

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
КАФЕДРА ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

Помазкова Галина Владимировна

Выпускная квалификационная работа бакалавра

ИССЛЕДОВАНИЕ ОРБИТ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С
ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Направление 01.03.02

«Прикладная математика и информатика»

Научный руководитель
старший преподаватель
Распопова Н.В.

Санкт-Петербург

2018

Содержание

Введение	3
Постановка задачи	5
Обзор литературы	6
1 Методы исследования динамических систем	8
1.1 Задание модели и уравнения движения	8
1.2 Численные методы интегрирования систем уравнений	9
1.3 Сечения Пуанкаре	11
2 Модель Хенона – Хейлеса	13
2.1 Описание модели	13
2.1.1 Классическая модель	13
2.1.2 Обобщенная модель	14
2.2 Результаты исследования	16
2.2.1 Уравнения движения и выбор начальных условий	16
2.2.2 Орбиты и сечения Пуанкаре	17
3 Логарифмический потенциал и потенциал Кузмина	22
3.1 Описание модели и уравнения движения	22
3.1.1 Логарифмический потенциал	22
3.1.2 Потенциал Кузмина	24
3.2 Орбиты и сечения Пуанкаре	27
Выводы	30
Заключение	32
Список литературы	33
Приложение	35

Введение

В последнее время анализ динамических систем получил огромное распространение в силу того, что значительно выросла мощность современных компьютеров. Изучение такой системы начинается с построения математической (компьютерной) модели. Модель представляет из себя набор элементов, заданных в момент времени, и закона, определяющего изменение (динамику) состояния этих элементов во времени. В качестве исходной функции описания модели можно взять потенциал или гамильтониан системы. Далее строится система дифференциальных уравнений, описывающих движение в рассматриваемой модели. Как правило, система дифференциальных уравнений является достаточно сложной, и решать ее приходится численно. При этом нельзя забывать, насколько важным является выбор метода численного интегрирования при анализе полученных траекторий. Исследование проводится как в физическом, так и в фазовом пространстве.

Моделирование динамических систем (консервативных и диссипативных) применяется во многих областях науки, в том числе и в астрономии. Например, в исследовании эволюции Солнечной системы или в изучении динамики и строения галактик, скоплений галактик. Динамика звездной системы определяется орбитами звезд. Интересен характер их движения — хаотический или регулярный. Разработаны и активно используются в литературе различные методы анализа поведения системы: сечения Пуанкаре, показатели Ляпунова, численный анализ фундаментальных частот [1, 2, 3].

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, постановки задачи, обзора литературы, трех глав, выводов, заключения, списка литературы и приложений. В первой главе говорится об описании и методах исследования динамических систем. Вторая глава посвящена задаче Хенона–Хейлеса [10], одной из самых распространенных задач в области изучения моделей с двумя степенями свободы (см., например, [5, 7, 13]). Она до сих пор привлекает огромное внимание исследователей, так как

именно в ней впервые в гамильтоновой механике был получен хаотический тип поведения [7]. В третьей главе показано применение описанных и разработанных методов для анализа моделей реалистичных звездных систем, а именно: логарифмического потенциала и потенциала Кузмина [8].

Постановка задачи

Целью работы является исследование регулярного и хаотического движения в динамических системах с двумя степенями свободы. В качестве таких систем выбраны: система с обобщенным потенциалом Хенона–Хейлеса и две системы с потенциалами, моделирующими реалистичные звездные системы.

Для осуществления поставленной цели необходимо выполнить следующие задачи:

- Рассмотреть потенциал Хенона–Хейлеса, его обобщенную формулу, логарифмический потенциал, а также потенциал Кузмина. Для каждой задачи выделить области ограниченного движения.
- Численно проинтегрировать систему дифференциальных уравнений, осуществляя проверку сохранения интеграла энергии для каждой из перечисленных моделей.
- Построить сечения Пуанкаре в фазовой плоскости, соответствующие полученным орбитам, для выявления областей хаотического и регулярного движения при различных значениях интеграла энергии.

Обзор литературы

Основными источниками при написании выпускной квалификационной работы явились [1, 3, 4, 6, 8, 10, 12].

Монографии [3, 6] посвящены проблемам описания и изучения динамического хаоса. В них рассмотрены условия возникновения, характерные примеры таких явлений, аналитические и практические методы анализа движения в нелинейных динамических системах. В частности, описаны такие приемы, как построение сечений Пуанкаре, вычисление показателей Ляпунова, фрактальная размерность. Подобные методы в применении к задачам астрономии даны в [1, 4, 8].

Работа Оллонгрена была одной из первых в области изучения регулярного и хаотического движения в динамике звездных систем [8]. Расчеты траекторий при численном решении уравнений движения показывали, что орбиты не полностью занимают ту часть пространства, которая могла бы быть им доступна (в физическом и фазовом пространстве), лишь при редких значениях интегралов движения, энергии и площадей орбита становилась хаотической. В остальных случаях возникал вопрос о существовании третьего интеграла. Решительный шаг в сторону теоретического обобщения сделали Хенон и Хейлес [1]. В своей работе [10] они предложили простой двумерный случай и рассчитали для него огромное количество орбит и сечения Пуанкаре в фазовом пространстве. При этом не все траектории имели регулярный характер. Некоторые орбиты, пересекая плоскость $x = 0$, прыгали по поверхности сечения нерегулярным образом. Было показано, что области хаотического движения возникали при увеличении энергии.

В дальнейшем эта система изучалась многими авторами и привлекает внимание исследователей до сих пор. Например, в работах [7, 13] описано применение показателей Ляпунова для исследования качественного характера движения в задаче Хенона–Хейлеса. Орлов [5] рассматривает эволюцию поля скоростей, появление периодических решений. Ласкар

предложил альтернативный метод исследования хаотического поведения динамической системы с помощью численного анализа фундаментальных частот [2]. Метод был разработан для изучения устойчивости Солнечной системы, в работе [12] продемонстрирована работа метода в приложении к модели Хенона–Хейлеса.

Обобщенная задача Хенона–Хейлеса [3] исследована в литературе в гораздо меньшей степени (см., например, [3, 5]).

Модели реалистичных звездных систем — шаровых и рассеянных звездных скоплений, галактик, скоплений галактик — на настоящий момент предлагаются и исследуются в литературе очень активно. Способы задания моделей различны [1, 8, 9]. Обзоры моделей для разного рода систем (двумерных и трехмерных, сферических и ротационно-симметричных), а также исследование траекторий пробных звезд для разных типов распределения масс в системе приведены в монографиях [8, 9]. В качестве примера реалистичных моделей галактик для данной работы были выбраны две модели, заданные через потенциал гравитационного поля системы — логарифмический потенциал и потенциал Кузмина [8, 12].

1 Методы исследования динамических систем

1.1 Задание модели и уравнения движения

Каждую динамическую систему можно описать с помощью математической модели. В данной работе модель задается через потенциал, то есть скалярную функцию $\Phi(x, y)$ прямоугольных координат, градиент которой равен напряженности поля. Все фигурирующие в работе величины считаются безразмерными, пробные тела имеют единичные массы. Рассматриваемые плоские системы обладают двумя степенями свободы, то есть набором из двух физических переменных, с помощью которого можно определить положение пробного тела в любой момент времени при возможном движении.

Для построения траектории пробного тела в системе с потенциалом $\Phi(x, y)$ необходимо решить задачу Коши со следующей системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \\ \ddot{y} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}. \end{cases} \quad (1)$$

Введя компоненты скорости v_x , v_y , можно получить систему из четырех дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{x} = v_x, \\ \dot{y} = v_y, \\ \dot{v}_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \\ \dot{v}_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}. \end{cases} \quad (2)$$

Потенциал $\Phi(x, y)$ не зависит от времени t , то есть система стационарна, а значит, допускает один интеграл движения — интеграл энергии H .

$$H = \frac{v_x^2}{2} + \frac{v_y^2}{2} - \Phi(x, y). \quad (3)$$

В работе рассматриваются обобщенный потенциал Хенона–Хейлеса, а также потенциалы, применяемые в литературе для моделирования звезд-

ных систем. Уравнения (2) в указанных моделях случаях не интегрируется аналитически, поэтому задача Коши решается с использованием численных методов в среде MATLAB.

1.2 Численные методы интегрирования систем уравнений

Выбор эффективного метода численного интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ)

$$\dot{y} = f(t, y) \quad (4)$$

зависит от вида правой части $f(t, y)$ системы уравнений и от требуемой в поставленной задаче точности полученных результатов. Для решения задачи Коши в данной работе мы воспользовались пакетом прикладных программ MATLAB, а именно функциями `ode45`, `ode23`. Рассмотрим подробнее численные методы интегрирования, реализованные в указанных процедурах.

Функции `ode23` и `ode45` являются основными инструментами MATLAB и Simulink для решения ОДУ. Они являются одношаговыми методами, также известными как методы Рунге-Кутты. Алгоритм `ode23` реализует вложенные разноэтапные ($m = 3, m = 4$) методы Рунге-Кутта второго и третьего порядка точности с переменным шагом интегрирования и использует схему [11]:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n), \\ k_2 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right), \\ k_3 &= f\left(t_n + \frac{3}{4}h, y_n + \frac{3}{4}hk_2\right), \\ t_{n+1} &= t_n + h, \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{9}(2k_1 + 3k_2 + 4k_3), \\ k_4 &= f(t_{n+1}, y_{n+1}), \\ e_{n+1} &= \frac{h}{72}(-5k_1 + 6k_2 + 8k_3 - 9k_4), \end{aligned} \quad (5)$$

где h — размер шага интегрирования, e_{n+1} используется для оценки локальной погрешности.

Функция `ode45` основана на алгоритме Дормана и Принса. Она использует вложенные разноэтапные ($m = 6$, $m = 7$) методы Рунге–Кутты четвертого и пятого порядка точности с переменным шагом интегрирования. В MATLAB реализована следующая схема [11]:

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(t_n, y_n), \\
k_2 &= f\left(t_n + \frac{h}{5}, y_n + h\left(\frac{1}{5}k_1 + \frac{3}{40}k_2 + \frac{44}{45}k_3 + \frac{19372}{6561}k_4 + \frac{9017}{3168}k_5\right)\right), \\
k_3 &= f\left(t_n + \frac{3}{10}h, y_n + h\left(\frac{9}{40}k_2 - \frac{56}{15}k_3 - \frac{25360}{2187}k_4 - \frac{355}{33}k_5\right)\right), \\
k_4 &= f\left(t_n + \frac{4}{5}h, y_n + h\left(\frac{32}{9}k_3 + \frac{64448}{6561}k_4 + \frac{46732}{5247}k_5\right)\right), \\
k_5 &= f\left(t_n + \frac{8}{9}h, y_n + h\left(-\frac{212}{729}k_4 + \frac{49}{176}k_5\right)\right), \\
k_6 &= f\left(t_n + h, y_n - \frac{5103}{18656}hk_5\right), \\
t_{n+1} &= t_n + h, \\
y_{n+1} &= y_n + h\left(\frac{35}{384}k_1 + \frac{500}{1113}k_3 + \frac{125}{192}k_4 - \frac{2187}{6784}k_5 + \frac{11}{84}k_6\right), \\
k_7 &= f(t_{n+1}, y_{n+1}), \\
e_{n+1} &= h\left(\frac{71}{5760}k_1 - \frac{71}{1920}k_3 - \frac{17253}{339200}k_4 - \frac{22}{525}k_5 - \frac{1}{40}k_6\right).
\end{aligned} \tag{6}$$

где h — размер шага интегрирования, e_{n+1} используется для оценки локальной погрешности.

В некоторых случаях вычисления в данной работе проверялись с использованием алгоритма `ode113`, который реализует многошаговый метод Адамса–Башворта–Мултона и является предпочтительным по сравнению с `ode45`, если требуется высокая точность решения.

