Санкт-Петербургский Государственный Университет
Физический факультет
Кафедра высшей математики и математической физики

Предельные теоремы о сходимости функционалов от суммы независимых случайных величин к решению задачи Коши для нестационарного уравнения Шрёдингера

Бакалаврская работа студента
дневного отделения
Иевлева Павла Николаевича

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., проф. **Смородина Н.В.**

Рецензент:
д.ф.-м.н., проф. **Белопольская Я.И.**

Санкт-Петербург
2018

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ О СХОДИМОСТИ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ СУММЫ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА

ИЕВЛЕВ П. Н.

Аннотация. В работе вводится расширение понятия случайной величины и рассматриваются приложения построенных объектов к построению вероятностных аппроксимаций полугрупп, связанных с многомерным уравнением Шрёдингера и задачей Партасаратти.

Содержание

1. Введение

Настоящая работа (кроме раздела "Приложение понятия обобщённой случайной функции. Задача Партасаратти") является более подробным изложением статьи автора [2], в которой было введено понятие обобщённой случайной функции. Ранее эти объекты (без строгого определения) были введены в работе [1], где они возникали в результате применения некоторых регуляризаций, требовавшихся для построения вероятностной аппроксимации полугруппы

$$P^t = \exp\left(\frac{it}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right),$$

переводящей функцию $\varphi \in L_2$ в решение задачи Коши для одномерного уравнения Шрёдингера

$$\begin{cases} -2iu_t = u_{xx}, \\ u(x,\, 0) = \varphi(x); \end{cases} \tag{1}$$

С помощью введённых объектов в [2] результаты [1] обобщались на многомерный случай.

В данной работе мы излагаем вопросы, связанные с обобщёнными случайными функциями несколько побробнее, нежели это было сделано в [2], и строим вероятностную аппроксимацию для полугруппы

$$P^t = \exp\left(\frac{t}{2}(S\nabla,\, \nabla)\right), \tag{2}$$

для симметричной матрицы S с отрицательно определённой мнимой частью (задача Партасаратти) в качестве ещё одно примера использования понятия обобщённой случайной функции.

2. Обобщённые случайные функции. Определения и свойства

Определяемые нами объекты крайне напоминают обобщённые случайные функции, определённые в [3] и [5], но мы выбираем другой класс пробных функций и определяем другие операции над ними. Класс пробных функций, рассматриваемый нами, похож на класс $\mathcal{Z}(\mathbb{R}^d)$, введённый в [4], гл. 2, §1.

Определение 2.1. Класс пробных функций $\mathcal{Z}_0(\mathbb{R}^d)$ – это множество функций $\varphi\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, представимых в виде

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-i(p,\,x)}\,\widehat{\Phi}(dx), \tag{3}$$

где $\widehat{\Phi}$ – это заряд конечной полной вариации.

В случае, когда функция $\widehat{\Phi}(p)$ будет суммируемой на $\mathbb{R}^d$ функцией, заряд $\widehat{\Phi}$ будет абсолютно непрерывен относительно меры Лебега на $\mathbb{R}^d$, причём

$$\widehat{\Phi}(A) = \int\limits_A \widehat{\varphi}(p)\, dp.$$

Преобразованием Фурье функции класса $\mathcal{Z}_0(\mathbb{R}^d)$ будем называть как функцию $\widehat{\varphi}(p)$, так и заряд $\widehat{\Phi}(A)$.

Определение 2.2. Будем говорить, что $\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{Z}_0(\mathbb{R}^d)} \varphi$, если для любой непрерывной ограниченной g справедливо

$$\int g(x)\ \widehat{\Phi}_n(dx) \to \int g(x)\ \widehat{\Phi}(dx).$$

Иначе говоря, выберем в $\mathcal{Z}_0(\mathbb{R}^d)$ слабую топологию.

Определение 2.3. $\mathcal{RV}(\mathbb{R}^d)$ – это множество случайных величин со значениями в $\mathbb{R}^d$.

Под сходимостью в $\mathcal{RV}(\mathbb{R}^d)$ будем понимать сходимость по распределению.

Определение 2.4. Множество обобщённых случайных функций $\mathcal{GRV}(\mathbb{R}^d)$ – это множество линейных непрерывных отображений $\xi\colon \mathcal{Z}_0(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{RV}(\mathbb{R})$.

Действие ξ на $\varphi \in D(\mathbb{R}^d)$ обозначаем через $\xi[\varphi]$ или $\xi[\varphi(x)]_x$, подчёркивая по какой из переменных действует функционал.

Определение 2.5. Вложение $\mathcal{RV}(\mathbb{R}^d)$ в $\mathcal{GRV}(\mathbb{R}^d)$. Каждой $\xi \in \mathcal{RV}(\mathbb{R}^d)$ поставим в соответствие $\tilde{\xi} \in \mathcal{GRV}(\mathbb{R}^d)$, действующую на $\varphi \in \mathcal{Z}_0(\mathbb{R}^d)$ по правилу

$$\tilde{\xi}[\varphi] = \varphi(-\xi) \tag{4}$$

Далее для простоты обозначений будем опускать волну над ξ.

