Санкт-Петербургский государственный университет
Факультет прикладной математики – процессов управления
Кафедра управления медико-биологическими системами

Полянский Виктор Витальевич

Выпускная квалификационная работа бакалавра

Исследование устойчивости динамических систем по нелинейному нестационарному приближению

Направление 01.03.02
Прикладная математика и информатика

Заведующий кафедрой,
доктор физ.-мат. наук,
профессор — Александров А. Ю.

Научный руководитель,
кандидат физ.-мат. наук,
доцент — Платонов А. В.

Рецензент,
кандидат физ.-мат. наук,
доцент — Кривошеин А. В.

Санкт-Петербург
2018

Содержание

Введение 3
Постановка задачи 5
Обзор литературы 6
§1. Основные определения и подходы к анализу устойчивости 7
§2. Критерии знакоопределенности функций полиномиального вида с нестационарными коэффициентами 10
§3. Анализ устойчивости нелинейной нестационарной системы треугольного вида 14
§4. Задача стабилизации вращательного движения твердого тела . . 23
Заключение 25
Список литературы 26

Введение

Поведение многих реальных объектов, например, механических систем, может быть описано системами дифференциальных уравнений. Одной из актуальных проблем при этом является анализ устойчивости. Основные методы теории устойчивости были разработаны А. М. Ляпуновым в конце XIX века и позволяли судить об устойчивости решения некоторой системы дифференциальных уравнений, не зная общего ее решения. В дальнейшем теория Ляпунова получила развитие в трудах многих ученых (см., например, [4], [5], [8], [10]).

Один из главных путей анализа устойчивости нелинейных систем состоит в построении вспомогательной (упрощенной) системы, для которой доказывается свойство устойчивости или неустойчивости, а затем устанавливаются условия сохранения соответствующего свойства при возврате к первоначальной системе. Так, например, правые части гладких систем обычно раскладывают в степенные ряды в окрестности заданного стационарного режима и оставляют далее для исследования только слагаемые с наименьшими степенями. А. М. Ляпунов получил условия устойчивости по линейному приближению, а также выделил ряд сомнительных случаев, когда линейное приближение не решает поставленной задачи. В таких критических случаях существенно нелинейных систем приходится иметь дело со степенями более высокого порядка. Для анализа подобных существенно нелинейных систем обычно используют метод функций Ляпунова.

Функции Ляпунова для нелинейных систем часто пытаются найти в классе функций полиномиального (степенного) вида в силу простоты данного класса. Для использования таких функций в теоремах типа Ляпунова требуется исследовать их на знакоопределенность. И если критерии знакоопределенности квадратичных форм известны (например, критерий Сильвестра), то для функций со степенями большего порядка общих критериев нет. Ситуация усложняется, если исследуемая система и используемая для нее функция Ляпунова являются нестационарными.

Одним из важных направлений развития второго метода Ляпунова явилось его объединение с теорией дифференциальных неравенств [12]. Дифференциальные неравенства, построенные для выбранных функций Ляпунова позволяют, например, получить оценки на решения исследуемой системы и на их основе провести анализ устойчивости заданного стационарного режима. Применение теории дифференциальных неравенств приводит также к ослаблению требований, предъявляемых к функциям Ляпунова. В результате появляется возможность использовать функции Ляпунова, не удовлетворяющие условиям классических теорем (см., например, [3] и цитируемую там литературу).

Постановка задачи

Как уже было отмечено во введении, основным методом анализа устойчивости существенно нелинейных систем является второй метод Ляпунова. Однако, общих способов построения функций Ляпунова нет. В каждом конкретном случае приходится учитывать специфику исследуемой системы и подбирать подходящую функцию Ляпунова с учетом этой специфики.

В настоящей работе рассматриваются некоторые классы нелинейных нестационарных систем. Основное внимание уделено системам каскадного (треугольного) вида. Такие системы состоят из нескольких последовательных блоков, и предполагается, что каждый блок влияет только на последующие за ним блоки. В работе изучается случай, когда работа блоков и связей между ними подчиняется нелинейным и нестационарным законам. Кроме того, допускается влияние возмущающих воздействий на всю систему.

