Санкт-Петербургский государственный университет
Кафедра высшей математики

Селихова Анастасия Владимировна

Выпускная квалификационная работа бакалавра

Математическое моделирование загрязнений атмосферы города

Направление 01.03.02
Прикладная математика и информатика

Научный руководитель,
кандидат физ.-мат. наук,
доцент
Старков В. Н.

Рецензент,
доктор физ.-мат. наук,
профессор
Перегудин С. И.

Санкт-Петербург
2018

Содержание

Введение

Проблема загрязнения атмосферы бесспорно актуальна, ведь в настоящее время вопрос экологической обстановки в крупных городах и целых странах является довольно острым. Существует множество факторов, загрязняющих окружающую среду, среди них промышленные источники, природные катаклизмы. Такие воздействия могут носить как постоянный характер, так и происходить кратковременно, но с большой степенью оказываемого загрязнения. Зачастую такие источники загрязнений носят неустранимый (по крайней мере в ближайшее время) характер, например: постоянные песчаные ветра из пустынных районов в Африке и Китае, распространяемые на весьма обширные площади вплоть до Америки, и непрекращающееся воздействие грязного воздуха от промышленных производств Европы, достигающих российского Алтая. На более локальном масштабе можно привести случаи пожаров, возникающие в непосредственной близости от города, извержений вулканов или какого-либо химического загрязнения (промышленный объект, свалка, разлив перевозимых опасных химикатов).

Основными веществами, которые загрязняют воздушную среду являются:

- Диоксид углерода — парниковый газ, влияющий на теплообмен Земли с окружающим пространством, а значит, и на климат.
- Оксид углерода или угарный газ, попадая в организм человека или животного, вызывает отравление (вплоть до летального исхода).
- Углеводороды — токсичные химические вещества, раздражающие глаза и слизистые оболочки.
- Производные серы способствуют образованию кислотных дождей и усыханию растений, провоцируют болезни дыхательных путей и аллергию.
- Производные азота приводят к воспалениям лёгких, крупам, бронхитам, частым простудам, усугубляют течение сердечно–сосудистых заболеваний.

- Радиоактивные вещества, накапливаясь в организме, становятся причиной рака, генных изменений, бесплодия, преждевременной смерти.

Данные вещества, а также тяжёлые металлы, растворённые в воздухе, причиняют большой вред здоровью человека. Накапливаясь в организме и не оказывая мгновенного воздействия, они приводят к тяжёлым заболеваниям, оказывают мутагенное влияние на наследственность.

При мониторинге качества атмосферного воздуха в городе учитывают не только концентрацию вредных для здоровья человека веществ, но и временной промежуток их воздействия. С математической точки зрения эти характеристики хорошо описываются моделями динамики совместного движения газов или жидкостей со взвешенными в них твердыми частицами. В таких процессах наряду с течением несущей среды (газа или жидкости) надо рассматривать и динамику дисперсной фазы (примеси).

Для моделирования поведения примеси в атмосфере города в данной работе были использованы два подхода, имеющие в настоящее время широкое распространение. Когда частиц примеси весьма мало и они не влияют на движение друг друга, а также не влияют и на динамику основного потока, то следует изучать движение (траекторию) отдельной частицы в основном потоке. Иногда же примесь в основном потоке рассматривают как континуум, характеризующийся некоторой концентрацией. Тогда поведение примеси описывают уравнением конвективной диффузии.

В силу сложности математического описания любого из упомянутых процессов приходится прибегать к упрощениям, отказываясь от каких-либо свойств системы. В данной работе не учитывались химические процессы и процессы, отвечающие за изменение массы и размеров частицы. Не рассматривалось также влияние вращения частицы на её траекторию в потоке воздуха.

Постановка задачи

Целью данной работы является моделирование загрязнений атмосферы города, построение математических моделей, правильно и удобно описывающих динамику соответствующих процессов.

Поставленной цели соответствует решение следующих задач:

1. Разработка математической модели задымления атмосферы города, моделирование случая нескольких источников возгорания.

2. Исследование зоны задымления территории города, расчёт линий одинаковых концентраций загрязнений.

3. Анализ тепловых конвекционных течений в приземном слое атмосферы города.

4. Определение поля скоростей, вызванных тепловыми течениями воздуха.

5. Моделирование движений загрязняющих частиц в рассмотренных полях скоростей.

Обзор литературы

При написании выпускной квалификационной работы были использованы научная и учебно-методическая литература, статьи периодичных изданий и интернет-ресурсы.

Исследованием поведения примесей в жидкостях и газах занимались многие деятели науки.

В книге известных американских ученых Р. Берда, В. Стьюарта и Е. Лайтфута «Явления переноса»[1], впервые опубликованной в 1960 г., довольно доступно, но при этом в строгой математической форме, излагаются физические аспекты переноса количества движения, энергии и вещества.

Известно, что даже при малой неоднородности температуры в среде возникают конвективные течения.

Начало исследованию конвекции положили опыты Бенара [2], [3], обнаружившего пространственно-периодическое конвективное движение в жидкости, подогреваемой снизу. Данную циркуляцию стали называть ячейками Бенара. Впоследствии Рэлей [4] изучил в теории устойчивость равновесия в горизонтальном слое и в случае, когда обе границы являются свободными, определил предельные значения параметров конвекции.

В следствие трудностей вычисления, дальнейшее изучение данной проблемы продвигалось медленно. В книге "Устойчивость конвективных течений"[5] авторы рассмотрели конвективные течения, возникающие при перепадах температуры. Главной темой были плоскопараллельные течения, и на их примере были исследованы в том числе и среды, в которых содержались примеси.

Для математических расчетов была использована книга "Уравнения математической физики"Арамановича И. Г., Левина В. И. [6]

Глава 1. Моделирование задымления города от лесных пожаров

Проблема пожаров и задымления имеет длительную историю [7]. Летом 2010 года в России возникла чрезвычайно опасная пожарная обстановка из-за аномально высокой температуры воздуха и отсутствия осадков. Около 200 тыс. га территории нашей страны было охвачено пожарами (рис. 1).

(a) (b)

Рис. 1: Пожарная опасность в России: а) в 2010 г., б) в 2016 г.

Во многих областях были зафиксированы в том числе торфяные пожары. Вследствие таких пожаров в Подмосковье, в Москве наблюдалось сильное задымление и чувствовался запах гари. На рис. 2 представлены фотографии ул. Айвазовского в Москве до начала пожаров и после.

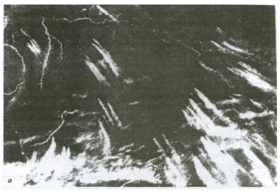
(a) (b)

Рис. 2: а) 17 июня 2010, 20:22, б) 7 августа 2010, 17:05

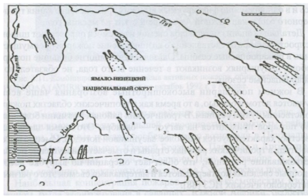
На второй фотографии видно сильное задымление. Такое загрязнение атмосферы не могло не повлечь за собой рост числа заболеваний и смертности. По информации, предоставленной Департаментом здравоохранения Москвы, на 9 августа уровень смертности в Москве увеличился почти в

2 раза (с 360–380 человек в день до 700). Также примерно на 30% увеличилось число вызовов службы скорой медицинской помощи и на 10% — количество госпитализаций.

Изменение концентрации примеси осуществляется также за счет переноса ветром. Дымовые шлейфы на севере Западно-Сибирской низменности, возникшие в результате массовой вспышки лесных и болотных пожаров во время грозы, хорошо видны из космоса [8, 9]. На рис. 3 представлен аэрокосмический снимок пожаров и его схема.