Отметим, что при таком вложении не сохраняется линейная структура:

$$\widetilde{\xi+\eta}[\varphi] = \varphi(-\xi-\eta) \neq \varphi(-\xi) + \varphi(-\eta) = \tilde{\xi}[\varphi] + \tilde{\eta}[\varphi], \tag{5}$$

однако, линейная структура в классе $\mathcal{GRV}(\mathbb{R})$ нам и не потребуется. Интересно отметить, что в классе $\mathcal{GRV}(\mathbb{R})$, в отличие от класса обобщённых функций, удаётся определить умножение (не прямое!), которое при таком вложении сохраняется.

Определение 2.6. Произведением $\xi\eta$ обобщённых случайных функций $\xi,\, \eta \in \mathcal{GRV}(\mathbb{R})$ назовём функционал, действующий на $\varphi \in \mathcal{Z}_0(\mathbb{R})$ по правилу

$$\xi\eta[\varphi] = \xi[\eta[\varphi(xy)]_x]_y. \tag{6}$$

(ср. с определяемым ниже прямым произведением обобщённых случайных функций)

Лемма 2.7. *Определённое выше вложение "пн-пн" непрерывно. Иначе говоря, для всякой* $\varphi \in \mathcal{Z}_0(\mathbb{R}^d)$

$$\xi_n \xrightarrow{\text{пн}} \xi \Rightarrow \tilde{\xi}_n[\varphi] \xrightarrow{\text{пн}} \xi[\varphi]$$

Можно сформулировать аналогичные утверждения для других типов сходимости, однако, например, сходимость в среднем при таком вложении очевидно не сохраняется.

Определение 2.8. Обобщённым математическим ожиданием $\xi \in \mathcal{GRV}(\mathbb{R}^d)$ будем называть линейный функционал $\mathbb{E}\,\xi\colon \mathcal{Z}_0(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$, действующий по правилу

$$(\mathbb{E}\,\xi)[\varphi] = \mathbb{E}\,\xi[\varphi]. \tag{7}$$

Таким образом $\mathbb{E}$ – это отображение $\mathcal{GRV}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{Z}_0(\mathbb{R}^d)^*$.

Определение 2.9. Характеристической функцией обобщённой случайной функции $\xi \in \mathcal{GRV}(\mathbb{R}^d)$ будем называть функцию $f_\xi\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$

$$f_\xi(p) = \mathbb{E}\,\xi[e^{-i(p,\,x)}]_x,$$

где под скобками в экспоненте понимается стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^d$.

Для обычной случайной величины $\xi \in \mathcal{RV}(\mathbb{R}^d)$ обобщённая характеристическая функция совпадает с обычной.

Определение имеет смысл благодаря тому, что $\exp(-i(p,\ x))$ лежит в классе $\mathcal{Z}_0(\mathbb{R}^d)$, так как её преобразование Фурье есть сдвинутая дельта-мера, являющаяся зарядом конечной полной вариации.

Определение 2.10. Пусть характеристическая функция $\xi \in \mathcal{GRV}(\mathbb{R})$ имеет непрерывные производные по всем переменным вплоть до порядка $|\beta|$. Обобщёнными семиинвариантами ξ будем называть коэффициенты s^α, $|\alpha| \le |\beta|$ в формуле

$$\ln f_\xi(p_1,\, p_2,\, \ldots,\, p_d) = \sum_{|\alpha|=1}^{|\beta|} \frac{s^\alpha i^{|\alpha|}}{\alpha!} p^\alpha + O(|p|^{|\beta|+1}) \tag{8}$$

Аналогично определяются моменты.

Определение 2.11. Будем говорить, что ξ и η из $\mathcal{GRV}(\mathbb{R}^d)$ независимы, если при всех $\varphi,\ \psi \in \mathcal{Z}_0(\mathbb{R}^d)$ обычные случайные величины $\xi[\varphi]$ и $\eta[\psi]$ независимы.

Аналогично определим независимость набора $\{\xi_k\} \subset \mathcal{GRV}(\mathbb{R}^d)$.

Определение 2.12. Проекцией случайного функционала ξ на k-ую ось будем называть случайный функционал $\xi_k \in \mathcal{GRV}(\mathbb{R}^1)$, действующий на $\varphi \in \mathcal{Z}_0(\mathbb{R}^1)$ по правилу

$$\xi_k[\varphi] = \xi[\varphi(x_k)]_{x_k} \tag{9}$$

В правой части под $\varphi(x_k)$ мы понимаем функцию $\varphi \in \mathcal{Z}_0(\mathbb{R}^d)$, зависящую только от переменной x_k.