1.3 Сечения Пуанкаре

Как уже упоминалось выше, характер движения динамической системы можно исследовать разными способами: сечения Пуанкаре, показатели Ляпунова, численный анализ фундаментальных частот [9, 8, 2, 3]. В данной работе построенные орбиты изучаются в фазовой плоскости с помощью сечений Пуанкаре, которые позволяют количественно выявить области регулярного и хаотического движения [3, 8]. Опишем далее, в чем заключается идея метода сечений Пуанкаре.

Движение тела в динамической системе происходит в четырехмерном фазовом пространстве (x, y, v_x, v_y) . Сохранение интеграла энергии H позволяет исключить одну переменную (например, v_x) и изобразить движение в трехмерном пространстве (x, y, v_y) . Траектория тела в фазовом пространстве лежит на некоторой трехмерной поверхности (рис. 1а). В получив-

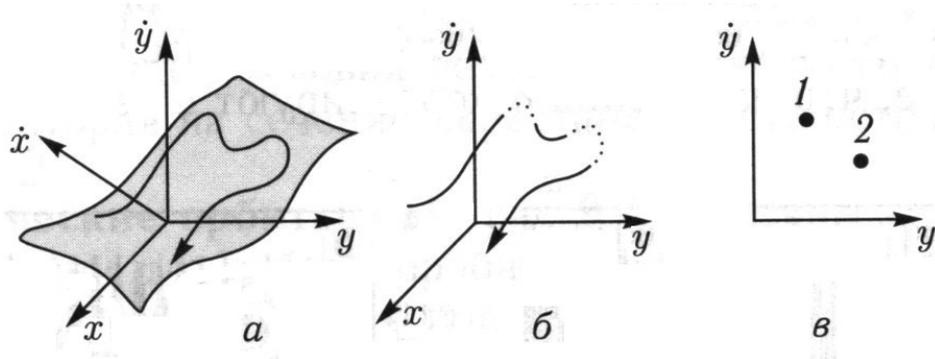


Рис. 1. Построение сечения Пуанкаре [4].

шемся трехмерном пространстве определим плоскость, например, $x = 0$, и всякий раз, когда координата x тела становится равной 0, будем отмечать точку с координатами (y, v_y) на этой плоскости (рис. 1б). Чтобы избежать проблемы со знаком v_x , будем брать в расчет только те пересечения, при которых знак v_x совпадает с заранее выбранным, например, $v_x > 0$.

В результате имеем последовательность точек в двумерном пространстве (рис. 1в), причем последовательные точки на поверхности сечения необязательно соответствуют равноотстоящим друг от друга моментам вре-

мени, так как пересечения траектории с поверхностью необязательно следуют через одинаковые временные интервалы. В этом и заключается метод сечения (или отображения) Пуанкаре.

Таким образом, сечения Пуанкаре позволяют наглядно изобразить динамическую картину при ее численном исследовании. В случае регулярного движения точки на сечении образуют гладкие замкнутые линии. При возникновении хаоса орбита охватывает бóльшую область фазового пространства, по сравнению с регулярной орбитой. Вместо того, чтоб располагаться на гладкой кривой, точки заполняют двумерную область фазового пространства, причем иногда возникает эффект прилипания точек к границам островов, соответствующих упорядоченному движению [4].

2 Модель Хенона – Хейлеса

2.1 Описание модели

М. Хенон и К. Хейлес изучали вопросы регулярного и хаотического движения в галактических системах, а именно существование третьего интеграла движения и гравитационных потенциалов, допускающих этот интеграл. В своей работе [10] они предложили двумерный потенциал и рассчитали для него огромное количество орбит. Потенциал имел достаточно простое аналитическое выражение, что облегчало интегрирование уравнений и в то же время достаточно сложное, чтобы траектории были нетривиальны. Предложенный потенциал не имел особенностей, не зависел явно от времени, обладал осью симметрии. Он задавался некоторой функцией от прямоугольных или цилиндрических координат, при этом авторы не ставили задачи, чтобы потенциал представлял из себя модель реальной звездной системы, целью работы была разработка методов исследования регулярности движения в системах такого рода. Этот потенциал широко используется и в современной литературе [1, 3, 5, 10, 13].

2.1.1 Классическая модель

Под классической моделью подразумевается потенциал вида

$$\Phi(x, y) = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + 2x^2y - \frac{2}{3}y^3). \quad (7)$$

На рис. 2 показаны эквипотенциальные линии, соответствующие различным значениям потенциала (7): около центра $x = 0, y = 0$ эквипотенциали почти круговые, дальше от центра они вытягиваются. Особый случай дает линия $\Phi = -1/6$, дающая на рисунке треугольник. При значениях потенциальной энергии E (потенциальная энергия E равна потенциалу Φ , взятому с обратным знаком) меньших $1/6$ линии замкнуты.

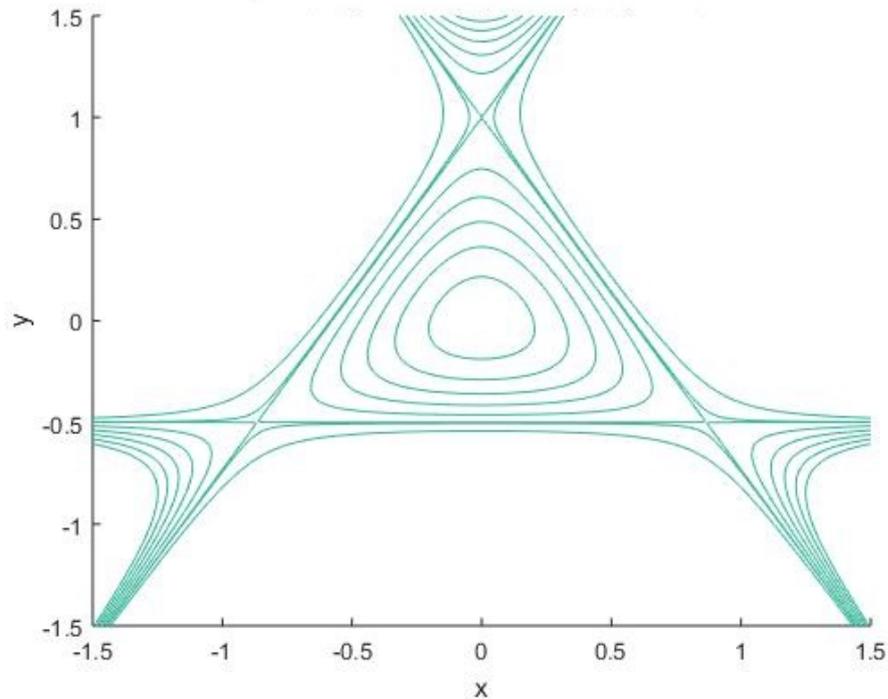


Рис. 2. Линии уровня потенциала (7) для системы Хенона–Хейлеса. Линии, образующие треугольный контур, соответствуют значению потенциала $\Phi(x, y) = -1/6$.

2.1.2 Обобщенная модель

Потенциал (7) изучался многими авторами (см. обзор литературы), поэтому в данной работе мы рассматриваем обобщенную задачу, отличающуюся от классической наличием трех параметров A , B , μ [3]:

$$\Phi(x, y) = -\frac{1}{2}(Ax^2 + By^2) - x^2y + \frac{\mu}{3}y^3. \quad (8)$$

Была задана сетка значений параметров, A и B менялись от 1 до 4 с шагом 1, а вот μ оставалось неизменным, $\mu = 1$. Таким образом, было рассмотрено 16 наборов.

При построении линий уровня потенциала было замечено, что получается три типа изображений: первый тип (рис. 3а) соответствует набору параметров, где B больше A . Второй (рис. 3б) — наоборот, случаю $A > B$. Для третьего типа, где $A = B$, особенностью является то, что можно выделить треугольный контур (рис. 3(в,г)). При этом соответствующее тре-

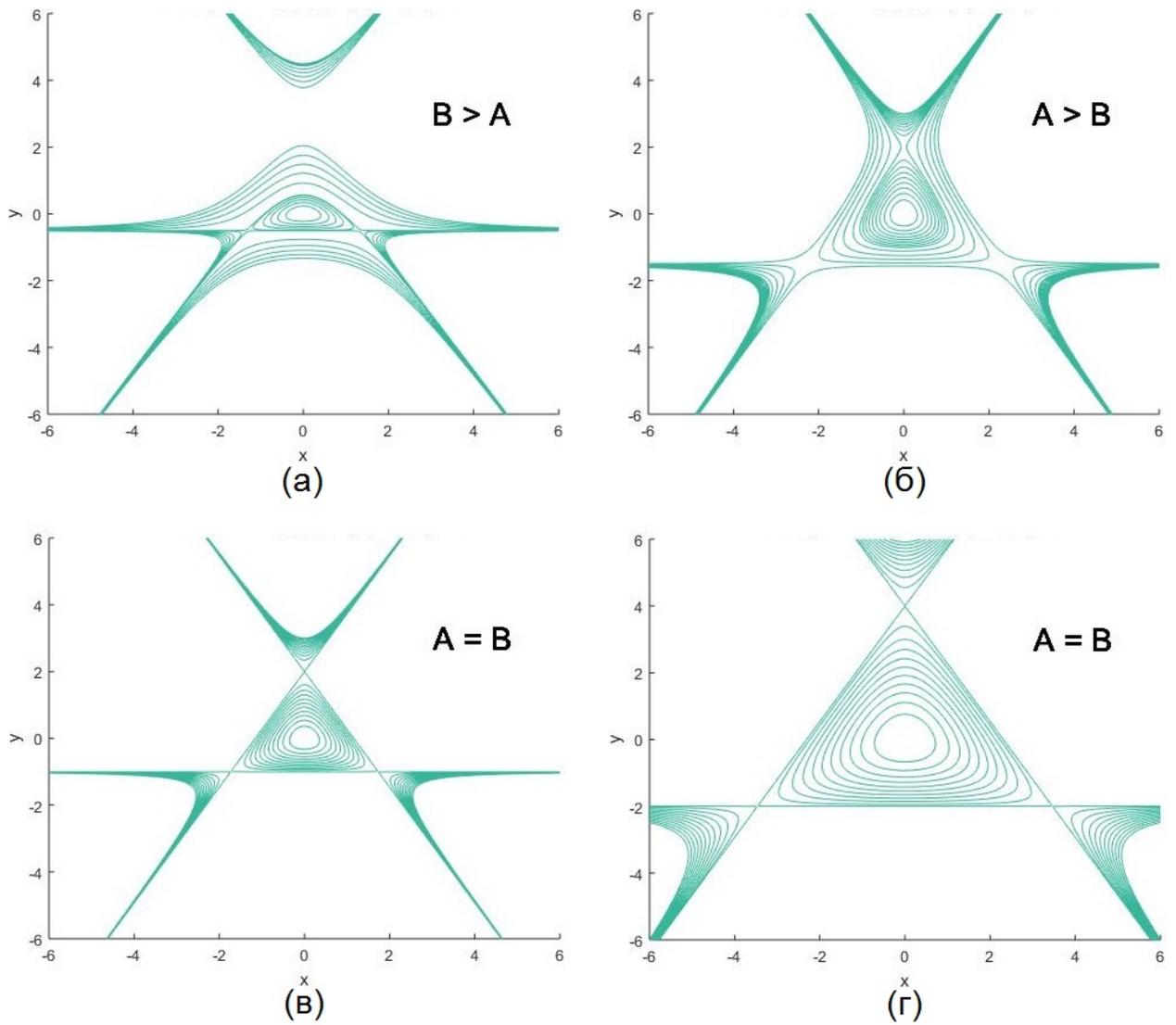


Рис. 3. Линии уровня потенциала (8) с различными значениями параметров A и B .

угольному контуру значение потенциала вычисляется следующим образом:

$$\Phi = -\frac{A^3}{6}.$$

В первых двух типах также можно выделить наименьшее $\Phi = \Phi_m$, при котором получится первая замкнутая линия, которая дает область ограниченного движения, вне контура движение становится неограниченным. Стоит также отметить, что при увеличении значений параметров A и B увеличивается масштаб, то есть области ограниченных движений занимают большую площадь (см. рис. 3(в,г)).