(a)



(b)

Рис. 3: a) телевизионное изображения с ИСЗ "Метеор полученное 5 августа 1977 г.; b) схема снимка: 1 — дымовые "языки". 2—облака, 3—очаги пожаров [10]

В левом углу схемы видны облака, дым представляет собой языки, в вершинах которых находятся очаги возгораний.

Аналогичная картина наблюдается при извержении вулканов. Вулкан Эйяфьятлайокудль в Исландии в 2010 году поверг весь мир в ужас.

Раннее прогнозирование задымления территории, в частности города, позволит вовремя принять меры по обеспечению безопасности граждан и тем самым уменьшить последствия задымления.

§1. Математическое описание

Рассмотрим распространение в толще атмосферы мелких частиц дыма. Пусть $C(x, y, z, t)$ — концентрация частиц примеси в слое атмосферы, заполняющей область

$$G : \{-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty, 0 \leq z \leq h\},$$

где (x, y, z) — декартовы координаты, плоскость (x, y) параллельна поверхности земли, а ось z направлена по вертикали от неё $(z = 0)$, h — высота приземного слоя.

Нестационарное уравнение с учётом диффузии в пространстве, описывающее изменение концентрации частиц примеси, имеет вид [1]:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + D\frac{\partial^2 C}{\partial z^2},$$

где D — коэффициент диффузии частиц примеси в воздухе.

Можно исключить диффузию по вертикали, учитывая незначительность потоков частиц на границах слоя $z = 0$ и $z = h$. Проинтегрировав уравнение по переменной z, тем самым введя среднюю по высоте концентрацию примеси, сведём задачу к двумерной

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}.$$

§2. Случай трёх источников загрязнения

Рассмотрим три источника загрязнения, расположенных вне города и представляющих собой прямоугольники, параллельные осям, с площадями $S_1 = (x_2 - x_1)(y_2 - y_1)$, $S_2 = (x_4 - x_3)(y_4 - y_3)$ и $S_3 = (x_6 - x_5)(y_6 - y_5)$, где $x_1, \ldots, x_6, y_1, \ldots, y_6$ — границы прямоугольников по осям.

Обозначим через C_1, C_2, C_3 мощности источников, пропорциональные площадям возгорания: $C_1 = k_1 S_1, C_2 = k_2 S_2, C_3 = k_3 S_3$. Для трёх источников распределение примеси загрязнения имеет вид, записанный с помощью $\eta(\cdot)$ — двумерной функции Хевисайда:

$$
\begin{aligned}
C(x,y,0) = C_1\big(\eta(x-x_1) - \eta(x-x_2)\big)\big(\eta(y-y_1) - \eta(y-y_2)\big) + \\
+ C_2\big(\eta(x-x_3) - \eta(x-x_4)\big)\big(\eta(y-y_3) - \eta(y-y_4)\big) + \\
+ C_3\big(\eta(x-x_5) - \eta(x-x_6)\big)\big(\eta(y-y_5) - \eta(y-y_6)\big).
\end{aligned}
$$

Решение уравнения диффузии имеет вид [6]:

$$
\begin{aligned}
C(x,y,t) = \frac{C_1}{2}\left(\Phi\left(\frac{x-x_1}{2\sqrt{Dt}}\right) - \Phi\left(\frac{x-x_2}{2\sqrt{Dt}}\right)\right)\left(\Phi\left(\frac{y-y_1}{2\sqrt{Dt}}\right) - \right. \\
\left. - \Phi\left(\frac{y-y_2}{2\sqrt{Dt}}\right)\right) + \frac{C_2}{2}\left(\Phi\left(\frac{x-x_3}{2\sqrt{Dt}}\right) - \Phi\left(\frac{x-x_4}{2\sqrt{Dt}}\right)\right) \times
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\times \left(\Phi\left(\frac{y-y_3}{2\sqrt{Dt}}\right) - \Phi\left(\frac{y-y_4}{2\sqrt{Dt}}\right)\right) + \frac{C_3}{2}\left(\Phi\left(\frac{x-x_5}{2\sqrt{Dt}}\right) - \right. \\
\left. - \Phi\left(\frac{x-x_6}{2\sqrt{Dt}}\right)\right)\left(\Phi\left(\frac{y-y_5}{2\sqrt{Dt}}\right) - \Phi\left(\frac{y-y_6}{2\sqrt{Dt}}\right)\right).
\end{aligned}
$$

Здесь $\Phi(\zeta) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int\limits_0^{\zeta} e^{-\mu^2}\, d\mu$ — интеграл вероятностей.

Функция $C(x,y,t)$ даёт значения концентрации примеси по поверхности земли в различные моменты времени. Для этого построим графики уровней постоянной концентрации на поверхности $C(x,y,t) = \mathrm{const}$ в различные моменты времени t (рис. 4).

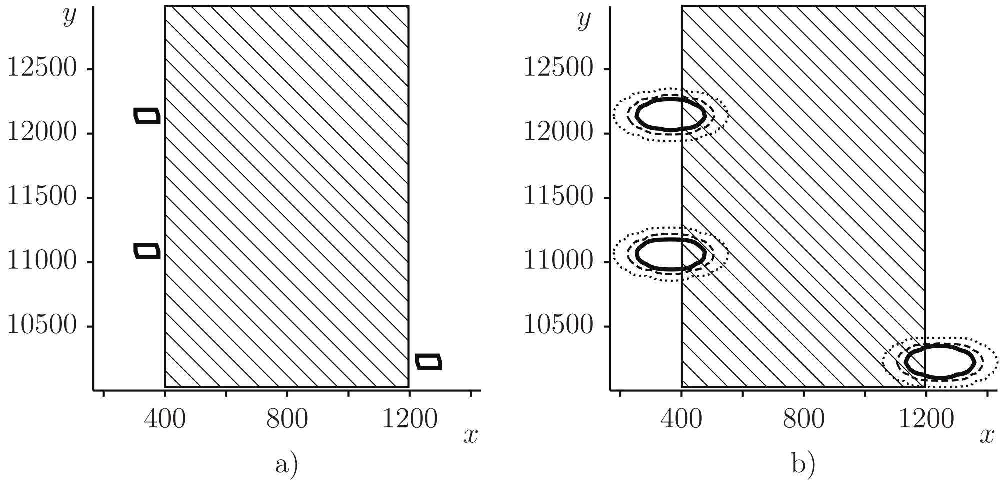


Рис. 4: a) Пример начального распределения загрязнения для трех источников, b) Распределение дымов через $t = 30$ дней (см. приложение № 1)

На первом графике представлено распределение загрязнения в начальный момент времени. Заштрихованный прямоугольник представляет собой город, а три маленьких прямоугольника — очаги возгорания. На втором графике представлена ситуация через тридцать дней. Распределение дыма изображено в виде линий концентраций: чем ближе точка к очагу возгорания, тем сильнее концентрация и тем ярче данная линия.

§3. Исследование задымления городов при учёте розы ветров

Рассматривается только поперечная диффузия, так как продольная диффузия значительно меньше переноса примеси ветром.