Последнее определение имеет смысл благодаря тому, что тождественное отображение лежит в классе $\mathcal{Z}_0(\mathbb{R}^d)$, так как его преобразование Фурье – это дельта-мера, являющаяся зарядом конечной полной вариации.

Определение 2.13. Паре обобщённых случайных функций $\xi,\ \eta \in \mathcal{GRV}(\mathbb{R})$ сопоставим обобщённую случайную функцию $(\xi,\ \eta) \in \mathcal{GRV}(\mathbb{R}^2)$, которая действует на $\varphi \in \mathcal{Z}_0(\mathbb{R}^2)$ по правилу

$$(\xi,\ \eta)[\varphi(x,\ y)] = \xi[\eta[\varphi(x,\ y)]_y]_x.$$

Аналогично определим обобщённую случайную величину $(\xi_1,\ \xi_2,\ \dots,\ \xi_n)$, действующую на $\varphi(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)$.

Лемма 2.14. *Пусть обобщённые случайные функции $\xi_1, \dots, \xi_d \in \mathcal{GRV}(\mathbb{R})$ независимы. Тогда*

$$f_{(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_d)}(p_1,\ p_2,\ \dots,\ p_n) = \prod_{k=1}^{d} f_{\xi_k}(p_k)$$

Доказательство. Докажем утверждение в случае $n = 2$.

$$\begin{aligned} f_{(\xi,\eta)}(p_1,\ p_2) &= \mathbb{E}\,(\xi,\ \eta)[e^{-ipx}e^{-ipy}] = \mathbb{E}\,\xi[\eta[e^{-ipy}e^{-ipx}]] = \\ &= \mathbb{E}\,\xi[e^{-ipx}]\eta[e^{-ipy}] = \mathbb{E}\,\xi[e^{-ipx}]\,\mathbb{E}\,\eta[e^{-ipy}] = f_\xi(p_1)f_\eta(p_2) \end{aligned}$$

□

Заметим, что класс $\mathcal{GRV}(\mathbb{R}^d)$ действительно является обобщением класса случайных величин $\mathcal{RV}(\mathbb{R}^d)$, так как последние вкладываются в него непрерывно и введённые операции математического ожидания, характеристической функции, проекции, а так же понятие независимости обобщают соответствующие понятия для обычных случайных величин.

Определение 2.15. С каждой обобщённой случайной функцией ξ свяжем оператор Q_ξ, действующий по правилу

$$Q_\xi \varphi(x) = \mathbb{E}\,\xi[\mathrm{T}_x \varphi] \tag{10}$$

Лемма 2.16. *Оператор Q_ξ действует на функции из $\mathcal{Z}_0(\mathbb{R}^d)$ как псевдодифференциальный с символом $f_\xi(p)$.*

Доказательство.

$$\begin{aligned} Q_\xi \varphi(x) &= \mathbb{E}\,\xi[\mathrm{T}_x \varphi] = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{-i(p,\,x)} \mathbb{E}\,\xi[e^{-i(p,\,y)}] \widehat{\Phi}(dp) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{-i(p,\,x)} f_\xi(p) \widehat{\Phi}(dp) \end{aligned}$$

□

Если семейство $\{\xi(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{GRV}(\mathbb{R}^d)$ такого, что $\ln f_{\xi(t)}(p)$ как функция t является линейной, то оператор $Q_{\xi(t)}$ обладает полугрупповым свойством.

3. Пример операции, выводящей за класс случайных величин. Операция $\pm$

Введём стандартные обозначения для оператора инверсии I

$$\mathrm{I}\varphi(x) = \varphi(-x) \tag{11}$$

и оператора сдвига T_x на $x \in \mathbb{R}^d$

$$\mathrm{T}_x \varphi(y) = \varphi(y + x).$$

Определение 3.1. Классом $\mathcal{Z}_0(\mathbb{R})_+$ будем называть множество функций $\varphi \in \mathcal{Z}_0(\mathbb{R})$ таких, что $\operatorname{supp} \widehat{\varphi} \subset (-\infty, 0]$. Аналогично определяется $\mathcal{Z}_0(\mathbb{R})_-$.

Функции класса $\mathcal{Z}_0(\mathbb{R})_+$ допускают аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость, а $\mathcal{Z}_0(\mathbb{R})_-$ – в нижнюю.

Определение 3.2. Проекторы Рисса $P_\pm$ – это операторы, действующие на $\psi \in \mathcal{Z}_0(\mathbb{R})$ по правилу

$$P_\pm \psi(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipx} \theta(\pm p)\, \widehat{\Psi}(dp),$$

где θ – стандартная функция Хевисайда.

Проекторы Рисса “разбивают” функцию $\psi \in \mathcal{Z}_0(\mathbb{R})$ на $\psi_+ \in \mathcal{Z}_0(\mathbb{R})_+$ и $\psi_- \in \mathcal{Z}_0(\mathbb{R})_-$.

