\mathbf{p}',s'} = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta_{ss'} e_{-\mathbf{p},s}(t), \quad (60)$$

$$f_{\mathbf{p},s;-\mathbf{p}',s'} = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta_{ss'} f_{-\mathbf{p},s}(t), \quad g_{\mathbf{p},s;\mathbf{p}',s'} = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta_{ss'} g_{\mathbf{p},s}(t). \quad (61)$$

Таким образом:

$$+\varphi_{\mathbf{p},s}(x) = d_{\mathbf{p},s}(t) \varphi_{\mathbf{p},s}^{(+)}(\mathbf{x}; t) + e_{-\mathbf{p},s}(t) \varphi_{-\mathbf{p},s}^{(-)}(\mathbf{x}; t), \quad (62)$$

$$-\varphi_{\mathbf{p},s}(x) = f_{-\mathbf{p},s}(t) \varphi_{-\mathbf{p},s}^{(+)}(\mathbf{x}; t) + g_{\mathbf{p},s}(t) \varphi_{\mathbf{p},s}^{(-)}(\mathbf{x}; t). \quad (63)$$

Подставим полученные выражения в разложение оператора поля по in-решениям (33):

$$\begin{aligned} \psi(x) = \sum_s \int d\mathbf{p} \left\{ a_{\mathbf{p},s}(\text{in}) [d_{\mathbf{p},s}(t) \varphi_{\mathbf{p},s}^{(+)}(\mathbf{x}; t) + e_{-\mathbf{p},s}(t) \varphi_{-\mathbf{p},s}^{(-)}(\mathbf{x}; t)] + \right. \\ \left. + b_{\mathbf{p},s}^\dagger(\text{in}) [f_{-\mathbf{p},s}(t) \varphi_{-\mathbf{p},s}^{(+)}(\mathbf{x}; t) + g_{\mathbf{p},s}(t) \varphi_{\mathbf{p},s}^{(-)}(\mathbf{x}; t)] \right\}. \quad (64) \end{aligned}$$

Сравнивая полученное выражение с разложением оператора поля по инстантонному базису (52), определяем связь “инстантонных” операторов рождения и уничтожения с in-операторами:

$$a_{\mathbf{p},s}(t) = d_{\mathbf{p},s}(t) a_{\mathbf{p},s}(\text{in}) + f_{\mathbf{p},s}(t) b_{-\mathbf{p},s}^\dagger(\text{in}), \quad (65)$$

$$b_{\mathbf{p},s}^\dagger(t) = e_{\mathbf{p},s}(t) a_{-\mathbf{p},s}(\text{in}) + g_{\mathbf{p},s}(t) b_{\mathbf{p},s}^\dagger(\text{in}). \quad (66)$$

Так как в пределе $t \rightarrow t_{\text{out}}$ инстантонные решения переходят в out-решения, то инстантонные операторы рождения и уничтожения стремятся к out-операторам. Следовательно,

$$n_{\mathbf{p},s}^- = \lim_{t \rightarrow t_{\text{out}}} \langle 0, \text{in} | a_{\mathbf{p},s}^\dagger(t) a_{\mathbf{p},s}(t) | 0, \text{in} \rangle. \quad (67)$$

Подставляя сюда выражение (65), получаем

$$\frac{(2\pi)^3}{V} n_{\mathbf{p},s}^- = \lim_{t \rightarrow t_{\text{out}}} |f_{\mathbf{p},s}(t)|^2. \quad (68)$$

Здесь были использованы антикоммутиационные соотношения (25), а V обозначает объем системы. Таким образом, на больших временах квадрат модуля коэффициента разложения $f_{\mathbf{p},s}(t)$ имеет смысл плотности числа электронов с импульсом \mathbf{p} и квантовым числом s , рассчитанной на единицу объема.

Наша задача — получить систему уравнений, позволяющую находить $f_{\mathbf{p},s}(t_{\text{out}})$ без построения точных решений уравнения Дирака. В дальнейшем будем считать, что $s = +1$, и опустим значок s (для $s = -1$ финальные выражения будут теми же). Воспользуемся тем фактом, что $-\varphi_{\mathbf{p}}(x)$ является решением уравнения Дирака, а также выражением (63):

$$[i\partial_t - \mathcal{H}](f_{-\mathbf{p}}(t)\varphi_{-\mathbf{p}}^{(+)} + g_{\mathbf{p}}(t)\varphi_{\mathbf{p}}^{(-)}) = 0 \quad (69)$$

На данном этапе нам необходимо знать явный вид функций $\varphi_{\mathbf{p}}^{(\pm)}$. С учётом $s = +1$, $p_x = p_{\parallel}$, $p_y = p_{\perp}$ и $p_z = 0$ функции (49) принимают вид

$$\varphi_{-\mathbf{p}}^{+} = e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}} \sqrt{\frac{m+p^0}{2p^0}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ P_+ \\ -\frac{P_-}{m+p^0} \end{pmatrix}, \quad \varphi_{\mathbf{p}}^{-} = e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}} \sqrt{\frac{m+p^0}{2p^0}} \begin{pmatrix} \frac{P_-}{m+p^0} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (70)$$

где $p^0 = \sqrt{[p_{\parallel} + eA(t)]^2 + p_{\perp}^2 + m^2}$ и $P_{\pm} = p_{\parallel} + eA(t) \pm ip_{\perp}$. Уравнение (69) эквивалентно системе двух дифференциальных уравнений (индексы у функций $f_{-\mathbf{p}}$ и $g_{\mathbf{p}}$ опустим):

$$i\partial_t \left[\sqrt{\frac{m+p^0}{2p^0}} \left(f + g \frac{P_-}{m+p^0} \right) \right] - \sqrt{\frac{m+p^0}{2p^0}} p^0 \left[f - g \frac{P_-}{m+p^0} \right] = 0, \quad (71)$$

$$i\partial_t \left[\sqrt{\frac{m+p^0}{2p^0}} \left(\frac{-P_+}{m+p^0} f + g \right) \right] - \sqrt{\frac{m+p^0}{2p^0}} p^0 \left[\frac{-P_+}{m+p^0} f - g \right] = 0. \quad (72)$$

Дифференцируя по времени, получаем систему

$$\begin{aligned} if'(t) &= a(t)f(t) + b(t)g(t), \\ ig'(t) &= b^*(t)f(t) - a(t)g(t), \end{aligned} \quad (73)$$

где

$$a(t) = p^0 + \frac{p_{\perp}eE(t)}{2p^0(m+p^0)}, \quad b(t) = \frac{i}{2p^0} \left[\frac{P_-}{m+p^0} \frac{\partial p^0}{\partial t} + eE(t) \right]. \quad (74)$$

Произведем дальнейшее преобразование:

$$\bar{f} = -if \exp \left[i \int^t dt' a(t') \right], \quad \bar{g} = ig \exp \left[-i \int^t dt' a(t') \right]. \quad (75)$$