В работе обобщаются некоторые известные критерии знакоопределенности функций определенного полиномиального вида. При этом отдельно изучается случай, когда функция зависит от нестационарных параметров, либо неограниченно возрастающих, либо, наоборот, исчезающих со временем. С помощью полученного критерия знакоопределенности и метода функций Ляпунова ассимптотической устойчивости нулевого положения равновесия изучаемых систем. На основе метода оценок проводится анализ влияния возмущений на устойчивость. Установленные результаты уточняются для некоторых конкретных типов нестационарностей.

В последней части работы показывается, что полученные результаты и разработанные подходы можно применять для анализа реальных механических систем. В частности, в работе рассматривается проблема гашения вращательного движения твердого тела с помощью нелинейного нестационарного управления.

Обзор литературы

При написании данной работы была использована научная и учебно-методическая литература, периодические издания. Второй (прямой) метод Ляпунова, в том числе метод функций Ляпунова, является основным методом исследования устойчивости движения нелинейных нестационарных систем. Базовые принципы теории устойчивости и методы функций Ляпунова получили широкое развитие в трудах В. И. Зубова, Н. Н. Красовского, И. Г. Малкина и других. Результаты были обобщены, к примеру, в работах Б. П. Демидовича и Р. Беллмана.

Одним из основных направлений совершенствования прямого метода Ляпунова является модификация и обобщение теорем об устойчивости и неустойчивости путем ослабления условия знакоопределенности производной функции Ляпунова при помощи объединения теории устойчивости с теорией дифференциальных неравенств. Большой вклад в развитие данного подхода внес С. А. Чаплыгин.

При таком пути исследования функции Ляпунова часто ищут в классе полиномиальных функций. Основные критерии знакоопределенности функций полиномиального вида описаны в работе А. Ю. Александрова и А. В. Платонова. Также подход, описанный в работе А. Ю. Александрова, послужил основой описанного метода анализа устойчивости нелинейных нестационарных систем. Кроме того, некоторые труды А. Ю. Александрова и соавторов посвящены решению задач теории устойчивости.

В механике подобные методы применяются в задачах исследовании устойчивости систем, находящихся под действием диссипативных сил. Исследование этой задачи началось с теорем У. Томсона и Г. Тейта, доказанных Н. Г. Четаевым и затем продолжилось в работах В. В. Румянцева, В. М. Матросова и других ученых.

Исследуемые в работе системы треугольного (каскадного) вида были описаны в работе Б. П. Демидовича. Кроме того, в данной работе встречаются задачи линейного и математического программирования. В качестве рекомендации по методам решения задач линейного программирования приведено пособие Н. А. Зенкевича и Е. А. Губар. Задачи нелинейного многокритериального математического программирования предложено решать методами, описанными в работе И. М. Соболь и Р. Б. Статникова.

§1. Основные определения и подходы к анализу устойчивости

В данном параграфе приведем основные определения и теоремы, которые будут использованы в дальнейшем анализе.

Пусть задана система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t, x). \tag{1}$$

Здесь $x = (x_1, ..., x_n)^T$. Будем считать, что правая часть системы (1) определена и непрерывна в области

$$t \geqslant 0, \quad \|x\| < H, \tag{2}$$

где $H = const > 0$. Предположим, что $f(t, 0) \equiv 0$, то есть система (1) имеет нулевое решение.

Определение 1 [5]. *Непрерывная функция $V(t, x)$ называется положительно определенной, если можно указать $\overline{H} > 0$ такое, что при $\|x\| < \overline{H}$ существует непрерывная функция $W(x)$ такая, что $V(t, x) \geqslant W(x) \geqslant 0$, причем $W(x) > 0$ при $x \neq 0$ и $V(t, 0) \equiv 0$.*

Определение 2 [5]. *Непрерывная функция $V(t, x)$ называется отрицательно определенной, если функция $-V(t, x)$ является положительно определенной.*

Определение 3 [2]. *Функция $V(t, x)$ имеет (допускает) бесконечно малый высший предел (б.м.в.п.), если $V(t, 0) \equiv 0$, причём $V(t, x) \to 0$ при $\|x\| \to 0$ равномерно относительно $t \geqslant 0$.*

Замечание 1. Для того чтобы установить, что функция $V(t, x)$ имеет б.м.в.п., достаточно убедиться в существовании непрерывной в точке $x = 0$ функции $W(x)$, удовлетворяющей следующим двум условиям:

1. $W(0) = 0$;

2. $|V(t, x)| \leqslant W(x)$, при $t \geqslant 0, \|x\| < \overline{H}$ $(\overline{H} > 0)$

Теорема 1 [2]. *Для устойчивости нулевого решения системы (1) необходимо и достаточно, чтобы в области (2) нашлась непрерывно дифференцируемая функция $V(t, x)$, удовлетворяющая условиям:*

1. $V(t,x)$ *— положительно определенная функция;*

2. $\left.\dfrac{\mathrm{d}V(t,x)}{\mathrm{d}t}\right|_{(1)} \leqslant 0.$

Теорема 2 [2]. *Для асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1) достаточно, чтобы в области (2) нашлась непрерывная дифференцируемая функция* $V(t,x)$*, удовлетворяющая условиям:*

1. $V(t,x)$ *— положительно определенная;*

2. $V(t,x)$ *— допускает б.м.в.п.;*

3. $\left.\dfrac{\mathrm{d}V(t,x)}{\mathrm{d}t}\right|_{(1)}$ *— отрицательно определенная.*

Отметим, что удачно подобранная функция Ляпунова позволяет не только установить факт устойчивости (асимптотической устойчивости) нулевого решения, но и получить оценки на решения системы, начинающиеся в некоторой окрестности нулевого решения.

Предположим, что в области (2) существует непрерывно дифференцируемая функция $V(t,x)$, удовлетворяющая условиям:

$$\varphi_1(t)\|x\|^l \leqslant V(t,x) \leqslant \varphi_2(t)\|x\|^l,$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}V(t,x)}{\mathrm{d}t}\right|_{(1)} \leqslant -\psi(t)\|x\|^k,$$

$\varphi_1(t), \varphi_2(t), \psi(t)$ — положительные кусочно-непрерывные функции, определенные при $t \geqslant 0$; k, l — положительные постоянные, причем $\lambda = \dfrac{k}{l} > 1$. Тогда [7] любая интегральная кривая $x(t, x_0, t_0)$ системы (1), выходящая из точки x_0 в момент времени t_0 ($\|x_0\| < H$, $t_0 \geqslant 0$), будет удовлетворять неравенству

$$\|x(t,x_0,t_0)\| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{\varphi_2(t_0)\|x_0\|^l}{\varphi_1(t)} \left(1 + (\lambda - 1)\left(\varphi_2(t_0)\|x_0\|^l\right)^{\lambda-1} \int\limits_{t_0}^{t} \psi(\tau)\varphi_2^{-\lambda}(\tau)\,\mathrm{d}\tau \right)^{-\frac{1}{\lambda-1}} \right)^{1/l}$$

при всех $t \geqslant t_0$.

В частном случае, если функции $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ тождественно равны константам, то получим

$$\|x(t, x_0, t_0)\| \leqslant A\Big(\int\limits_{t_0}^{t} \psi(\tau) \mathrm{d}\tau \Big)^{-\frac{1}{k-l}},$$

где A — некоторая постоянная величина, зависящая от значений x_0, t_0.

§2. Критерии знакоопределенности функций полиномиального вида с нестационарными коэффициентами

Как уже было отмечено во введении, правые части исследуемой системы обычно раскладывают в ряды в окрестности заданного положения равновесия, оставляя только слагаемые до определенного порядка малости. В результате данного подхода приходим к анализу вспомогательной системы с полиномиальной правой частью. Функции Ляпунова для таких систем также обычно ищут в виде функций полиномиального типа.

В данном параграфе рассмотрим некоторые критерии знакоопределенности функций определенного полиномиального типа.

Пусть задана функция

$$g(x) = \sum_{s=1}^{n} c_s x_s^{\gamma_s},$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, γ_s — рациональные числа с четными числителями и нечетными знаменателями; $\gamma_s > 0$; $c_s > 0$, $s = 1, \dots, n$. Функция $g(x)$ является положительно определенной.

Возьмем произвольную функцию $r(t, x)$ определенную и непрерывную в области (2), и удовлетворяющую в этой области условию

$$|r(t, x)| \leqslant L|x_1|^{\sigma_1} \cdots |x_n|^{\sigma_n}. \qquad (3)$$

Здесь $L > 0$; $\sigma_s \geqslant 0$, $s = 1, \dots, n$.