Уравнение, описывающее изменение концентрации $C(x, y)$ в плоскости (x, y) запишем в виде:

$$\frac{\partial C}{\partial y} = \frac{D}{\nu}\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}.$$

Можно записать распределение примеси на краю города $y = 0$ в виде функции Хевисайда (начальные условия). График одного из вариантов такой функции

$$C(x, 0) = C_0\big(\eta(x - x_1) - \eta(x - x_2)\big) + C_1\big(\eta(x - x_3) - \eta(x - x_4)\big)$$

изображен на рис. 5:

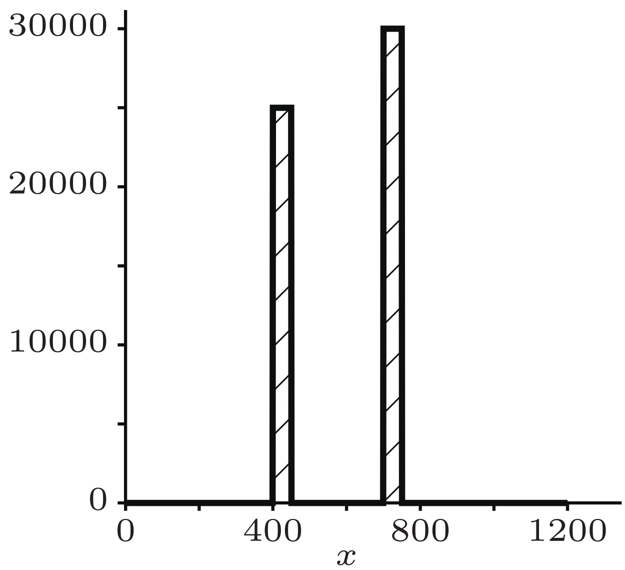


Рис. 5: Распределение дыма на границе города при $x \in [x_1, x_2] \cup [x_3, x_4], y = 0$

Считаем, что внутри каждого источника мощность распределена равномерно.

Решение этого уравнения известно [6]:

$$C(x,y)=\frac{C_0}{2}\left(\Phi\left(\frac{x-x_1}{2\sqrt{\frac{D}{\nu}y}}\right)-\Phi\left(\frac{x-x_2}{2\sqrt{\frac{D}{\nu}y}}\right)\right)+$$
$$+\frac{C_1}{2}\left(\Phi\left(\frac{x-x_3}{2\sqrt{\frac{D}{\nu}y}}\right)-\Phi\left(\frac{x-x_4}{2\sqrt{\frac{D}{\nu}y}}\right)\right),$$

где C_0, C_1 — концентрации примеси на границе города $y=0$ при $x\in[x_1,x_2]\cup[x_3,x_4]$.

График $C(x,y)$ для разных коэффициентов диффузии приведён на рис. 6,7. Распределение дыма по всей площади города при $D/(vL)>1$, где L — характерный размер города, представлено на рис. 6, а в случае $D/(vL)<1$ — на рис. 7. Указаны границы одинаковых концентраций: $C=4200, C=5500, C=6500$.

Рассмотрим случай, при котором $D/(vL)>1$, т.е. случай малой скорости ветра. На рис. 6a представлен график распределения мощности по территории города. По вертикали отражена мощность загрязнения. На крае города — два столбца исходной мощности, которые под действием ветра переносятся на площадь города. Так как скорость ветра мала, то растекание загрязнения происходит по широкому фронту с постоянным спаданием мощности, что видно из графика 6b.

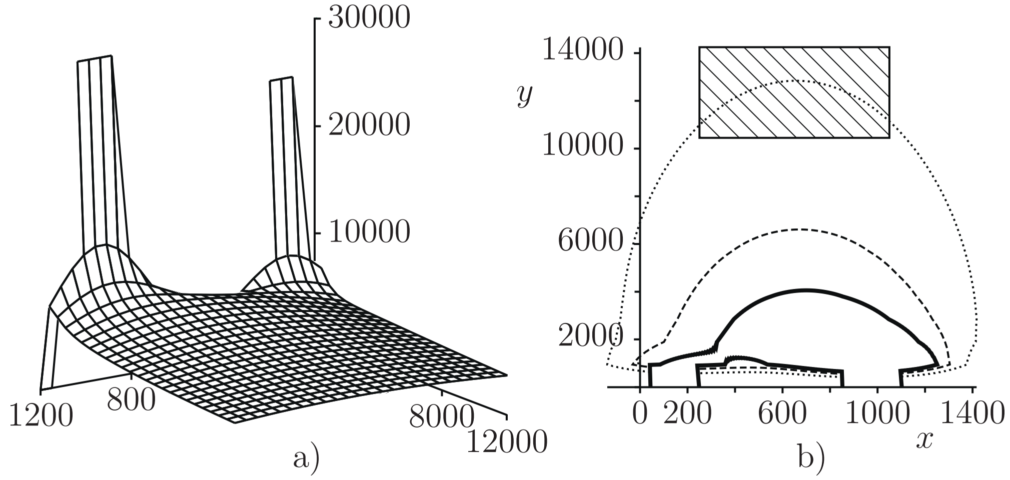


Рис. 6: a) График C(x,y), b) линии одинаковых концентраций (см. приложение № 2)

Рассмотрим теперь случай, когда $D/(vL)<1$, т.е. случай большой силы ветра. Из графика 7b видно, что поперечная диффузия слабая, перенос загрязнения осуществляется в основном вдоль направления действия ветра, достаточно узко, при этом два очага загрязнения долгое время не пересекаются.

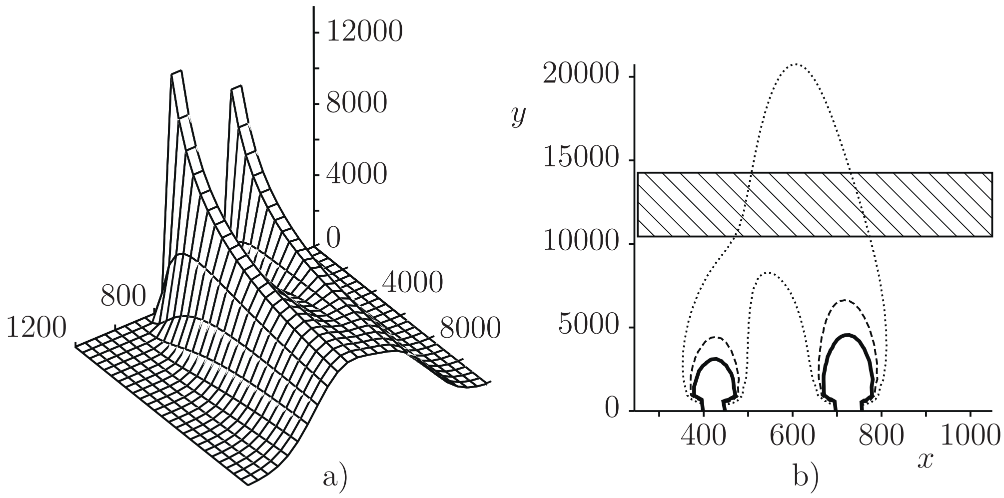


Рис. 7: a) График C(x,y), b) линии одинаковых концентраций

Видим, что диффузионные и переносные процессы конкурируют друг с другом.

Глава 2. Исследование загрязнения атмосферы городов от промышленных источников

Другим фактором, влияющим на экологию, является наличие промышленных предприятий в городе и распространение аэрозольных загрязнений от них в атмосфере. На данное распространение влияет не только наличие ветра, но и особые конвективные течения, речь о которых и пойдёт в данной работе.

Конвекция — движение жидкости или газа в поле тяжести под влиянием потока теплоты, идущего снизу (иногда сверху). Движущей (подъёмной) силой является сила Архимеда

$$F_A = g\Delta\rho V.$$

Разность плотностей $\Delta\rho$ поднимающегося объёма V и окружающей среды зависит от различия их температур. Вещество в объёме V должно быть горячее окружающей среды. Условия образования конвекции состоят в том, что температура T_1 в глубине конвективного слоя должна быть выше, чем на его поверхности T_2, и температура поднимающегося элемента объёма должна быть выше, а плотность ниже, чем у окружающей среды. Давление ρ внутри и снаружи одинаково. Подъёмная сила на 1 см^3 равна $F_A = g \cdot \Delta\rho$, где g — ускорение свободного падения.