В результате, система (73) примет вид:

$$\begin{aligned} \bar{f}'(t) &= ib(t)\bar{g}(t) \exp \left[2i \int^t dt' a(t') \right], \\ \bar{g}'(t) &= ib^*(t)\bar{f}(t) \exp \left[-2i \int^t dt' a(t') \right]. \end{aligned} \quad (76)$$

Интеграл можно вычислить аналитически:

$$\int^t a(t') dt' = -\frac{1}{2} \arctg \left(\frac{p_{\perp}[p_{\parallel} + eE(t)]}{p_{\perp}^2 + m(p^0 + m)} \right) + \int^t p^0(t') dt'. \quad (77)$$

Заметим, что значение на нижнем пределе определяет лишь постоянный фазовый множитель в (76), который можно изменить простой подстановкой. Коэффициент $b(t)$, заданный в (74), можно привести к виду

$$b(t) = -\frac{eE(t)}{2(p^0)^2} \sqrt{m^2 + [p_{\parallel} + eA(t)]^2} \exp \left[-i \operatorname{arctg} \frac{p_{\perp}^2 + m(p^0 + m)}{p_{\perp} [p_{\parallel} + eA(t)]} \right]. \quad (78)$$

Таким образом, система (76) приобретает следующую форму:

$$\begin{aligned} \bar{f}'(t) &= -\frac{eE(t)}{2(p^0)^2} \sqrt{m^2 + [p_{\parallel} + eA(t)]^2} \bar{g}(t) \exp \left[2i \int^t dt' p^0(t') \right], \\ \bar{g}'(t) &= \frac{eE(t)}{2(p^0)^2} \sqrt{m^2 + [p_{\parallel} + eA(t)]^2} \bar{f}(t) \exp \left[-2i \int^t dt' p^0(t') \right]. \end{aligned} \quad (79)$$

Система уравнений (79) уже может быть использована в численных процедурах, однако оказывается, что ее можно свести к одному интегро-дифференциальному уравнению сразу на квадрат модуля функции $f_{\mathbf{p},s}(t)$, т. е. на плотность числа частиц (68). Для этого определим функции $W(-\mathbf{p}, t) = 2|f_{-\mathbf{p}}(t)|^2 = 2|\bar{f}_{-\mathbf{p}}(t)|^2$ и $O(-\mathbf{p}, t) = \bar{f}_{-\mathbf{p}}(t) \bar{g}_{\mathbf{p}}(t)^*$. Здесь коэффициент 2 сразу учитывает оба возможных значения s , то есть $W(\mathbf{p}, t_{\text{out}}) = n_{\mathbf{p}}^- = \sum_s n_{\mathbf{p},s}^-$. В терминах W и O имеем систему уравнений

$$\partial_t W(-\mathbf{p}, t) = -2 \frac{eE(t)}{(p^0)^2} \sqrt{m^2 + [p_{\parallel} + eA(t)]^2} \operatorname{Re} \left\{ O(-\mathbf{p}, t) \exp \left[-2i \int^t dt' p^0(t') \right] \right\}, \quad (80)$$

$$\partial_t O(-\mathbf{p}, t) = -2 \frac{eE(t)}{(p^0)^2} \sqrt{m^2 + [p_{\parallel} + eA(t)]^2} [1 - W(-\mathbf{p}, t)] \exp \left[2i \int^t dt' p^0(t') \right]. \quad (81)$$

Интегрируя (81) и подставляя в (80), получаем

$$\begin{aligned} \partial_t W(\mathbf{p}, t) &= \frac{eE(t)}{(p^0)^2} \sqrt{m^2 + [p_{\parallel} - eA(t)]^2} \int^t dt' \frac{eA(t')}{(p^0)^2} \sqrt{m^2 + [p_{\parallel} - eA(t')]^2} [1 - W(\mathbf{p}, t')] \\ &\quad \times \cos \left[2 \int_{t'}^t p^0(\tau) d\tau \right], \end{aligned} \quad (82)$$

где $p^0 = \sqrt{m^2 + p_{\perp}^2 + [p_{\parallel} - eA(t)]^2}$. Уравнение (82) иногда называют кинетическим уравнением Больцмана-Власова. Численное решение этого уравнение дает возможность находить спектр рождаемых частиц в случае однородного поля с произвольной временной зависимостью. В следующем пункте мы представим пример численного расчета.

1.3. Пример численного расчета

Для численных расчетов удобно свести интегро-дифференциальное уравнение (82) к задаче Коши. Для начала введем следующие обозначения:

$$\Theta(\mathbf{p}, t) = \int^t dt' p^0, \quad Q(\mathbf{p}, t) = \frac{eE(t)}{(p^0)^2} \sqrt{m^2 + [p_{\parallel} - eA(t)]^2}. \quad (83)$$

В терминах этих функций уравнение (82) записывается в виде

$$\partial_t W(\mathbf{p}, t) = Q(\mathbf{p}, t) \int^t dt' Q(\mathbf{p}, t') [1 - W(\mathbf{p}, t')] \cos 2[\Theta(\mathbf{p}, t) - \Theta(\mathbf{p}, t')]. \quad (84)$$

Рассмотрим интеграл в уравнении (84) как неизвестную функцию $U(\mathbf{p}, t)$. Тогда можно записать систему

$$\partial_t W(\mathbf{p}, t) = Q(\mathbf{p}, t)U(\mathbf{p}, t), \quad (85)$$

$$\partial_t U(\mathbf{p}, t) = Q(\mathbf{p}, t)[1 - W(\mathbf{p}, t)] - 2p^0 \int^t dt' Q(\mathbf{p}, t')[1 - W(\mathbf{p}, t')] \sin 2[\Theta(\mathbf{p}, t) - \Theta(\mathbf{p}, t')]. \quad (86)$$

В выражении (86) аналогично рассмотрим интеграл как неизвестную функцию $V(\mathbf{p}, t)$. Окончательно имеем

$$\begin{aligned} \partial_t W(\mathbf{p}, t) &= Q(\mathbf{p}, t)U(\mathbf{p}, t), \\ \partial_t U(\mathbf{p}, t) &= Q(\mathbf{p}, t)[1 - W(\mathbf{p}, t)] - 2p^0 V(\mathbf{p}, t), \\ \partial_t V(\mathbf{p}, t) &= 2p^0 U(\mathbf{p}, t). \end{aligned} \quad (87)$$

Вместе с начальными условиями $W|_{t_{\text{in}}} = U|_{t_{\text{in}}} = V|_{t_{\text{in}}} = 0$, мы получаем задачу Коши. Тогда для плотности числа рожденных электронов имеем

$$\frac{(2\pi)^3}{V} \frac{dN_{\mathbf{p}}^-}{d^3\mathbf{p}} = W(\mathbf{p}, t_{\text{out}}). \quad (88)$$