2.2 Результаты исследования

2.2.1 Уравнения движения и выбор начальных условий

Для построения орбит необходимо решить задачу Коши, то есть решить систему дифференциальных уравнений при выбранных начальных условиях. В случае обобщенного потенциала Хенона–Хейлеса (8) система принимает вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = v_x, \\ \dot{y} = v_y, \\ \dot{v}_x = -Ax - 2xy, \\ \dot{v}_y = -By - x^2 + \mu y^2. \end{cases} \quad (9)$$

При этом интеграл энергии H равен

$$H = \frac{v_x^2}{2} + \frac{v_y^2}{2} + \frac{1}{2}(Ax^2 + By^2) + x^2y - \frac{\mu}{3}y^3. \quad (10)$$

Выбор начальных условий осуществляется с учетом энергии H . В первую очередь задается сетка начальных значений H_0 , далее задаются три координаты: x_0, y_0, v_{x0} . При этом точка (x_0, y_0) выбирается из области ограниченных движений (см. рис. 3), соответствующей выбранному H_0 . Компонента скорости v_{x0} в начальный момент времени принимается равной $v_{x0} = 0.01 \cdot y_0$. Четвертая координата v_{y0} находится из уравнения (10).

Следует отметить, что для контроля правильности и точности вычислений в данной работе использовались два приема. Во-первых, в каждой точке полученной траектории осуществлялась проверка сохранения интеграла энергии. Второй прием основан на том, что при движении пробного тела, если его скорость меньше скорости убегания и тело не вылетает из системы, орбита находится в области, ограниченной линией нулевых скоростей. Линии нулевых скоростей строились как на плоскости (x, y) , так и на плоскости (y, v_y) для сечений Пуанкаре. Опишем это построение подробнее.

В каждый момент времени t в точке $(x(t), y(t), v_x(t), v_y(t))$ выполняется равенство (10). Для построения линии нулевых скоростей на плоско-

сти (x, y) преобразуем выражение (10), оставив кинетическую энергию в правой части равенства, а все остальные слагаемые — в левой.

$$H_0 - \frac{1}{2}(Ax^2 + By^2) - x^2y + \frac{\mu}{3}y^3 = \frac{v_x^2}{2} + \frac{v_y^2}{2}. \quad (11)$$

Выражение, стоящее в левой части равенства (11) будет принимать только неотрицательные значения для всех точек траектории, так как справа стоит сумма квадратов. Получаем уравнение линии, ограничивающей часть плоскости, в которой заключена орбита:

$$H_0 - \frac{1}{2}(Ax^2 + By^2) - x^2y + \frac{\mu}{3}y^3 = 0. \quad (12)$$

Эта линия и называется линией нулевых скоростей.

Для получения линии в фазовой плоскости (y, v_y) действуем аналогично. Преобразуем выражение (10) следующим образом:

$$H_0 - \frac{1}{2}(Ax^2 + By^2) - x^2y + \frac{\mu}{3}y^3 - \frac{v_y^2}{2} = \frac{v_x^2}{2}. \quad (13)$$

Учтем, что при построении сечения мы берем точки, где $x = 0$. Выражение, стоящее в левой части равенства (13), будет принимать только неотрицательные значения во всех точках траектории. Тогда линия нулевых скоростей имеет уравнение:

$$H_0 - \frac{By^2}{2} + \frac{\mu}{3}y^3 - \frac{v_y^2}{2} = 0. \quad (14)$$

2.2.2 Орбиты и сечения Пуанкаре

Было построено множество орбит, выделены различные типы траекторий для нескольких наборов значений параметров A и B . Относительная погрешность была принята равной $\varepsilon = 10^{-6}$. При этом интеграл энергии сохранялся с порядком точности $10^{-6}, 10^{-5}$. Для исследования регулярности орбит, строились сечение Пуанкаре, как описано в п.1.3.

I. Случай $B > A$.

При $A = 1, B = 3$ значения потенциала, дающие замкнутую линию уровня, варьируются в пределах от 0 до 0.42, не включая границы. Построенные

эквипотенциали (рис. 3а), дают следующие границы для физических координат: $x \in [-1.5; 1.5]$ и $y \in [-0.5; 0.5]$. Для примера опишем исследование с начальной точкой $(x_0, y_0) = (-0.1, 0.05)$. Результаты вычислений представлены на рис. 4: в верхней строчке — орбиты, в нижней — соответствующие им сечения Пуанкаре.

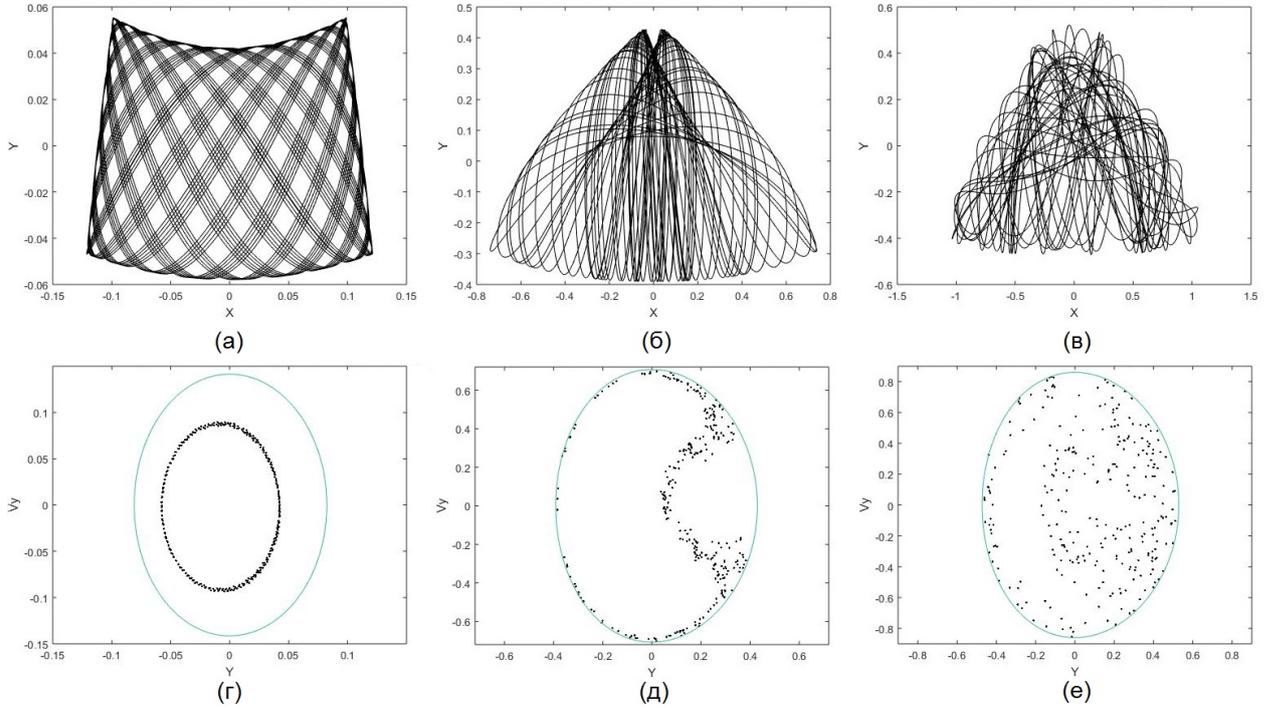


Рис. 4. Орбиты (сверху) и сечения Пуанкаре, заключенные в линию нулевых скоростей (снизу), для модели (8), расположенные по возрастанию $H_0 = 0.01, 0.25, 0.37$. $A = 1, B = 3, (x_0, y_0) = (-0.1, 0.05)$.

В случае, когда значение интеграла энергии близко к нулю (на рис. 4а $H_0 = 0.01$), точки в фазовой плоскости образуют некую гладкую кривую линию (рис. 4г), что говорит о регулярности движения. При увеличении энергии (рис. 4б, $H_0 = 0.25$) появляются участки хаотичности, но в целом движение всё ещё остается регулярным (рис. 4д). Дальнейшее увеличение H_0 (рис. 4в, $H_0 = 0.37$) приводит к тому, что сечение Пуанкаре представлено хаотично разбросанными точками, это говорит о нерегулярных орбитах (рис. 4е). Максимальное значение интеграла энергии, при котором движение будет ограниченным, равно $H_m = 0.41$. Если брать большие значения,

то пробное тело вылетает из системы, то есть получаем неограниченное движение.

В приложении на рис. 12 показаны описанные выше орбиты, заключенные в линии нулевых скоростей.

При увеличении значений параметров A и B границы для H_0 тоже расширяются. В приложении (рис. 14) показаны траектории на координатной и фазовой плоскости для параметров $A = 3$, $B = 4$. Аналогично рассмотренному выше случаю при малых значениях энергии (теперь это $H_0 = 0.84$) орбиты оставались регулярными (рис. 14а), на сечении Пуанкаре (рис. 14г) точки образуют линию. Когда значение интеграла энергии увеличивалось, в некоторых случаях орбита меняла форму, но не меняла характер движения, оставаясь регулярной. В то же время появились «островки» хаотического движения (рис. 14(б,д)). Если H_0 увеличивать ещё больше, то движение становится беспорядочным (рис. 14(в,е)). В приложении (рис. 13) показаны эти же орбиты, заключенные в линии нулевых скоростей.

Следует отметить, что для набора параметров $A = 3$, $B = 4$, начиная с $H_0 = 5.93$, орбиты представлены прямой линией, что говорит о том, что тело вылетает из системы. При этом для некоторых значений интеграла энергии (а именно: $7.72 < H_0 < 9.52$ и $10.3 < H_0 < 10.48$) ограниченное движение опять появляется (рис. 15 в приложении), орбиты полностью заключены в областях, описанных незамкнутыми эквипотенциалами.

II. Случай $B = A$.

Перейдем к рассмотрению наборов параметров, где $B = A$. При $A = B = 2$ эквипотенциали (рис. 3в) ограничивают выбор начальных точек в пределах: $x_0 \in [-1.75; 1.75]$ и $y_0 \in [-1; 2]$. Заметим, что в данном случае треугольный контур получается при значении потенциала равно $\Phi = -\frac{8}{6}$. Были построены орбиты и найдены соответствующие сечения Пуанкаре (см. рис. 5). Для примера в описании полученных результатов рассмотрим начальную точку $(x_0, y_0) = (0.1, 0.1)$. Как и раньше, при небольших значе-