Определение 3.3. Для $\xi \in \mathcal{GRV}(\mathbb{R})$ определим обобщённую случайную функцию $\xi^{\pm}$, действующую на $\varphi \in \mathcal{Z}_0(\mathbb{R})$ по правилу

$$\xi^{\pm}[\varphi] = \xi[(\mathrm{I}P_+ + P_-)\varphi],$$

где I – это оператор инверсии (11).

Обобщённой случайной функции $\xi \in \mathcal{GRV}(\mathbb{R}^d)$ поставим в соответствие $\xi^{\pm}$ из того же класса, действующую по правилу

$$\xi^{\pm} = (\xi_1^{\pm},\, \dots,\, \xi_d^{\pm}),$$

где x_k – проекция ξ на k-ую ось, определённая формулой (9).

Для обычных случайных величин $\xi \in \mathcal{RV}(\mathbb{R})$

$$\xi^{\pm}[\varphi] = \varphi_+(\xi) + \varphi_-(-\xi).$$

Введём удобное обозначение. Если $x = (x_1,\, \dots,\, x_d) \in \mathbb{R}^d$, то через

$$x^{\pm} = (|x_1|,\, \dots,\, |x_d|) \tag{12}$$

будем обозначать набор чисел, составленный из модулей координат вектора x.

Лемма 3.4. *Обобщённые характеристические функции ξ, $\xi^{\pm} \in \mathcal{GRV}(\mathbb{R}^d)$ связаны соотношением*

$$f_{\xi^{\pm}}(p) = f_{\xi}(p^{\pm})$$

Действие операции $\pm$ на обычные случайные величины выводит за класс случайных величин. Это – первый пример операции, приводящей к классу $\mathcal{GRV}(\mathbb{R}^d)$.

4. Пример операции, выводящей за класс случайных величин. Второе центрирование

Определение 4.1. Если семминварианты $\xi \in \mathcal{GRV}(\mathbb{R}^d)$ корректно определены. Положим

$$\widehat{B}(p_1,\, p_2,\, \dots,\, p_d) = \exp\left(-\sum_{|\alpha|=1,\,3} \frac{s_\alpha i^{|\alpha|}}{\alpha!} p^\alpha\right)$$

Вторым центрированием ξ будем называть случайный функционал $\xi^{(2)}$, определяемый равенством

$$\xi^{(2)}[\varphi] = \xi[\varphi * B],$$

где B – обратное преобразование Фурье функции $\widehat{B}$.

Лемма 4.2. *Вторые и третьи обобщённые семиинварианты $\xi^{(2)}$ равны нулю.*

Характеристическая функция обобщённой случайной функции $\xi^{\pm}$ не является дифференцируемой в нуле, и поэтому формально операция второго центрирования для неё неприменима. Однако, мы можем доопределить её следующим образом. Положим

$$\widehat{B}(p) = \exp\left(-\sum_{|\alpha|} \frac{s_\alpha i^{|\alpha|}}{\alpha!}(p^{\pm})^{\alpha}\right),$$

где s_α – семиинварианты ξ (а не $\xi^{\pm}$!), и определим $\xi^{\pm,(2)}$ по правилу

$$\xi^{\pm,(2)}[\varphi] = \xi^{\pm}[\varphi * B].$$

Нетрудно показать справедливость следующего утверждения.

Лемма 4.3. *Пусть вектор $\xi \in \mathcal{GRV}(\mathbb{R}^d)$ имеет диагональную матрицу ковариации. Тогда*

$$\xi^{(2)} = \left(\xi_1^{(2)}, \xi_2^{(2)}, \ldots, \xi_n^{(2)}\right).$$

В частности, утверждение справедливо для векторов с независимыми компонентами.

5. Приложение понятия обобщённой случайной функции. Вероятностная аппроксимация полугруппы $\exp(it\Delta/2)$, связанная с пуассоновским процессом

Мы называем полугруппу P^t вероятностной, если она каноническим образом соответствует некоторому марковскому процессу $\xi(t)$, то есть действует на φ как $\mathbb{E}\,\varphi(x+\xi(t))$. Можно показать, что полугруппа $P^t = \exp(it\Delta/2)$, переводящая функцию $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$ в решение $u(x,t)$ задачи Коши

$$\begin{cases} -2iu_t = \Delta u, \\ u(x,0) = \varphi(x); \end{cases} \tag{13}$$

для многомерного уравнения Шрёдингера, не является вероятностной. Однако, она может быть приближена последовательностью вероятностных полугрупп. Два способа аппроксимации будут предложены в этом и следующем параграфах.

При попытке такого построения, как отмечалось во введении, неизбежно возникают две трудности: трудность, связанная с неаналитичностью начальной функции, и трудность, связанная с быстрым ростом экспоненты. Для обхода этих трудностей и были введены операции $\pm$ и (2).

