

Федеральное государственное бюджетное учреждение высшего образования
«Санкт-Петербургский Государственный Университет»



ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
Асимптотика собственных функций непрерывного
спектра квантовой задачи рассеяния трех одномерных
частиц с короткодействующими потенциалами
отталкивания.

Студента 4 курса, 409 группы
Байбулова Ильнура
Вильевича

Направление: 03.03.02 «Физика»

Научный руководитель:
к.ф.-м.н., доцент. **Левин С. Б.**

Рецензент:
д.ф.-м.н., доцент, начальник
сектора ЛТФ ОИЯИ, Дубна
Мотовилов А. К

Работа защищена с оценкой
«___» (_____)
«___» _____ 2017 г.

_____/_____
(подпись) (ФИО)

Санкт-Петербург
2018

Содержание

1	Введение	3
2	Дифракционный подход к задаче рассеяния	3
3	Структура и асимптотика предельных значений ядра резольвенты	8
4	Краткое доказательство и комментарии	10
5	Структура ядра резольвенты. Асимптотика волновой функции	16

1 Введение

В 1963 г. Л. Д. Фаддеевым была проведено исследование задачи рассеяния трех квантовых трехмерных частиц [1]. В случае же одномерных частиц специфика размерности не позволяет провести те же построения. К задаче рассеяния одномерных частиц предпринимались различные подходы, например в работах Е. Мура было установлено отсутствие сингулярного непрерывного спектра оператора Шредингера нескольких частиц с парными потенциалами отталкивания, а в [5] была предъявлена асимптотика волновой функций задачи рассеяния, равномерная по угловой переменной, в которую вошли вклады как от трехчастичного взаимодействия, так и от взаимодействия в парах. Несмотря на всю важность полученных результатов, вопрос обоснования (в смысле теоремы существования и единственности) был решен только в [2], где были получены предельные значения резольвенты при стремлении спектрального параметра к положительной вещественной оси. В настоящей работе на основе этих результатов исследована структура предельных значений ядра резольвенты, а также исследованы ее координатные асимптотики на бесконечности в конфигурационном пространстве, что позволило извлечь асимптотики волновой функции и явно сопоставить результаты работ [5] и [2].

2 Дифракционный подход к задаче рассеяния

В работах [4], [5] была получена координатная асимптотика решения стационарной задачи рассеяния для системы трех одномерных квантовых частиц. Приведем основные идеи этой работы.

Рассматривается нерелятивистский гамильтониан для системы 3 одномерных квантовых частиц. Парные потенциалы взаимодействия считаются одинаковыми, неотрицательными, быстро убывающими на бесконечности и четными.

$$H\psi = H_0\psi + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \neq j \leq 3} v(z_i - z_j)\psi \quad (2.1)$$

$$z_i \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3, \quad \psi = \psi(\mathbf{z}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C},$$

где $H_0 = -\sum_{i=1}^3 \frac{1}{2m_i} \Delta_i$ – оператор кинетической энергии. Здесь $\Delta_i = \frac{\partial^2}{\partial z_i^2}$, v – потенциал двухчастичного взаимодействия. Потенциал является четной, финитной, неотрицательной интегрируемой функцией. m_i – соответствующие массы частиц.

Осуществим преобразование

$$x_{ij} = \sqrt{2\mu_{ij}}(z_i - z_j), \quad x_{ij,k} = \sqrt{2\mu_{ij,k}} \left(\frac{m_i z_i + m_j z_j}{m_i + m_j} - z_k \right), \quad y = \frac{\sum_{i=1}^3 m_i z_i}{M}. \quad (2.2)$$

Здесь $M = m_1 + m_2 + m_3$ – полная масса системы,

$$\mu_{ij} = \frac{m_i m_j}{m_i + m_j}, \quad \mu_{ij,k} = \frac{(m_i + m_j) m_k}{M},$$

где i, j, k – перестановка символов 1,2,3. Совокупность этих переменных образует ортогональный базис Якоби. Всего таких базисов без учета ориентации $3! = 6$.

Оператор кинетической энергии после замены имеет вид

$$H_0 = -\frac{1}{2M} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \Delta$$

Полный гамильтониан имеет вид

$$H = H_0 + \sum_{1 \leq i \neq j \leq 3} v\left(\frac{1}{\sqrt{2\mu_{ij}}} x_{ij}\right) \quad (2.3)$$

Здесь Δ – оператор Лапласа по двум переменным $x_{ij}, x_{ij,k}$. Выделяя движение центра масс, ограничим действие оператора на поверхность $\Gamma = \{\mathbf{x} = (y, x_{ij}, x_{ij,k}) \in \mathbb{R}^3 | y = 0\}$. На поверхности Γ определим прямые $l_k = \{\mathbf{x} | x_{ij} = 0\}$ и вектора \mathbf{l}_k вдоль l_k в направлении $x_k > 0$. В дальнейшем, допуская вольность, мы не будем различить вектор и прямую вдоль него. Собственная функция оператора на Γ , описывающего систему там, где только один из потенциалов отличен от нуля в координатах Якоби допускает разделение переменных

$$-\Delta \xi_{ij} + v\left(\frac{1}{\sqrt{2\mu_{ij}}} x_{ij}\right) \xi_{ij} = E \xi_{ij}$$

$$\xi_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{q}) = \xi(x_{ij}, k_{ij}) e^{ip_{ij} x_{ij,k}} \quad (2.4)$$

$$-\xi''(x_{ij}) + v\left(\frac{1}{\sqrt{2\mu_{ij}}} x_{ij}\right) \xi(x_{ij}) = k_{ij}^2 \xi(x_{ij})$$

$$E = p_{ij}^2 + k_{ij}^2.$$

Так как сложность записи начинает расти, перейдем для нашего удобства к системе частиц равной массы. Это не ограничивает рассмотрение задачи и все выкладки применимы и для частиц, обладающих равной массой, так как в каждом конкретном случае возможно провести те же действия по очевидной аналогии.

$\Gamma = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$. $l_j = \{\mathbf{x} : x_i = x_k, i \neq k \neq j\}$, $i, j, k = 1, 2, 3$. Введем на Γ ортогональные к l_j направления \mathbf{k}_j , так что пара \mathbf{k}_j, l_j образует стандартный ориентированный базис. Для любого $\mathbf{q} \in \Gamma$ представим

$$\mathbf{q} = y_j \mathbf{l}_j + x_j \mathbf{k}_j \quad (2.5)$$

Координаты (y_j, x_j) имеют смысл координат Якоби, $x_j = (z_k - z_j)$ Если $\mathbf{z} = (k_j, p_j) \in \Gamma$, то

$$\langle \mathbf{q}, \mathbf{z} \rangle = y_j p_j + x_j k_j \quad (2.6)$$

Прямые вдоль l_j разбивают Γ на шесть секторов. Внутренность каждого сектора состоит из векторов (x_1, x_2, x_3) , координаты которых удовлетворяют условию $x_i > x_j > x_k$ где $\sigma = (i, j, k)$ некоторая перестановка чисел $(1, 2, 3)$. Этой перестановкой и будем характеризовать сектор λ_σ . На Γ действует группа перестановок S_3 . $\sigma = (i, j, k) \in S_3$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ по правилу $\sigma \mathbf{x} = (x_i, x_j, x_k)$. Если вектор $\mathbf{p} \in \lambda_\sigma$, то $\tau \mathbf{p} \in \lambda_{\tau\sigma}$, $\tau \in S_3$. Такие обозначения позволяют в удобном виде записать таблицу скалярных произведений для векторов из различных секторов. Необходимость такой записи будет понятна из дальнейших построений.

Вследствие разделения переменных на Γ оператор H имеет вид

$$H = -\Delta + v(x_1) + v(x_2) + v(x_3). \quad (2.7)$$

Там, где только один потенциал не равен нулю, Гамильтониан принимает вид

$$H = -\frac{\partial^2}{\partial y_j^2} + h_j, \quad h_j = -\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + v(x_j) \quad (2.8)$$

Тогда, как и обсуждалось ранее, собственная функция оператора Гамильтониана допускает разделение переменных:

$$\xi(\mathbf{z}, \mathbf{q}) = \psi(x_j, k_j) e^{ip_j y_j}$$

$$H\xi = E\xi$$

$$E = k_j^2 + p_j^2$$

$$h\psi = k_j^2\psi$$

В соответствии с написанным выше будем рассматривать уравнение:

$$-\psi'' + v\psi = k^2\psi \quad (2.9)$$

Зафиксируем поведение функции на бесконечности $\psi(x, k)e^{ixk} \rightarrow 1$ при $x \rightarrow -\infty$

Если потенциал четный, то верно, что

$$\psi(-x, k) = b(k)\psi(x, k) + a(k)\psi(x, -k)$$

Коэффициенты $s = 1/a$, $r = b/a$ имеют смысл коэффициентов прохождения и отражения, причем b принимает чисто мнимые значения.

Будем считать, что потенциал непрерывен всюду, кроме конечного множества точек, причем в окрестности точки разрыва α потенциал ведет себя как $v(x) = w\delta(x - \alpha) + \tilde{v}(x)$, где \tilde{v} в точке α имеет только разрыв первого рода.