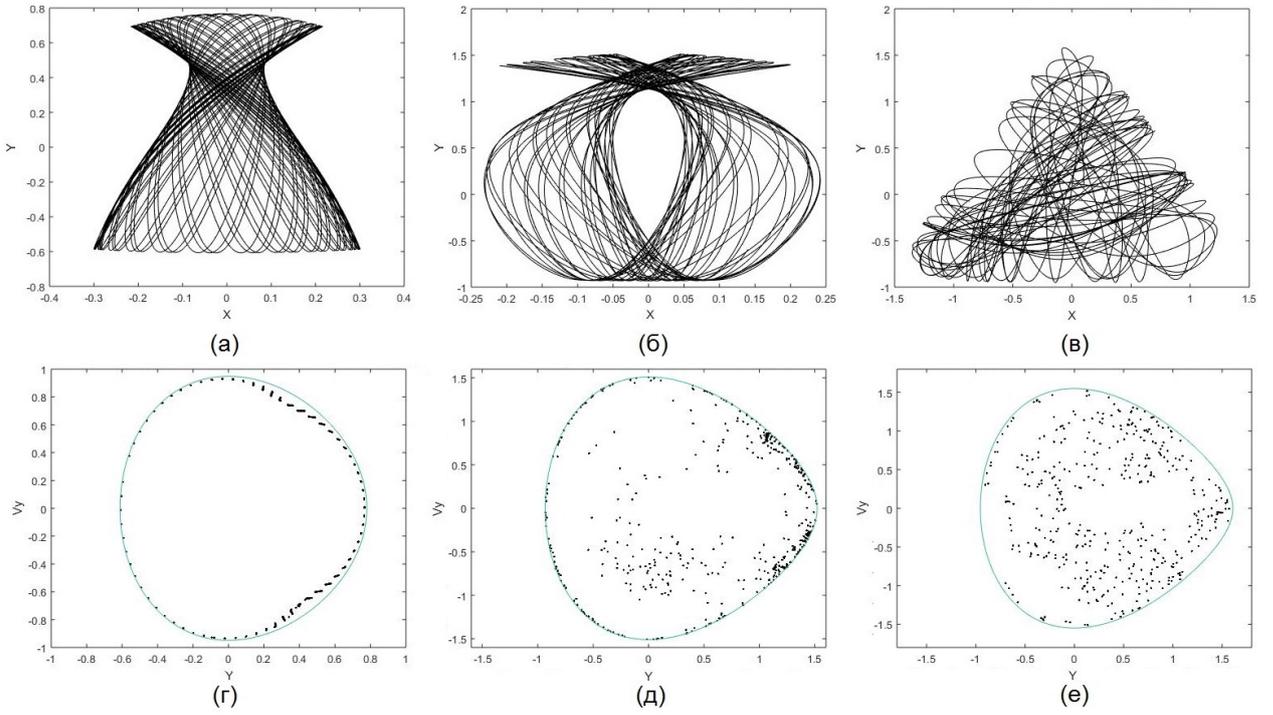


Рис. 5. Орбиты (сверху) и сечения Пуанкаре, заключенные в линию нулевых скоростей (снизу), для модели (8), расположенные по возрастанию $H_0 = 0.45, 1.14, 1.2$. $A = 2, B = 2, (x_0, y_0) = (0.1, 0.1)$.

ниях H_0 (рис. 5а, $H_0 = 0.45$) в фазовой плоскости точки образуют гладкую линию, что говорит о регулярности движения (рис. 5г). При увеличении значения энергии (рис. 5б, $H_0 = 1.14$) появляются участки хаотичности, но в целом движение всё ещё регулярное (рис. 5д). Продолжая увеличивать H_0 (рис. 5в, $H_0 = 1.2$), получаем сечения Пуанкаре, представленное хаотично разбросанными точками (рис. 5е), что говорит о нерегулярном движении. Описанные в данном пункте орбиты, заключенные в линии нулевых скоростей, изображены на рис. 16 в приложении. В рассматриваемом случае максимальное значение интеграла энергии, при котором движение будет ограниченным, равно $H_m = 1.4$. В отличие от случая $A = 3, B = 4$, при увеличении интеграла энергии орбиты не терпят изменений и остаются представленными прямой линией. Такие же выводы были сделаны для остальных наборов, где $A = B$ (см., например, приложение, рис. 20, где $A = B = 3$).

III. Случай $B < A$.

В последнем случае возьмем $B = 2$, $A = 3$. Построены эквипотенциали (рис. 3б), наибольшее значение H_m , при котором линия замкнута, равно $4/3$. Выберем начальную точку $(x_0, y_0) = (-0.05, 0.15)$ и повторим для нее вычисления, описанные выше. Характер движения пробного тела и зависимость этого характера от значений энергии аналогичны тем, что получались выше. При малых H_0 движение регулярное (рис. 6(а,г)). Увеличение H_0 дает появление «островков» хаотичности (рис. 6(б,д)). При приближении к максимальному значению H_m орбиты теряют регулярность (рис. 6(в,е)). Траектории, построенные в линиях нулевых скоростей, показаны в приложении на рис. 17. На рис. 18,19 представлены орбиты и сечения для тех значений H_0 , но другой начальной точки.

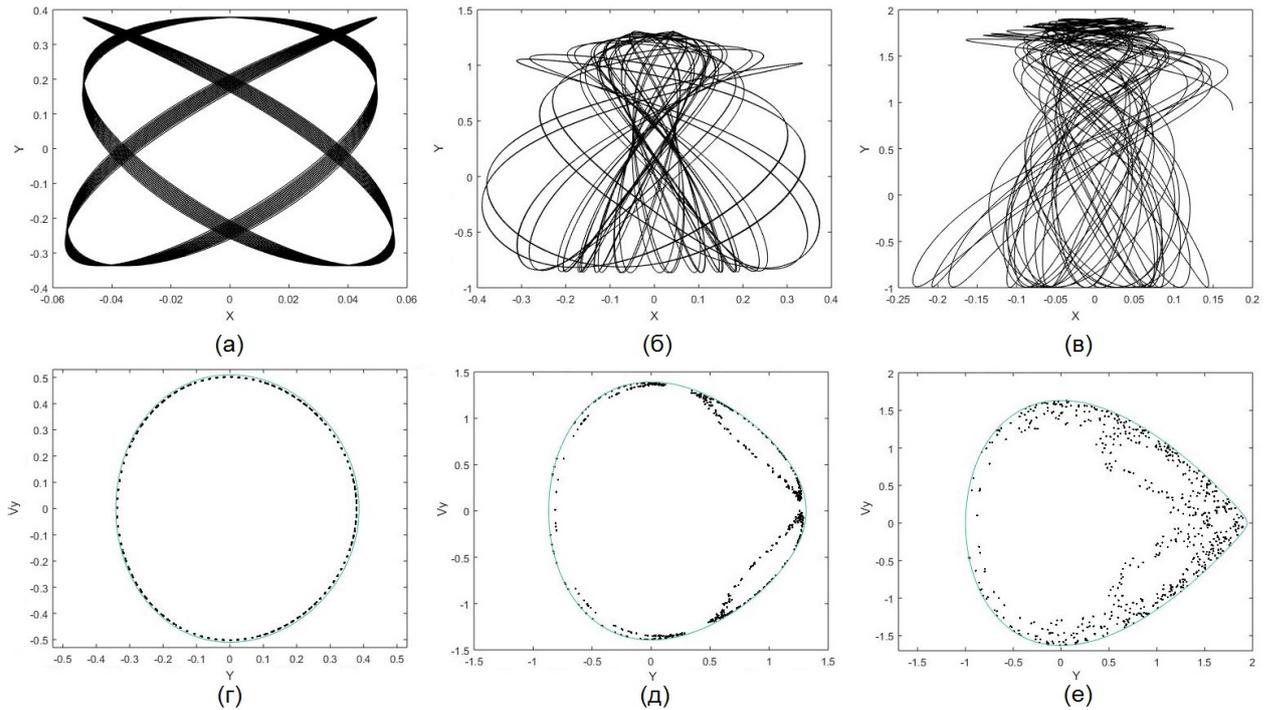


Рис. 6. Орбиты (сверху) и сечения Пуанкаре, заключенные в линию нулевых скоростей (снизу), для модели (8), расположенные по возрастанию $H_0 = 0.13, 0.97, 1.33, \dots$, $A = 3, B = 2$, $(x_0, y_0) = (-0.05, 0.15)$.

3 Логарифмический потенциал и потенциал Кузмина

В данном разделе мы рассмотрим две модели звездных систем, распределение масс в которых можно описать с помощью потенциала, зависящего от двух переменных. Применим для них методы, описанные и разработанные в предыдущих разделах: выбор начальных условий, построение орбит и сечений Пуанкаре, проверка вычислений с помощью интеграла энергии и линии нулевых скоростей. Как было упомянуто выше, все фигурирующие в работе величины считаются безразмерными.

3.1 Описание модели и уравнения движения

3.1.1 Логарифмический потенциал

Модель галактики с логарифмическим потенциалом была предложена в работе Ричстоуна [8, 9] и активно использовалась в дальнейшем (например, [5, 12]). Потенциал имеет вид:

$$\Phi(x, y) = -\frac{1}{2}V_0^2 \ln \left(R_c^2 + x^2 + \frac{y^2}{q^2} \right), \quad (15)$$

где $V_0 \in (0, +\infty)$, $R_c \in (0, +\infty)$, $q \in (0, 1]$ — структурные параметры. Значение параметра q на практике выбирается из промежутка $q_c < q \leq 1$, где q_c зависит от R_c :

$$q_c = \sqrt{\frac{e^H - 2R_c^2}{2e^H}} < 1. \quad (16)$$

Ограничение введено для соблюдения физической корректности модели, при $q \leq q_c$ плотность становится отрицательной [12]. В центре системы потенциал конечен: $\Phi(0, 0) = V_0^2 \cdot \ln R_c$.

Система с логарифмическим потенциалом обладает двумя степенями свободы. Но, в отличие от модели Хенона–Хейлеса, представляет собой реалистичную модель галактики. Первоначально этот потенциал, взятый в виде $\Phi(R, z) = -\frac{1}{2} \ln (R^2 + z^2/q^2)$, где R, z — цилиндрические координаты, использовался для моделирования не вращающейся эллиптической

галактики с балджем радиуса R_c [12]. В настоящее время в некоторых работах логарифмический потенциал берут как компоненту галактического гало [12].

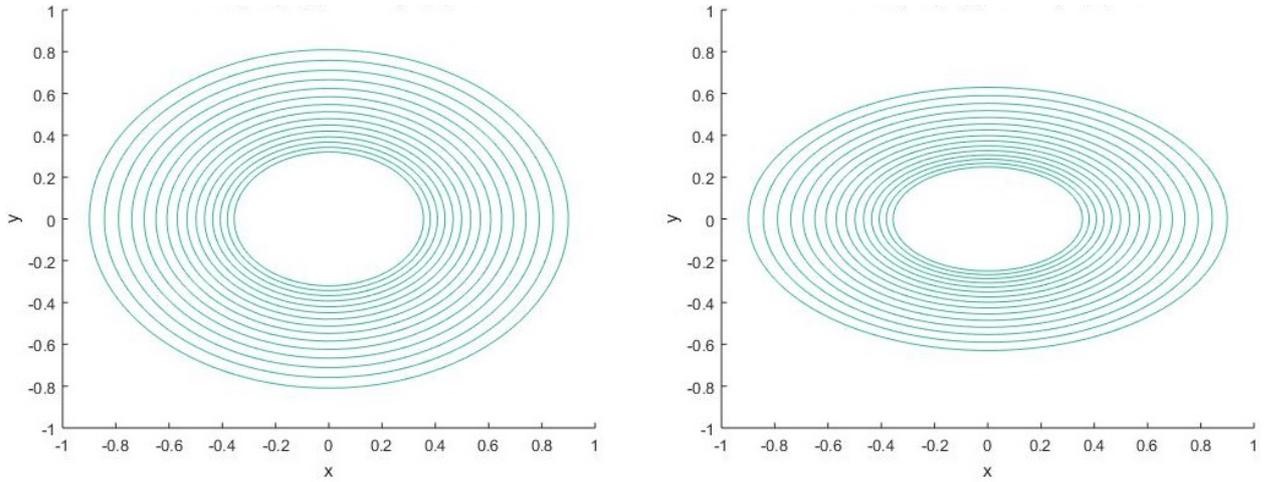


Рис. 7. Линии уровня потенциала (15) с различными значениями параметра q : $q = 0.9$ слева и $q = 0.7$ справа.

На рис. 7 представлены линии эквипотенциалей, где значения потенциала Φ задавались из промежутка $\Phi \in [-0.1; -1]$ с шагом $\delta_\Phi = -0.064$. Значения параметров выбраны следующим образом: $V_0 = 1$, $R_c = 0.1$, а вот q различно: $q = 0.9$ на рис. 7 слева и $q = 0.7$ на рис. 7 справа. Из выражения для потенциала (15) видно, что эквипотенциали являются эллипсами, в которых отношение полуосей равно q , в случае $q = 1$ получаем окружность, то есть потенциал становится центральным (зависит только от расстояния $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ пробной точки до начала координат). Рис. 7 демонстрирует эти выводы, уменьшение значений параметра q приводит к уменьшению малой оси эллипса.