В качестве примера рассмотрим потенциал Заутера ($t_{\text{in}} \rightarrow -\infty$, $t_{\text{out}} \rightarrow +\infty$):

$$A(t) = -E_0\tau \tanh(t/\tau). \quad (89)$$

Соответствующая ему напряженность поля имеет вид

$$E(t) = \frac{E_0}{\cosh^2(t/\tau)}. \quad (90)$$

В случае такой конфигурации внешнего поля существует аналитическое выражение для плотности числа рождаемых частиц [24]:

$$W(\mathbf{p}, +\infty) = \frac{\sinh\left[\frac{\pi\tau}{2}(2eE_0\tau + p_-^0 - p_+^0)\right] \sinh\left[\frac{\pi\tau}{2}(2eE_0\tau + p_+^0 - p_-^0)\right]}{\sinh(\pi\tau p_+^0) \sinh(\pi\tau p_-^0)}, \quad (91)$$

где

$$p_{\pm}^0 = \sqrt{m^2 + p_{\perp}^2 + (p_{\parallel} \mp eE_0\tau)^2}. \quad (92)$$

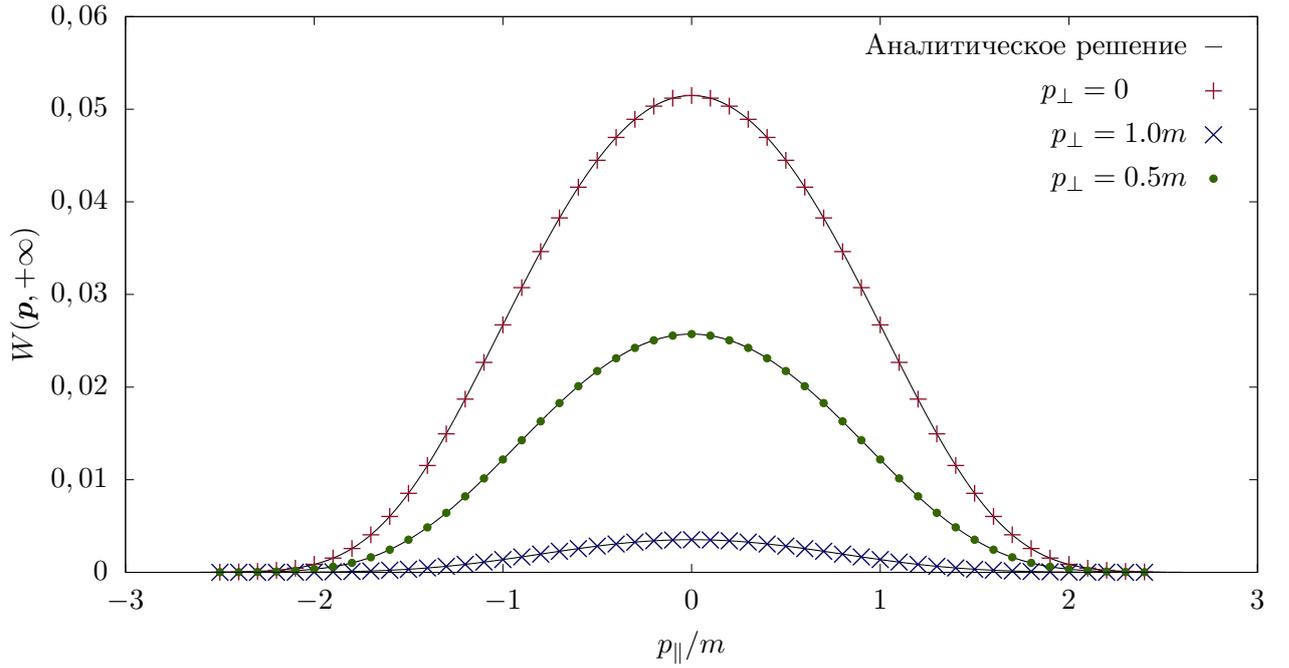


Рис. 1. Результаты численного решения интегро-дифференциального уравнения (82) для потенциала Заутера (точки) и значения, полученные по аналитической формуле (91).

Для численного решения системы уравнений (87) была написана программа на языке Fortran, в которой был реализован неявный метод Рунге-Кутты 6 порядка. На Рис. 1 изображена зависимость $W(p_{\parallel}, +\infty)$ для различных значений p_{\perp} при $E_0 = E_{кр}$, $\tau = 2.0 m^{-1}$. Видно, что результаты, полученные численно, совпадают с точными аналитическими значениями.

В следующей главе мы перейдем к обсуждению вопроса о том, как представленные выше выкладки могут быть обобщены на случай конфигураций внешнего поля, зависящих не только от времени, но и от одной из координат.

2. Случай внешнего поля, зависящего от времени и одной из координат

Теперь будем считать, что внешнее классическое поле зависит не только от времени, но и от координаты z . В первом пункте главы мы опишем метод в общих обозначениях, а во втором пункте — рассмотрим конкретную конфигурацию внешнего поля (ступенька Клейна с амплитудой, зависящей от времени).

2.1. Обобщение квантового кинетического подхода

Введем два набора решений уравнения Дирака $\{\pm\varphi_n(t, \mathbf{x})\}$ и $\{\pm\varphi_n(t, \mathbf{x})\}$, определяемых условиями $\pm\varphi_n(\mathbf{x}; t_{\text{in}}) = \varphi_n^{(\pm)}(t_{\text{in}}, \mathbf{x})$ и $\pm\varphi_n(\mathbf{x}; t_{\text{out}}) = \varphi_n^{(\pm)}(t_{\text{out}}, \mathbf{x})$. Набор решений $\{\varphi^{(\pm)n}(\mathbf{x}, t)\}$ также как и в предыдущей главе мы будем называть инстантонным базисом. Для каждого фиксированного t можно разложить in- и out-решения по этому базису. Например, для in-решений:

$$+\varphi_n(x) = \sum_k d_{nk}(t)\varphi_k^{(+)}(\mathbf{x}; t) + \sum_l e_{nl}(t)\varphi_l^{(-)}(\mathbf{x}; t), \quad (93)$$

$$-\varphi_n(x) = \sum_k f_{nk}(t)\varphi_k^{(+)}(\mathbf{x}; t) + \sum_l g_{nl}(t)\varphi_l^{(-)}(\mathbf{x}; t). \quad (94)$$

В силу того, что $[\mathcal{H}, p_x] = [\mathcal{H}, p_y] = 0$, можно записать

$$\varphi_{\mathbf{p},n}^{(\pm)}(\mathbf{x}; t) = \frac{1}{2\pi}\varphi_{\mathbf{p},n}^{(\pm)}(z; t)e^{\pm i(p_x x + p_y y)}, \quad (95)$$

где n — совокупность квантовых чисел, необходимых для однозначной нумерации базиса¹. Значок \mathbf{p} здесь подразумевает лишь пару $p_x - p_y$. Аналогично для in-решений уравнения Дирака:

$$\pm\varphi_{\mathbf{p},n}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi}\pm\varphi_{\mathbf{p},n}(t, z)e^{\pm i(p_x x + p_y y)}. \quad (96)$$