Теорема 3 [3]. *Для того чтобы функция $g(x) + r(t, x)$ была положительно определенной при любой функции $r(t, x)$, удовлетворяющей условию (3), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство*

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\sigma_s}{\gamma_s} > 1.$$

Далее распространим результат теоремы 3 на случай функции с переменными коэффициентами. Как правило, такие коэффициенты пытаются просто огрубить по модулю некоторой постоянной величиной. Однако, такой подход не работает, если коэффициенты не имеют фиксированной верхней (или, в зависимости от типа оценки, нижней) границы, например когда они со временем неограниченно возрастают (или, наоборот, убывают). Исследуем один такой крайний случай нестационарных коэффициентов.

Пусть задана функция

$$g(t,x)=\sum_{s=1}^{n} c_s h^{\delta_s}(t) x_s^{\gamma_s}.$$

Здесь $c_1,\ldots,c_n$ — положительные постоянные; $\gamma_1,\ldots,\gamma_n$ — положительные рациональные числа с четными числителями и нечетными знаменателями; функция $h(t)$ непрерывна, положительна при $t\geqslant 0$ и $h(t)\to+\infty$ при $t\to+\infty$; $\delta_1,\ldots,\delta_n$ — постоянные величины.

Предположим теперь, что функция $r(t,x)$ определена и непрерывна в области (2), и удовлетворяет условию

$$|r(t,x)|\leqslant Lh^{b}(t)|x_1|^{\sigma_1}\cdots|x_n|^{\sigma_n}, \tag{4}$$

где $L>0$; $\sigma_s\geqslant 0$, $s=1,\ldots,n$; b — постоянный параметр.

Теорема 4. *Для того, чтобы функция $g(t,x)+r(t,x)$ при любой функции $r(t,x)$, удовлетворяющей условию (4), была представима в виде*

$$h^{\theta}(t)w(t,x), \tag{5}$$

где θ — постоянная величина, и $w(t,x)$ — положительно определенная функция, достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\sigma_i}{\gamma_i}>1, \tag{6}$$

$$b\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{\delta_i(\sigma_i-\overline{\varepsilon}_i)}{\gamma_i}, \tag{7}$$

где $\overline{\varepsilon}_1, \ldots, \overline{\varepsilon}_n$ *— решение задачи линейного программирования*

$$\frac{\delta_1(\sigma_1 - \varepsilon_1)}{\gamma_1} + \cdots + \frac{\delta_n(\sigma_n - \varepsilon_n)}{\gamma_n} \to \max_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n}, \tag{8}$$

$$\begin{cases} 0 \leqslant \varepsilon_i \leqslant \sigma_i, \ i = 1, \ldots, n, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{(\sigma_i - \varepsilon_i)}{\gamma_i} \geqslant 1. \end{cases} \tag{9}$$

Доказательство. Пусть выполнено неравенство (6). Тогда по теореме 3 функция $g(t,x) + r(t,x)$ будет положительно определенной при любом фиксированном значении $t \geqslant 0$. Покажем, что выполнение дополнительного условия (7) будет гарантировать представление данной функции при переменном t в виде (5).

При достаточно малых по модулю $x_1, \ldots, x_n$ имеем

$$g(t,x) + r(t,x) \geqslant \sum_{s=1}^{n} c_s h^{\delta_s} x_s^{\gamma_s}(t) - L h^b(t) |x_1|^{\sigma_1} \cdots |x_n|^{\sigma_n} \geqslant \sum_{s=1}^{n} c_s h^{\delta_s} x_s^{\gamma_s}(t) -$$

$$- L h^b(t) |x_1|^{\sigma_1 - \varepsilon_1} \cdots |x_n|^{\sigma_n - \varepsilon_n} = \sum_{s=1}^{n} c_s z_s - L h^{b-\mu}(t) |z_1|^{\frac{\sigma_1 - \varepsilon_1}{\gamma_1}} \cdots |z_n|^{\frac{\sigma_n - \varepsilon_n}{\gamma_n}}.$$

Здесь $z_s = h^{\delta_s}(t) x_s^{\gamma_s}$, $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ — числа, удовлетворяющие неравенствам (9). Число μ определяется по формуле

$$\mu = \frac{\delta_1(\sigma_1 - \varepsilon_1)}{\gamma_1} + \cdots + \frac{\delta_n(\sigma_n - \varepsilon_n)}{\gamma_n}.$$

Тогда для справедливости представления (5) достаточно выполнения неравенства $b \leqslant \mu$.