В случае логарифмического потенциала (15) система дифференци-

альных уравнений, задающих движение, принимает вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = v_x, \\ \dot{y} = v_y, \\ \dot{v}_x = -V_0^2 \cdot \frac{x}{R_c^2 + x^2 + \frac{y^2}{q^2}}, \\ \dot{v}_y = -\frac{V_0^2}{q^2} \cdot \frac{y}{R_c^2 + x^2 + \frac{y^2}{q^2}}. \end{cases} \quad (17)$$

Интеграл энергии H будет записан следующим образом:

$$H = \frac{v_x^2}{2} + \frac{v_y^2}{2} + \frac{1}{2}V_0^2 \ln \left(R_c^2 + x^2 + \frac{y^2}{q^2} \right). \quad (18)$$

Выбор начальных условий, как и ранее, осуществляется с учетом значений энергии H . Задается сетка начальных значений $H_0 \in [-0.01; -1]$ с шагом $\delta_H = -0.028$. Далее задаются x_0, y_0, v_{x0} , причем точки (x_0, y_0) выбираются из областей ограниченных движений (рис. 7). Компонента скорости v_{x0} в начальный момент времени задаётся из интервала $(-1; 1)$. Четвертая координата v_{y0} находится из уравнения (18).

Линии нулевых скоростей на плоскостях (x, y) и (y, v_y) имеют вид:

$$H_0 - \frac{1}{2}V_0^2 \ln \left(R_c^2 + x^2 + \frac{y^2}{q^2} \right) = 0; \quad (19)$$

$$H_0 - \frac{v_y^2}{2} - \frac{1}{2}V_0^2 \ln \left(R_c^2 + \frac{y^2}{q^2} \right) = 0. \quad (20)$$

Для исследования были выбраны следующие значения структурных параметров: $V_0 = 1, R_c = 0.1, q = 0.9$ и $q = 0.7$.

3.1.2 Потенциал Кузмина

Потенциал Кузмина

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + (a + \sqrt{y^2 + b^2})^2}} \quad (21)$$

был предложен Кузминым Г. Г. в 1956 году [9], но часто на него ссылаются как на «модель Тоомре 1», так как он стал широко известен западным

ученым после появления работы Тоомре, который получил аналогичную модель в 1963 году [8] независимо от Кузмина. Структурные параметры a и b в формуле (21) принимают положительные значения. В дальнейших работах Кузмина и других авторов часто рассматривается случай, когда $b = a - 1$.

Выбранный потенциал обладает следующим преимуществом: при некоторых значениях структурных параметров он дает потенциалы, предложенные ранее (например, модель Пламмера при $a = 0$ или бесконечно тонкий диск Кузмина при $b = 0$). В отличие от логарифмического потенциала в модели Кузмина масса системы конечна.

Также, как и логарифмический потенциал, модель Кузмина первоначально задавалась в цилиндрических координатах и выражение (21) имело вид: $\Phi = \Phi_0 / \sqrt{R^2 + (a + |z|)^2}$.

На рис. 8 показаны эквипотенциали для модели (21) с параметрами $a = b = 1$ (слева) и $a = 1.7, b = 1$ (справа). Значения потенциала Φ взяты в пределах $[-0.1; -2]$ с шагом $\delta_\Phi = -0.0334$. При увеличении a область возможных движений становится меньше и вытягивается вдоль оси x .

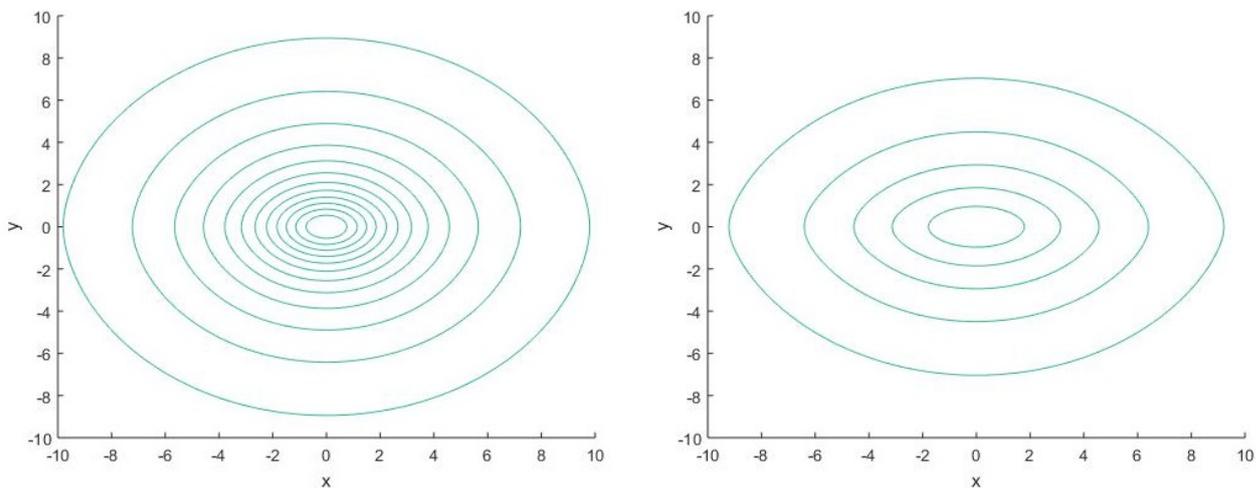


Рис. 8. Линии уровня потенциала (21) с параметрами: $a = b = 1$ (слева) и $a = 1.7, b = 1$ (справа)

Система дифференциальных уравнений для задачи Коши в модели

Кузмина записывается в виде:

$$\begin{cases} \dot{x} = v_x, \\ \dot{y} = v_y, \\ \dot{v}_x = -\frac{x}{\sqrt{(x^2 + (a + \sqrt{y^2 + b^2})^2)^3}}, \\ \dot{v}_y = -\frac{a + \sqrt{y^2 + b^2}}{\sqrt{(x^2 + (a + \sqrt{y^2 + b^2})^2)^3}} \cdot \frac{y}{\sqrt{y^2 + b^2}}. \end{cases} \quad (22)$$

Интеграл энергии H вычисляется по формуле:

$$H = \frac{v_x^2}{2} + \frac{v_y^2}{2} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + (a + \sqrt{y^2 + b^2})^2}}. \quad (23)$$

Задание начальных условий, как и ранее, осуществляется, начиная со значений энергии H . Выбран набор значений:

$$H_0 = -0.2, -0.4, -0.15, -0.25, -0.35, -0.49.$$

Координаты начальных точек (x_0, y_0) взяты с учетом областей, ограниченных эквипотенциалами (рис. 8). Компонента скорости v_{x0} принимается равной $v_{x0} = 0.014 \cdot y_0$. Четвертая координата v_{y0} находится из уравнения (23).

Линии нулевых скоростей на плоскостях (x, y) и (y, v_y) имеют вид:

$$H_0 + \frac{1}{\sqrt{x^2 + (a + \sqrt{y^2 + b^2})^2}} = 0. \quad (24)$$

$$H_0 + \frac{1}{a + \sqrt{y^2 + b^2}} - \frac{v_y^2}{2} = 0. \quad (25)$$

Для исследования были выбраны следующие значения структурных параметров: $a = 1, b = 1$.

3.2 Орбиты и сечения Пуанкаре

Для обеих моделей (15), (21) была решена задача Коши, построены траектории пробных звезд и соответствующие сечения Пуанкаре. Множество всех полученных орбит можно разделить на два типа, как это обычно бывает в моделях с двумерным потенциалом [8]. Опишем их подробнее.

На рис. 9 представлены орбиты, построенные для системы с логарифмическим потенциалом (15). Траектории первого типа показаны в верхней строчке рисунка. Это так называемый «ящик» (в англоязычной литературе «box»). При движении по такой орбите звезда проходит через центр системы или в его окрестности, при этом отличительная особенность — звезда испытывает независимые колебания вдоль осей x и y . Траектории второго типа показаны в нижней строчке рис. 9. Такой тип называют обычно «трубка» или «розетка» (в англоязычной литературе «tube»). Орбита вращается вокруг центра системы или двух фокусов эллипса и симметрична относительно начала координат. Ширина трубки зависит от начальной скорости звезды, от её величины и направления. Как правило, для этого типа всегда можно выделить периодическую («родительскую») орбиту, которая представляет из себя окружность или эллипс. Орбиты второго типа появлялись, когда начальная точка была взята далеко от центра системы, на расстоянии $\sqrt{x^2 + y^2} > R_c$.

На рис. 10 показаны соответствующие сечения Пуанкаре. Каждая замкнутая линия на сечении соответствует отдельной траектории на рис. 9. Хорошо видно, что два разных типа орбит дают две разные картины в фазовой плоскости. Движение в рассматриваемой системе в основном получалось регулярное (рис. 10(а,в)). Только в уголках (рис. 10(б,г)) криволинейных «четырёхугольников» и «треугольников» появлялись в некоторых случаях области хаотичности, что согласуется с результатами [12].

В приложении на рис. 22 показаны орбиты и сечения с другим значением $H_0 = -0.176$ и с тем же набором параметров, как и на рис. 9. На рис. 23 построены орбиты и сечения со значением энергии $H_0 = -0.337$, но

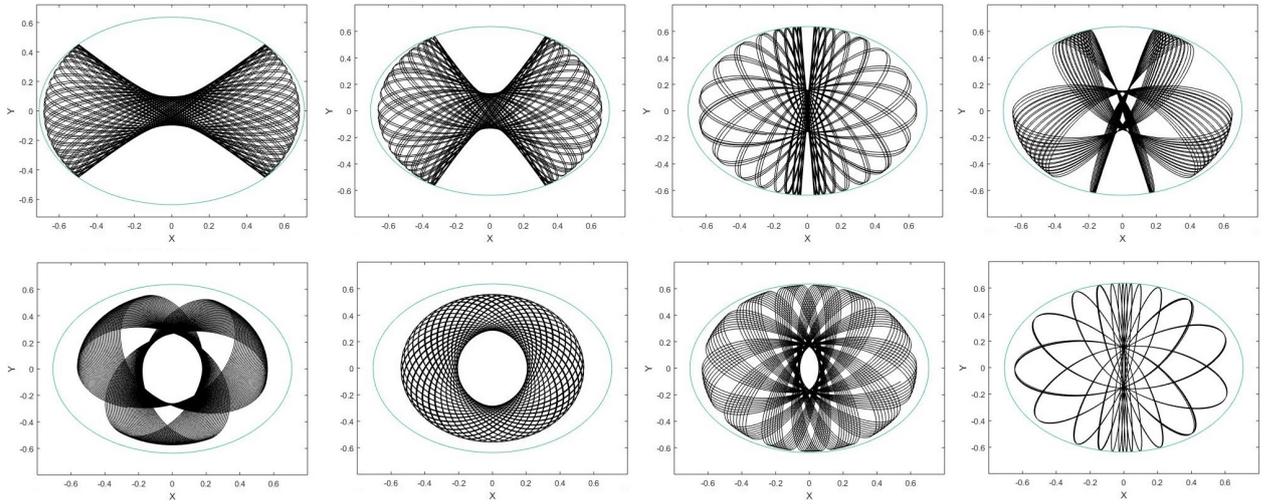


Рис. 9. Орбиты, заключенные в линию нулевых скоростей, для модели (15).
 Параметры: $R_c = 0.1$, $V_0 = 1$, $q = 0.9$, $H_0 = -0.337$

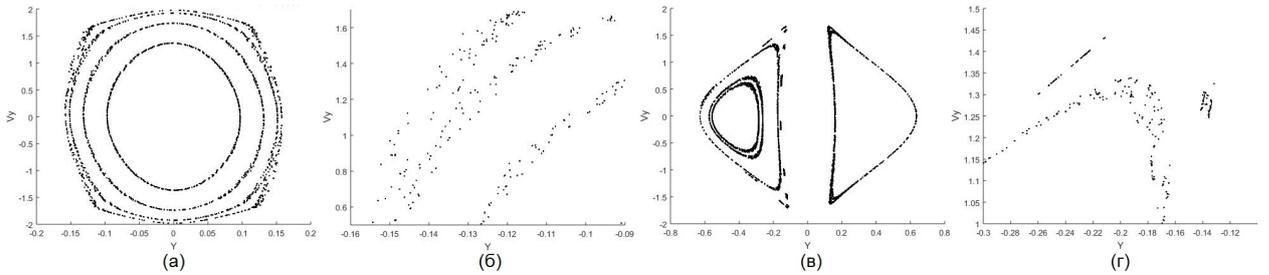


Рис. 10. Фазовые портреты для орбит на рис. (9). (а) — для орбит типа «ящик», (б) — увеличена одна из областей рисунка (а), (в) — для орбит типа «розетка», (г) — увеличена одна из областей рисунка (в)

с отличным параметром $q = 0.7$.