Тогда коэффициенты в (93) и (94) будут диагональны по проекциям p_x и p_y . Например,

$$\begin{aligned} d_{nk} &= d_{\mathbf{p},n;\mathbf{p}',n'}(t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{x} [\varphi_{\mathbf{p}',n'}^{(+)}(z; t)]^\dagger e^{-i(p'_x x + p'_y y)} +\varphi_{\mathbf{p},n}(t, z) e^{i(p_x x + p_y y)} = \\ &= \delta(p_x - p'_x)\delta(p_y - p'_y) \int dz [\varphi_{\mathbf{p}',n'}^{(+)}(z; t)]^\dagger +\varphi_{\mathbf{p},n}(t, z). \end{aligned} \quad (97)$$

Введем обозначения

$$d_{\mathbf{p},n;\mathbf{p}',n'} = \delta(p_x - p'_x)\delta(p_y - p'_y)d_{\mathbf{p},n;n'}(t), \quad (98)$$

$$e_{\mathbf{p},n;-\mathbf{p}',n'} = \delta(p_x - p'_x)\delta(p_y - p'_y)e_{-\mathbf{p},n;n'}(t), \quad (99)$$

$$f_{\mathbf{p},n;-\mathbf{p}',n'} = \delta(p_x - p'_x)\delta(p_y - p'_y)f_{-\mathbf{p},n;n'}(t), \quad (100)$$

$$g_{\mathbf{p},n;\mathbf{p}',n'} = \delta(p_x - p'_x)\delta(p_y - p'_y)g_{\mathbf{p},n;n'}(t). \quad (101)$$

Таким образом, разложения (93)–(94) имеют вид

$$+\varphi_{\mathbf{p},n}(x) = \sum_{n'} [d_{\mathbf{p},n;n'}(t)\varphi_{\mathbf{p},n'}^{(+)}(\mathbf{x}; t) + e_{-\mathbf{p},n;n'}(t)\varphi_{-\mathbf{p},n'}^{(-)}(\mathbf{x}; t)], \quad (102)$$

$$-\varphi_{\mathbf{p},n}(x) = \sum_{n'} [f_{-\mathbf{p},n;n'}(t)\varphi_{-\mathbf{p},n'}^{(+)}(\mathbf{x}; t) + g_{\mathbf{p},n;n'}(t)\varphi_{\mathbf{p},n'}^{(-)}(\mathbf{x}; t)]. \quad (103)$$

¹При наличии пространственной зависимости внешнего поля инстантонный спектр гамильтониана может иметь очень сложную структуру с нетривиальной нумерацией функций.

Легко получить связь инстантонных операторов рождения/уничтожения с in-операторами:

$$a_{\mathbf{p},n'}(t) = \sum_n [d_{\mathbf{p},n;n'}(t)a_{\mathbf{p},n}(\text{in}) + f_{\mathbf{p},n;n'}(t)b_{-\mathbf{p},n}^\dagger(\text{in})], \quad (104)$$

$$b_{\mathbf{p},n'}^\dagger(t) = \sum_n [e_{\mathbf{p},n;n'}(t)a_{-\mathbf{p},n}(\text{in}) + g_{\mathbf{p},n;n'}(t)b_{\mathbf{p},n}^\dagger(\text{in})]. \quad (105)$$

Плотность числа электронов в данном квантовом состоянии даётся выражением:

$$n_{\mathbf{p},n}^- = \lim_{t \rightarrow t_{\text{out}}} \langle 0, \text{in} | a_{\mathbf{p},n}^\dagger(t) a_{\mathbf{p},n}(t) | 0, \text{in} \rangle. \quad (106)$$

С учётом антикоммутирующих соотношений получаем

$$\frac{(2\pi)^2}{S} n_{\mathbf{p},n}^- = \lim_{t \rightarrow t_{\text{out}}} \sum_{n'} |f_{\mathbf{p},n;n'}(t)|^2 \quad (107)$$

Далее воспользуемся тем фактом, что ${}_{-}\varphi_{\mathbf{p},n}(x)$ является решением уравнения Дирака $[i\partial_t - \mathcal{H}]_{-}\varphi_{\mathbf{p},n}(x) = 0$, а также разложением (103). Учитывая, что функции инстантонного базиса являются собственными функциями гамильтониана, получаем

$$0 = \sum_{n'} [i\dot{f}_{-\mathbf{p},n;n'}(t)\varphi_{-\mathbf{p},n'}^{(+)}(t; \mathbf{x}) + if_{-\mathbf{p},n;n'}(t)\dot{\varphi}_{-\mathbf{p},n'}^{(+)}(t; \mathbf{x}) + i\dot{g}_{\mathbf{p},n;n'}(t)\varphi_{\mathbf{p},n'}^{(-)}(t; \mathbf{x}) + ig_{\mathbf{p},n;n'}(t)\dot{\varphi}_{\mathbf{p},n'}^{(-)}(t; \mathbf{x}) - \varepsilon_{-\mathbf{p},n'}^+ f_{-\mathbf{p},n;n'}(t)\varphi_{-\mathbf{p},n'}^{(+)}(t; \mathbf{x}) - \varepsilon_{\mathbf{p},n'}^- g_{\mathbf{p},n;n'}(t)\varphi_{\mathbf{p},n'}^{(-)}(t; \mathbf{x})]. \quad (108)$$

Для удобства сделаем замену $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$:

$$0 = \sum_{n'} [i\dot{f}_{\mathbf{p},n;n'}(t)\varphi_{\mathbf{p},n'}^{(+)}(t; \mathbf{x}) + if_{\mathbf{p},n;n'}(t)\dot{\varphi}_{\mathbf{p},n'}^{(+)}(t; \mathbf{x}) + i\dot{g}_{-\mathbf{p},n;n'}(t)\varphi_{-\mathbf{p},n'}^{(-)}(t; \mathbf{x}) + ig_{-\mathbf{p},n;n'}(t)\dot{\varphi}_{-\mathbf{p},n'}^{(-)}(t; \mathbf{x}) - \varepsilon_{\mathbf{p},n'}^+ f_{\mathbf{p},n;n'}(t)\varphi_{\mathbf{p},n'}^{(+)}(t; \mathbf{x}) - \varepsilon_{-\mathbf{p},n'}^- g_{-\mathbf{p},n;n'}(t)\varphi_{-\mathbf{p},n'}^{(-)}(t; \mathbf{x})]. \quad (109)$$

Далее домножим полученное выражение на бра-векторы $\langle \varphi_{\mathbf{p},n'}^{(+)} |$ и $\langle \varphi_{-\mathbf{p},n'}^{(-)} |$ и с учётом ортогональности получим

$$\begin{aligned} i\dot{f}_{\mathbf{p},n;n'} + \sum_{m'} [f_{\mathbf{p},n;n'} T_{n',m',\mathbf{p}}^{++} + g_{-\mathbf{p},n;n'} T_{n',m',\mathbf{p}}^{+-}] &= \varepsilon_{\mathbf{p},n;n'}^+ f_{\mathbf{p},n;n'}, \\ i\dot{g}_{-\mathbf{p},n;n'} + \sum_{m'} [g_{-\mathbf{p},n;n'} T_{n',m',\mathbf{p}}^{--} + f_{\mathbf{p},n;n'} T_{n',m',-\mathbf{p}}^{-+}] &= \varepsilon_{-\mathbf{p},n;n'}^- g_{-\mathbf{p},n;n'}, \end{aligned} \quad (110)$$

где

$$T_{n',m',\mathbf{p}}^{\pm\pm} = \langle \varphi_{\pm\mathbf{p},n'}^{(\pm)} | i\partial_t | \varphi_{\pm\mathbf{p},m'}^{(\pm)} \rangle. \quad (111)$$

Таким образом, задача сводится к вычислению матрицы T и решению системы уравнений (110). В следующем пункте мы рассмотрим, как эта задача решается в случае ступеньки Клейна, зависящей от времени.