Рассмотрим пуассоновскую случайную меру $\nu(dt,\, dx)$ на $(0,\, \infty)^2$ с интенсивностью

$$\mathbb{E}\, \nu(dt,\, dx) = \frac{dt\, dx}{x^3}.$$

Для $\varepsilon > 0$ определим сложный пуассоновский процесс, полагая

$$\xi_1^\varepsilon(t) = \int\limits_0^t \int\limits_\varepsilon^{e\varepsilon} x\nu(ds,\, dx)$$

Известно, что (см. [6], стр. 42) характеристическая функция $\xi_1^\varepsilon(t)$ равна

$$f_{\xi_1^\varepsilon(t)}(p) = \exp\left(t \int\limits_\varepsilon^{e\varepsilon} \left(e^{ipx} - 1\right) \frac{dx}{x^3} \right)$$

Пусть $\xi_k^\varepsilon(t)$, $k = 2,\, \ldots,\, d$ – независимые копии $\xi_1^\varepsilon(t)$. Обозначим $\sigma = e^{i\pi/4}$. При фиксированном t определим $\eta^\varepsilon(t) \in \mathcal{GRV}(\mathbb{R}^d)$, полагая

$$\eta^\varepsilon(t) = \left(\sigma\xi_1^\varepsilon(t),\, \sigma\xi_2^\varepsilon(t),\, \ldots,\, \sigma\xi_n^\varepsilon(t)\right)^{\pm,\,(2)}$$

Как отмечалось выше, второе центрирование помогает справляться с проблемой расходимости, а операция $\pm$ – с проблемой неаналитичности.

Аналогично тому, как это было сделано в [1], можно показать, что операция второго центрирования действительно определена.

В силу независимости набора $\{\xi_k^\varepsilon(t)\}$, последнее равенство можно переписать как

$$\eta^\varepsilon(t) = \left((\sigma\xi_1^\varepsilon(t))^{\pm,\,(2)},\, (\sigma\xi_2^\varepsilon(t))^{\pm,\,(2)},\, \ldots,\, (\sigma\xi_n^\varepsilon(t))^{\pm,\,(2)}\right).$$

Заметим, что ни операция второго центрирования, ни операция $\pm$, не влияют на независимость (они сводятся к подмене пробной функции). Поэтому характеристическая функция $\eta^\varepsilon(t)$ распадается в произведение

$$f_{\eta^\varepsilon(t)}(p_1,\, \ldots,\, p_n) = \prod_{k=1}^n f_{(\sigma\xi_k^\varepsilon(t))^{\pm,\,(2)}}(p_k).$$

Характеристические функции внутри произведения легко пересчитываются через характеристическую функцию $\xi_1^\varepsilon(t)$

$$f_{(\sigma\xi_k^\varepsilon(t))^{\pm,(2)}}(p_k) = f_{(\sigma\xi_1^\varepsilon(t))^{(2)}}(|p_k|) =$$
$$= \exp\left(-\frac{itp_k^2}{2} + t\int\limits_{\varepsilon}^{e\varepsilon} \left(e^{i|p_k|\sigma x} - 1 - i|p_k|\sigma x - \right.\right.$$
$$\left.\left. -\frac{1}{2}\Big(i|p_k|\sigma x\Big)^2 - \frac{1}{6}\Big(i|p_k|\sigma x\Big)^3 \right)\frac{dx}{x^3}\right)$$

Обозначим $P_\varepsilon^t = Q_{\eta^\varepsilon(t)}$ – оператор, задаваемый формулой (10), соответствующий $\xi = \eta^\varepsilon(t)$. Он действует как псевдодифференциальный с символом $f_{\eta^\varepsilon(t)}$, и, следовательно, распрадается в произведение коммутирующих операторов, каждый из которых обладает полугрупповым свойством по t.

Лемма 5.1. *Пусть* $f(z) = e^z - 1 - z - z^2/2 - z^3/6$. *Тогда при* $\arg z \in [\pi/2, 3\pi/2]$ *справедливо неравенство* $|f(z)| \le |z|^3$.

Теорема 5.2. *Существует* $C > 0$ *такое, что для любой* $\varphi \in W_2^3(\mathbb{R}^d)$ *и всех* $t > 0$ *справедлво неравенство*

$$\|P_\varepsilon^t\varphi - P^t\varphi\|_{L_2} \le Ct\varepsilon^2\|\varphi\|_{W_2^3}, \tag{14}$$

где

$$P^t = \exp\left(\frac{it}{2}\Delta\right). \tag{15}$$

Доказательство. Доказательство теоремы вполне аналогично доказательству теоремы 1 параграфа 4 статьи [1] и использует формулу Дюамеля ([7], гл. IX, § 2 п.1)

$$e^{t(A+B)} - e^{tA} = \int\limits_0^t e^{(t-\tau)(A+B)}Be^{\tau A}\,d\tau \tag{16}$$

Введём обозначения для операторов

$$A = \frac{i}{2}\Delta, \qquad B = G_\varepsilon - A, \tag{17}$$

где G_ε – это генератор полугруппы P_ε^t.