Тогда функции s , r обладают свойствами:

$$s(-k) = \overline{s(k)}, \quad r(-k) = \overline{r(k)}, \quad |s(k)|^2 + |r(k)|^2 = 1, \quad (2.10)$$

$s(r)$ допускает аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость и аналитична там за исключением конечного числа полюсов первого порядка, и при $k \rightarrow \infty$ $s(k) = 1 + o(k^{-1})$.

С задачей рассеяния будем ассоциировать задачу дифракции на системе полупрозрачных экранов, расположенных вдоль прямых l_j . Плоская волна с волновым вектором \mathbf{p} вследствие разделения переменных при прохождении экрана превращается в плоскую волну с коэффициентом прохождения $s(|(\mathbf{p}, \mathbf{k}_j)|)$ с фиксированным волновым вектором, при отражении в волну с волновым вектором $\tau_j \mathbf{p}$ с коэффициентом отражения $r(|(\mathbf{p}, \mathbf{k}_j)|)$.

В каждом из углов при рассеянии плоской волны $e^{i(p,x)}$ на экранах возникает свой набор плоских волн, со своими коэффициентами. Пусть плоская волна падает на систему экранов из угла λ_{321} . Так как в рассматриваемом случае массы равны, волновая функция инвариантна относительно представленной выше группы перестановок, $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \psi(\sigma\mathbf{x}, \sigma\mathbf{p})$, $\sigma \in S_3$. Путь луча, отвечающего этой волне, различен в зависимости от того, на какой экран раньше попадает луч. Рассмотрим набор плоских волн, проникающих

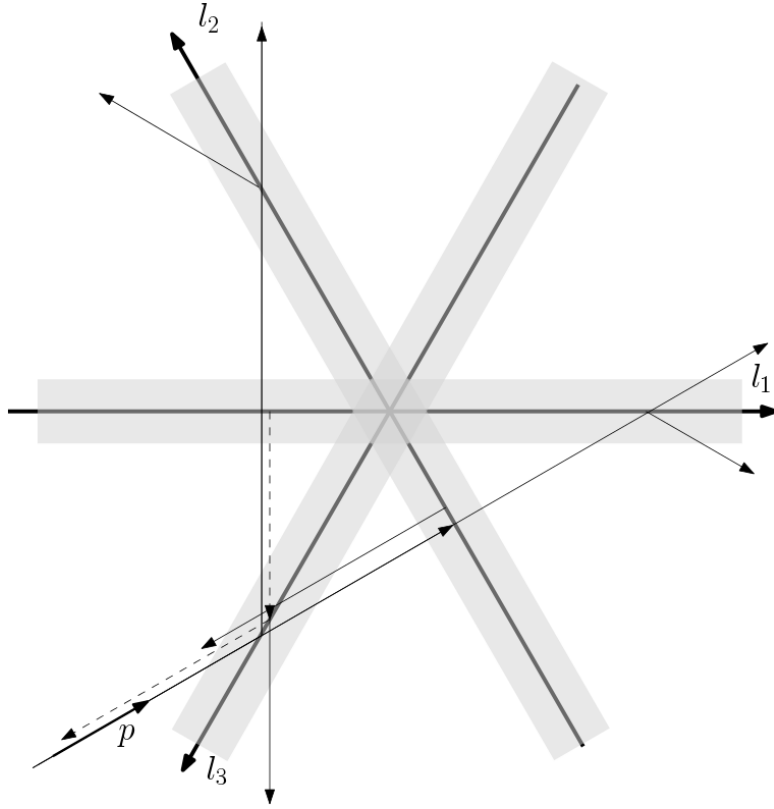


Рис. 1: Ход лучей на Γ в случае попадания луча на l_3^+

в угол λ_{231} . Введем перестановки $\tau_1 = (132)$, $\tau_2 = (321)$, $\tau_3 = (213)$. Ход следующего рассуждения становится нагляднее, если представлять себе картину как на рис. 1.

Пусть $l_j^\pm = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \in l_j, x_j > (<)0\}$. В угол λ_{231} через l_1^- проходит волна:

$$s(|(\mathbf{p}, \mathbf{k}_1)|)e^{i(\mathbf{p}, \mathbf{x})}$$

после отражения от l_2^+ она порождает в λ_{231} волну

$$r(|(\mathbf{p}, \mathbf{k}_2)|)s(|(\mathbf{p}, \mathbf{k}_1)|)e^{i(\tau_2 \mathbf{p}, \mathbf{x})}$$

Эта волна может еще раз отразиться от l_1^- и превратиться в плоскую волну с разрывной амплитудой

$$\theta((\mathbf{x}, -(\tau_1 \tau_2 \mathbf{p})^\perp))r(|(\mathbf{p}, \mathbf{k}_2)|)s(|(\mathbf{p}, \mathbf{k}_1)|)e^{i(\tau_1 \tau_2 \mathbf{p}, \mathbf{x})}$$

Где $\theta(x) = 0, x < 0$; $\theta(x) = 1, x > 0$. Волна может не проникнуть через экран l_1^- , а отразиться от него. Отразившись после от экрана l_3^+ и проходя через l_1^- , в секторе λ_{321} она породит волну

$$\theta((\mathbf{x}, -(\tau_3 \tau_1 \mathbf{p})^\perp))s(|(\tau_3 \tau_1 \mathbf{p}, \mathbf{k}_1)|)r(|(\tau_1 \mathbf{p}, \mathbf{k}_3)|)r(|(\mathbf{p}, \mathbf{k}_1)|)e^{i(\tau_3 \tau_1 \mathbf{p}, \mathbf{x})}$$

Также, исходная волна может проникнуть в угол λ_{231} после отражения от l_3^- и прохождения через l_1^-

$$s(|(\tau_3 \mathbf{p}, \mathbf{k}_1)|)r(|(\mathbf{p}, \mathbf{k}_3)|)e^{i(\tau_3 \mathbf{p}, \mathbf{x})}$$

Таблица 1: Таблица скалярных произведений $(\sigma p, k_j)$

j / σ	e	τ_1	τ_2	τ_3	$\tau_3\tau_1$	$\tau_1\tau_3$
1	k_1	$-k_1$	$-k_3$	$-k_2$	k_3	k_2
2	k_2	$-k_3$	$-k_2$	$-k_1$	k_1	k_3
3	k_3	$-k_2$	$-k_1$	$-k_3$	k_2	k_1

После чего может отразиться от l_2^+ :

$$\theta((\mathbf{x}, (\tau_2\tau_3\mathbf{p})^\perp))r(|(\tau_3\mathbf{p}, \mathbf{k}_2)|)s(|(\tau_3\mathbf{p}, \mathbf{k}_1)|)r(|(\mathbf{p}, \mathbf{k}_3)|)e^{i(\tau_2\tau_3\mathbf{p}, \mathbf{x})}$$

Заметим, что $\tau_1\tau_2 = \tau_3\tau_1 = \tau_2\tau_3$. Рассмотрим таблицу скалярных произведений $(\sigma\mathbf{p}, \mathbf{k}_j)$ (см. таб. 1):

Введем обозначения: $s(|k_i|) = s_i$, $r(|k_i|) = r_i$.

Складывая все найденные вклады плоских волн в секторе λ_{231} , получаем:

$$s_1(e^{i(\mathbf{p}, \mathbf{x})} + e^{i(\tau_2\mathbf{p}, \mathbf{x})}r_2) + e^{i(\tau_3\mathbf{p}, \mathbf{x})}s_2r_3 + e^{i(\tau_3\tau_1\mathbf{p}, \mathbf{x})}r_1r_3s_2 + e^{i(\tau_3\tau_1\mathbf{p}, \mathbf{x})}\theta((\mathbf{x}, -(\tau_3\tau_1\mathbf{p})^\perp))(r_3r_2s_1 + r_1r_2s_3 - r_1r_3s_2)$$

Последнее слагаемое терпит разрыв при $\mathbf{x} = \tau_3\tau_1\mathbf{p}$. Заменим это слагаемое точным решением задачи дифракции плоской волны $e^{i(\mathbf{q}, \mathbf{x})}$ на полубесконечном непрозрачном экране.

$$\Delta V - q^2V = 0$$

$$V_\pm = e^{i(\mathbf{q}, \mathbf{x})}\Phi((|q||x| - (\mathbf{q}, \mathbf{x}))^{1/2}\text{sign}((\mathbf{x}, \pm\mathbf{q}^\perp)))$$

$$\Phi(\alpha) = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha} e^{it^2} dt$$

Эту же процедуру можно осуществить для каждого сектора (подробнее см. [5], [4]).

Подытоживая, сформулируем теорему, строгое доказательство которой в несколько ином виде изложено в последующих разделах.

Теорема 2.1. Пусть $\mathbf{p} \neq \mathbf{l}_j^{(\pm)}$. Тогда при $x \rightarrow \infty$ равномерно по углу $\hat{x} = \mathbf{x}/|x|$ при $|(\hat{x}, l_j)| \leq 1 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, справедливо асимптотическое представление

$$\psi(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \psi^p(\mathbf{x}, \mathbf{p}) + \psi^f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) + f(\hat{x}, \mathbf{p}) \frac{e^{i|p||x| - i\pi/4}}{\sqrt{2\pi|p||x|}} + O(|x|^{-3/2})$$

где f – некоторая гладкая функция, $\psi^p(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ – набор плоских волн, полученных в результате процедуры, описанной выше, домноженных на характеристические функции углов, в которых справедлива полученная асимптотика, $\psi^f(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ сумма волн Френеля.