Конвекция широко распространена в природе: она происходит в нижнем слое атмосферы Земли (тропосфере) и в атмосферах некоторых других планет [11, 12]. Объяснение возникновения атмосферной циркуляции от экватора до полюсов было дано еще в 1735 году английским ученым Хэдли. В его честь тропический круговорот воздуха называется ячейкой Хэдли (рис. 8). В данных ячейках воздух поднимается вверх у экватора и опускается у 30° северной и южной широт. Между 30° и 60° широты в обоих полушариях также имеются меридиональные атмосферные циркуляции, называемые ячейками Феррела. Стоит отметить, что в них направление движения обратное по сравнению с ячейками Хэдли [13].

Рис. 8: Система конвективных ячеек циркуляции воздуха в атмосфере Земли, соответствующие ячейкам приповерхностные ветры (черные стрелки) и направление силы трения атмосферы о поверхность планеты (красные стрелки)

Также возникновение конвективных течений связано как с неоднородностью подстилающей поверхности, так и с неравномерностью солнечного обогрева (рис. 9). Над сухим участком почвы образуется слой все более и более нагревающегося воздуха. Этот слой, вследствие своей большей лёгкости, отрывается и поднимается вверх. Над менее нагретыми участками воздух, наоборот, опускается. Вечером, после прекращения нагревания почвы, направление термического потока меняется, так как сырые участки почвы сохраняют тепло дольше, чем сухие, и поэтому над сухим участком воздух теперь опускается [14].

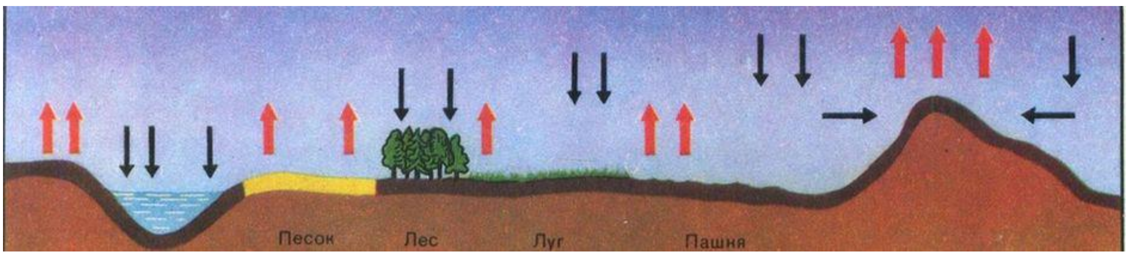


Рис. 9: Конвективные потоки воздуха

Сильное нагревание поверхности почвы вызывает интенсивное образование конвективных токов. В результате большего нагрева над городом может образоваться область пониженного атмосферного давления, что вызывает появление слабых потоков воздуха от периферии к центру города. Такие потоки наблюдаются в действительности. Направление воздушных потоков из пригородных лесов к центру города является благоприятным моментом. Если же, как это обыкновенно бывает, на периферии города расположены промышленные предприятия, то направленные к центру города потоки воздуха будут приносить с собой и воздушные загрязнения в виде промышленных аэрозолей (рис. 10). В городе, где сила ветра значительно

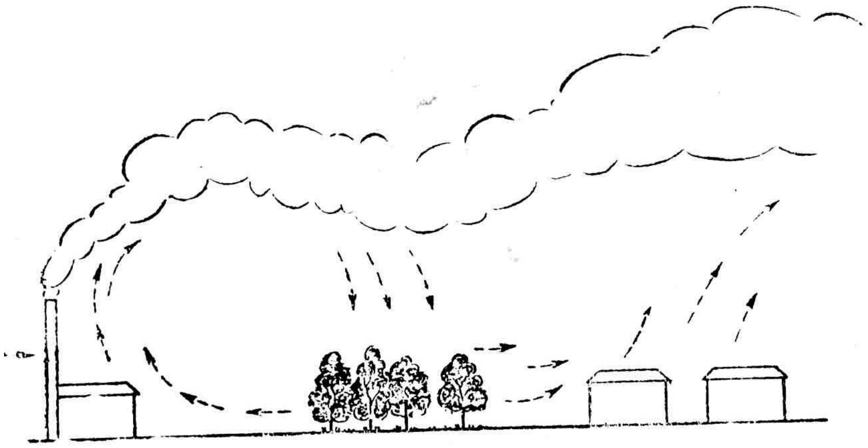


Рис. 10: Схема конвективных токов воздуха над городом

ослабляется постройками, аэрация тоже уменьшается. Таким, образом, чистый и умеренно влажный естественный воздух заменяется в городе воздухом, загрязнённым огромным количеством разнообразных твёрдых, жидких и газообразных примесей, вредных для здоровья и создающих значительного размера дымовую и пылевую завесу над городом (500–2000 м в высоту). В наиболее благоприятном положении в отношении аэрации находятся города на берегу моря, где ввиду наличия местных бризового характера ветров, дующих днём с прохладной поверхности моря, а ночью — с суши, легче расположить промышленные районы так, чтобы загрязнённый воздух не мог заноситься в жилые районы. Плохая аэрация наблюдается в городах, расположенных в низинах и долинах, где скорость ветра понижена и возможен застой загрязнённого воздуха. Потоки воздуха от периферии к центру могут наблюдаться в тихую, жаркую погоду, особенно в утренние часы.

Изучение микроклимата города даёт возможность организовать и строить города таким образом, чтобы благоприятные для человека факторы были усилены, а неблагоприятные ослаблены или устранены.

§1. Исследование конвективных течений в атмосфере города

Возникновение конвективных течений в атмосфере городов связано с неравномерным нагревом домов, улиц, скверов. Днём на солнечной стороне улицы наблюдается восходящий поток воздуха, а на теневой — нисходящий. При меридиональном расположении улицы солнце нагревает обе её стороны. В таком случае наблюдается нисходящий поток посередине улицы и восходящий — у ограничивающих её домов (рис. 11).

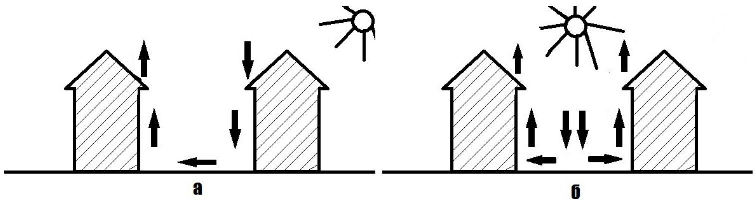


Рис. 11: Схема конвекционных потоков воздуха около домов: а) при косых лучах солнца, б) при зенитных луча солнца [15]

Для описания процессов тепловой конвекции в атмосфере будем использовать уравнения сплошной среды в приближении Обербека-Буссинеска [5]. Изменение скорости $\vec{v}(x, y, z, t)$, плотности $\rho(x, y, z, t)$, температуры $T(x, y, z, t)$, давления $p(x, y, z, t)$ во времени и в пространстве описывается системой уравнений:

$$\begin{aligned} &\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \big(\vec{v}\nabla\big)\vec{v}\right) = -\nabla p + \mu\nabla^2\vec{v} + \rho\vec{g}, \\ &\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\big(\rho\vec{v}\big) = 0, \\ &\nabla\big(T\vec{v}\big) = k\nabla^2 T, \end{aligned} \tag{1}$$

где

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

векторный оператор Гамильтона, $\big(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\big)$ — орты прямоугольной системы координат, μ — коэффициент вязкости, $\vec{g}$ — ускорение силы тяжести, k — коэффициент теплопроводности.

В уравнении состояния вещества $\rho = f(p, T)$ предполагаем линейную зависимость плотности от температуры. Она получается при разложении уравнения состояния

$$\rho = \rho_0\big(1 - \beta(T - T_0)\big).$$

Здесь ρ_0 — плотность вещества при некоторой равновесной температуре T_0

$$\beta = -\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p$$

коэффициент теплового расширения среды. Несмотря на то, что неоднородность плотности учитывается только в уравнении движения, приближение Буссинеска достаточно хорошо отражает важнейшие особенности тепловой конвекции.