Отметим, что справедливы неравенства

$$\|e^{t(A+B)}\|_{L_2\to L_2} \le 1 \tag{18}$$

и

$$\|e^{tA}\|_{W_2^3\to W_2^3} \le 1. \tag{19}$$

Таким образом для доказательства теоремы достаточно оценить норму $\|B\|_{W_2^3\to L_2}$.

Так как генератор произведения коммутирующих полугрупп есть сумма генераторов, оператор B является псевдодифференциальным, а его символ $\widehat{\beta}$ распадается в сумму

$$\widehat{\beta}(p_1,\, p_2,\, \ldots,\, p_d) = \sum_{k=1}^{d} \widehat{b}(p_k), \tag{20}$$

где

$$\widehat{b}(p) = \int\limits_{\varepsilon}^{e\varepsilon} \left(e^{i|p|\sigma x} - 1 - i|p|\sigma x - \frac{1}{2}\Big(i|p|\sigma x\Big)^2 - \frac{1}{6}\Big(i|p|\sigma x\Big)^3 \right) \frac{dx}{x^3} \tag{21}$$

Пользуясь леммой 5.1, получим следующую оценку для $\widehat{b}$:

$$|\widehat{b}(p)| \le C|p|^3\varepsilon^2.$$

Следовательно,

$$\|B\varphi\|_{L_2}^2 = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^d \int |\widehat{\beta}(p)|^2 |\widehat{\varphi}(p)|^2\, dp \le$$
$$\le \left(\frac{1}{2\pi}\right)^d \int \sum_{k=1}^{d} \left|\widehat{b}(p_k)\right|^2 |\widehat{\varphi}(p)|^2\, dp \le$$
$$\le \tilde{C}\varepsilon^4 \int dp \sum_{k=1}^{d} |p_k|^6\, |\widehat{\varphi}(p)|^2\, dp = \tilde{C}\varepsilon^4 \|\varphi\|_{W_2^3} \tag{22}$$

Из последней оценки следует утверждение теоремы. □

6. Приложение понятия обобщённой случайной функции. Вероятностная аппроксимация полугруппы $\exp(it\Delta/2)$, связанная с суммой независимых случайных величин

Пусть $\{\xi_j\}_{j=1}^{\infty}$ – последовательность независимых одинаково распределённых случайных d-мерных векторов с общим распределением $\mathcal{P}$. Будем предполагать, что ξ_1 имеет единичную матрицу ковариации и конечные моменты третьего порядка. Пусть $\eta(t)$ –

стандартный пуассоновский процесс, не зависящий от последовательности $\{\xi_j\}_{j=1}^{\infty}$. Определим последовательность $\{\zeta^n\}_{n=1}^{\infty}$ сложных пуассоновских процессов, полагая

$$\zeta^n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{\eta(nt)} \xi_j$$

Характеристическая функция $\zeta_n(t)$ равна

$$f_{\zeta^n}(p_1, \ldots, p_d) = \exp\left(nt \int\limits_{\mathbb{R}^d_+} \left(\exp\left(\frac{i(p, y)}{\sqrt{n}} \right) - 1 \right) \mathcal{P}(dy) \right).$$

Как и в случае пуассоновской аппроксимации, положим $\sigma = e^{i\pi/4}$ и определим при каждом фиксированном t обобщённую случайную функцию $\eta^n(t) \in \mathcal{GRV}(\mathbb{R}^d)$, полагая

$$\eta^n(t) = \big(\sigma\zeta_1^n(t), \sigma\zeta_2^n(t), \ldots, \sigma\zeta_d^n(t)\big)^{\pm, (2)}.$$

Нетрудно показать, что операция второго центрирования в данном случае определена корректно, и, ввиду диагональности матрицы ковариации обобщённой случайной функции $\eta^n(t)$, в силу леммы 4.3, справедливо

$$\eta^n(t) = \big((\sigma\zeta_1^n(t))^{\pm, (2)}, (\sigma\zeta_2^n(t))^{\pm, (2)}, \ldots, (\sigma\zeta_d^n(t))^{\pm, (2)}\big)$$

Обобщённая характеристическая функция $\eta^n(t)$ имеет вид

$$f_{\eta^n(t)}(p_1, \ldots, p_d) = \exp\left(-\frac{i(p^{\pm})^2}{2} + n \int\limits_{\mathbb{R}^d_+} \left(e^{i\sigma(p^{\pm}, y)/\sqrt{n}} - 1 - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \left(\frac{i\sigma(p^{\pm}, y)}{\sqrt{n}} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{i\sigma(p^{\pm}, y)}{\sqrt{n}} \right)^2 - \frac{1}{6} \left(\frac{i\sigma(p^{\pm}, y)}{\sqrt{n}} \right)^3 \right) \mathcal{P}(dy) \right).$$

Обозначим $P_n^t = Q_{\eta^n(t)}$ – оператор, задаваемый формулой (10), соответствующий $\xi = \eta^n(t)$. Он действует как псевдодифференциальный с символом $f_{\eta^n(t)}$.