3 Структура и асимптотика предельных значений ядра резольвенты

В статье [2] на основе уравнений Фаддеева, или альтернирующего метода Шварца (под таким названием формулировка, которая используется в настоящей работе, появилась в [3]), были получены формулы для предельных значений на абсолютно непрерывном спектре резольвенты оператора Шредингера для трех одномерных частиц с финитным потенциалом отталкивания. Результат был сформулирован для случая равных масс, однако, как было отмечено в работе [2], в случае разных масс не возникает принципиальных сложностей. Поэтому здесь мы также придерживаемся этого соглашения.

Сформулируем доказанную в работе теорему, а так же приведем некоторые моменты доказательства с целью уточнения некоторых результатов.

В задаче рассматривается гамильтониан H

$$H = -\Delta + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \neq j \leq 3} v(z_i - z_j) \quad (3.1)$$

$$z_i \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3$$

здесь Δ — оператор Лапласа в \mathbb{R}^3 , $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ — четная финитная интегрируемая функция (под этим символом мы одновременно понимаем и оператор умножения на соответствующую функцию).

Теорема формулируется в переменных в конфигурационном пространстве, отвечающем отделенному центру масс, то есть в терминах гамильтониана, формально определенного сужением исходного гамильтониана на некоторое пространство функций, действующих на поверхности $\Pi = \{\mathbf{z} | z_1 + z_2 + z_3 = 0\}$. (по переменной отвечающей центру масс остается лишь тривиальное свободное движение). В связи с этим здесь и далее через Δ обозначается оператор Лапласа-Бельтрами на этой плоскости. На Π выделяются так называемые координаты Якоби, отвечающие относительному движению частиц в паре, а также относительному движению центра масс пары частиц и третьей частицы

$$x_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(z_k - z_j), \quad y_i = \sqrt{\frac{3}{2}}z_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad \text{sign}(i, j, k) = 1$$

Пару координат будем обозначать $\mathbf{z}_i = (x_i, y_i)$. Это не приведет к неудобствам, так как все дальнейшие рассуждения будут касаться именно координат в конфигурационном пространстве, а не переменной полной волновой функции.

Оператор Лапласа-Бельтрами в этих координатах записывается в виде

$$\Delta = \partial_{x_i}^2 + \partial_{y_i}^2$$

Оператор H принимает вид

$$H = -\Delta + \sum_{i=1}^3 v(x_i) \quad (3.2)$$

В рамках принципа предельного поглощения при стационарном подходе к задаче рассеяния изучается существование предельных значений резольвенты

$$R(\lambda) = (H - \lambda I)^{-1}$$

при посадке спектрального параметра на вещественную положительную ось. При этом при установлении указанных предельных значений (в подходящем пространстве с подходящей топологией), собственные функции абсолютно непрерывного спектра восстанавливаются из ядра резольвенты

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} R(\mathbf{x}, \mathbf{y} | E \pm i\varepsilon) = \psi^\mp(\mathbf{x}, \sqrt{E} \frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|}) \frac{e^{\pm i\sqrt{E}|\mathbf{y}|}}{\sqrt{|\mathbf{y}|}} + o(|\mathbf{y}|^{-1/2}), \quad |\mathbf{y}| \rightarrow \infty \quad (3.3)$$

Замечание: предельные значения понимаются в слабом смысле в рамках метода оснащенного гильбертова пространства. В основное гильбертово пространство \mathcal{H} непрерывно вкладывается некоторое банахово пространство \mathcal{B} , что в свою очередь позволяет вложить \mathcal{H} в сопряженное к \mathcal{B} пространство \mathcal{B}^* и далее доказать, что $R(E \pm i\varepsilon) : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}^*$ имеет непрерывное продолжение при $\varepsilon \downarrow 0$. Таким образом, обобщённые собственные функции в этом случае трактуются как элементы пространства \mathcal{B}^* , а основным объектом изучения становится действие функционала $(R(E \pm i\varepsilon)\varphi, \varphi)$, $\varphi \in \mathcal{B}$, при $\varepsilon \downarrow 0$.

В работе [2] была доказана

Теорема 3.1. *Обозначим за $\hat{H}^{\mu, \theta}$ банахово пространство функций, Фурье образы которых лежат в $H^{\mu, \theta}(\mathbb{R}^2) = \{f : \|f\|_{\mu, \theta} = \sup_{\eta, \zeta} (1 + |\zeta|^{1+\theta}) \left(|f(\zeta)| + \frac{|f(\zeta+\eta) - f(\zeta)|}{|\eta|^\mu} \right) < \infty\}$*

Рассмотрим в указанном банаховом пространстве свободную резольвенту

Note: в импульсном пространстве гельдеровы функции вкладываются в L_2 и норма L_2 оценивается через гельдерову, а Фурье образы лежат в L_2 и имеют ту же норму.

$$R_0(\lambda) = (-\Delta - \lambda I)^{-1}$$

И двухчастичную резольвенту

$$R_j(\lambda) = (-\Delta + v_j - \lambda I)^{-1}$$

(v_i – в координатном представлении оператор умножения на $v(x_i)$)

Тогда при $1 > \mu, \theta > 1/2, 0 < c_1 \leq \operatorname{Re} \lambda \leq c_2 < \infty$ резольвента $R(\lambda)$ имеет слабый предел в $\hat{H}^{\mu, \theta}$ при $\operatorname{Im} \lambda \rightarrow +0$, причем слабый предел имеет вид

$$\begin{aligned} R(E + i0) = R_0(E + i0) \cdot & \left(I - \sum_i v_i R_i(E + i0) + \sum_{i \neq j} v_i R_i(E + i0) v_j R_j(E + i0) - \right. \\ & \left. - \sum_{i \neq j \neq k} v_i R_i(E + i0) v_j R_j(E + i0) v_k R_k(E + i0) \right) + R_0(E + i0) A(E + i0) + R_0(E + i0) B(E + i0) \end{aligned} \quad (3.4)$$

где A – некоторый оператор конечного ранга, а B – компактный оператор с быстро убывающим ядром на бесконечности.

Формулировка теоремы несколько отличается от исходной, однако указанный вид асимптотики оказывается существенным для анализа асимптотик ядра резольвенты. В связи с этим необходимо привести основные моменты доказательства теоремы с комментариями в необходимых местах, а также уточнением свойств операторов A и B .

4 Краткое доказательство и комментарии

Приведем формулировку алгебраической схемы, с помощью которой происходит построение резольвенты. Обозначим через $\{G_i\}_{i=1}^n$ некоторый набор линейных операторов в комплексном векторном пространстве \mathcal{X} . Определим оператор

$$G = \sum_{i=1}^n G_i.$$

Предполагая, что все операторы $I - G_i$ биективны, положим

$$I - \Gamma_i = (I - G_i)^{-1}. \quad (4.1)$$

Операторы Γ_i носят название операторов отражения.

В таком случае метод можно сформулировать следующим образом:

1) Если операторная матрица

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} I & \Gamma_1 & \dots & \Gamma_1 \\ \Gamma_2 & I & \dots & \Gamma_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Gamma_n & \Gamma_n & \dots & I \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

является биекцией пространства \mathcal{X}^n , то оператор $I - G$ – биекция пространства \mathcal{X} .

2) Обозначая через $\text{diag}(\Gamma_1, \dots, \Gamma_n)$ соответствующую диагональную матрицу, в условиях биективности (4.2) определим γ как решение уравнения

$$\mathbf{L} \cdot \gamma = \text{diag}(\Gamma_1, \dots, \Gamma_n) \quad (4.3)$$

и введём линейные операторы γ_{ij} в \mathcal{X} как компоненты матрицы γ . Последние могут быть также охарактеризованы соотношениями

$$\gamma_{ij} = \Gamma_i (\delta_{ij} I - \sum_{k \neq i} \gamma_{kj}) = (\delta_{ij} I - \sum_{k \neq j} \gamma_{ik}) \Gamma_j. \quad (4.4)$$

Тогда оператор отражения Γ , определяемый соотношением

$$I - \Gamma = (I - G)^{-1}, \quad (4.5)$$

даётся в терминах γ_{ij} формулой

$$\Gamma = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \gamma_{ij}. \quad (4.6)$$

Для вложения задачи в эту схему перепишем резольвенту в виде

$$R(\lambda) = R_0(\lambda) (I + \sum_i v_i R_0(\lambda))^{-1} \quad (4.7)$$

Положим $G_j(\lambda) = -v_j R_0(\lambda)$. Рассмотрим

$$R_j(\lambda) = (-\Delta + v_j - \lambda I)^{-1} = R_0(\lambda) (I + v_j R_0(\lambda))^{-1} = R_0(\lambda) (I - G_j(\lambda))^{-1} = R_0(\lambda) (I - \Gamma_j(\lambda)), \quad (4.8)$$

домножив обе части равенства слева на v_j , в силу $\Gamma_j(\lambda) = -G_j(\lambda)(I - G_j(\lambda))^{-1}$, находим

$$\Gamma_j(\lambda) = v_j R_j(\lambda). \quad (4.9)$$

Тогда согласно обозначениям выше, резольвента представляется в виде

$$R(\lambda) = R_0(\lambda)(I - G(\lambda))^{-1} = R_0(\lambda)(I - \Gamma(\lambda))$$

Положим $\mathbf{L} = I + \mathbf{\Gamma}$,

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \Gamma_1 & \Gamma_1 \\ \Gamma_2 & 0 & \Gamma_2 \\ \Gamma_3 & \Gamma_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\mathbf{L}^{-1} = (I + \mathbf{\Gamma})^{-1} = (I - \mathbf{\Gamma}^4)^{-1}(I - \mathbf{\Gamma} + \mathbf{\Gamma}^2 - \mathbf{\Gamma}^3) \quad (4.10)$$

Операторная матрица $\mathbf{\Gamma}^4$ в качестве компонент имеет некоторые суммы операторов вида $\Gamma_i \Gamma_j \Gamma_k \Gamma_l$ при $i \neq j \neq k \neq l$.