В модели с потенциалом Кузмина получены аналогичные результаты: два типа орбит «ящик» (рис. 11(а,б)) и «розетка» (рис. 11(в,г)), и два соответствующих типа сечений в фазовой плоскости (y, v_y) (рис. 11 (д,е,ж,з)). Все построенные орбиты имели регулярный характер.

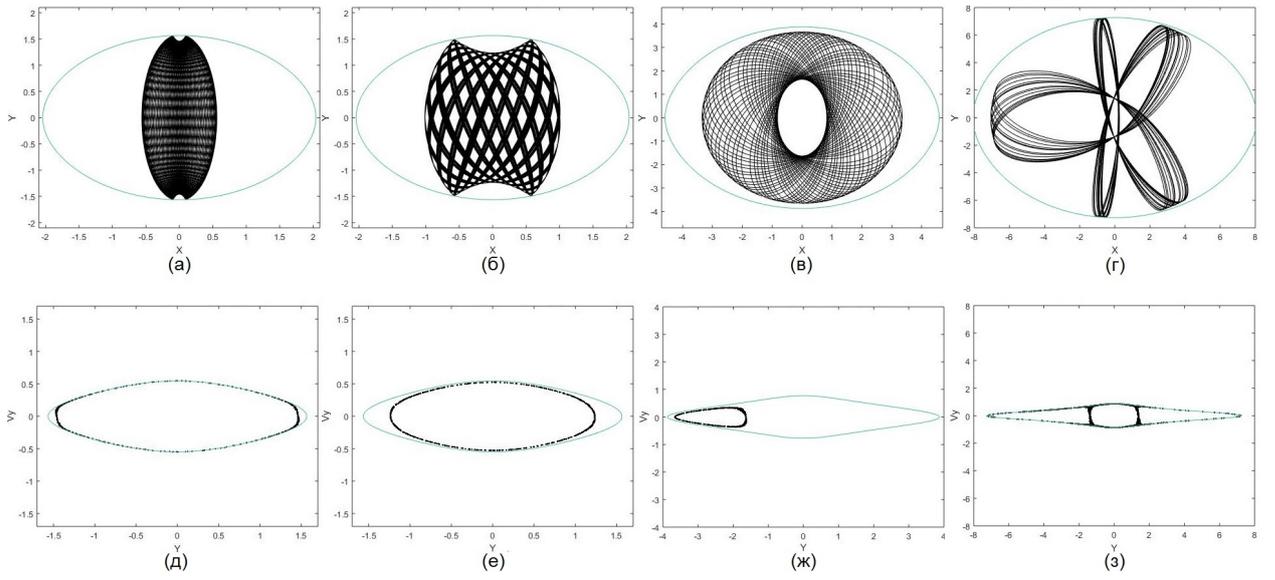


Рис. 11. Орбиты и сечения Пуанкаре, заключенные в линию нулевых скоростей, для модели (21).

Выводы

В первой глав дан обзор методов, применяемых в данной работе для исследования динамических систем с двумя степенями свободы.

В главе 2 рассмотрен обобщенный потенциал Хенона–Хейлеса с шестнадцатью наборами параметров. Выделено три случая: $A = B$, $A > B$, $A < B$. Для каждого случая построены эквипотенциали и выделены области ограниченного движения. В случае, когда параметры A и B принимали равные значения, можно было аналитически найти максимальное значение потенциала, при котором линия уровня потенциала представляла из себя треугольный контур.

Рассматривалось большое множество значений интеграла энергии H_0 , строилась сетка начальных точек (x_0, y_0) , которые попадали в области, ограниченные эквипотенциалими. Решалась задач Коши с помощью численных методов в среде MATLAB. При этом использовались несколько алгоритмов, за основную функцию был выбран ode45 (вложенные разноэтапные методы Рунге–Кутты четвертого и пятого порядка точности).

Исследование орбит велось как в физическом (x, y) , так и в фазовом пространстве (y, v_y) . Построение сечений Пуанкаре позволило проанализировать характер движения. Было получено, что для всех выделенных случаев малые значения энергии давали регулярные орбиты. При увеличении H_0 в некоторых областях появлялись «островки» нерегулярного движения. При приближении к максимальному значению интеграла энергии траектории становились хаотическими, как это происходило и в классической задаче Хенона–Хейлеса. Такой вывод был сделан для всех наборов параметров.

Разработанный на системе с обобщенным потенциалом Хенона–Хейлеса алгоритм был применён в главе 3 для моделей звездных систем с логарифмическим потенциалом и потенциалом Кузмина. Большая часть орбит для указанных двумерных потенциалов имела форму одного из двух типов: «ящик» (box) и «розетка» (loop). Для модели Кузмина движение имело ре-

гулярный характер, в случае логарифмического потенциала в некоторых областях орбиты теряли регулярный характер, начиная прыгать по поверхности сечения.

Некоторые результаты работы были представлены на XLIX международной научной конференции аспирантов и студентов «Процессы управления и устойчивость» в 2018 году и вошли в публикацию: Помазкова Г. В. Применение сечений Пуанкаре для исследования регулярного и хаотического движения в обобщенной модели Хенона – Хейлеса // Процессы управления и устойчивость. СПб.: Издательский Дом Федоровой Г. В., 2018. Т. 5. № 1. (в печати).

Заключение

В данной работе была рассмотрена задача описания и исследования динамической модели с двумя степенями свободы. В качестве исходной функции описания модели принимался потенциал, с помощью которого задавались действующие в системе силы. Были рассмотрены три такие модели.

Для получения орбит и фазового портрета в рамках поставленной задачи был разработан алгоритм задания начальных условий и решена задача Коши. Было исследовано влияние интеграла энергии на регулярность движения по орбите в рассмотренных потенциалах. При этом для каждой траектории осуществлялась проверка сохранения энергии и проверка того, что орбита не выходит из области, ограниченной линией нулевых скоростей.

В случае обобщенной системы Хенона–Хейлеса влияние энергии прослеживалось очень четко, увеличение энергии способствовало уменьшению количества регулярных орбит и появлению областей хаотичности. Для двух других моделей, логарифмической и Кузмина, было отмечено, что типы орбит (их морфология) и характер движения (регулярный или нет) зависели не только от начальных условий и интегралов движения, но и от выбранных значений структурных параметров потенциалов. Большинство орбит оказывались регулярными.

Список литературы

1. *Кинг А. Р.* Введение в классическую звездную динамику. Учебное пособие. Пер. с англ. Сурдина В. Г. и Расторгуева А. С. — М:Едиториал УРСС, 2002. 288 с.
2. *Ласкар Ж.* Измерение хаоса с помощью численного анализ фундаментальных частот. Приложение к стандартному отображению // Резонансы в небесной механике / Сб.работ. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2006. С. 137–162.
3. *Лихтенберг А. и Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1985. 529 с.
4. *Мюррей К. , Дермотт С.* Динамика Солнечной системы. Пер. с англ. Шевченко И. И. — М: Физматлит, 2010. 588 с.
5. *Орлов В. В.* Эволюция поля скоростей в модельных потенциалах // Письма в Астрономический Журнал, 2005. Том 31, № 7. С. 553–559.
6. *Табор М.* Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике. «Едиториал УРСС», 2001. 320 с.
7. *Шевченко И. И. , Мельников А. В.* Показатели Ляпунова в задаче Хенона–Хейлеса // Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики, 2003. Том 77, вып. 12. С. 772–777.
8. *Binney J. and Tremaine S.* Galactic dynamics. 2nd ed. Princeton: Princeton University Press, 2008. 920 pp.
9. *Contopoulos G.* Order and chaos in dynamical astronomy. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2002. 624 pp.
10. *Hénon M. and Heiles C.* The Applicability of the Third Integral of Motion: Some Numerical Experiments // The Astronomical Journal, 1964. Vol. 69, No. 1. P. 73–79.

11. *Moler Cleve* Ordinary Differential Equation Solvers ODE23 and ODE45.
<https://blogs.mathworks.com/cleve/2014/05/26/ordinary-differential-equation-solvers-ode23-and-ode45/>.
12. *Papaphilippou Y. and Laskar J.* Frequency map analysis and global dynamics in a galactic potential with two degrees of freedom // *Astronomy and Astrophysics*, 1996. 307. P. 427–449.
13. *Zotos E. E.* Classifying orbits in the classical Henon–Heiles Hamiltonian system // *Nonlinear Dynamics (NODY)*, 2015. Vol. 79. P. 1665-1677 (<https://arxiv.org/abs/1502.02510>).

Приложение

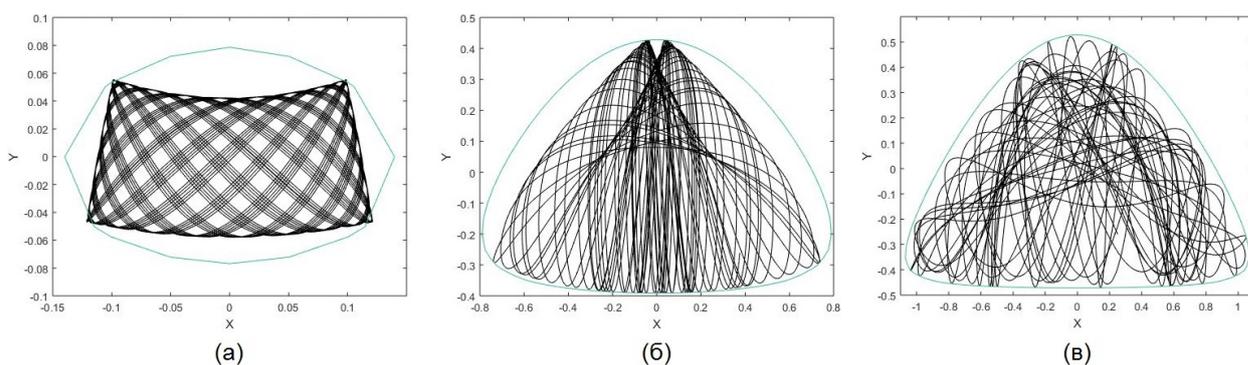


Рис. 12. Орбиты, заключенные в линию нулевых скоростей, для модели (8), расположенные по возрастанию $H_0 = 0.01, 0.25, 0.37$. Параметры: $A = 1, B = 3$. Начальная точка $(x_0, y_0) = (-0.1, 0.05)$.