Для плоского течения несжимаемой жидкости в проекциях на оси декартовых координат (x, y) уравнения движения имеют вид [16]:

$$\begin{aligned}
&\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial \rho}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),\\
&\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{\partial \rho}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) - \rho g,\\
&\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,\\
&\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right),
\end{aligned}$$

где (u, v) — компоненты вектора скорости, ось x направлена вдоль земной поверхности, ось y — перпендикулярно к ней.

Упрощение уравнений для функции тока

При решении в двумерной постановке удобно из уравнений движения исключить давление p, введя функцию тока $\psi(x, y)$ по формулам

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{2}$$

Тогда уравнения в безразмерном виде запишутся так:

$$\frac{\partial \Delta\psi}{\partial t} + \frac{1}{Pr}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial y}\right) = \Delta\Delta\psi - Ra\frac{\partial T}{\partial x},$$

$$Pr\frac{\partial T}{\partial t} + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial y}\right) = \Delta T.$$

Здесь Pr — число Прандтля, Ra — температурное число Релея.

Для стационарного случая в линейном приближении (отбросив произведения функций и производных) получим

$$\Delta\Delta\psi = Ra\frac{\partial T}{\partial x},$$

$$\Delta T = 0$$

с соответствующими краевыми условиями для температуры и для функции тока. Верхнюю границу слоя $y = H$ предположим свободной, причём деформацией границы, вызванной конвекцией, пренебрежём, а нижнюю границу $y = 0$ будем считать твёрдой (поверхность земли). Обозначив объём газа, перемещающегося в направлении оси x за единицу времени, через ψ_0 ($\psi_0 > 0$), имеем следующие граничные условия для функции тока

$$\psi\big(x, H\big) = \psi_0, \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\big(x, H\big) = 0, \quad \psi(x, 0) = \frac{\partial\psi}{\partial y}\big(x, 0\big) = 0.$$

Упростим уравнения, учитывая, что для узких пространств процессы поперёк слоя более значимы, чем процессы вдоль слоя:

$$\frac{\partial^4\psi}{\partial x^4} << \frac{\partial^4\psi}{\partial y^4} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} << \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}.$$

Тогда получим систему

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial^4\psi}{\partial y^4} = Ra\frac{\partial T}{\partial x}. \tag{4}$$

Проинтегрируем уравнение (4) для функции тока

$$\psi^{IV} = A = Ra\frac{dT(x)}{dx},$$
$$\psi''' = Ay + B,$$
$$\psi'' = A\frac{y^2}{2} + By + C,$$
$$\psi' = A\frac{y^3}{6} + B\frac{y^2}{2} + Cy + D,$$
$$\psi = A\frac{y^4}{24} + B\frac{y^3}{6} + C\frac{y^2}{2} + Dy + E.$$

Используя граничные условия при $y = 0$, получим $D = 0, E = 0$. Для других неизвестных:

$$B = -\frac{3}{H^3}\left(\psi_0 + \frac{5AH^4}{24}\right), \quad C = \frac{3\psi_0}{H^2} + \frac{AH^2}{8}.$$

Следовательно,

$$\psi(x, y) = \frac{A}{48}\left(2y^4 - 5Hy^3 + 3H^2y^2\right) - \frac{\psi_0}{2}\left(\frac{y^3}{H^3} - 3\frac{y^2}{H^2}\right). \qquad (5)$$

§2. Симметричный случай

Пусть изменение температуры в приземном слое атмосферы, вдоль земной поверхности (по оси x) зависит только от продольной координаты x. В случае симметричного распределения температуры около домов (см. рис. 11б) примем

$$T(x) = T_0 + ae^{-\alpha(x-x_1)^2} + be^{-\beta(x-x_2)^2}, \tag{6}$$

где T_0 — некоторая равновесная температура (температура окружающей среды — всего воздушного слоя), x_1, x_2 — координаты расположения домов, α, β — положительные коэффициенты, определяющие остывание воздуха до равновесной температуры в зависимости от расстояния до источника нагрева, a, b — положительные параметры, характеризующие мощность нагревания воздуха для каждого из домов (зависит от площади поверхности домов, характеристик материалов покрытия домов и т.п.).

Эта функция удовлетворяет уравнению температуры (3) и её график представлен на рис. 12, в случае одинаковых характеристик домов и окружающей среды

$$a = b, \quad \alpha = \beta.$$

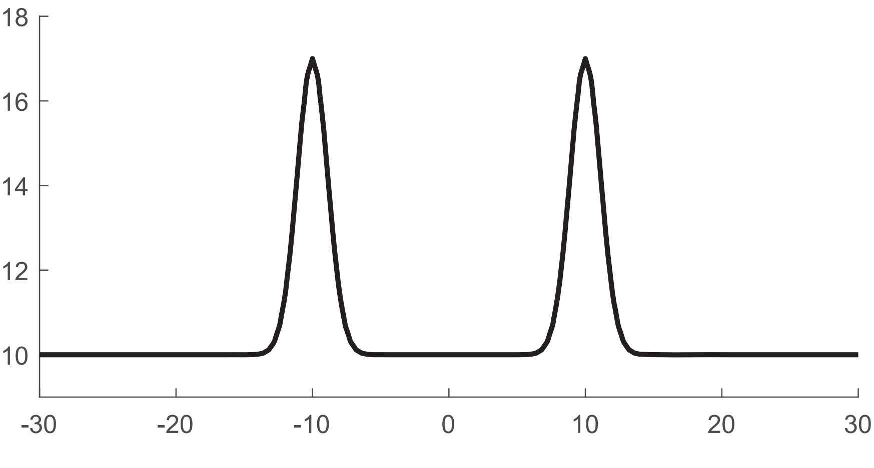


Рис. 12: Распределение температур в приземном слое атмосферы при зенитных лучах солнца

Тогда функция тока примет вид

$$\psi(x,y) = \frac{Ra}{48}\left(-2a\alpha(x-x_1)e^{-\alpha(x-x_1)^2} - 2a\alpha(x-x_2)e^{-\alpha(x-x_2)^2}\right)\times$$

$$\times\left(2y^4 - 5Hy^3 + 3H^2y^2\right) - \frac{\psi_0}{2}\left(\frac{y^3}{H^3} - 3\frac{y^2}{H^2}\right).$$

Построим график неявной функции тока $\psi(x,y) = \mathrm{const}$, принимая, что собственное движения воздуха в слое $\psi_0 = 0$ (рис. 13).

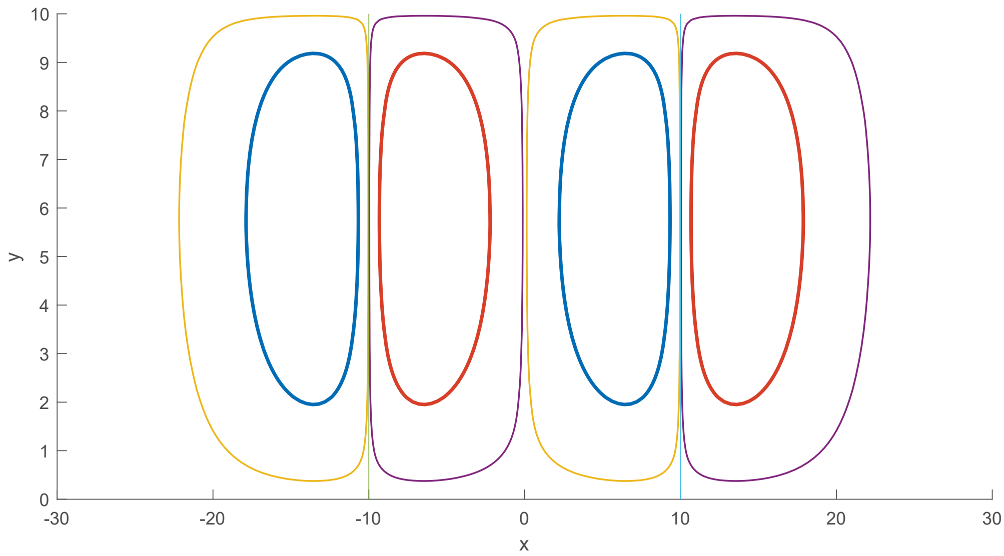


Рис. 13: Линии тока в симметричном случае распределения температур

В симметричном случае (солнце находится в полдне) получаем четыре симметричные тепловые конвективные ячейки с правильным чередование восходящих (вдоль домов) и нисходящих потоков воздуха.