Ключевым моментом в обращении оператора $(I - \mathbf{\Gamma}^4)$ является ограничение на число преотражений в системе трех экранов, образованных носителями потенциалов взаимодействия, которое оказывается не больше трех, что было показано в работах [5],[2]. Это и объясняет выделение четвертой степени оператора $\mathbf{\Gamma}$, при рассмотрении асимптотики которого не возникает стационарных точек при альтернирующей итерации ядер $\Gamma_i \Gamma_j \Gamma_k \Gamma_l$. Подробнее это будет обсуждаться ниже. Однако, благодаря оценке на число отражений в системе экранов из основной работы, этот же прием позволяет выделить некоторую степень оператора $\mathbf{\Gamma}$ для обращения оператора \mathbf{L} уже в случае произвольных масс частиц, когда углы между экранами, образованными носителями потенциалов в конфигурационном пространстве, будут не равными, а произвольными. Углы между экранами будут контролироваться массами частиц, различные комбинации которых будут образовывать коэффициенты при z_i в координатах Якоби. Это усложнит техническую сторону вопроса, однако по-существу оставляет возможным такую процедуру. Такое же рассуждение окажется полезным в случае большего числа одномерных частиц.

Рассмотрим подробно координатную асимптотику ядра произведения $\Gamma_i \Gamma_j \Gamma_k \Gamma_l$ (из соображений компактности записи все константы намеренно пропущены)

Асимптотика ядра $R_0(\mathbf{z}, \mathbf{z}'|\lambda)$ при $\mathbf{Im} \lambda > 0$, $|\mathbf{z} - \mathbf{z}'| \rightarrow \infty$ имеет вид

$$R_0(\mathbf{z}, \mathbf{z}'|\lambda) \approx \frac{e^{i\pi/4}}{2\sqrt{2\pi}} \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|\mathbf{z}-\mathbf{z}'|}}{|\mathbf{z} - \mathbf{z}'|^{1/2}} \quad (4.11)$$

Асимптотика ядра $R_i(\mathbf{z}, \mathbf{z}'|\lambda)$ при $\mathbf{Im} \lambda > 0$, $|\mathbf{z} - \mathbf{z}'| \rightarrow \infty$ имеет вид

$$R_i(\mathbf{z}, \mathbf{z}'|\lambda) \approx \phi_{\pm}(x, k_0) \frac{e^{i\pi/4}}{2\sqrt{2\pi} \sqrt[4]{\lambda}} \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|\mathbf{z}-\mathbf{z}'|}}{|\mathbf{z} - \mathbf{z}'|^{1/2}} \quad (4.12)$$

где $\phi_{\pm}(x, k)$ — решения уравнения, и выбор решения определяется выбором знака проекции \mathbf{z}' на орт x_i

$$-\phi'' + v_i \phi = k^2 \phi$$

имеющие вид $s(k)e^{\mp ikx}$ при достаточно больших отрицательных (положительных) x , а

$$k_0 = \frac{\sqrt{\lambda} x'}{|\mathbf{z} - \mathbf{z}'|} + O\left(\frac{1}{|\mathbf{z} - \mathbf{z}'|}\right) \quad (4.13)$$

Тогда асимптотика ядра $\Gamma_i \Gamma_j \Gamma_k \Gamma_l$ при $\mathbf{z} \rightarrow \infty$ примет вид

$$\begin{aligned} \Gamma_i \Gamma_j \Gamma_k \Gamma_l(\mathbf{z}, \mathbf{z}' | \lambda) &= \\ &= \phi_{\pm}(x, 0) v(x) \iiint_{\mathbb{R}^6} v(x_j) \phi_{\pm}(x_j, k_0) v(x_k) \phi_{\pm}(x_k, k_0) v(x_l) \phi_{\pm}(x_l, k_0) \times \\ &\quad \times \frac{e^{i\sqrt{\lambda}(|\mathbf{z}-\mathbf{z}_j|+|\mathbf{z}_j-\mathbf{z}_k|+|\mathbf{z}_k-\mathbf{z}_l|+|\mathbf{z}_l-\mathbf{z}'|)}}{\sqrt{|\mathbf{z}-\mathbf{z}_j||\mathbf{z}_j-\mathbf{z}_k||\mathbf{z}_k-\mathbf{z}_l||\mathbf{z}_l-\mathbf{z}'|}} d\mathbf{z}_j d\mathbf{z}_k d\mathbf{z}_l = I_T + I'_T \end{aligned} \quad (4.14)$$

Где I_T интеграл по переменной \mathbf{z}_j со срезающей функцией $\chi_T(\mathbf{z}_j)$ равной единице в шаре радиуса T , и нулю вне шара радиуса $T+1$, а I'_T интеграл с функцией $\chi'_T(\mathbf{z}_j) = 1 - \chi_T(\mathbf{z}_j)$. При этом умножение на $v(z)$ сужает носитель ядра произведения до носителя потенциала, и устремление $\mathbf{z} \rightarrow \infty$ можно рассматривать лишь при $y \rightarrow \pm\infty$ (в направлении \mathbf{l}_i вдоль орта y_i).

В первом интеграле возможно разложение

$$|\mathbf{z} - \mathbf{z}_j| = y \pm (\mathbf{l}_i \cdot \mathbf{z}_j) + O\left(\frac{1}{|y|}\right) \quad (4.15)$$

$$\frac{1}{\sqrt{|\mathbf{z} - \mathbf{z}_j|}} = \frac{1}{\sqrt{y}} \mp \frac{(\mathbf{l}_i \cdot \mathbf{z}_j)}{2|y|^{3/2}} + o\left(\frac{1}{|y|^{3/2}}\right)$$

Выбор знака зависит от выбора направления, вдоль которого рассматривается асимптотика.

И поэтому ядро I_T разлагается в сумму

$$I_T = A_T + B_T$$

$$\begin{aligned} A_T(\mathbf{z}, \mathbf{z}' | \lambda) &= v(x) \phi_{\pm}(x, 0) \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|y|}}{|y|^{1/2}} (\chi_+(y) \psi_+(\mathbf{z}') + \chi_+(-y) \psi_-(\mathbf{z}')) \\ \psi_{\pm} &= \iiint_{\mathbb{R}^6} \chi_T(\mathbf{z}_j) v(x_j) \phi_{\pm}(x_j, k_0) v(x_k) \phi_{\pm}(x_k, k_0) v(x_l) \phi_{\pm}(x_l, k_0) \times \\ &\quad \times e^{\mp i\sqrt{\lambda}(\mathbf{l}_i \cdot \mathbf{z}_j)} \frac{e^{i\sqrt{\lambda}(|\mathbf{z}_j-\mathbf{z}_k|+|\mathbf{z}_k-\mathbf{z}_l|+|\mathbf{z}_l-\mathbf{z}'|)}}{\sqrt{|\mathbf{z}_j-\mathbf{z}_k||\mathbf{z}_k-\mathbf{z}_l||\mathbf{z}_l-\mathbf{z}'|}} d\mathbf{z}_j d\mathbf{z}_k d\mathbf{z}_l \end{aligned} \quad (4.16)$$

здесь $\chi_+(x)$ — гладкая функция равная нулю внутри интервала $[-\infty, T]$ и единице в интервале $[T+1, \infty]$

Оператор с ядром A_T — оператор действующий в двумерное пространство функций с носителем потенциала. Справедливы оценки

$$|\psi_{\pm}(\mathbf{z}')| \leq \frac{C_A}{\sqrt{1 + |\mathbf{z}'|}} \quad (4.17)$$

При этом ψ_{\pm} асимптотически устроены как

$$\psi_{\pm}(\mathbf{z}') \sim \frac{C_A e^{i\sqrt{\lambda}|\mathbf{z}'|}}{|\mathbf{z}'|^{1/2}} \quad (4.18)$$

Ядро B_T удовлетворяет оценке

$$|B_T(\mathbf{z}, \mathbf{z}')| \leq \frac{C_B |v(x)| |\phi_{\pm}(x, 0)|}{(1 + |\mathbf{z}|)^{3/2} (1 + |\mathbf{z}'|)^{1/2}} \quad (4.19)$$