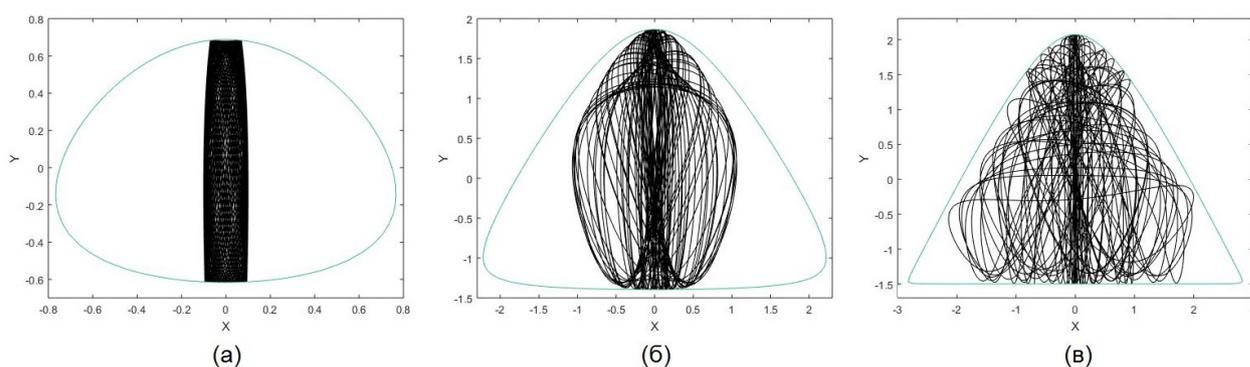


Рис. 13. Орбиты, заключенные в линию нулевых скоростей, для модели (8), расположенные по возрастанию $H_0 = 0.84, 4.8, 5.62$. Параметры: $A = 3, B = 4$. Начальная точка $(x_0, y_0) = (0.1, -0.08)$.

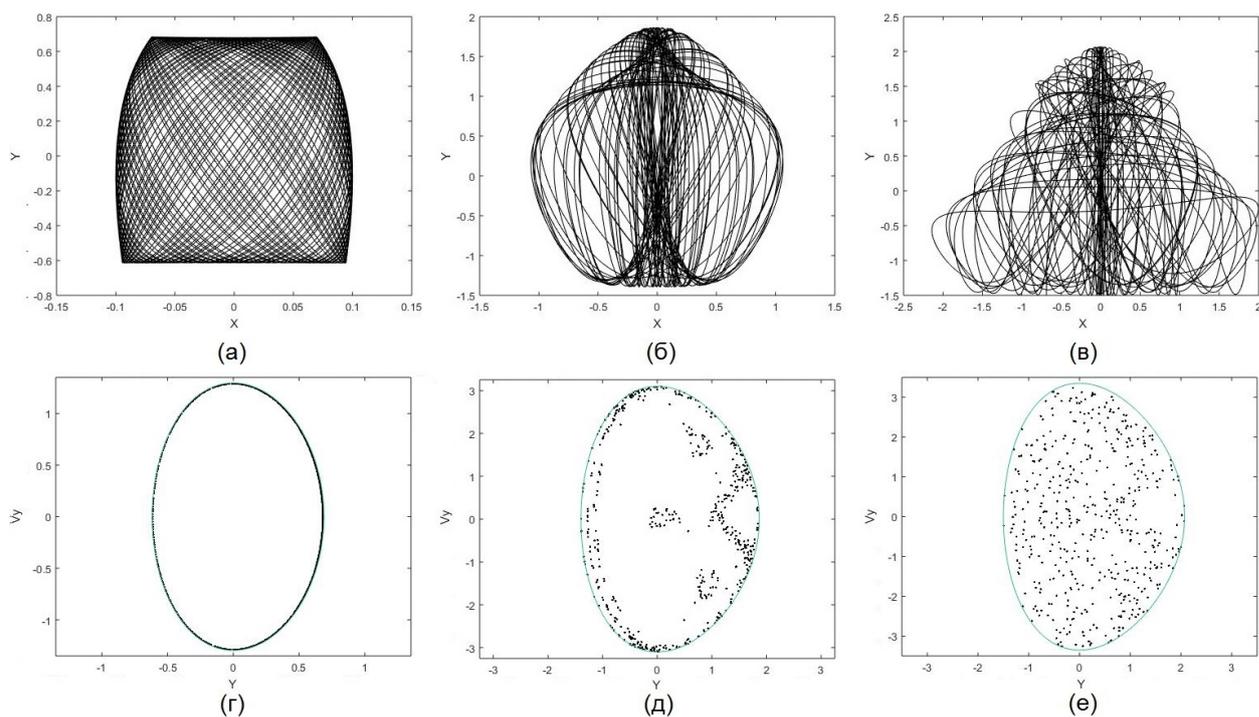


Рис. 14. Орбиты (сверху) и сечения Пуанкаре, заключенные в линию нулевых скоростей (снизу), для модели (8), расположенные по возрастанию $H_0 = 0.84, 4.8, 5.62$. Параметры: $A = 3, B = 4$. Начальная точка $(x_0, y_0) = (0.1, -0.08)$.

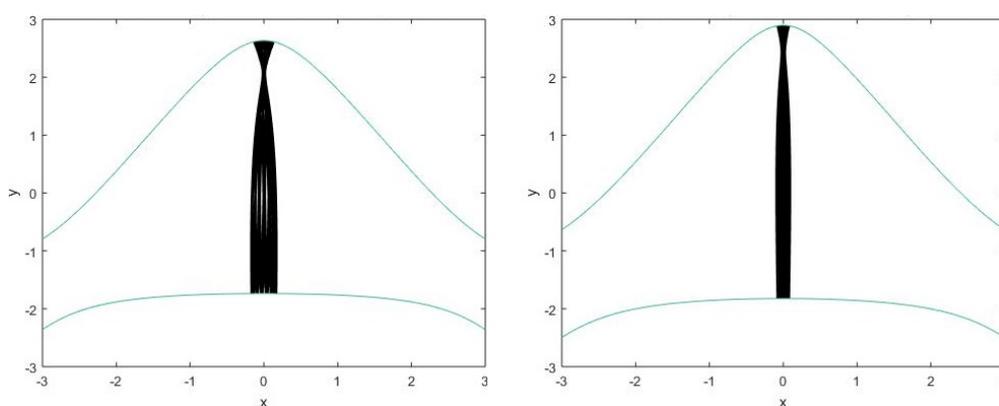


Рис. 15. Орбиты, заключенные в линии нулевых скоростей. Значение интеграла энергии $H_0 = 8$ (слева), 10.34 (справа), начальная точка та же, что и на рис. 14.

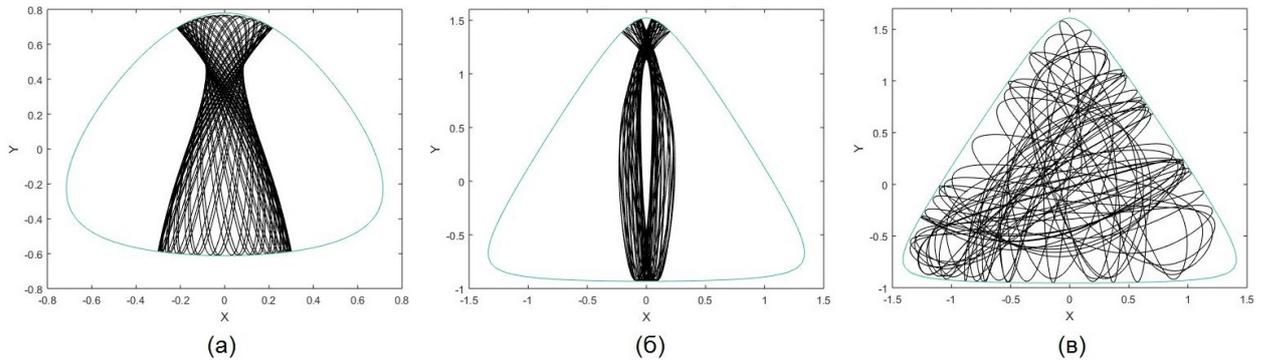


Рис. 16. Орбиты, заключенные в линию нулевых скоростей, для модели (8), расположенные по возрастанию $H_0 = 0.45, 1.14, 1.2$. Параметры: $A = 2, B = 2$. Начальная точка $(x_0, y_0) = (0.1, 0.1)$.

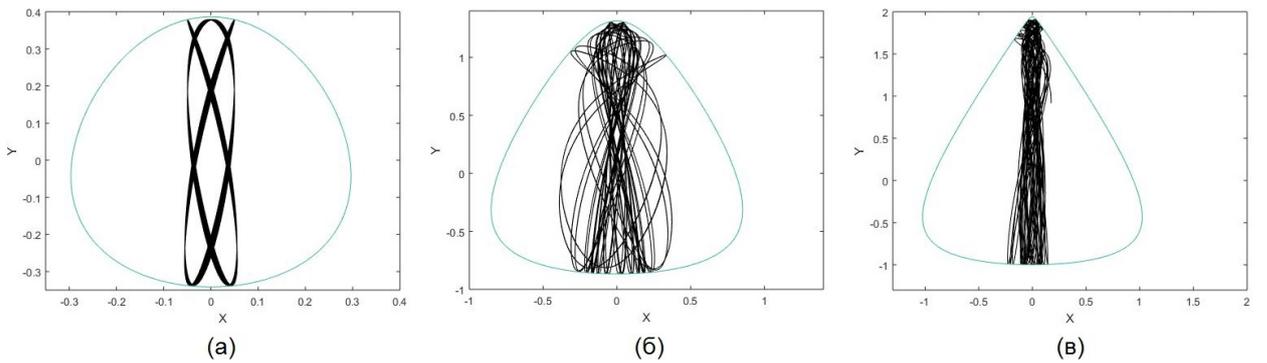


Рис. 17. Орбиты, заключенные в линию нулевых скоростей, для модели (8), расположенные по возрастанию $H_0 = 0.13, 0.97, 1.33$. Параметры: $A = 3, B = 2$. Начальная точка $(x_0, y_0) = (-0.05, 0.15)$.

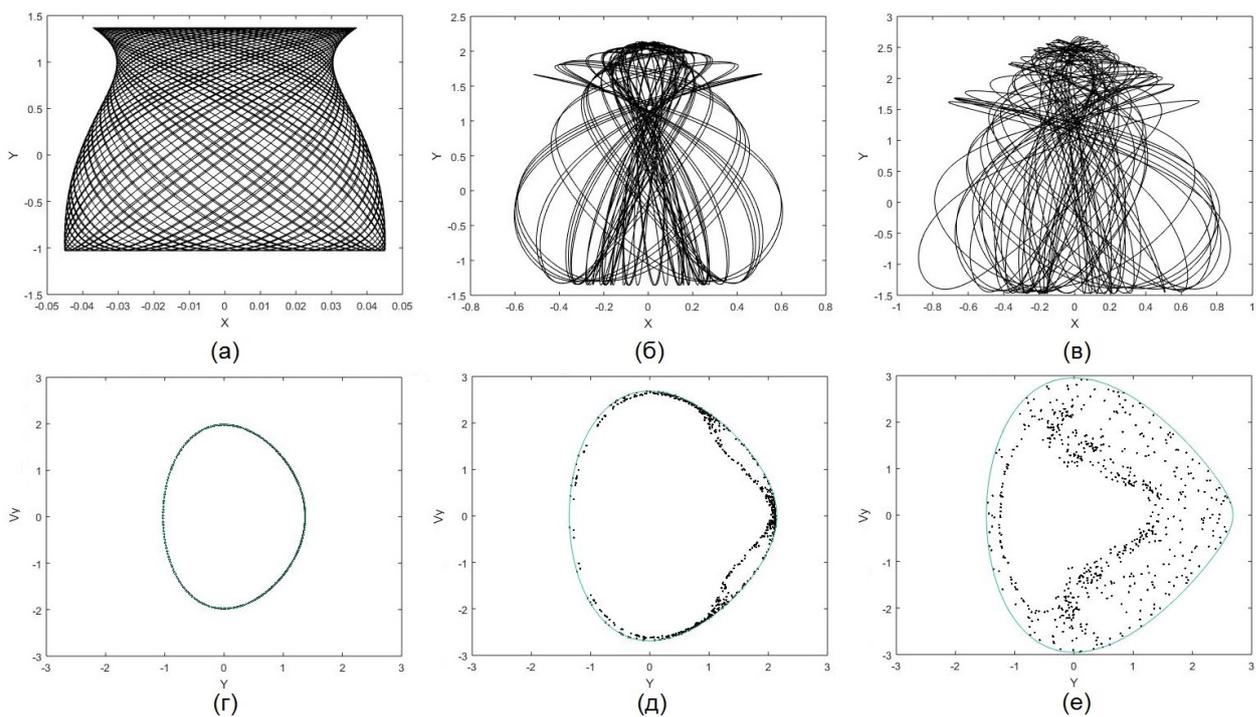


Рис. 18. Орбиты (сверху) и сечения Пуанкаре, заключенные в линию нулевых скоростей (снизу), для модели (8), расположенные по возрастанию $H_0 = 1.96, 3.36, 4.36$. Параметры: $A = 4, B = 3$. Начальная точка $(x_0, y_0) = (0.04, -0.02)$.