§3. Модель, учитывающая наличие тени

Пусть изменение температуры в приземном слое атмосферы, вдоль земной поверхности (по оси x), происходит по закону

$$T(x) = T_0 + ae^{-\alpha(x-x_1)^2} + be^{-\beta(x-x_2)^2} + \bar{a}e^{-\bar{\alpha}(x-x_3)^2} + \bar{b}e^{-\bar{\beta}(x-x_4)^2}. \qquad (7)$$

Здесь x_1, x_2 — по прежнему координаты домов, x_3, x_4 — координаты условного центра отбрасываемой тени (точка максимального воздейсвия тени на охлаждение воздуха) для каждого из домов соответственно, положительные параметры $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ — характеризуют остывание воздуха, находящегося в зоне действия тени, в зависимости от растояния до центра тени, и отрицательные коэффициенты $\bar{a}, \bar{b}$ задают максимальное падение температуры воздуха в центре тени.

Снова будем считать, что характеристики домов и окружающей среды одинаковые, т.е.

$$a = b, \quad \alpha = \beta, \quad \text{и} \quad \bar{\alpha} = \bar{\beta}.$$

Тогда график, учитывающий наличие тени будет выглядеть следующим образом (рис. 14.

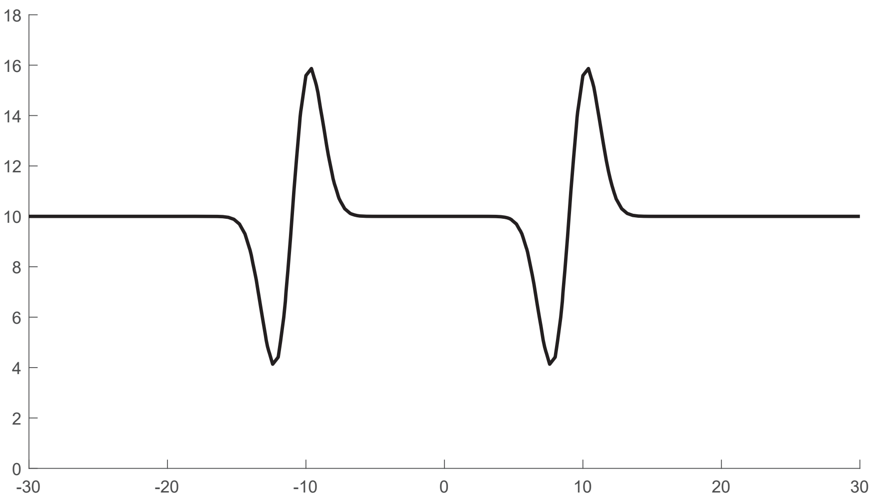


Рис. 14: Распределение температур в приземном слое атмосферы при наличии теней у домов (рис. 11а)

Тогда функция тока примет вид

$$\psi(x,y) = \frac{Ra}{48}\bigg(-2a\alpha(x-x_1)e^{-\alpha(x-x_1)^2} - 2a\alpha(x-x_2)e^{-\alpha(x-x_2)^2} -$$

$$-2\bar{a}\bar{\alpha}(x-x_3)e^{-\bar{\alpha}(x-x_3)^2} - 2\bar{a}\bar{\alpha}(x-x_4)e^{-\bar{\alpha}(x-x_4)^2}\bigg)\times$$

$$\times\left(2y^4 - 5Hy^3 + 3H^2y^2\right) - \frac{\psi_0}{2}\left(\frac{y^3}{H^3} - 3\frac{y^2}{H^2}\right).$$

Построим график неявной функции тока $\psi(x,y) = \mathrm{const}$, по прежнему считая $\psi_0 = 0$ (рис. 15).

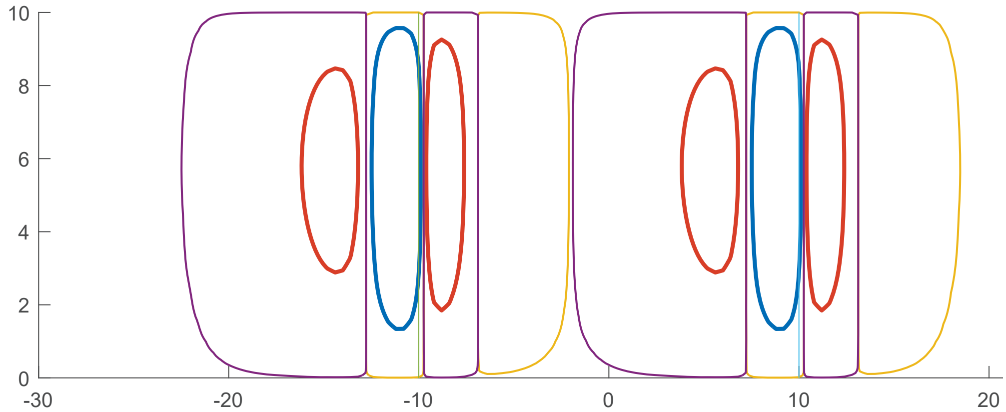


Рис. 15: Линии тока в случае наличия тени у домов

В данном случае видим, что несимметричность температурного поля в приземном слое атмосферы приводит к сложным конвективным течениям. Количество тепловых конвективных ячеек стало в 2 раза больше, по сравнению с симметричным случаем. При этом чередование восходящих и нисходящих потоков воздуха также остается согласованным.

§4. Нахождение положения центров конвективных ячеек

Найдем положения центров конвективных ячеек, где воздух покоится, т. е. $u = v = 0$, пользуясь формулами (2) находим

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0 = \frac{A}{48}\Big(8y^3 - 15Hy^2 + 6H^2y\Big).$$

Отсюда получаем $y = 0$, или $A = 0$, или $8y^2 - 15Hy + 6H^2 = 0$. Последнее уравнение даёт

$$y = \frac{15H \pm H\sqrt{9\cdot 25 - 3\cdot 64}}{16} = H\frac{15 \pm \sqrt{33}}{16}.$$

Подходит только

$$y = H\frac{15 - \sqrt{33}}{16}.$$

Условие

$$A = Ra\frac{dT}{dx} = 0$$

связано с распределением температуры в приземном слое. Для симметричной схемы

$$-2a\alpha(x - x_1)e^{-\alpha(x-x_1)^2} - 2a\alpha(x - x_2)e^{-\alpha(x-x_2)^2} = 0.$$

Получаем

$$e^{-\alpha(x-x_1)^2+\alpha(x-x_2)^2} = -\frac{x - x_2}{x - x_1}.$$

Рассмотрим условие

$$v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0 = -\frac{dA}{dx}\frac{1}{48}y^2(2y^2 - 5Hy + 3H^2).$$

Уравнение

$$2y^2 - 5Hy + 3H^2 = (y - H)(2y - 3H)$$

даёт $y = 0, y = H, y = 3H2$. Эти точки лежат вне слоя.