Воспользовавшись симметричностью ядра полной резольвенты, поменяем одновременно в А и В местами переменные \mathbf{z} и \mathbf{z}' . Тогда по переменной \mathbf{z}' А ведет себя как круговая волна, распространяющаяся вдоль носителя потенциала, а В убывает со скоростью $\frac{1}{|\mathbf{z}|^{3/2}}$. Такое разложение назовем АВ-разложением. Аналогичное разложение в результате интегрирования по частям по переменной y_j получает ядро I'_T , однако наличие стационарной точки в показателе экспоненты

$$\nabla(|\mathbf{z} - \mathbf{z}_j| + |\mathbf{z}_j - \mathbf{z}_k|) \cdot \mathbf{l}_i = \left(\frac{\mathbf{z} - \mathbf{z}_j}{|\mathbf{z} - \mathbf{z}_j|} - \frac{\mathbf{z}_j - \mathbf{z}_k}{|\mathbf{z}_j - \mathbf{z}_k|} \right) \cdot \mathbf{l}_i = 0 ,$$

геометрически соответствующей точке отражения или прохождения (рис. 2) мешает осуществлению этой процедуры. Отделив окрестность этой точки многократным интегрированием по частям можно добиться достаточного убывания и разложение АВ также будет справедливо. В окрестности же точки "отражения-прохождения", перейдя к интегрированию по соседней переменной \mathbf{z}_k , можно беспрепятственно интегрировать по частям, поскольку число взаимодействий (пересечений носителя в результате "отражения") ограничено тремя, как было отмечено ранее. Именно здесь оказывается важным выделение четвертой степени, поскольку функции v "сажают" переменные $\mathbf{z}, \mathbf{z}_j, \mathbf{z}_k, \mathbf{z}_l$ на носители потенциала, и в тройке j, k, l уже невозможна точка "отражения-прохождения" при условии, что мы уже выделили окрестность такой точки по тройке i, j, k . Не вдаваясь в подробности получения разложения АВ, отметим лишь только что будут справедливы те же оценки (4.17), (4.19), при этом константы в этих оценках могут быть сделаны малыми при достаточно большом T .

Таким образом,

$$I - \Gamma^4 = I - \mathbf{A} - \mathbf{B}$$

где \mathbf{A}, \mathbf{B} — матрицы над алгеброй операторов типа А и В соответственно.

Поясним смысл АВ-разложения. Напомним, что мы фиксировали пространство фурье-образов гильбертовых функций с показателями $\mu, \theta > 1/2$.

Обращение оператора $I - \Gamma^4$ в таком пространстве вызывает затруднения, поскольку из оценки 4.19 вытекает, что оператор с ядром типа В действует в пространство с $\mu < 1/2$, и при исходном $\mu > 1/2$ вообще говоря не является компактным. Заметим, что оператор Γ_i действует в пространство функций с носителем в полосе, соответствующей носителю v_i . При этом в импульсном представлении $\Gamma_i \hat{\varphi}(k, p)$, $\hat{\varphi}(k, p) \in H^{\mu, \theta}$ имеет особенность типа

$$\begin{aligned} \Gamma_i \hat{\varphi}(k, p) &\approx \iint dk' dp' \delta(p - p') \tilde{v}(k - k') \frac{\hat{\varphi}(k', p')}{p'^2 + k'^2 - \lambda} \sim \frac{f(k, p)}{\sqrt{p^2 - \lambda}} \\ &= \frac{f(k, \sqrt{\lambda}) \eta(p)}{\sqrt{p^2 - \lambda}} + \frac{f(k, p) - f(k, \sqrt{\lambda}) \eta(p)}{\sqrt{p^2 - \lambda}} \end{aligned} \quad (4.20)$$

где $f(k, p) = \pi i \tilde{v}(k - \sqrt{p^2 - \lambda}) \hat{\varphi}(\sqrt{p^2 - \lambda}, p)$, k, p — двойственные переменные по отношению к x_i, y_i , функция \tilde{v} является (с точностью до постоянного множителя) образом Фурье произведения $v(x) \varphi_+(x, k_0)$, функция η — гладкая финитная, равная тождественно

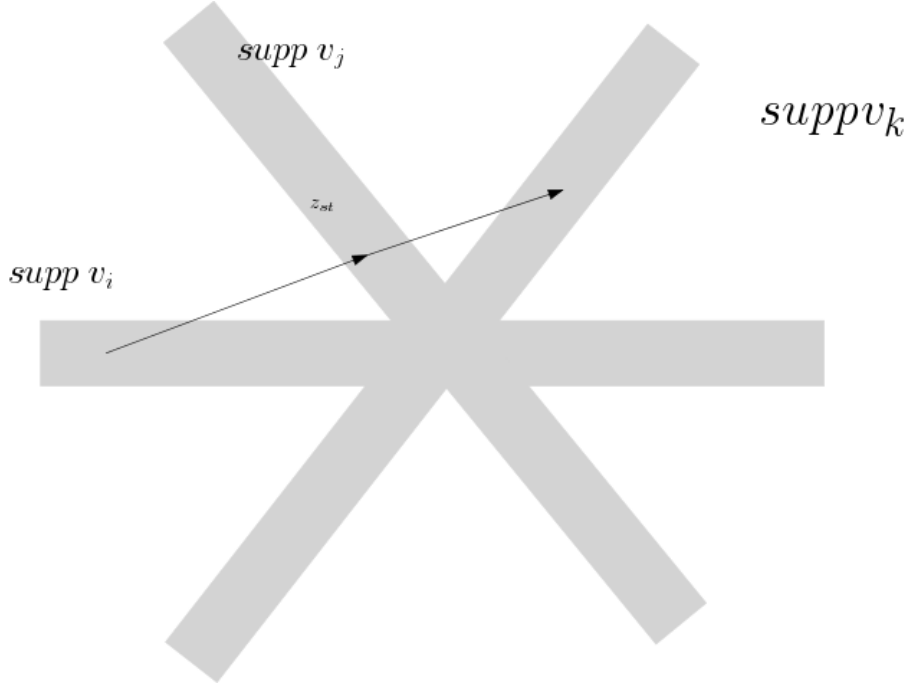


Рис. 2: Стационарная точка в интеграле I_T^l

единице в окрестности точки $\sqrt{\lambda}$. Такое разложение соответствует разложению АВ. Как было доказано в работе [2] оператор $\Gamma_i \Gamma_j \Gamma_k \Gamma_l$ при предельном значении параметра λ переводит функцию из $\hat{H}^{\mu, \theta}$ в функцию из $\hat{H}^{\nu, \theta}$ для $\nu > 0$, но при этом носитель последней лежит в полосе, определяемой областью финитности потенциала v . Из этого представления вытекает, что $\Gamma_i \hat{H}^{\mu, \theta}$ является прямой суммой пространств, одно из которых двумерно и состоит из функций класса A_i , а второе содержит функции из $\hat{H}^{\nu, \theta}$, $\nu = \mu - \frac{1}{2} > 0$, с носителями в полосе. Мы обозначим это последнее через $\hat{H}_i^{\nu, \theta}$, и тогда $\Gamma_i \hat{H}^{\mu, \theta} \subset V_i + \hat{H}_i^{\nu, \theta}$. При предельных значениях параметра λ эта сумма является прямой.

Для $f \in L_q(\mathbb{R}^2)$ в силу неравенства Гёльдера

$$\int_{\mathbb{R}^2} (1 + |z|)^{-1/2} |f(z)| dz \leq \left(\int_{\mathbb{R}^2} (1 + |z|)^{-q'/2} dz \right)^{1/q'} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |f(z)|^q dz \right)^{1/q} < \infty$$

при $q' > 4$ (q и q' — сопряжённые показатели), т.е. необходимо, чтобы $q < \frac{4}{3}$. В [2] было показано, что f из $\hat{H}^{\mu, \theta}$ лежит в L_q для некоторого $q < \frac{4}{3}$, если $\mu, \theta > \frac{1}{2}$ и что функция из $\hat{H}_i^{\mu, \theta}$ лежит в L_r для $r < 2$ в направлении i -ой полосы. Таким образом, оператор Γ^4 мы будем рассматривать, как оператор на пространстве $\mathbf{W}^{\nu, \theta} = \oplus_i (V_i + \hat{H}_i^{\nu, \theta})$, где V_i двумерное пространства и состоит из функций типа А,

$$v(x_j) \varphi_j(x_j, 0) |y_j|^{-1/2} e^{i|y_j| \sqrt{E}} (C_1 \chi_+(y_j) + C_2 \chi_+(-y_j))$$

и $\hat{H}_i^{\nu, \theta}$ состоит из функций из $\hat{H}^{\nu, \theta}$, $\nu = \mu - 1/2$ с носителями в полосе i .

Здесь также можно заметить, что исследование образа в импульсном представлении позволяет обосновать существование слабого предела $R_0 \Gamma_i \Gamma_j \Gamma_k \Gamma_l$ (и для любой степени Γ), поскольку вклад $(R_0 \Gamma_i \Gamma_j \Gamma_k \Gamma_l \hat{\varphi}, \hat{\varphi})$ имеет особенность вида

$$\int dp_j \int dk_j \frac{f(\mathbf{q})\varphi(\mathbf{q})}{(p_j^2 + k_j^2 - \lambda)\sqrt{p_j^2 - \lambda}} \sim \int \frac{g(p_j) dp_j}{p_j^2 - \lambda}, \quad (4.21)$$

где g — некоторая гёльдерова функция вплоть до вещественных значений параметра λ

Существование предельного значения при $Im\lambda \rightarrow +0$ известно.

Заметим, что это же рассуждение справедливо при обосновании существования предела в выражении (3.4).

В указанном пространстве оператор типа B является компактным оператором с достаточно быстро убывающим ядром, сильно непрерывным по λ .