2.2. Явный вывод уравнений в случае ступеньки Клейна с временной зависимостью

Для демонстрации метода рассмотрим внешнее поле в виде ступеньки Клейна [1], которая описывается скалярным потенциалом $v(z) = v_0\theta(z)$ и введем временную зависимость амплитуды. Тогда одночастичный гамильтониан будет иметь следующий вид:

$$\mathcal{H}(t) = \alpha \hat{p} + v_0\theta(z)f(t) + \beta m, \quad (112)$$

Так как проекции импульса p_x и p_y в данном поле сохраняются, мы будем считать что $p_x = p_y = 0$. Для построения инстантонного базиса необходимо решить уравнение

$$[\alpha_z \hat{p}_z + v_0 \theta(z) f(t) + \beta m] \varphi_\varepsilon^{(\pm)}(t; z) = {}^{(\pm)}\varepsilon(t) \varphi_\varepsilon^{(\pm)}(t; z). \quad (113)$$

Рассмотрим данное уравнение отдельно на левой полуоси и на правой полуоси. Для решения слева имеем

$$[\alpha_z \hat{p}_z + m\beta] u(p) e^{ipz} = {}^{(+)}\varepsilon u(p) e^{ipz}, \quad [\alpha_z \hat{p}_z + m\beta] v(p) e^{-ipz} = {}^{(-)}\varepsilon v(p) e^{-ipz}. \quad (114)$$

Далее представим биспиноры в виде

$$u = \begin{pmatrix} \varphi_u \\ \chi_u \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \varphi_u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad \chi_u = \begin{pmatrix} u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}; \quad v = \begin{pmatrix} \varphi_v \\ \chi_v \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \varphi_v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad \chi_v = \begin{pmatrix} v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}. \quad (115)$$

Таким образом, мы получаем систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \sigma_z p \chi_u - [{}^{(+)}\varepsilon - m] \varphi_u &= 0, & \sigma_z p \chi_v + [{}^{(-)}\varepsilon - m] \varphi_v &= 0, \\ \sigma_z p \varphi_u - [{}^{(+)}\varepsilon + m] \chi_u &= 0, & \sigma_z p \varphi_v + [{}^{(-)}\varepsilon + m] \chi_v &= 0. \end{aligned} \quad (116)$$

Из второго уравнения сразу следует

$$\chi_u = \frac{\sigma_z p}{({}^{(+)}\varepsilon + m)} \varphi_u, \quad \varphi_v = -\frac{\sigma_z p}{({}^{(-)}\varepsilon - m)} \chi_v. \quad (117)$$

Отсюда получаем

$$[p^2 - ({}^{(+)}\varepsilon^2 - m^2)] \varphi_u = 0, \quad [p^2 - ({}^{(-)}\varepsilon^2 - m^2)] \varphi_v = 0. \quad (118)$$

Чтобы решения были линейно независимы, для каждой функции нужно взять разные знаки у энергий. Окончательно имеем, вводя $p^0 = \sqrt{p^2 + m^2}$,

$$u(p) e^{ipz} = \begin{pmatrix} \varphi_u \\ \frac{\sigma_z p}{p^0 + m} \varphi_u \end{pmatrix} e^{ipz}, \quad v(p) e^{-ipz} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_z p}{p^0 + m} \varphi_v \\ \varphi_v \end{pmatrix} e^{-ipz}. \quad (119)$$

Соответствующие значения энергии: ${}^{(\pm)}\varepsilon_p = \pm p^0$. Спиноры φ_u и φ_v мы выберем как собственные вектора матрицы σ_z . Таким образом, будем характеризовать решения также спиновым числом s . Окончательно имеем с учетом нормировки:

$$u(p, s) e^{ipz} = \sqrt{\frac{p^0 + m}{2m}} \begin{pmatrix} \varphi_s \\ \frac{\sigma_z p}{p^0 + m} \varphi_s \end{pmatrix} e^{ipz}, \quad v(p, s) e^{-ipz} = \sqrt{\frac{p^0 + m}{2m}} \begin{pmatrix} \frac{\sigma_z p}{p^0 + m} \varphi_s \\ \varphi_s \end{pmatrix} e^{-ipz}. \quad (120)$$

Заметим, что в произвольный момент времени величину p нельзя интерпретировать как импульс частицы. Пока это лишь формальное квантовое число, нумерующее функции инстантонного базиса. Чтобы окончательно получить их явный вид, необходимо рассмотреть уравнение (113) на правой полуоси и сшить соответствующие решения. Уравнения на правой полуоси отличается лишь сдвигом по энергии, поэтому появление константы в виде потенциала сдвинет лишь нулевой отсчет спектра. Таким образом, мы можем сразу выписать формальные решения уравнения на правой полуоси. Для “положительных” частот $[{}^+ \varepsilon_q \geq v_0 f(t) + m]$ имеем

$$u(q, s) e^{iqz} = \sqrt{\frac{q^0 + m}{2m}} \begin{pmatrix} \varphi_s \\ \frac{\sigma_z q}{q^0 + m} \varphi_s \end{pmatrix} e^{iqz}, \quad {}^+ \varepsilon_q = q^0 + v_0 f(t). \quad (121)$$

Для отрицательных частот $[-\varepsilon_q \leq v_0 f(t) - m]$:

$$v(q, s)e^{-iqz} = \sqrt{\frac{q^0 + m}{2m}} \begin{pmatrix} \frac{\sigma_z q}{q^0 + m} \varphi_s \\ \varphi_s \end{pmatrix} e^{-iqz}, \quad -\varepsilon_q = -q^0 + v_0 f(t). \quad (122)$$

Здесь мы ввели обозначение $q^0 = \sqrt{q^2 + m^2}$.

Далее необходимо непрерывно сшить решения справа и слева при одинаковой энергии таким образом, чтобы общая функция была функцией спектра. Ниже мы представим явный вид необходимых функций в соответствии с результатами работы [25]. При сшивании решений, описанных выше, необходимо сшивать четыре функции справа с четырьмя функциями слева от нуля, которые соответствуют квантовым числам $\pm p$ и $s = \pm 1$. Сшивание будем производить таким образом, чтобы была возможность выделения налетающей, отраженной и прошедшей волн. Нумеровать решения мы будем “импульсом налетающей частицы” и спиновым числом. Стоит обратить внимание, что существует два типа решений: когда частица налетает справа и когда частица налетает слева, что соответствует вырождению функций по импульсу.

