Санкт-Петербургский Государственный Университет
Физический факультет
Кафедра физики высоких энергий и элементарных частиц

Исследования спектра гамильтониана в одномерной модели Грибова

Выпускная квалификационная работа
студента дневного отделения
Кузьминского Евгения Михайловича

Научный руководитель:
к. ф.- м. н., доцент **Вязовский М. И.**

Рецензент:
к. ф.- м. н., доцент **Комарова М. В.**

Санкт-Петербург
2018

Содержание

1 Введение

1.1 Трёхмерная модель Грибова

Владимир Наумович Грибов в 1967 году предложил [1] рассмотреть модель со следующей плотностью функции Лагранжа:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\varphi^\dagger \partial_y \varphi - \varphi \partial_y \varphi^\dagger\right) - \mu \varphi^\dagger \varphi - \alpha' \left(\vec{\nabla}\varphi^\dagger, \vec{\nabla}\varphi\right) + i\lambda \varphi^\dagger \left(\varphi + \varphi^\dagger\right)\varphi \tag{1}$$

где $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$ — поле, $\varphi_1(\vec{x}, y)$, $\varphi_2(\vec{x}, y) : \mathbb{R}^2 \times i\mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $y = it$ — мнимое время, μ — безразмерная масса, λ — константа связи.

Модель (1) была предложена как эффективная модель взаимодействия померонов в квантовой хромодинамике. Померон (или особенность Померанчука) есть особое бесцветное связанное состояние глюонов. Померон описывается комплексным скалярным полем; в этом случае параметр $\mu = \alpha(0) - 1$ связан с интерцептом реджевской траектории померона, а α' – наклон траектории, который можно считать очень малым, исходя из экспериментальных данных. Безразмерная величина y имеет смысл быстроты, то есть логарифма энергии процесса рассеяния. Эффективное действие (1) было получено путем анализа диаграмм Фейнмана и потому носит исключительно пертурбативный характер.

1.2 Одномерная модель

Примем $\alpha' = 0$. Такая модель называется "игрушечной"и в ней плотность функции Лагранжа имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\varphi^\dagger \partial_y \varphi - \varphi \partial_y \varphi^\dagger\right) - \mu \varphi^\dagger \varphi + i\lambda \varphi^\dagger \left(\varphi + \varphi^\dagger\right)\varphi. \tag{2}$$

В данной работе рассматривается именно эта модель. При отсутствии члена с произведением градиентов полей утрачивается динамическая связь между полями, и модель эффективно становится одномерной. Предполагается, что использование методов квантовой механики позволит получить точное решение в модели (2) вне рамок теории возмущений по константе связи.

1.3 Формализм Лагранжа

Перепишем (2) в терминах φ_1 и φ_2:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{L}} = \frac{1}{2}\left(\left(\varphi_1 - i\varphi_2\right)\left(\partial_y\varphi_1 + i\partial_y\varphi_2\right) - \left(\varphi_1 + i\varphi_2\right)\left(\partial_y\varphi_1 - i\partial_y\varphi_2\right)\right) - \\ - \mu\left(\varphi_1^2 + \varphi_2^2\right) + 2i\lambda\varphi_1\left(\varphi_1^2 + \varphi_2^2\right).\end{aligned} \tag{3}$$

Теперь, исходя из (2) и (3) можно написать:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_y \varphi} = \varphi^\dagger, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_y \varphi^\dagger} = -\varphi; \tag{4}$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \partial_y \varphi_1} = -i\varphi_2, \qquad \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \partial_y \varphi_2} = i\varphi_1. \tag{5}$$

1.4 Переход к формализму Гамильтона

Полученные в (4) и (5) соотношения позволяют нам выбрать канонические координаты и импульсы тремя способами:

$$q = \varphi^\dagger, p = -\varphi, \quad q_1 = \varphi_1, p_1 = -i\varphi_2, \quad q_2 = \varphi_2, p_2 = i\varphi_1. \tag{6}$$

Тогда, в терминах $\varphi, \varphi^\dagger$ плотность функции Гамильтона выглядит как

$$\mathscr{H} = -\mu q p + i\lambda q^2 p + i\lambda q p^2, \tag{7}$$

а в терминах φ_1, φ_2, в зависимости от того, что мы выберем координатой, плотность функции Гамильтона представляется как

$$\tilde{\mathscr{H}}_1 = \mu(q_1^2 - p_1^2) - 2i\lambda q_1(q_1^2 - p_1^2), \tag{8}$$

$$\tilde{\mathscr{H}}_2 = \mu(q_2^2 - p_2^2) - 2\lambda p_2(q_2^2 - p_2^2). \tag{9}$$