Обращение оператора $I - \mathbf{\Gamma}^4$ вновь происходит в рамках алгебраической схемы уравнений Фаддеева, приведенной в начале раздела. Положим $I - \mathbf{\Gamma}_A = (I + \mathbf{A})^{-1}$, $I - \mathbf{\Gamma}_B = (I + \mathbf{B})^{-1}$. Существование соответствующих операторов было доказано в основной работе [2] при выборе достаточно больших T . Отметим, что при достаточно больших T норма оператора типа A может быть сделана достаточно малой, чтобы считать, что в первом приближении выполнено

$$(I - A)^{-1} = I + A$$

Также стоит отметить, что в цитируемой работе была доказана лишь тривиальность ядра $(I - \mathbf{B})$. Вопрос сюръективности этого оператора по-видимому требует привлечения дополнительных рассуждений.

Оператор $\mathbf{\Gamma}_B$ действует в то же пространство функций, что и B , является сильно непрерывным и компактным.

В случае $n=2$ возможно написать гораздо более простую форму обратного оператора, а именно

$$(I - \mathbf{\Gamma}^4)^{-1} = (I - \mathbf{\Gamma}_A)(I - \mathbf{\Gamma}_B\mathbf{\Gamma}_A)^{-1}(I - \mathbf{\Gamma}_B) \quad (4.22)$$

Оператор $\mathbf{\Gamma}_B\mathbf{\Gamma}_A = \mathbf{A}^{(1)}$ вновь действует в пространство функций типа A и может быть сделан достаточно малым по норме, а так как $\mathbf{\Gamma}_B A$ действует в пространство функций типа B , то можно для 4.22 написать разложение AB , в смысле поведения по переменной \mathbf{z}'

$$(I - \mathbf{\Gamma}^4)^{-1} = (I - \mathbf{\Gamma}_A)(I + \mathbf{A}^{(1)})(I + \mathbf{B}) = I + \tilde{\mathbf{A}} + \tilde{\mathbf{B}}$$

Тем самым оператор \mathbf{L} является биекцией и возможно решение уравнения

$$\gamma = \mathbf{L}^{-1} \cdot \text{diag}(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3) = (I - \mathbf{\Gamma} + \mathbf{\Gamma}^2)\text{diag}(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3) + \tilde{\mathbf{A}} + \tilde{\mathbf{B}} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} \gamma = & \begin{pmatrix} \Gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \Gamma_1\Gamma_2 & \Gamma_1\Gamma_3 \\ \Gamma_2\Gamma_1 & 0 & \Gamma_2\Gamma_3 \\ \Gamma_3\Gamma_1 & \Gamma_3\Gamma_2 & 0 \end{pmatrix} + \\ & + \begin{pmatrix} \Gamma_1\Gamma_2\Gamma_1 + \Gamma_1\Gamma_3\Gamma_1 & \Gamma_1\Gamma_3\Gamma_2 & \Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3 \\ \Gamma_2\Gamma_3\Gamma_1 & \Gamma_2\Gamma_1\Gamma_2 + \Gamma_2\Gamma_3\Gamma_2 & \Gamma_2\Gamma_1\Gamma_3 \\ \Gamma_3\Gamma_2\Gamma_1 & \Gamma_3\Gamma_1\Gamma_2 & \Gamma_3\Gamma_1\Gamma_3 + \Gamma_3\Gamma_2\Gamma_3 \end{pmatrix} + \tilde{\mathbf{A}} + \tilde{\mathbf{B}} \quad (4.24) \end{aligned}$$

Согласно (4.6)

$$R = R_0 \cdot \left(I - \sum_{i,j=1}^n \gamma_{ij} \right) \quad (4.25)$$

А резольвента имеет вид

$$R = R_0 - \underbrace{R_0 \sum_{i=1}^3 \Gamma_i}_{\text{однократные отражения}} + \underbrace{R_0 \cdot \sum_{i \neq j} \Gamma_i \Gamma_j}_{\text{двукратные отражения}} - \underbrace{R_0 \cdot \sum_{i \neq j \neq k} \Gamma_i \Gamma_j \Gamma_k}_{\text{трекратные отражения}} + R_0 \tilde{A} + R_0 \tilde{B} \quad (4.26)$$

Вспоминая, что $\Gamma_i = v_i R_i$, мы приходим к необходимому выражению.

5 Структура ядра резольвенты. Асимптотика волновой функции

Получим асимптотику волновой функции: согласно 3.3 необходимо выделить асимптотику ядра резольвенты по внутренней и внешней переменной, и выделить множитель при расходящейся круговой волне. В силу симметричности ядра резольвенты, выбор переменной не важен, поэтому для удобства будем выделять круговую волну по внешней переменной, а волновую функцию соответственно по внутренней.

Фиксируем направление, вдоль которого будем устремлять на бесконечность переменные \mathbf{z}, \mathbf{z}' . Обозначим их за $\mathbf{l} = (l_x, l_y)$, $\mathbf{l}' = (l'_x, l'_y)$ соответственно. Пусть направления ухода отличаются от направлений вдоль ортов x_i .

Сперва рассмотрим члены, которые мы назовем "однократными отражениями" в формуле 4.26. Как мы увидим дальше, такое название не случайно и соответствует лучевой интерпретации в рамках дифракционного подхода работы [4]. Отметим, что все выражения пишутся с точностью до членов типа АВ и с точностью до круговой волны с гладкой амплитудой. При этом В отвечает погрешности в асимптотике волновой функции порядка $O(|\mathbf{z}|^{-3/2})$. Отметим, что чтобы законно воспользоваться асимптотическим выражением для ядер операторов R_0, Γ_i необходимо обеспечить $\sqrt{\lambda}|\mathbf{z} - \mathbf{z}'| \gg 1$, более того оценка должна быть равномерной по переменной интегрирования. Этого можно добиться, вырезав малые угловые δ окрестности направлений $x_i = 0$. Такую асимптотическую область мы и зафиксируем. Направления в угловой окрестности носителей будет рассмотрено отдельно позже.

$$R_0 \Gamma_i = R_0 v_i R_i \underset{\mathbf{z}, \mathbf{z}' \rightarrow \infty}{\approx} \iint_{x_i \in \text{supp } v, y_i \in \mathbb{R}} d\mathbf{z}_i C \frac{e^{i\sqrt{\lambda}(|\mathbf{z} - \mathbf{z}_i| + |\mathbf{z}_i - \mathbf{z}'|)}}{\sqrt{|\mathbf{z} - \mathbf{z}_i| |\mathbf{z}_i - \mathbf{z}'|}} \frac{\phi_{\pm}(x_i, k_0) v(x_i)}{\sqrt[4]{\lambda}}$$

здесь $C = \frac{e^{i\pi/4}}{2\sqrt{2\pi}}$.

Ограничивая интегрирование по шару достаточно большого радиуса, разложим модуль в экспоненте

$$|\mathbf{z} - \mathbf{z}_i| = |\mathbf{z}| - \left(\frac{\mathbf{z}}{|\mathbf{z}|} \cdot \mathbf{z}_i \right) + O\left(\frac{1}{|\mathbf{z}|}\right) = |\mathbf{z}| - x_i l_x - y_i l_y + O\left(\frac{1}{|\mathbf{z}|}\right) \quad (5.1)$$

$$R_0 \Gamma_i = C \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|\mathbf{z}|}}{\sqrt{|\mathbf{z}|}} \int dx_i \frac{\phi_{\pm}(x_i, k_0) v(x_i)}{\sqrt[4]{\lambda}} e^{-i\sqrt{\lambda}(l_x x_i + l'_x x_i)} \underbrace{\int dy_i e^{-i\sqrt{\lambda}(l_y y_i + l'_y y_i)} \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|\mathbf{z}'|}}{\sqrt{|\mathbf{z}'|}}}_{\delta(l_y + l'_y) \frac{1}{\sqrt{\lambda}}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{|\mathbf{z}'|}}\right)$$

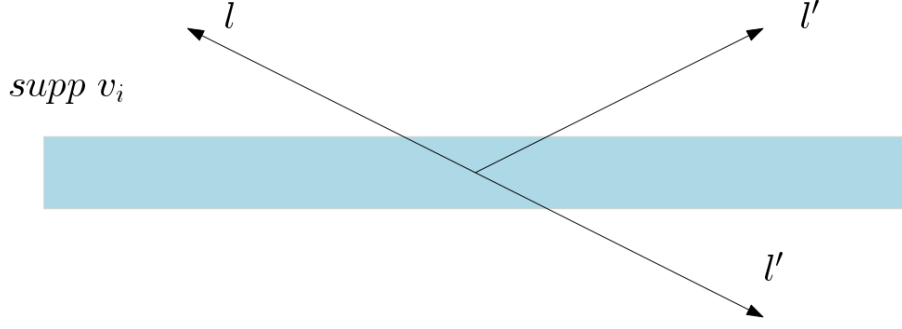


Рис. 3: К однократным взаимодействиям

Запись $\delta(l_y + l'_y)$ позволяет связать эту работу с дифракционным подходом [4]. Дельта функционал вырезает два угловых направления, и легко понять, что это направления отражения и прохождения плоской волны, приходящей в направлении (-1) (рис. 3). Стоит отметить, что на рисунках в целях удобства координаты x являются координатами в вертикальном направлении, что удобно нам, но не является типичным обозначением. Сферическая волна же в узком угловом направлении ведет себя схожим с плоской волной образом (в слабом смысле).