Условие

$$\frac{dA}{dx} = \frac{d^2T}{dx^2} = 0$$

также связано с распределением температуры вдоль земной поверхности.

$$-2a\alpha e^{-\alpha(x-x_1)^2}+4a\alpha^2(x-x_1)^2e^{-\alpha(x-x_1)^2}-2a\alpha e^{-\alpha(x-x_2)^2}+ \\ +4a\alpha^2(x-x_2)^2e^{-\alpha(x-x_2)^2}=0.$$

Получаем

$$e^{-\alpha(x-x_1)^2+\alpha(x-x_2)^2}=-\frac{1-2\alpha(x-x_2)^2}{1-2\alpha(x-x_1)^2}.$$

Уравнение

$$\frac{1-2\alpha(x-x_2)^2}{1-2\alpha(x-x_1)^2}=\frac{x-x_2}{x-x_1}$$

даёт решение

$$x=\frac{1}{2}(x_1+x_2\pm\sqrt{x_1-x_2-\frac{2}{\alpha}}).$$

Для других случаев также можно найти центры ячеек. Математическая модель конвективных течений в приземном слое атмосферы, возникающих из-за неравномерности температуры в воздухе, отражает некоторые реальные черты процесса.

Выводы

- Исследована проблема задымления территоии города. Рассмотрен случай нескольких источников возгорания.
- Проведён анализ тепловых конвекционных течений в приземном слое атмосферы города.
- Изучена динамика движений загрязняющих частиц в рассмотренных полях скоростей, вызванных тепловыми течениями воздуха.

Заключение

Главной целью данной работы являлось моделирование загрязнений атмосферы города, построение математических моделей, правильно и удобно описывающих динамику соответствующих процессов.

Основные результаты представленной дипломной работы:

- Разработана математическая модель задымления атмосферы города, проведено моделирование случая нескольких источников возгорания.
- Исследованы зоны задымления территории города, расчитаны линии одинаковых концентраций загрязнений.
- Предложена удобная модель тепловых конвекционных течений в приземном слое атмосферы городаю. Получено аналитичексое решение.
- На основе выведенной функции тока определены поля скоростей, вызванных тепловыми течениями воздуха.
- Расчитаны траектоии движений загрязняющих частиц в рассмотренных полях скоростей.
- Произведено моделирование предложенных вариантов в среде математического программирования MATLAB.

Полученные результаты могут наити весьма широкое практическое применение в задачах по улучшению экологии городов.

Результаты были представлены на трёх конференциях: XLVIII и XLIX международной научной конференции аспирантов и студентов «Процессы управления и устойчивость», Международной конференции молодых ученых «Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий», а также вошли в 3 публикации:

1. Селихова А. В., Старков В. Н., Степенко Н. А. Моделирование задымления городов от лесных пожаров // Процессы управления и устойчивость. СПб.: Издательский Дом Федоровой Г. В., 2017. Т. 4. № 1. С. 223–228.

2. Селихова А. В., Старков В. Н., Степенко Н. А. Исследование конвективных течений в неравномерно прогретой атмосфере // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2017). Воронеж: Научная книга, 2017. С. 342–345.

3. Селихова А. В., Старков В. Н., Степенко Н. А. Исследование конвективных течений в атмосфере города // Процессы управления и устойчивость. СПб.: Издательский Дом Федоровой Г. В., 2018. Т. 5. № 1. (в печати)

Список литературы

[1] Берд Р., Стюарт В., Лайтфут Е. Явления переноса. М.: Химия, 1974. 688 с.

[2] Benard H. Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquid// Revue generale des Sciences, pures et appliquees, 1900, .v.12, 1261; 1309.

[3] Benard H. Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide transportant de la chaleur par convection en regime permanent// Ann. Chim. Phys., 1901, v.7, 23, 62

[4] Rayleigh, On convection currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the under side// Phil. Mag., 1916, v.6, 32, 529

[5] Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Непомнящий А. А. Устойчивость конвективных течений. М.: Наука, 1989. 320 с.

[6] Араманович И. Г., Левин В.И. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1969. 288 с.

[7] Раковская Э. М., Давыдова М. И. Физическая география России. Ч. 2. М.: Владос, 2001. 302 с.

[8] Фуряев В. В. Использование аэрокосмических снимков для изучения и оценки последствий лесных пожаров // Исследования лесов аэрокосмическими методами. Новосибирск: Наука, 1987. С. 85–98.

[9] Григорьев Ал. А., Липатов В. Б. Дымовые загрязнения атмосферы по наблюдениям из космоса. Л.: Гидрометеоиздат, 1978. 36 с.

[10] Григорьев Ал. А., Кондратьев К. Я. Экодинамика и геополитика. Т. 2. Экологические катастрофы. СПб.: НИЦ экологической безопасности РАН, 2001. 687 с.

[11] Голицын Г. С. Теоретические и экспериментальное исследование конвекции с геофизическими приложениями.-Л.: Гидрометеоиздат, 1980.- 56 с.

[12] Голицын Г. С. Введение в динамику планетных атмосфер: Гидрометеоиздат, 1973.- 104 с.

[13] Витлицкий Г. Н. Циркуляция атмосферы в тропиках.-Л.: Гидрометеоиздат, 1971.

[14] Качинский Н. А. Почва, ее свойства и жизнь.-М.: Наука, 1975.

[15] Томсон Н. М. Аэрация городской застройки. М.: изд. Академии медицинских наук, 1947. 121 с.

[16] Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973. 848 с.

[17] Потапов Д. К. О решениях задачи Гольдштика. Сиб. журн. вычисл. матем. Т. 15. №4. 2012. 409-415 стр.

[18] Starkov V. N., Stepenko N. A. Simulation of particle motion in the given speed fields (2015) 2015 International Conference on «Stability and Control Processes» in Memory of V.I.Zubov, SCP 2015 – Proceedings, art. no. 7342051, pp. 75-77

[19] Селихова А. В., Старков В. Н., Степенко Н. А. Моделирование задымления городов от лесных пожаров // Процессы управления и устойчивость. СПб.: Издательский Дом Федоровой Г. В., 2017. Т. 4. № 1. С. 223–228.

[20] Селихова А. В., Старков В. Н., Степенко Н. А. Исследование конвективных течений в неравномерно прогретой атмосфере // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2017). Воронеж: Научная книга, 2017. С. 342–345.

[21] Селихова А. В., Старков В. Н., Степенко Н. А. Исследование конвективных течений в атмосфере города // Процессы управления и устойчивость. СПб.: Издательский Дом Федоровой Г. В., 2018. Т. 5. № 1. (в печати)