Таким образом, у нас в руках есть три различных плотности функции Гамильтона для одной и той же задачи, но в терминах разных переменных. Рассмотрим классический случай для переменных q_2, p_2, а затем квантовый случай для q, p. Отдельно заметим, что для q, p гамильтониан уже нормально упорядочен. Также приводятся "наивные"квантования для координат q_1, p_1 и q_2, p_2, в обоих случаях оператор координаты есть $\hat{q}_j = q_j$, оператор импульса $\hat{p}_j = \frac{d}{dq_j}$, а соответствующий гамильтониан берётся нормально упорядоченным.

1.5 Классический случай

Из (9) получим гамильтоновы уравнения движения:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial q_2}{\partial y} = -2p_2\left(\mu - 2\lambda p_2\right) - 2\lambda\left(q_2^2 - p_2^2\right) \\ -\dfrac{\partial p_2}{\partial y} = -2q_2\left(\mu - 2\lambda p_2\right). \end{cases} \tag{10}$$

Одним из решений этой системы, очевидно, является

$$p_2 = \frac{\mu}{2\lambda},\ y = -\frac{1}{2\mu} ln \left| \frac{q_2 - \frac{\mu}{2\lambda}}{q_2 + \frac{\mu}{2\lambda}} \right|. \tag{11}$$

Потенцированием обеих частей второго равенства получим

$$p_2 = \frac{\mu}{2\lambda}, \qquad q_2 = -\frac{\mu}{2\lambda} \frac{1 + e^{-\frac{\mu}{2\lambda}}}{1 - e^{-\frac{\mu}{2\lambda}}}. \tag{12}$$

Заметим также, что $p_1 = p_2,\ q_1(y) = q_2\left(\frac{y}{i}\right)$. Найдём решение при $p \neq \frac{\mu}{2\lambda}$, исходя из закона сохранения энергии. Из (9)

$$q_2^2 = \frac{E}{\mu - 2\lambda p_2} + p_2^2, \tag{13}$$

и из второго уравнения в (10)

$$q_2 = \frac{\dot{p}_2}{2\left(\mu - 2\lambda p_2\right)}. \tag{14}$$

Тогда

$$\frac{\dot{p}_2^2}{4\left(\mu - 2\lambda p_2\right)^2} = p^2 + \frac{E}{\mu - 2\lambda p_2}, \tag{15}$$

откуда

$$\dot{p}_2^2 = 4p_2^2\left(\mu - 2\lambda p_2\right)^2 + E\left(\mu - 2\lambda p_2\right), \tag{16}$$

$$\dot{p}_2 = \sqrt{4p_2^2\left(\mu - 2\lambda p_2\right)^2 + E\left(\mu - 2\lambda p_2\right)}, \tag{17}$$

$$y = \int \frac{dp_2}{\sqrt{4p_2^2\left(\mu - 2\lambda p_2\right)^2 + E\left(\mu - 2\lambda p_2\right)}}. \tag{18}$$

Таким образом, получаем неявное выражение для p через y, откуда, пользуясь (14) можно получить q. Заметим, что полученный результат согласуется с приведённым в статье [2] результатом для классического предела квантовой теории, полученного в рамках метода Венцеля-Крамерса-Бриллюэна.

1.6 Квантование в терминах φ_1, φ_2: первый способ

Выберем $\varphi_1 = q_1, \varphi_2 = p_1$ и сопоставим им операторы

$$\hat{q} = q_1, \qquad \hat{p} = \frac{\partial}{\partial q_1} \tag{19}$$

с коммутационным соотношением $[\hat{q}, \hat{p}] = 1$, поскольку в нашей теории используется мнимое время, а значит, именно такое коммутационнное соотношение обеспечивает возможность писать уравнение Шрёдингера в привычном виде, а именно,

$$-\hat{H}\Psi = \frac{\partial}{\partial y}\Psi. \tag{20}$$

Также, такое коммутационное соотношение позволяет назвать операторы $\hat{q}$ и $\hat{p}$ операторами рождения и уничтожения соответственно. Теперь, используя (8), напишем уравнение Шрёдингера:

$$\Psi'' - q^2\Psi - \frac{E}{\mu - i\lambda q}\Psi = 0. \tag{21}$$

Найдём асимптотики на бесконечности в виде анзаца

$$e^{\alpha q^{\beta}} q^{\rho} \sum_{k=0}^{\infty} C_k q^{-k}. \tag{22}$$

При подстановке анзаца в уравнение получаем асимптотику вида

$$e^{\pm\frac{1}{2}q^2} q^{1\pm1} \sum_{k=0}^{\infty} C_k q^{-k}. \tag{23}$$

Асимптотика с растущей экспонентой нам не подходит, так как функция с ней не нормируема на $\mathbb{R}$. Таким образом, мы получаем решение со старшим членом асимптотики на бесконечности типа $e^{-\frac{q^2}{2}}$

1.7 Квантование в терминах φ_1, φ_2: второй способ

Аналогично предыдущему пункту, выберем $\varphi_2 = q_2, \varphi_1 = p_2; \hat{q} = q_2, \hat{p} = \frac{\partial}{\partial q_2}$, с коммутационным соотношением $[\hat{q}, \hat{p}] = 1$. Используя (9), напишем уравнение Шрёдингера

$$\Psi''' - \frac{\mu}{2\lambda}\Psi'' + q^2\Psi' + \left(\frac{\mu q^2}{2\lambda} - \frac{E}{2\lambda}\right)\Psi = 0. \tag{24}$$

Асимптотики решений этого уравнения с помощью анзаца получаются следующими:

$$e^{\pm\frac{1}{2}q^2} q^{\frac{3}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} C_k q^{-k}, \tag{25}$$

$$e^{\frac{\mu}{2\lambda}q} \sum_{k=0}^{\infty} C_k q^{-k}. \tag{26}$$

Снова выживает лишь решение с асимптотикой вида $e^{-\frac{q^2}{2}}$, по причинам, указанным в 1.6

2 Каноническое квантование

2.1 Квантование Фока-Баргманна

Будем отныне работать в терминах $\varphi^\dagger = \hat{q}, \varphi = \hat{p}$, для них также верно $[\hat{q}, \hat{p}] = 1$, и их также можно интерпретировать как операторы рождения и уничтожения соответственно. По умолчанию мы считаем, что можем работать в пространстве Фока, т.е. считаем, что все состояния могут быть получены действием операторов рождения в соответствующем количестве на вакуум. Однако, в привычном гильбертовом пространстве $L_2(-\infty, \infty)$ наш гамильтониан, очевидно, неэрмитов. Поскольку мы бы хотели раскладывать состояния по базису собственных состояний гамильтониана, это порождает определённую проблему, а именно отсутствие гарантий полноты желаемого базиса. Известно, однако, что пространству Фока может быть поставлено в соответствие пространство Баргманна, причём соответствие получается проектированием состояний $|\psi\rangle$

$$\langle z^* | \psi \rangle = \langle 0 | e^{pz} | \psi \rangle = \psi(z). \tag{27}$$

Пространство Баргманна есть гильбертово пространство целых функций комплексной переменной z. В нём скалярное произведение задаётся

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \int \frac{dz dz^*}{2\pi i} e^{-zz^*} \psi_1^*(z) \psi_2(z). \tag{28}$$

В этом представлении

$$q \to z, \quad p \to \frac{d}{dz}. \tag{29}$$

Оператор Гамильтона в терминах z принимает следующий вид:

$$\hat{H} = i\lambda z \frac{d^2}{dz^2} + i\lambda z^2 \frac{d}{dz} - \mu z \frac{d}{dz}. \tag{30}$$

Следует отметить, что переход от пространства Фока к пространству Баргманна влечёт переход от представления с помощью дискретного набора чисел — чисел заполнения — к представлению с помощью волновой функции, зависящей от непрерывной переменной. Такое представление модели Грибова [3] сейчас считается общепринятым.