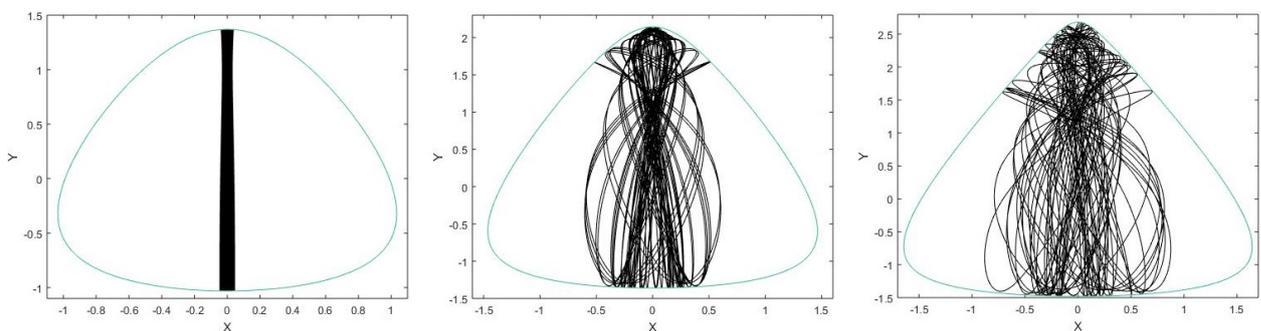


Рис. 19. Орбиты, заключенные в линию нулевых скоростей, для модели (8), с параметрами, как на рис. 18

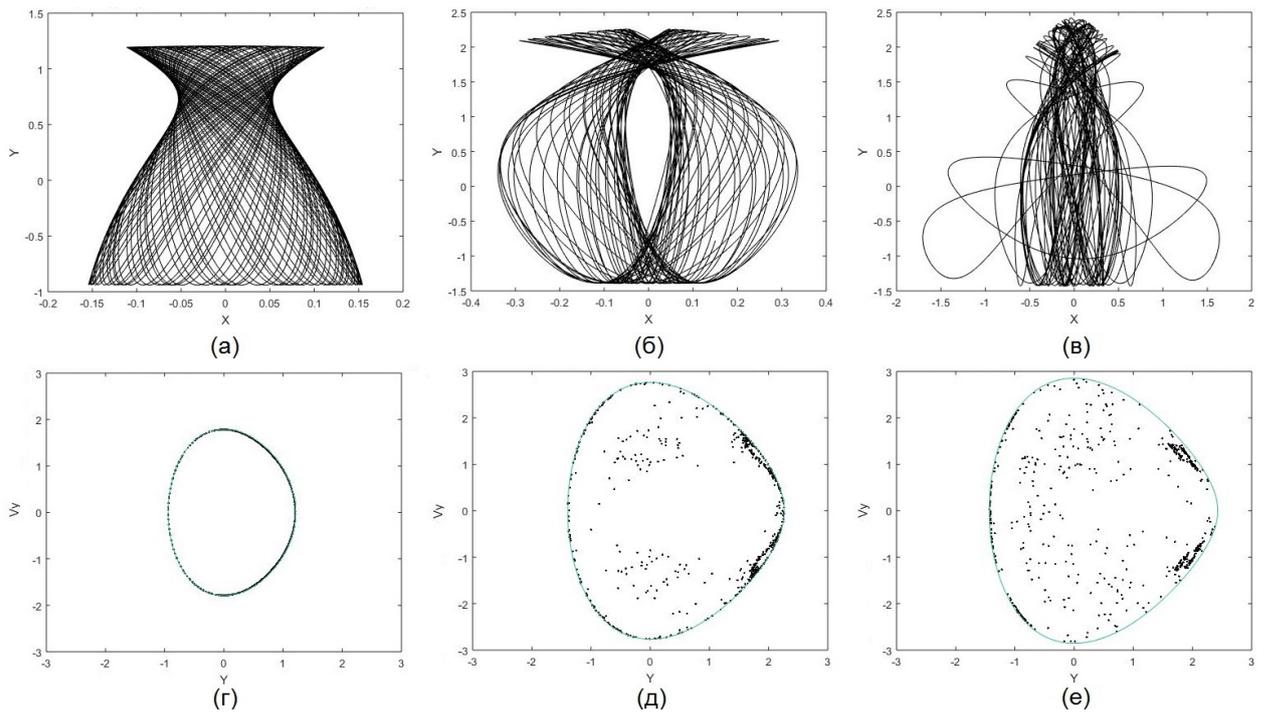


Рис. 20. Орбиты (сверху) и сечения Пуанкаре, заключенные в линию нулевых скоростей (снизу), для модели (8), расположенные по возрастанию $H_0 = 1.604, 3.82, 4.07$. Параметры: $A = 3, B = 3$. Начальная точка $(x_0, y_0) = (0.07, 0.03)$.

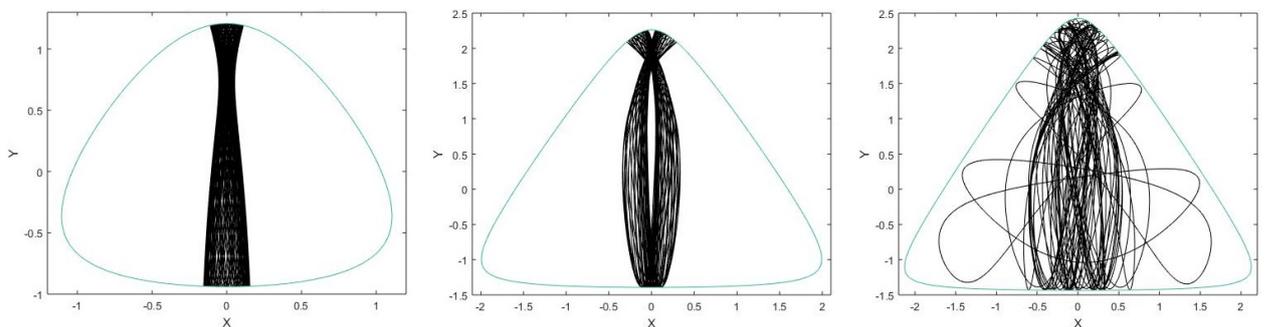


Рис. 21. Орбиты, заключенные в линию нулевых скоростей, для модели (8), с параметрами, как на рис. 20.

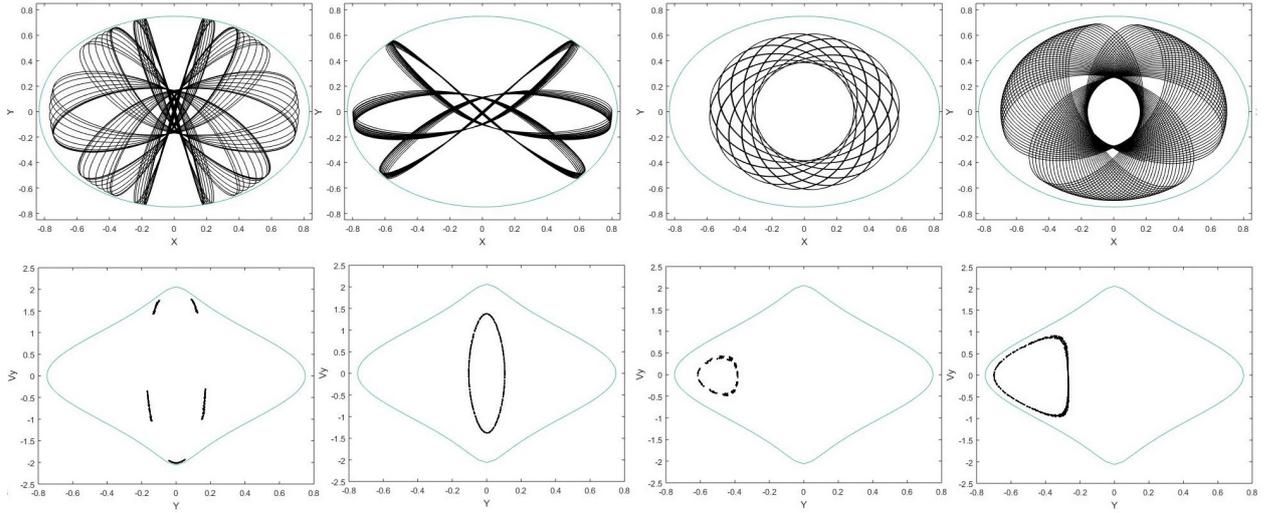


Рис. 22. Орбиты (сверху) и сечения Пуанкаре (снизу), заключенные в линию нулевых скоростей, для модели (15). Параметры: $R_c = 0.1$, $V_0 = 1$, $q = 0.9$, $H_0 = -0.176$. Первые две орбиты типа «ящик», остальные типа «розетка».

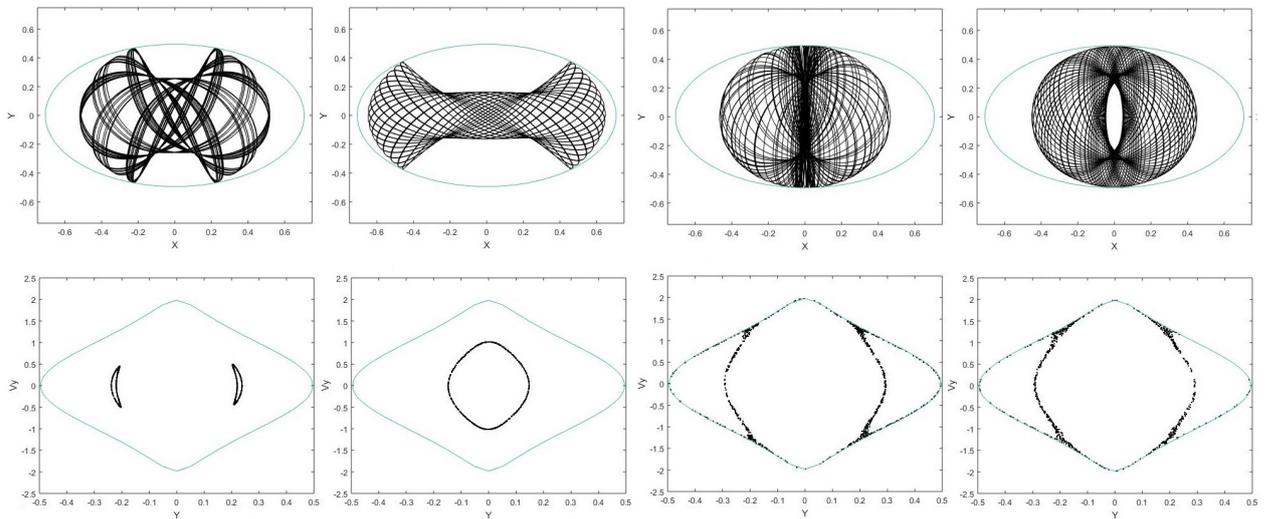


Рис. 23. Орбиты (сверху) и сечения Пуанкаре (снизу), заключенные в линию нулевых скоростей, для модели (15). Параметры: $R_c = 0.1$, $V_0 = 1$, $q = 0.7$, $H_0 = -0.337$. Первые две орбиты типа «ящик», остальные типа «розетка».