Приложение

Приложение № 1

```
#Случай трёх источников возгорания
> assume*(n, integer); with(plots); with(inttrans);
> v := 1; d := 2*14.732; t := 0.1e-5; D1 := 5; D2 := 250; D3 := 1650;
x1 := 340; x2 := 390; x3 := 340; x4 := 390;
x5 := 1220; x6 := 1270; x7 := 400; x8 := 1200;
y1 := 12120; y2 := 12170; y3 := 11040; y4 := 11090;
y5 := 10200; y6 := 10250; y7 := 10000; y8 := 13000
> c := sqrt(d/v); C1 := (10*(x2-x1))*(y2-y1);
C2 := (10*(x4-x3))*(y4-y3); C3 := (10*(x6-x5))*(y6-y5);
> implicitplot([1-(Heaviside(x-x7)-Heaviside(x-x8))*
*(Heaviside(y-y7)-Heaviside(y-y8)) = 0,
C1*(erf((1/2)*(x-x1)/(c*sqrt(t)))-erf((1/2)*(x-x2)/(c*
*sqrt(t))))*(erf((1/2)*(y-y1)/(c*sqrt(t)))-erf((1/2)*(y-y2)/
/(c*sqrt(t))))+C2*(erf((1/2)*(x-x3)/(c*sqrt(t)))-erf((1/2)*
*(x-x4)/(c*sqrt(t))))*(erf((1/2)*(y-y3)/(c*sqrt(t)))-erf((1/2)*
*(y-y4)/(c*sqrt(t))))+C3*(erf((1/2)*(x-x5)/(c*sqrt(t)))-
-erf((1/2)*(x-x6)/(c*sqrt(t))))*(erf((1/2)*(y-y5)/(c*sqrt(t)))-
-erf((1/2)*(y-y6)/(c*sqrt(t)))) = D1,
C1*(erf((1/2)*(x-x1)/(c*sqrt(t)))-erf((1/2)*(x-x2)/(c*
*sqrt(t))))*(erf((1/2)*(y-y1)/(c*sqrt(t)))-erf((1/2)*(y-y2)/
/(c*sqrt(t))))+C2*(erf((1/2)*(x-x3)/(c*sqrt(t)))-erf((1/2)*
*(x-x4)/(c*sqrt(t))))*(erf((1/2)*(y-y3)/(c*sqrt(t)))-erf((1/2)*
*(y-y4)/(c*sqrt(t))))+C3*(erf((1/2)*(x-x5)/(c*sqrt(t)))-
-erf((1/2)*(x-x6)/(c*sqrt(t))))*(erf((1/2)*(y-y5)/(c*sqrt(t)))-
-erf((1/2)*(y-y6)/(c*sqrt(t)))) = D2,
C1*(erf((1/2)*(x-x1)/(c*sqrt(t)))-erf((1/2)*(x-x2)/(c*
*sqrt(t))))*(erf((1/2)*(y-y1)/(c*sqrt(t)))-erf((1/2)*(y-y2)/
/(c*sqrt(t))))+C2*(erf((1/2)*(x-x3)/(c*sqrt(t)))-erf((1/2)*
*(x-x4)/(c*sqrt(t))))*(erf((1/2)*(y-y3)/(c*sqrt(t)))-erf((1/2)*
*(y-y4)/(c*sqrt(t))))+C3*(erf((1/2)*(x-x5)/(c*sqrt(t)))-
erf((1/2)*(x-x6)/(c*sqrt(t))))*(erf((1/2)*(y-y5)/(c*sqrt(t)))-
```

```
erf((1/2)*(y-y6)/(c*sqrt(t)))) = D3],
x = -100 .. 1500, y = -100 .. 15000, numpoints = 100000);
#Меняя t, можно получить графики для других моментов времени.
```

Приложение № 2

```
#Моделирование с учётом розы ветров
> C0 := 10000; C1 := 30000;
x1 := 200; x2 := 250; x3 := 700; x4 := 750;
x7 := 250; x8 := 1050; y7 := 10000; y8 := 15000;
d := 1.732; v := 24*(12*3600)
> plot3d(proc (x, y) options operator, arrow;
(1/2)*C0*(erf((1/2)*(x-x1)/sqrt(d*y/v))-erf((1/2)*(x-
-x2)/sqrt(d*y/v)))+(1/2)*C1*(erf((1/2)*(x-x3)/sqrt(d*y/v))-
-erf((1/2)*(x-x4)/sqrt(d*y/v))) end proc, 0 .. 1200, 0 .. 1200);
> implicitplot([1-(Heaviside(x-x7)-Heaviside(x-x8))*
*(Heaviside(y-y7)-Heaviside(y-y8)) = 0,
(1/2)*C0*(erf((x-x1)/(2*sqrt(d*y/v)))-erf((x-x2)/(2*sqrt(d*
*y/v))))+(1/2)*C1*(erf((x-x3)/(2*sqrt(d*y/v)))-erf((x-x4)/(2*
*sqrt(d*y/v))))=2000,
(1/2)*C0*(erf((x-x1)/(2*sqrt(d*y/v)))-erf((x-x2)/(2*sqrt(d*
*y/v))))+(1/2)*C1*(erf((x-x3)/(2*sqrt(d*y/v)))-erf((x-x4)/(2*
*sqrt(d*y/v))))=3000,
(1/2)*C0*(erf((x-x1)/(2*sqrt(d*y/v)))-erf((x-x2)/(2*sqrt(d*
*y/v))))+(1/2)*C1*(erf((x-x3)/(2*sqrt(d*y/v)))-erf((x-x4)/(2*
*sqrt(d*y/v))))=6500], x = -1000 .. 2500, y = 0 .. 30000,
numpoints = 100000)
```

Приложение № 3

```
T0 = 10;
H = 10;
Ra = 1;
a = 7;
b = 7;
```

```
alpha = 0.04;
beta = 0.04;
x1 = -10;
x2 = 10;
d = 0;


psi0 = 0;
m=20;
for i=1:2
psi = @(x,y) (Ra/48).*(-2.*a.*alpha.*(x - x1).*exp(-alpha.*(x - x1).^2
    2.*b.*beta.*(x - x2).*exp(-beta.*(x - x2).^2) + d.*sin(x).*y).*...
    (2.*y.^4 - 5.*H.*y.^3 + 3.*H.^2.*y.^2) - m;
fimplicit(psi, [-30 30 0 10]);
hold on;
m=-20;
end

m=1;
for i=1:2
psi = @(x,y) (Ra/48).*(-2.*a.*alpha.*(x - x1).*exp(-alpha.*(x - x1).^2
    2.*b.*beta.*(x - x2).*exp(-beta.*(x - x2).^2) + d.*sin(x).*y).*...
    (2.*y.^4 - 5.*H.*y.^3 + 3.*H.^2.*y.^2) - m;
fimplicit(psi, [-30 30 0 10]);
hold on;
m=-1;
end


y=0:0.01:H;
n=length(y);
x11(1:n)=x1;
```

```
plot(x11,y);
hold on;
x22(1:n)=x2;
plot(x22,y);
hold on;
axis xy;
xlabel('x');
ylabel('y');
```

Приложение № 4

```
T0 = 10; H = 10;
Ra = 1e0;
a = 7;
a1 = -5;
b = 7;
b1 = -5;
alpha = 0.4;
alpha1 = 0.1;
beta = 0.4;
beta1 = 0.1;
x1 = -10;
x2 = 10;
x3 = -12;
x4 = 8;

psi0 = 0;
m=40;
for i=1:2
psi = @(x,y) (Ra/48).*(-2.*a.*alpha.*(x - x1).*exp(-alpha.*(x - x1).^2
    2.*a1.*alpha1.*(x - x3).*exp(-alpha1.*(x - x3).^2) - ...
    2.*b.*beta.*(x - x2).*exp(-beta.*(x - x2).^2) -...
    2.*b1.*beta1.*(x - x4).*exp(-beta1.*(x - x4).^2)).*...
```

```
    (2.*y.^4 - 5.*H.*y.^3 + 3.*H.^2.*y.^2) - m;
fimplicit(psi, [-30 30 0 10]);
hold on;
m=-40;
end;

m=0.01;
for i=1:2
psi = @(x,y) (Ra/48).*(-2.*a.*alpha.*(x - x1).*exp(-alpha.*(x - x1).^2
    2.*a1.*alpha1.*(x - x3).*exp(-alpha1.*(x - x3).^2) - ...
    2.*b.*beta.*(x - x2).*exp(-beta.*(x - x2).^2) -...
    2.*b1.*beta1.*(x - x4).*exp(-beta1.*(x - x4).^2)).*...
    (2.*y.^4 - 5.*H.*y.^3 + 3.*H.^2.*y.^2) - m;
fimplicit(psi, [-30 30 0 10]);
hold on;
m=-0.01;
end;



y=0:0.01:10;
n=length(y);
x11(1:n)=x1;
plot(x11,y);
hold on;
x22(1:n)=x2;
plot(x22,y);
```