2.2 Стационарное уравнение Шрёдингера

Для оператора Гамильтона (30) уравнение Шрёдингера $\hat{H}\Psi = E\Psi$ имеет вид

$$i\lambda z\psi'' + i\lambda z^2\psi' - \mu z\psi' = E\psi. \tag{31}$$

Для этого уравнения известны [3] асимптотики решений в нуле:

$$\psi_1 \underset{z\to 0}{\sim} c_1 + c_2 z ln z \qquad \psi_2 \underset{z\to 0}{\sim} z \tag{32}$$

и на бесконечности:

$$\psi_3 \underset{z\to\infty}{\sim} \frac{1}{z}e^{-\frac{1}{2}z^2 - \frac{i\mu}{\lambda}z} \qquad \psi_4 \underset{z\to\infty}{\sim} const. \tag{33}$$

В силу аналитичности функций пространства Баргманна решение с асимптотикой вида логарифма недопустимо, поэтому $c_2 = 0$, а для этого необходимо $E = 0$, что даёт соотношение на вакуум в пространстве Баргманна $\psi_0(z)$ вида $\psi_0(z) = 1$. Для ненулевых же энергий необходимо отбросить первую асимптотику в нуле. Выбор поведения на бесконечности диктуется условием нормируемости функции. Так как

$$\|\psi_3\| = \langle\psi_3|\psi_3\rangle = \frac{1}{2\pi i}\int e^{-|z^2|}\left|\frac{1}{z}e^{-\frac{z^2}{2} - \frac{i\mu}{\lambda}z}\right|^2 dzdz^*, \tag{34}$$

$$e^{-|z^2|}\left|\frac{1}{z}e^{-\frac{z^2}{2} - \frac{i\mu}{\lambda}z}\right|^2 \simeq \frac{1}{|z|^2}e^{\frac{2\mu}{\lambda}Imz}e^{-2(Rez)^2}, \tag{35}$$

то поведение вида ψ_3 недопустимо вдоль отрицательной части мнимой оси. Переходя к $z = -ix\sqrt{2}$, получаем уравнение

$$x\psi''(x) + \left(\frac{\mu\sqrt{2}}{\lambda}x - 2x^2\right)\psi' + \frac{E\sqrt{2}}{\lambda}\psi = 0. \tag{36}$$

Таким образом, получена следующая задача: ψ удовлетворяет стационарному уравнению Шрёдингера (36) и на луче $x \in [0, +\infty)$

$$\psi \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad \psi \underset{x\to\infty}{\sim} const. \tag{37}$$

Эти условия позволяют найти спектр интересующего нас оператора (30)

2.3 Эрмитизация

Гамильтониан (30) (обозначим его H_z), очевидно, неэрмитов. Следуя методике, изложенной в [2], покажем, что этот факт не мешает, однако, работать привычным методом. Рассмотрим его для z, лежащих на отрицательной части мнимой полуоси, т.е. перейдём к $z = -iq$, а (30) в терминах q обозначим H_q.

$$H_q = \lambda q \left(-\frac{d^2}{dq^2} + \left(q - \frac{\mu}{\lambda} \right) \frac{d}{dq} \right). \tag{38}$$

От члена с первой производной можно избавиться заменой $\tilde{H}_q = e^{-F(q)} H_q e^{F(q)}$, где $F(q) = e^{\frac{1}{4}\left(q-\frac{\mu}{\lambda}\right)^2}$. Теперь произведём замену $q = \xi^2$, а также преобразуем $H_\xi = \xi^{-\frac{1}{2}} \tilde{H}_q \xi^{\frac{1}{2}}$, тогда получим

$$H_\xi = \frac{1}{4}\lambda \left(-\frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{3}{4\xi^2} + \xi^2 \left(\left(\xi^2 - \frac{\mu}{\lambda} \right)^2 - 2 \right) \right). \tag{39}$$

Гамильтониан H_ξ уже эрмитов, а значит, его собственные функции составляют полную систему. Поскольку мы можем построить преобразование $H_\xi \to H_z$, то далее можно рассматривать H_z, а значит, работать с уравнением (36), не беспокоясь о полноте базиса собственных функций, поскольку она обеспечивается таковой у H_ξ.