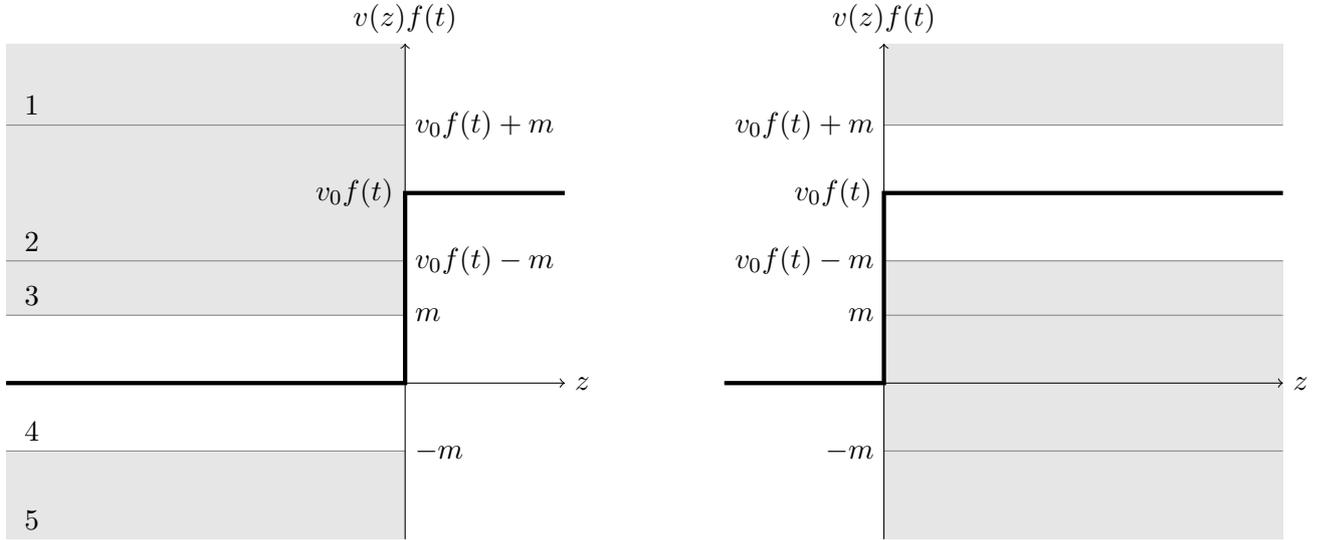


Рис. 2. Вид спектра для свободной частицы перед потенциальным барьером и после ступеньки Клейна. Номерами обозначены зоны энергии, используемые при построении решений.

Далее будем полагать, что $v_0 f(t) > 2m$, и рассмотрим все необходимые случаи.

Случай 1 ($E \geq v_0 f(t) + m$)

В этом случае $E = p^0 = q^0 + v_0 f(t)$ и $p = \sqrt{E^2 - m^2}$, где берется арифметическое значение корня. Таким образом, диапазон изменения импульса: $\sqrt{(v_0 f(t) + m)^2 - m^2} < p < \infty$. Соответствующий данной энергии “импульс справа” $q = \sqrt{(E - v_0 f(t))^2 - m^2}$ может изменяться в диапазоне $0 < q < \infty$. Так как вырождение по импульсу будет учитываться явно, импульс принимает только положительные значения. Имеем следующие функции [25]:

$$\psi_{p,s,+}^{(+)}(t; z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{m}{p^0}} [\theta(-z) \{u(p, s)e^{ipz} + Ru(-p, s)e^{-ipz}\} + \theta(z) Tu(q, s)e^{iqz}], \quad (123)$$

где

$$R = \frac{\sqrt{\frac{p^0 - V_0 f(t) + m}{p^0 + m}} - \sqrt{\frac{p^0 - V_0 f(t) - m}{p^0 - m}}}{\sqrt{\frac{p^0 - V_0 f(t) + m}{p^0 + m}} + \sqrt{\frac{p^0 - V_0 f(t) - m}{p^0 - m}}}, \quad (124)$$

$$T = \frac{2}{\sqrt{\frac{p^0 - V_0 f(t) + m}{p^0 + m}} + \sqrt{\frac{p^0 - V_0 f(t) - m}{p^0 - m}}}. \quad (125)$$

Второй тип решений мы будем нумеровать “импульсом справа”:

$$\varphi_{q,s,+}^{(+)}(t; z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{m}{q^0}} [\theta(-z) T u(-p, s) e^{-ipz} + \theta(z) \{u(-q, s) e^{-iqz} + R u(q, s) e^{iqz}\}], \quad (126)$$

где

$$R = \frac{\sqrt{\frac{q^0 + V_0 f(t) + m}{q^0 + m}} - \sqrt{\frac{q^0 + V_0 f(t) - m}{q^0 - m}}}{\sqrt{\frac{q^0 + V_0 f(t) + m}{q^0 + m}} + \sqrt{\frac{q^0 + V_0 f(t) - m}{q^0 - m}}}, \quad (127)$$

$$T = \frac{2}{\sqrt{\frac{q^0 + V_0 f(t) + m}{q^0 + m}} + \sqrt{\frac{q^0 + V_0 f(t) - m}{q^0 - m}}}. \quad (128)$$

Случай 2 ($V_0 f(t) + m > E > V_0 f(t) - m$)

Осциллирующего решения справа нет, и “импульс справа” становится комплексным. Это соответствует случаю, когда непрерывный спектр слева “попадает” на щель справа, что ведет к уменьшению числа функций вдвое. При этом $q = i\mathcal{X}' = i\sqrt{m^2 - (\varepsilon - v_0 f(t))^2}$, а импульс изменяется в диапазоне $\sqrt{(v_0 f(t) - m)^2 - m^2} < p < \sqrt{(v_0 f(t) + m)^2 - m^2}$.