Заметим, что выбор отражения или прохождения выбирает проекцию на ось x (вертикального направления): $l'_x = l_x$ либо $l'_x = -l_x$, а следовательно и функции ϕ_{\pm} . Заметим также, что в интеграл по x_i входят $\sqrt{\lambda}l_x$ лишь попарно, и такое произведение имеет смысл проекции волнового вектора на ось x в системе с энергией λ . В частности, согласно 4.13,

$$k_0 = \sqrt{\lambda}l_x + O\left(\frac{1}{|z|}\right)$$

Назовем коэффициентами прохождения и отражения соответственно следующие величины

$$S(k) = -C \int dx \phi_-(x, k) v(x) \quad (5.2)$$

$$R(k) = -C \int dx \phi_+(x, k) v(x) e^{-i2kx} \quad (5.3)$$

Такое обозначение вполне естественно в рамках лучевой интерпретации задачи. Полученный явный вид для коэффициентов (возможно с точностью до некоторых множителей, зависящих от спектрального параметра) вызывает отдельный интерес, поскольку свойства коэффициентов прохождения и отражения (в сути элементы матрицы рассеяния) хорошо исследованы. К тому же сам вид этих коэффициентов допускает вполне понятную интерпретацию скалярного произведения решения одномерной задачи рассеяния с плоской волной, умноженной на потенциал.

И вклад в волновую функцию от членов однократного взаимодействия с экраном i

$$\begin{aligned} \psi^{(1,i)}(z, \sqrt{\lambda}, \frac{z'}{|z'|}) &= \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|z|}}{\sqrt{\lambda^{1/2}|z|}} \left(S(\sqrt{\lambda} \langle \frac{z'}{|z'|}, \mathbf{k}_i \rangle) \delta\left(\frac{z}{|z|} - \frac{z'}{|z'|}\right) + \right. \\ &\quad \left. + R(\sqrt{\lambda} \langle \frac{z'}{|z'|}, \mathbf{k}_i \rangle) \delta\left(\frac{z}{|z|} - H_i \frac{z'}{|z'|}\right) + f(z, \lambda) \right) + o\left(\frac{1}{\sqrt{|z|}}\right) \end{aligned}$$

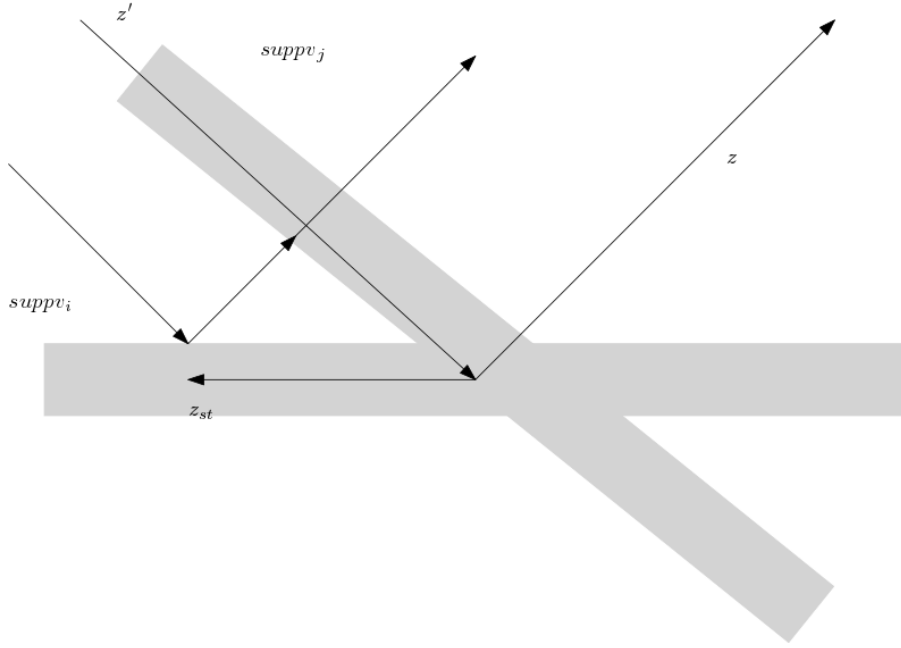


Рис. 4: Стационарная точка в двойном произведении

Здесь H_i — оператор отражения относительно прямой $x_i = 0$.
Обратимся теперь к членам ”двукратного отражения”

$$R_0 \Gamma_i \Gamma_j \approx \iint_{\mathbb{R}^4} dz_i dz_j C^2 \frac{v(x_i) \phi_{\pm}(x_i, k_0(\mathbf{z}_j)) v(x_j) \phi_{\pm}(x_j, k_0(\mathbf{z}'))}{\sqrt{\lambda^{1/2} \lambda^{1/2}}} \frac{e^{i\sqrt{\lambda}(|\mathbf{z}-\mathbf{z}_i|+|\mathbf{z}_i-\mathbf{z}_j|+|\mathbf{z}_j-\mathbf{z}'|)}}{\sqrt{|\mathbf{z}-\mathbf{z}_i||\mathbf{z}_i-\mathbf{z}_j||\mathbf{z}_j-\mathbf{z}'|}} \quad (5.4)$$

Здесь снова необходимо обосновать использование асимптотики ядер. Ограничим интегрирование по переменной \mathbf{z}_j по шару радиуса T . Согласно замечанию в [2], такой интеграл получает разложение АВ, причем А может быть сделано малым при увеличении T . В сущности это отвечает задаче рассеяния на компактной области. Рассмотрим интеграл по внешности шара. В нем разность $\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j$ велика по абсолютной величине, и уже здесь возможно воспользоваться асимптотикой ядра. Продолжив интегрирование обратно на исходную область, мы снова получим погрешность в виде асимптотики задачи рассеяния на потенциале с компактным носителем, что снова допускает АВ представление.

Представим в окрестности стационарной точки по переменной \mathbf{z}_i при фиксированной переменной интегрирования \mathbf{z}_j (см. рис 4)

$$|\mathbf{z}_j - \mathbf{z}_i| = |\mathbf{z}_j - \mathbf{z}_{st} + \mathbf{z}_{st} - \mathbf{z}_i| \approx |\mathbf{z}_j - \mathbf{z}_{st}| + \left\langle \frac{\mathbf{z}_j - \mathbf{z}_{st}}{|\mathbf{z}_j - \mathbf{z}_{st}|}, \mathbf{z}_{st} - \mathbf{z}_i \right\rangle \quad (5.5)$$

Сузив интегрирование на окрестность стационарной точки становится возможным разложить соответствующий модуль. При этом направление $\mathbf{z}_j - \mathbf{z}_{st}$ соответствует направлению прохождения-отражения $\mathbf{l}^{(1)}$, а как следует из геометрии отражения, $|\mathbf{z}_j| < |\mathbf{z}_{st}|$. В результате получим

$$\begin{aligned}
R_0\Gamma_i\Gamma_j &\approx \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|z|}}{\sqrt{|z|}} \lambda^{-1/2} \int dz_j Cv(x_j) \phi_{\pm}(x_j, k_0(\mathbf{z}')) \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|z_j - z_{st}|}}{\sqrt{|z_j - z_{st}|}} \times \\
&\times \int dx_i Cv(x_i) \phi_{\pm}(x_i, k_0(\mathbf{z}_j, \mathbf{z}_{st})) e^{i\sqrt{\lambda}x_i(l_x + l_x^{(1)})} \int dy_i e^{i\sqrt{\lambda}y_i(l_y + l_y^{(1)})} \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|z_j - z'|}}{\sqrt{|z_j - z'|}} \approx \\
&\approx \lambda^{-1/4} \int dz_j Cv(x_j) \phi_{\pm}(x_j, k_0(\mathbf{z}')) \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|z - z_{st}|}}{\sqrt{|z - z_{st}|}} \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|z_j - z_{st}|}}{\sqrt{\lambda^{1/2}|z_j - z_{st}|}} \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|z_j - z'|}}{\sqrt{|z_j - z'|}} \times \\
&\times \left(S(\sqrt{\lambda}\langle \mathbf{l}^{(1)}, \mathbf{k}_i \rangle) \delta(\mathbf{l}^{(1)} - \frac{\mathbf{z}}{|z|}) + R(\sqrt{\lambda}\langle \mathbf{l}^{(1)}, \mathbf{k}_i \rangle) \delta(\mathbf{l}^{(1)} - H_i \frac{\mathbf{z}}{|z|}) \right) \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \quad (5.6)
\end{aligned}$$

Пользуясь слабо-асимптотическим равенством

$$\frac{e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}}{i\sqrt{q\mathbf{r}}} \delta\left(\frac{\mathbf{r}}{r} - \frac{\mathbf{q}}{q}\right) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{4\pi} (\theta(\langle \mathbf{q}, \mathbf{r} \rangle) e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} + \theta(-\langle \mathbf{q}, \mathbf{r} \rangle) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}}) \quad (5.7)$$