3 Уравнение Гойна

3.1 Обозначения

Изучение объекта, именуемого ныне уравнением Гойна, было начато Карлом Гойном в 1889 году [4]. Его каноническая форма имеет вид

$$\begin{aligned}\Bigg(x(x-1)(x-t)\frac{d^2}{dx^2} + (c(x-1)(x-t) + ex(x-t) + (a+b+1-c-e)x\cdot \\ \cdot(x-1))\frac{d}{dx} + (abx - \lambda) \Bigg) y(x) = 0\end{aligned} \tag{40}$$

где a, b, c, e, λ — постоянные параметры уравнения, при этом λ есть параметр, отвечающий собственному значению. Путём конфлюэнции (слияния особых точек) из этого уравнения могут быть получены иные, с другими наборами особенностей, в частности, путём конфлюэнции особых точек 1 и t с особой точкой ∞, биконфлюэнтное уравнение Гойна, каноническая форма которого имеет вид

$$xy''(x) + \left(1 + \alpha - \beta x - 2x^2\right) y'(x) + \left((\gamma - \alpha - 2)x - \frac{1}{2}(\delta + (1+\alpha)\beta) \right) y(x) = 0 \tag{41}$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ есть (постоянные) параметры уравнения. Преобразованием

$$u(x) = x^{\frac{1+\alpha}{2}} exp\left(-\frac{\beta}{2}x - \frac{1}{2}x^2\right) y(x) \tag{42}$$

уравнение (41) приводится к нормальной форме

$$u''(x) + \left(\frac{1}{4}\left(1-\alpha^2\right)\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2}\delta\frac{1}{x} + \gamma - \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 - \beta x - x^2\right) u(x) = 0. \tag{43}$$

Стационарное уравнение Шрёдингера (36) имеет вид канонической формы биконфлюэтного уравнения Гойна с параметрами

$$\alpha = -1, \quad \beta = -\frac{\mu\sqrt{2}}{\lambda}, \quad \gamma = 1, \quad \delta = -\frac{2E\sqrt{2}}{\lambda}. \tag{44}$$

Производя преобразование, аналогичное преобразованию (42):

$$f(x) = exp\left(\frac{\mu\sqrt{2}}{2\lambda}x - \frac{1}{2}x^2\right)\psi(x), \tag{45}$$

получим уравнение на f, с которым в дальнейшем и будем работать

$$f'' + \left(\frac{E\sqrt{2}}{\lambda x} + 1 - \frac{\mu^2}{2\lambda^2} + \frac{\mu\sqrt{2}}{\lambda}x - x^2\right) f = 0. \tag{46}$$

3.2 Ряды Фробениуса и Томе

Для уравнений класса Гойна известны [5], [6] решения Фробениуса и Томе, а также рекуррентные соотношения на коэффициенты в этих рядах. Решениями Фробениуса называют решения уравнения в виде ряда, работающие, вообще говоря, в любых конечных точках. Для уравнения вида (43) с $\alpha = -1, \gamma = 1$ они имеют вид

$$f_1(x) = x\sum_{n=0}^{\infty} c_n^1 x^n, \tag{47}$$

$$f_2(x) = f_1(x)lnx + \tilde{f}(x). \tag{48}$$

При этом принимается $c_0^1 = 1, \tilde{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, b_1 = 0, b_0 = \frac{2}{\delta}$, а рекуррентные соотношения имеют вид

$$n(n+1)c_n^1 = \frac{\delta}{2}c_{n-1}^1 - \left(1 - \frac{\beta^2}{4}\right)c_{n-2}^1 + \beta c_{n-3}^1 + c_{n-4}^1, \tag{49}$$

$$n(n-1)b_n = -(2n-1)c^1_{n-1} + \frac{\delta}{2}b_{n-1} - \left(1 - \frac{\beta^2}{4}\right) b_{n-2} + \beta b_{n-3} + b_{n-4}. \qquad (50)$$

Решения Томе же описывают поведение решения в окрестности точки ∞. Они, вообще говоря, расходятся, однако, при $x \to \infty$ становятся асимптотическими рядами решений уравнения. Как и с решениями Фробениуса, напишем решения Томе для уравнения вида (43) с $\alpha = -1, \gamma = 1$

$$f_3(x) = exp\left(-\frac{x^2 + \beta x}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} a^3_n x^{-n}, \qquad (51)$$

$$f_4(x) = exp\left(\frac{x^2 + \beta x}{2}\right) \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} a^4_n x^{-n}, \qquad (52)$$

и рекуррентные соотношения (снова $a^3_0 = a^4_0 = 1$)

$$-2na^3_n = \left(\beta(n-1) - \frac{\delta}{2}\right) a^3_{n-1} + (n-2)(n-1)\, a^3_{n-2}, \qquad (53)$$

$$2na^4_n = -\left(n\beta + \frac{\delta}{2}\right) a^4_{n-1} + n\,(n-1)\, a^4_{n-2}. \qquad (54)$$