Возникает две возможности. Во-первых, при $E > v_0 f(t)$:

$$\psi_{p,s,+}^{(+)}(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{m}{p^0}} [\theta(-z) \{u(p, s) e^{ipz} + R u(-p, s) e^{-ipz}\} + \theta(z) T v(i\mathcal{X}', s) e^{-\mathcal{X}'z}]. \quad (129)$$

Во-вторых, при $E < v_0 f(t)$:

$$\psi_{p,s,+}^{(+)}(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{m}{p^0}} [\theta(-z) \{u(p, s) e^{ipz} + R u(-p, s) e^{-ipz}\} + \theta(z) T i \sigma_z v(-i\mathcal{X}', s) e^{-\mathcal{X}'z}]. \quad (130)$$

Здесь соответствующие коэффициенты имеют следующий вид:

$$R = \frac{\sqrt{\frac{p^0 - V_0 f(t) + m}{p^0 + m}} - i \sqrt{\frac{m - (p^0 - V_0 f(t))}{p^0 - m}}}{\sqrt{\frac{p^0 - V_0 f(t) + m}{p^0 + m}} + i \sqrt{\frac{m - (p^0 - V_0 f(t))}{p^0 - m}}}, \quad (131)$$

$$T = \frac{2}{\sqrt{\frac{p^0 - V_0 f(t) + m}{p^0 + m}} + i \sqrt{\frac{m - (p^0 - V_0 f(t))}{p^0 - m}}}. \quad (132)$$

Случай 3 ($v_0 f(t) - m > E > m$) (Режим Клейна)

В таком случае решения справа выражаются в терминах $v(p, s)$ и условие сшивания дает $E = p^0 = -q^0 + v_0 f(t)$, $q = \sqrt{(v_0 f(t) - E)^2 - m^2}$ и $p = \sqrt{E^2 - m^2}$. Импульсы изменяются в диапазонах $0 < p < \sqrt{(v_0 f(t) - m)^2 - m^2}$ и $0 < q < \sqrt{(v_0 f(t) - m)^2 - m^2}$, соответственно. Имеем

$$\psi_{p,s,+}^{(+)}(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{m}{p^0}} [\theta(-z) \{u(p, s) e^{ipz} + R u(-p, s) e^{-ipz}\} + \theta(z) T \sigma_z v(q, s) e^{-iqz}], \quad (133)$$

где

$$R = \frac{\sqrt{\frac{v_0 f(t) - p^0 - m}{p^0 + m}} - \sqrt{\frac{v_0 f(t) - p^0 + m}{p^0 - m}}}{\sqrt{\frac{v_0 f(t) - p^0 - m}{p^0 + m}} + \sqrt{\frac{v_0 f(t) - p^0 + m}{p^0 - m}}}, \quad (134)$$

$$T = \frac{2}{\sqrt{\frac{v_0 f(t) - p^0 - m}{p^0 + m}} + \sqrt{\frac{v_0 f(t) - p^0 + m}{p^0 - m}}}. \quad (135)$$

Кроме того, имеем решение второго типа:

$$\varphi_{q,s,-}^{(+)}(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{m}{q^0}} [\theta(-z) T \sigma_z u(-p, s) e^{-ipz} + \theta(z) \{v(-q, s) e^{iqz} + Rv(q, s) e^{-iqz}\}], \quad (136)$$

где

$$R = -\frac{\sqrt{\frac{v_0 f(t) - q^0 + m}{q^0 - m}} - \sqrt{\frac{v_0 f(t) - q^0 - m}{q^0 + m}}}{\sqrt{\frac{v_0 f(t) - q^0 + m}{q^0 - m}} + \sqrt{\frac{v_0 f(t) - q^0 - m}{q^0 + m}}}, \quad (137)$$

$$T = -\frac{2}{\sqrt{\frac{v_0 f(t) - q^0 + m}{q^0 - m}} + \sqrt{\frac{v_0 f(t) - q^0 - m}{q^0 + m}}}. \quad (138)$$

Случай 4 ($m > E > -m$)

Аналогично случаю 2 наличие щели слева от нуля уменьшает число функций вдвое. При этом $p = i\kappa = i\sqrt{m^2 - \varepsilon^2}$ и $E = -q^0 + v_0 f(t)$. Следовательно, импульс справа имеет вид $q = \sqrt{(v_0 f(t) - E)^2 - m^2}$. При $E > 0$ он изменяется в диапазоне $\sqrt{(v_0 f(t) - m)^2 - m^2} < q < \sqrt{(v_0 f(t))^2 - m^2}$, и имеет место решение

$$\varphi_{q,s,-}^{(+)}(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{m}{q^0}} [\theta(-z) T \sigma_z u(-i\kappa, s) e^{\kappa z} + \theta(z) \{v(-q, s) e^{iqz} + Rv(q, s) e^{-iqz}\}]. \quad (139)$$

В случае $E < 0$ импульс изменяется в пределах $\sqrt{(v_0 f(t))^2 - m^2} < q < \sqrt{(v_0 f(t) + m)^2 - m^2}$ и решение имеет вид

$$\varphi_{q,s,-}^{(-)}(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{m}{q^0}} [-i\theta(-z) T v(i\kappa, s) e^{\kappa z} + \theta(z) \{v(-q, s) e^{iqz} + Rv(q, s) e^{-iqz}\}]. \quad (140)$$

В обеих формулах

$$R = -\frac{\sqrt{\frac{v_0 f(t) - q^0 + m}{q^0 - m}} - i\sqrt{\frac{q^0 - v_0 f(t) + m}{q^0 + m}}}{\sqrt{\frac{v_0 f(t) - q^0 + m}{q^0 - m}} + i\sqrt{\frac{q^0 - v_0 f(t) + m}{q^0 + m}}}, \quad (141)$$

$$T = -\frac{2}{\sqrt{\frac{v_0 f(t) - q^0 + m}{q^0 - m}} + i\sqrt{\frac{q^0 - v_0 f(t) + m}{q^0 + m}}}. \quad (142)$$

Случай 5 ($E < -m$)

Имеем $E = -p^0 = -q^0 + v_0 f(t)$. Тогда импульсы изменяются в диапазонах: $0 < p < \infty$ и $\sqrt{(v_0 f(t) + m)^2 - m^2} < q < \infty$, соответственно. Их связь с энергией имеет вид $p = \sqrt{E^2 - m^2}$ и $q = \sqrt{(E - v_0 f(t))^2 - m^2}$. Решения первого типа:

$$\psi_{p,s,-}^{(-)}(t; z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{m}{p^0}} [\theta(-z) \{v(p, s)e^{-ipz} + Rv(-p, s)e^{ipz}\} + \theta(z)Tv(q, s)e^{-iqz}], \quad (143)$$

где

$$R = \frac{\sqrt{\frac{p^0 + V_0 f(t) + m}{p^0 + m}} - \sqrt{\frac{p^0 + V_0 f(t) - m}{p^0 - m}}}{\sqrt{\frac{p^0 + V_0 f(t) + m}{p^0 + m}} + \sqrt{\frac{p^0 + V_0 f(t) - m}{p^0 - m}}}, \quad (144)$$

$$T = \frac{2}{\sqrt{\frac{p^0 + V_0 f(t) + m}{p^0 + m}} + \sqrt{\frac{p^0 + V_0 f(t) - m}{p^0 - m}}}. \quad (145)$$

Решения второго типа:

$$\varphi_{q,s,-}^{(-)}(t; z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{m}{q^0}} [\theta(-z)Tv(-p, s)e^{ipz} + \theta(z)\{v(-q, s)e^{iqz} + Rv(q, s)e^{-iqz}\}], \quad (146)$$