Теорема 6.1. *Существует $C > 0$ такое, что для любой $\varphi \in W_2^3(\mathbb{R}^d)$ и всех $t > 0$ справедлво неравенство*

$$\|P_n^t \varphi - P^t \varphi\|_{L_2} \leq \frac{Ct}{\sqrt{n}} \|\varphi\|_{W_2^3}, \tag{23}$$

где

$$P^t = \exp\left(\frac{it}{2} \Delta \right) \tag{24}$$

Доказательство. Доказательство практически повторяет доказательство аналогичного утверждения для пуассоновской аппроксимации. Обозначим

$$A = \frac{i}{2}\Delta, \qquad B = G_n - A, \tag{25}$$

где G_n – это генератор полугруппы P_n^t.

Как и выше, достаточно оценить операторную норму $\|B\|_{W_2^3 \to L_2}$.

Заметим, что $(p^\pm, y)$ в подынтегральном выражении всегда положительно. В силу леммы 5.1 имеем

$$\left| f\left(\frac{(p^\pm, y)}{\sqrt{2n}}\right)\right| \leq \left(\frac{(p^\pm, y)}{\sqrt{2n}}\right)^3 \leq \left(\frac{\| p^\pm \| \cdot \|y\|}{\sqrt{2n}}\right)^3.$$

Таким образом

$$|\widehat{b}_n(p_1, \ldots, p_d)| \leq \frac{\| p^\pm \|^3}{2^{3/2}\sqrt{n}} \int \|y\|^3 \, \mathcal{P}(dy).$$

Последний интеграл конечен в силу условия на моменты третьего порядка.

Далее, имеем

$$\|B\varphi\|_{L_2}^2 = \frac{1}{2\pi}\int |\widehat{\varphi}(p)|^2 |\widehat{b}_n(p)|^2 \, dp \leq \frac{C}{n}\int |\widehat{\varphi}(p)|^2 \| p^\pm \|^6 \, dp \leq \frac{\tilde{C}}{n}\|\varphi\|_{W_2^3}^2. \tag{26}$$

Из последней оценки следует утверждение теоремы. □

7. Приложение понятия обобщённой случайной функции. Задача Партасаратти

Задачей Партасаратти мы называем построение вероятностной аппроксимации для полугруппы

$$P^t = \exp\left(\frac{t}{2}(S\nabla, \nabla)\right), \tag{27}$$

где матрица S симметрична и имеет отрицательно определённую мнимую часть. При таких условиях уравнение очень напоминает уравнение Шрёдингера. Мы построим аналог операции $\pm$, удобный в данной ситуации.

Разложим матрицу S в произведение

$$S = A^T A. \tag{28}$$

Обозначим через f_i вектор, составленный из мнимых частей строк матрицы A:

$$f_i = (\operatorname{Im} A_{i1}, \ldots, \operatorname{Im} A_{id})^T \tag{29}$$

Определим теперь отображение $B\colon \{-1,\,0,\,1\}\times\{1,\,\ldots,\,k\}\to\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, где $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ – сигма-алгебра борелевских подмножеств $\mathbb{R}^d$, по правилу

$$B(s,\,k)=\{p\in\mathbb{R}^d\mid \operatorname{sgn}\,(f_i,\,p)=s\},\tag{30}$$

где

$$\operatorname{sgn} x=\begin{cases}-1,\; x<0,\\ 0,\; x=0,\\ 1,\; x>0;\end{cases}\tag{31}$$

Легко видеть, что $B(s,\,k)$ это либо полупространство, либо гиперплоскость.

Построим, пользуясь отображением B, разбиение $\mathbb{R}^d$. Для этого определим $A\colon \{-1,\,0,\,1\}^d\to\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, полагая для $s\in\{-1,\,0,\,1\}^d$

$$A(s)=\bigcap_{k=1}^{d}B(s_k,\,k).\tag{32}$$

При различных s и p из $\{-1,\,0,\,1\}^d$ множества $A(s)$ и $A(p)$ не пересекаются. При этом набор множеств $A(s)$ задаёт разбиение $\mathbb{R}^d$

$$\mathbb{R}^d=\bigcup_{s\in\{-1,\,0,\,1\}^d}A(s)\tag{33}$$

Сопоставим теперь $s\in\{-1,\,0,\,1\}^d$ оператор P_s (обобщение проекторов Рисса $P_\pm$), действующий на $\varphi\in\mathcal{Z}_0(\mathbb{R}^d)$ по правилу

$$P_s\varphi(x)=\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{A(s)}e^{-i(p,\,x)}\widehat{\Phi}(dp)\tag{34}$$

Определим аналог операции $\pm$ для векторов из $\mathbb{R}^d$. Именно, поставим в соответствие вектору $x\in\mathbb{R}^d$ и $s\in\{-1,\,0,\,1\}^d$ вектор x^s по правилу

$$x^s=\begin{pmatrix}-s_1 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & -s_2 & 0 & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -s_d\end{pmatrix}x\tag{35}$$

Отметим, что матрица самосопряжённая, и поэтому $(p,\,x^s)=(p^s,\,x)$.