4 Метод нахождения спектра

4.1 Центральная двухточечная задача связи

Решения Фробениуса и Томе для уравнения (46) являются в соответствующих областях $\mathbb{C}$ базисными. Это значит, что глобальное решение этого уравнения может быть по ним разложено в этих областях. Нам известны ограничения (37) на асимптотическое поведение нашего глобального решения для уравнения (36). Поскольку функции ψ и f связаны соотношением (45), то условия (37) преобразуются в условия

$$f \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad f \underset{x\to\infty}{\sim} exp\left(-\frac{\mu\sqrt{2}}{2\lambda}x - \frac{1}{2}x^2\right). \qquad (55)$$

Из условия в нуле видно, что интересующее нас глобальное решение в окрестности нуля совпадает с решением Фробениуса f_1. Это же решение должно представлять собой на бесконечности линейную комбинацию f_3 и f_4, из чего вытекает следующее условие:

$$f_1(x) \sim T_{1,3} f_3 + T_{1,4} f_4 \qquad \text{при}\, x \to \infty \qquad (56)$$

где $T_{1,3} = const$ и $T_{1,4} = const$ Таким образом, мы получаем центральную двухточечную задачу связи на f. Здесь приводится метод разрешения ЦДЗС, предложенный Наундорфом в [7], а затем усовершенствованный и описанный в [6]. Обозначим определитель Вронского $\mathcal{W}[f, g] = fg' - f'g$ и, беря его от обеих частей (56) с f_3 и f_4, получим

$$T_{1,3} = \frac{\mathcal{W}[f_1, f_4]}{\mathcal{W}[f_3, f_4]} \qquad T_{1,4} = \frac{\mathcal{W}[f_1, f_3]}{\mathcal{W}[f_4, f_3]}. \tag{57}$$

Вронскиан $\mathcal{W}[f_3, f_4] = 2$. Обращаясь к виду решений Томе и (55) можно заметить $T_{1,4} = 0$, откуда следует $\mathcal{W}[f_1, f_4] = 0$.

4.2 Вычисление вронскианов

Для вычисления вронскиана $\mathcal{W}[f_1, f_4]$ введём вспомогательные функции:

$$v^{1,4}(x) = exp\left(-\frac{x^2}{4}\right) f_1(x) \qquad v^4(x) = exp\left(-\frac{x^2}{4}\right) f_4(x). \tag{58}$$

Их определители Вронского удовлетворяют соотношению

$$\mathcal{W}[v^{1,4}, v^4](x) = \mathcal{W}[f_1, f_4] exp\left(-\frac{x^2}{2}\right). \tag{59}$$

Поскольку мы рассматриваем уравнение в нормальной форме, в нём нет членов, содержащих первую производную, что, по формуле Лиувилля-Остроградского, означает равенство вронскиана $\mathcal{W}[f_1, f_4]$ константе. Находить его предлагается путём сравнения асимптотических разложений левой и правой частей (59). Для левой части, исходя из определения функций v и вида решений Томе, можно получить разложение

$$\mathcal{W}[v^{1,4}, v^4](x) \sim \left((x+\beta)u^{1,4}(x) - u'^{1,4}(x)\right) S^4(x) + u^{1,4}(x) S'^4, \tag{60}$$

где

$$u^{1,4}(x) = exp\left(\frac{\beta x}{2}\right) f_1(x), \qquad S^4(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^4 x^{-n-1}. \tag{61}$$

Разложим $u^{1,4}(x)$ в ряд

$$u^{1,4}(x) = x \sum_{n=0}^{\infty} \hat{c}_n^{1,4} x^{n-1}, \tag{62}$$

где полагается $\hat{c}_0^{1,4} = 0$, а коэффициенты $\hat{c}_n^{1,4}$ подчиняются рекурретному соотношению

$$n(n+1)\hat{c}_n^{1,4} = (\beta n + \frac{\delta}{2})\hat{c}_{n-1}^{1,4} - \hat{c}_{n-2}^{1,4} + \beta\hat{c}_{n-3}^{1,4} + \hat{c}_{n-4}^{1,4}. \tag{63}$$

Тогда, из (60), $\mathcal{W}[v^{1,4}, v^4](x)$ представляется в виде

$$\mathcal{W}[v^{1,4}, v^4](x) \sim \sum_{s=-\infty}^{\infty} g_s^{1,4} x^s, \tag{64}$$