А также тем, что $|z_j - z_{st}| > T$, запишем (например при $\langle \mathbf{q}, \mathbf{r} \rangle > 0$)

$$\begin{aligned}
&\frac{e^{i\sqrt{\lambda}|z_j - z_{st}|}}{\sqrt{\lambda^{1/2}|z_j - z_{st}|}} \left(S(\sqrt{\lambda}\langle \mathbf{l}^{(1)}, \mathbf{k}_i \rangle) \delta(\mathbf{l}^{(1)} - \frac{\mathbf{z}}{|z|}) + R(\sqrt{\lambda}\langle \mathbf{l}^{(1)}, \mathbf{k}_i \rangle) \delta(\mathbf{l}^{(1)} - H_i \frac{\mathbf{z}}{|z|}) \right) \approx \\
&\approx \frac{1}{2\pi} \left(S(\sqrt{\lambda}\langle \mathbf{l}^{(1)}, \mathbf{k}_i \rangle) e^{i\sqrt{\lambda}(z_j - z_{st}) \cdot \frac{\mathbf{z}}{|z|}} + R(\sqrt{\lambda}\langle \mathbf{l}^{(1)}, \mathbf{k}_i \rangle) e^{i\sqrt{\lambda}(z_j - z_{st}) \cdot H_i \frac{\mathbf{z}}{|z|}} \right) \quad (5.8)
\end{aligned}$$

А также разложением 5.5, с учетом того, что в результате отражения задействована лишь половина экрана, получим

$$\begin{aligned}
R_0\Gamma_i\Gamma_j &\approx \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|z|}}{\sqrt{|z|}} \lambda^{-1/4} \int dx_j Cv(x_j) \phi_{\pm}(x_j, k_0(\mathbf{z}')) \times \\
&\times \int dy_j \frac{1}{2\pi} \left(S(\sqrt{\lambda}\langle \mathbf{l}^{(1)}, \mathbf{k}_i \rangle) e^{i\sqrt{\lambda}(z_j - z_{st}) \cdot \frac{\mathbf{z}}{|z|}} + R(\sqrt{\lambda}\langle \mathbf{l}^{(1)}, \mathbf{k}_i \rangle) e^{i\sqrt{\lambda}(z_j - z_{st}) \cdot H_i \frac{\mathbf{z}}{|z|}} \right) e^{i\sqrt{\lambda}(z_j - z_{st}, \frac{\mathbf{z}' - z_{st}}{|z' - z_{st}|})} \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|z'|}}{\sqrt{\lambda|z'|}}
\end{aligned}$$

Где интегрирование ведется уже по всей оси в силу комбинации θ - функций.

Соответствующий вклад в волновую функцию

$$\begin{aligned}
\psi^{(2,ij)}(z, \sqrt{\lambda}, \frac{\mathbf{z}'}{|z'|}) &= \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|z|}}{\sqrt{\lambda^{1/2}|z|}} \left(S(\langle \sqrt{\lambda} \frac{\mathbf{z}'}{|z'|}, \mathbf{k}_j \rangle) S(\langle \sqrt{\lambda} \frac{\mathbf{z}'}{|z'|}, \mathbf{k}_i \rangle) \delta(\frac{\mathbf{z}}{|z|} - \frac{\mathbf{z}'}{|z'|}) + \right. \\
&+ R(\langle \sqrt{\lambda} \frac{\mathbf{z}'}{|z'|}, \mathbf{k}_j \rangle) S(\langle \sqrt{\lambda} \frac{\mathbf{z}'}{|z'|}, \mathbf{k}_i \rangle) \delta(\frac{\mathbf{z}}{|z|} - H_j \frac{\mathbf{z}'}{|z'|}) + S(\langle \sqrt{\lambda} H_i \frac{\mathbf{z}'}{|z'|}, \mathbf{k}_j \rangle) R(\langle \sqrt{\lambda} \frac{\mathbf{z}'}{|z'|}, \mathbf{k}_i \rangle) \delta(\frac{\mathbf{z}}{|z|} - H_i \frac{\mathbf{z}'}{|z'|}) + \\
&\left. + R(\langle \sqrt{\lambda} H_i \frac{\mathbf{z}'}{|z'|}, \mathbf{k}_j \rangle) R(\langle \sqrt{\lambda} \frac{\mathbf{z}'}{|z'|}, \mathbf{k}_i \rangle) \delta(\frac{\mathbf{z}}{|z|} - H_j H_i \frac{\mathbf{z}'}{|z'|}) + f(\frac{\mathbf{z}}{|z|}, \sqrt{\lambda}, \frac{\mathbf{z}'}{|z'|}) \right) + o\left(\frac{1}{\sqrt{|z|}}\right) \quad (5.9)
\end{aligned}$$

здесь $f(\frac{\mathbf{z}}{|z|}, \sqrt{\lambda}, \frac{\mathbf{z}'}{|z'|})$ — гладкая амплитуда рассеянной круговой волны, суть все отброшенные члены при выделении сингулярной части.

Становится ясно, что еще одной такой итерацией мы бы описали и вклады "трехкратного отражения" $\psi^{(3)}$

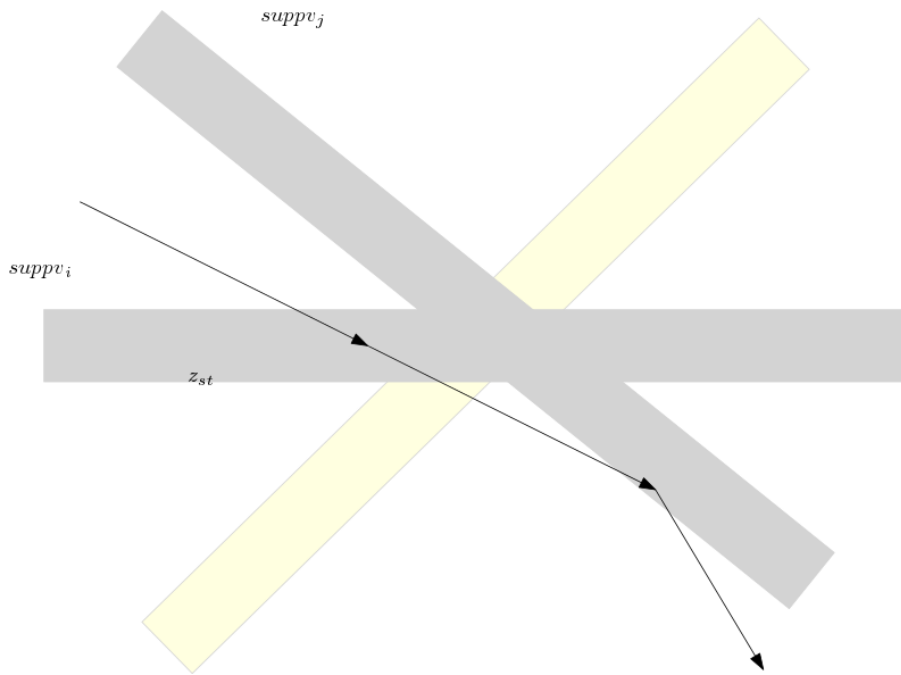


Рис. 5: Пример стационарной точки

В случае, когда направления \mathbf{z} , \mathbf{z}' лежат в малой угловой выколоте окрестности экранов, для использования асимптотики ядер резольвенты достаточно вырезать окрестность точек \mathbf{z} , \mathbf{z}' , и вновь воспользоваться тем, что рассеяние на компактном носителе имеет АВ разложение.

Интересно, что в асимптотике волновой функции появляются вклады, соответствующие вкладам отраженных и прошедших плоских волн через систему экранов, образованную носителями потенциалов, что оправдывает построения в [4]. В самом деле, если учесть слабую асимптотику 5.7, а также вид альтернирующих членов в 3.4, то можно заметить, что в асимптотику войдут все возможные вклады последовательных взаимодействий. При этом распределению энергии или волновому вектору в рамках дифракционного подхода отвечает асимптотическое направление \mathbf{z} .

При этом в работе [5] разрывы, образованные областями света и тени в лучевом приближении заменялись волнами Френеля — точными решениями задачи дифракции в этих областях. В этом подходе также возможно обосновать появление волн Френеля, если учесть следующие члены разложения модуля разности $|\mathbf{z} - \mathbf{z}'|$ в ядрах, отвечающих двукратному и трехкратному взаимодействию.

Список литературы

- [1] Л. Д. Фаддеев, *Математические вопросы квантовой теории рассеяния для системы трех частиц*, Тр. МИАН СССР, 69, Изд-во АН СССР, М.–Л., 1963, 3–122
- [2] Байбулов И. В., Будылин А. М., Левин С. Б. *Задача рассеяния нескольких одномерных квантовых частиц. Структура и асимптотика предельных значений ядра резольвенты*. Записки научных семинаров ПОМИ, Том 461:14-51, (2017).

- [3] Budylin A.M., Buslaev V.S. Reflection operator and their applications to asymptotic investigations of semiclassical integral equations. Advances in Soviet Math., AMS, Providence, RI, 7:107–157, 1991.
- [4] V.S.Buslaev and S.B.Levin. Asymptotic Behavior of the Eigenfunctions of the Many-particle Shrodinger Operator. I. One-dimentional Particles. Amer.Math.Soc.Transl. 225(2):55–71, 2008.
- [5] Буслаев В.С., Меркурьев С. П., Саликов С. П. *О дифракционном характере рассеяния в квантовой системе трех одномерных частиц.* Проблемы математической физики, ЛГУ, в. 9 (1979).