Теперь заметим, что при $p \in A(s)$ для некоторого $s \in \{-1,\, 0,\, 1\}^d$ и $x \in \mathbb{R}^d_+$

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\,(-i(p,\, A^T x^s)) &= \mathrm{Im}\,(p,\, A^T x^s) = \\ &= \mathrm{Im}\sum_{i,\,k=1}^{d} A_{ik} p_k (x^s)_i = \sum_{i,\,k=1}^{d} (f_i,\, p)(-s_i x_i) = \\ &= \sum_{i,\,k=1}^{d} |(f_i,\, p)| s_i (-s_i x_i) = -\sum_{i,\,k=1}^{d} |(f_i,\, p)| s_i^2 x_i \le 0 \qquad (36)\end{aligned}$$

Таким образом определено $(P_s\varphi)(A^T x^s)$. Обобщим теперь операцию $\pm$ для обобщённых случайных функций $\xi \in \mathcal{GRV}(\mathbb{R}^d)$, полагая для $\varphi \in \mathcal{Z}_0(\mathbb{R}^d)$

$$\xi^{\pm}[\varphi] = \sum_{s \in \{-1,\,0,\,1\}^d} \xi[\varphi_s], \qquad (37)$$

где

$$\varphi_s(x) = (P_s\varphi)(x^s). \qquad (38)$$

Вычислим теперь обобщённую характеристическую функцию $\xi^{\pm}$. Ясно, что для $\varphi(x) = e^{-i(p,\,x)}$

$$\varphi_s(x) = e^{-i(p,\,x_s)} \mathbf{1}_{A(s)}(p) = e^{-i(p_s,\,x)} \mathbf{1}_{A(s)}(p). \qquad (39)$$

Следовательно,

$$f_{\xi^{\pm}}(p) = \mathbb{E}\,\xi^{\pm}[e^{-i(p,\,x)}] = \sum f_{\xi}(p^s) \mathbf{1}_{A(s)}(p) = f_{\xi}(p^s) \text{ при } p \in A(s) \qquad (40)$$

Теперь, когда построены необходимые объекты, можно построить полугруппу, аппроксимирующую P^t, например, пользуясь пуассоновской аппроксимацией винеровского процесса. Для этого определим точно так же как в параграфе про пуассоновскую аппроксимацию для уравнения Шрёдингера случайный вектор $\xi^{\varepsilon}(t)$ и рассмотрим обобщённую случайную функцию $\eta^{\varepsilon}(t) \in \mathcal{GRV}(\mathbb{R}^()\mathbb{R}^d)$, полагая

$$\eta^{\varepsilon}(t) = \left(A^T \xi^{\varepsilon}(t)\right)^{\pm,\,(2)}, \qquad (41)$$

где операция $\pm$ определена выше. Определим для каждого $\varepsilon > 0$ полугруппу операторов P^t_{ε}, полагая

$$P^t_{\varepsilon} = Q_{\eta^{\varepsilon}(t)}. \qquad (42)$$

Пользуясь леммой (**??**) можно аналогично тому, как это было сделано в параграфе про пуассоновскую аппроксимацию, показать, что справедлива теорема

Теорема 7.1. *Существует постоянная $C > 0$ такая, что для любой $\varphi \in W_2^3(\mathbb{R}^d)$ и всех $t > 0$ справедливо неравенство*

$$\|P_\varepsilon^t \varphi - P^t \varphi\|_{L_2} \le Ct\varepsilon^2 \|\varphi\|_{W_2^3}. \tag{43}$$

Список литературы

1. Ибрагимов И.А., Смородина Н.В., Фаддеев М.М., *Об одной предельной теореме, связанной с вероятностным представлением решения задачи Коши для уравнения Шрёдингера.* – Зап. научн. семин. ПОМИ **454** (2016), 158-176.
2. Иевлев П.Н., *Вероятностное представление решения задачи Коши для многомерного уравнения Шрёдингера.* – Зап. научн. семин. ПОМИ **466** (2017), 145-158.
3. И. М. Гельфанд, Н. Я. Виленкин, *Некоторые приложения гармонического анализа. Оснащённые гильбертовы пространства*, Государственное издательство физико-математической литературы, Москва, 1961.
4. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Обобщённые функции и действия над ними.* – Государственное издательноство физико-математической литературы, М., 1958.
5. К. Ито, *Вероятностные процессы.* Издательство иностранной литературы, Москва, 1960.
6. Дж. Кингман, *Пуассоновские процессы.* Издательство МЦНМО, Москва, 2007.
7. Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов.* Мир, М., 1972.
8. М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики.* – Мир, М., **2** 1978.