причём $g_s^{1,4}$ подчиняются соотношению

$$g_s^{1,4} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^4 \left(\hat{c}_{s+n-1}^{1,4} + \beta\hat{c}_{s+n}^{1,4} - (s+2n+3)\hat{c}_{s+n+1}^{1,4}\right). \tag{65}$$

Теперь получим разложение правой части (59). Представим $\mathcal{W}[f_1, f_4](x) = \eta_0 + \eta_1$, где η_0 и η_1 — константы, а также воспользуемся разложением экспоненты в ряд Хэвисайда

$$e^{\xi} \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\xi^{n+\delta}}{\Gamma(n+1+\delta)}, \qquad |arg\xi| < \pi, \qquad \delta\,\text{произвольное}, \tag{66}$$

откуда, для правой части (59)

$$\mathcal{W}[f_1, f_4] exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \sim \sum_{n=\infty}^{\infty} \left(\eta_0 \frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^n}{\Gamma(n+1)} + \eta_1 \frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{\Gamma(n+\frac{3}{2})}\right). \tag{67}$$

Теперь, подставляя разложения (64) и (67) в (59) и сравнивая коэффициенты при равных степенях x, можно написать

$$\mathcal{W}[f_1, f_4] = \frac{\Gamma(N+1)}{\left(-\frac{1}{2}\right)^N} g_{2N}^{1,4} + \frac{\Gamma(N+\frac{3}{2})}{\left(-\frac{1}{2}\right)^{N+\frac{1}{2}}} g_{2N+1}^{1,4} \tag{68}$$

Однако, фаза этого выражения не определена из-за возведения отрицательного числа в некоторую степень, что происходит из-за того, что луч, на котором мы обнаружили граничные условия для постановки ЦДЗС, является лучом Стокса для данного уравнения. Выходом из сложившейся ситуации является использование в качестве значения вронскиана среднего арифметического от его значени в двух секторах Стокса, прилегающих к лучу. В нашем случае это эквивалентно среднему значений чуть выше и чуть ниже вещественной оси. Выражение (68) тогда принимает вид

$$\mathcal{W}[f_1, f_4] = \left.\left((-1)^N \frac{\Gamma(N+1)}{\left(\frac{1}{2}\right)^N} g_{2N}^{1,4} \pm (-1)^N i \frac{\Gamma(N+\frac{3}{2})}{\left(\frac{1}{2}\right)^{N+\frac{1}{2}}} g_{2N+1}^{1,4}\right)\right|_{x=A\pm i\varepsilon} \quad A, \varepsilon \in \mathbb{R}, \tag{69}$$

откуда вытекает следующее условие:

$$g_N^{1,4} = 0. \tag{70}$$

Рассматривая теперь равенство $\mathcal{W}[f_1, f_4] = 0$ как уравнение на параметр уравнения $\delta = \frac{2E\sqrt{2}}{\lambda}$ получим энергетический спектр одномерной модели Грибова. Уравнение на энергии, однако, является трансцендентным, и неясно, можно ли аналитически получить из него точные значения хотя бы некоторых уровней энергии.

5 Заключение

В данной работе был произведён анализ одномерной модели Грибова, получены её классические решения, соответствующие известным ВКБ-пределам квантовой модели, представленным в [2], произведён анализ асимптотического поведения волновых функций, соответствующий известным результатам [3] а также приведён механизм, позволяющий по крайней мере численно оценить значения энергий в спектре гамильтониана модели.

Список литературы

[1] V. N. Gribov. JETP, 26 (1968), 414

[2] V. Allessandrini, D. Amati, R. Jengo. Nuclear Physics B108 (1976) 425-446

[3] M. Ciafaloni, M. Le Bellac and G. C. Rossi. Nuclear Physics B130 (1977) 388-428

[4] K. Heun. "Zur Theorie der Riemann'schen Functionen zweiter Ordnung mit vier Verzweigungspunkten". Mathematische Annalen, 33: 161 (1889)

[5] С. Ю. Славянов, В. Лай. Специальные функции: Единая теория, основанная на анализе особенностей. С.-Пб. "Невский диалект"(2002)

[6] E. M. Ferreira, J. Sesma. Numer Algor (2016) 71:797–809

[7] F. Naundorf. A connection problem for second order linear differential equations with two irregular singular points. SIAM J. Math. Anal. 7, 157–175 (1976)