где

$$R = \frac{\sqrt{\frac{q^0 - v_0 f(t) + m}{q^0 + m}} - \sqrt{\frac{q^0 - v_0 f(t) - m}{q^0 - m}}}{\sqrt{\frac{q^0 - v_0 f(t) + m}{q^0 + m}} + \sqrt{\frac{q^0 - v_0 f(t) - m}{q^0 - m}}}, \quad (147)$$

$$T = \frac{2}{\sqrt{\frac{q^0 - v_0 f(t) + m}{q^0 + m}} + \sqrt{\frac{q^0 - v_0 f(t) - m}{q^0 - m}}}. \quad (148)$$

Функции, выписанные выше, образуют полную систему в смысле

$$\sum_{s,r=\pm} \int_0^\infty dp \psi_{p,s,r}(z, t) \psi_{p,s,r}^\dagger(z', t) + \sum_{s,r=\pm} \int_0^\infty dq \varphi_{q,s,r}(z, t) \varphi_{q,s,r}^\dagger(z', t) = \delta(z - z'). \quad (149)$$

Кроме того, они попарно ортогональны:

$$\int_{-\infty}^\infty dz \psi^{(E)}(z)^\dagger \psi^{(E)}(z) = \theta(E E') \delta(p - p'), \quad (150)$$

$$\int_{-\infty}^\infty dz \varphi^{(E)}(z)^\dagger \varphi^{(E)}(z) = \theta[(E - v_0 f(t)) (E' - v_0 f(t))] \delta(p - p'), \quad (151)$$

$$\int_{-\infty}^\infty dz \psi^{(E)}(z)^\dagger \varphi^{(E)}(z) = 0. \quad (152)$$

Имея явный вид функций инстантонного базиса, можно вычислить матричные элементы матрицы T и перейти к решению системы уравнений (110). Таким образом можно развивать соответствующие амплитуды f и g во времени и при $t = t_{\text{out}}$ извлекать необходимые вероятности рождения частиц. Планируется реализовать соответствующие численные алгоритмы в ближайшем будущем.

Заключение

В настоящей работе рассматривался процесс рождения электрон-позитронных пар в присутствии сильного электромагнитного поля. Задачей исследования было дальнейшее развитие непertурбативных методов, позволяющих учитывать пространственно-временные неоднородности внешнего поля. В первой части работы был представлен подробный вывод квантовых кинетических уравнений в случае однородного внешнего поля с целью дальнейшего обобщения метода на случай внешнего поля, зависящего от координат. Во второй части работы рассматривалась конфигурация, при которой внешнее поле зависит не только от времени, но и от одной из пространственных координат. С применением основной идеи метода, связанной с использованием инстантонного базиса, были сформулированы уравнения общего вида, позволяющие вычислять необходимые амплитуды. Данные амплитуды (в этом случае, матрицы) на больших временах дают возможность непосредственно вычислить дифференциальные плотности рождаемых частиц. Несмотря на это, представляется крайне затруднительным получить замкнутые уравнения на квадрат модуля соответствующих амплитуд по аналогии со случаем однородного поля. Данная трудность связана с тем, что явный вид инстантонных решений при наличии координатной зависимости внешнего поля неизвестен. Однако в ряде случаев спектр гамильтониана может быть найден аналитически, что позволяет учесть как пространственную зависимость поля, так и временную зависимость. При этом последняя может иметь произвольный вид. В качестве примера рассматривалось внешнее поле в виде ступеньки Клейна с временной зависимостью. Был подробно описан спектр гамильтониана Дирака, т. е. в явном виде предъявлены функции инстантонного базиса. С использованием этих функций и полученных ранее уравнений можно перейти к численному решению задачи, что позволит производить непertурбативные расчеты для широкого класса конфигураций внешних полей. Несмотря на то, что парадокс Клейна активно исследуется уже на протяжении многих десятилетий, описанный в данной работе метод может позволить провести более продвинутые расчеты и получить ряд новых результатов. Разработка соответствующих численных процедур будет произведена в ближайшем будущем.

Список литературы

- [1] O. Klein, Z. Phys. **53**, 157 (1929).
- [2] F. Sauter, Z. Phys. **69**, 742 (1931).
- [3] J. Schwinger, Phys. Rev. **82**, 664 (1951).
- [4] W. Heisenberg and H. Euler, Z. Phys. **98**, 714 (1936).
- [5] A. Di Piazza, C. Müller, K.Z. Hatsagortsyan, and C.H. Keitel, Rev. Mod. Phys. **84**, 1177 (2012).
- [6] W. H. Furry, Phys. Rev. **81**, 115 (1951).
- [7] E. S. Fradkin, D. M. Gitman, and S. M. Shvartsman, Quantum Electrodynamics with Unstable Vacuum (Springer-Verlag, Berlin, 1991).
- [8] S. A. Smolyansky, G. Ropke, S. Schmidt et al., GSI Report 97-72 (1997).
- [9] S. M. Schmidt et al., Int. J. Mod. Phys. E **7**, 709 (1998).
- [10] S. Schmidt, D. Blaschke, G. Ropke et al., Phys. Rev. D. **59**, 094005 (1999).
- [11] I. Akal, S. Villalba-Chávez, and C. Müller, Phys. Rev. D **90**, 113004 (2014).
- [12] A. Otto, D. Seipt, D. Blaschke, B. Kämpfer, and S. A. Smolyansky, Phys. Lett. B **740**, 335 (2015).
- [13] A. Otto, D. Seipt, D. Blaschke, S. A. Smolyansky, and B. Kämpfer, Phys. Rev. D **91**, 105018 (2015).
- [14] A. Otto, H. Oppitz, and B. Kämpfer, Eur. Phys. J. A **54**, 23 (2018).
- [15] G. R. Mocken, M. Ruf, C. Müller, and C. H. Keitel, Phys. Rev. A **81**, 022122 (2010).
- [16] M. Ruf, G. R. Mocken, C. Müller, K. Z. Hatsagortsyan, and C. H. Keitel, Phys. Rev. Lett. **102**, 080402 (2009).
- [17] I. A. Aleksandrov, G. Plunien, and V. M. Shabaev, Phys. Rev. D **94**, 065024 (2016).
- [18] I. A. Aleksandrov, G. Plunien, and V. M. Shabaev, Phys. Rev. D **96**, 076006 (2017).
- [19] I. A. Aleksandrov, G. Plunien, and V. M. Shabaev, arXiv:1805.07579.
- [20] C. Schneider and R. Schützhold, J. High Energy Phys. 02 (2016) 164.
- [21] G. Torgrimsson, C. Schneider, and R. Schützhold, Phys. Rev. D **97**, 096004 (2018).
- [22] C. Kohlfürst and R. Alkofer, Phys. Rev. D **97**, 036026 (2018).
- [23] Q. Z. Lv, S. Dong, Y. T. Li, Z. M. Sheng, Q. Su, and R. Grobe, Phys. Rev. A **97**, 022515 (2018).
- [24] N. B. Narozhny and A. I. Nikishov, Yad. Fiz. **11**, 1072 (1970) [Sov. J. Nucl. Phys. **11**, 596 (1970)].
- [25] M. Ochiai and H. Nakazato, J. Phys. Commun. **2**, 015006 (2018).