Выберем $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$, исходя из условий (9) таким образом, чтобы параметр μ принял наибольшее возможное значение. В результате приходим к задаче линейного программирования (8), (9). Теорема доказана.

Замечание 2. Методы решения задач линейного программирования хорошо известны (см., например, [6]). Рассмотрим более подробно случай, когда $n = 2$. Пусть

$$g(t, x_1, x_2) = c_1 h^c(t) x_1^\mu + c_2 h^d(t) x_2^\nu,$$

$$|r(t, x_1, x_2)| \leqslant L h^b(t) |x_1|^\sigma |x_2|^\lambda,$$

где c_1, c_2, L — положительные коэффициенты; b, c, d — постоянные параметры; μ, ν — положительные рациональные числа с четными числителями и нечетными знаменателями; $\sigma \geqslant 0$, $\lambda \geqslant 0$.

Решая для данного случая соответствующую задачу линейного программирования (8), (9), получим, что неравенства (6), (7) примут вид

$$\frac{\sigma}{\mu} + \frac{\lambda}{\nu} > 1,$$

$$b \leqslant \max\Big\{ \min\{c + (d-c)\min\{1, \frac{\lambda}{\nu}\};\ d\},\ \min\{d + (c-d)\min\{1, \frac{\sigma}{\mu}\};\ c\} \Big\}.$$

Нетрудно доказать, что полученные неравенства являются и необходимым условием представления функции $g(t, x_1, x_2) + r(t, x_1, x_2)$ в требуемом виде.

§3. Анализ устойчивости нелинейной нестационарной системы треугольного вида

В данном параграфе на примере одной системы треугольного вида рассмотрим принцип приложения результатов теоремы 4 к анализу устойчивости нестационарных систем по нелинейному приближению.

1. Пусть задана система

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -h^{a_1}(t)x_1^{\mu_1} + h^b(t)x_1^{\alpha}x_2^{\beta}, \\ \dot{x}_2 = -h^{a_2}(t)x_2^{\mu_2}, \end{cases} \tag{10}$$

где μ_1, μ_2 — рациональные числа с нечетными числителями и знаменателями, $\mu_1 \geqslant 1$, $\mu_2 \geqslant 1$; a_1, a_2, b — постоянные параметры, $\alpha > 0$, $\beta > 0$; $h(t)$ — непрерывно дифференцируемая, положительная и монотонно убывающая на интервале $[0; +\infty)$ функция; $h(t) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Выберем функцию Ляпунова в виде

$$V(t, x_1, x_2) = x_1^{\gamma_1} + h^s(t)x_2^{\gamma_2},$$

где γ_1, γ_2 — рациональные числа с четными числителями и нечетными знаменателями, $\gamma_1 > 1, \gamma_2 > 1$; s — постоянный параметр, который может быть как больше, так и меньше, так и равным нулю.

Вычислим производную функции $V(t, x_1, x_2)$ на решении системы (10). Получим

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(10)} = \gamma_1 x_1^{\gamma_1 - 1}\dot{x}_1 + sh^{s-1}(t)h'(t)x_2^{\gamma_2} + \gamma_2 h^s(t)x_2^{\gamma_2 - 1}\dot{x}_2 \leqslant$$

$$\leqslant -\gamma_1 h^{a_1}(t)x_1^{\mu_1+\gamma_1-1} - \gamma_2 h^{a_2+s}(t)x_2^{\mu_2+\gamma_2-1} + \gamma_1 h^b(t)|x_1|^{\alpha+\gamma_1-1}|x_2|^{\beta}.$$

Сделаем замену переменных $z_1 = x_1^{\gamma_1}$, $z_2 = h^s(t)x_2^{\gamma_2}$. Тогда имеем

$$V(t, x_1, x_2) = \widetilde{V}(t, z_1, z_2) = z_1 + z_2,$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(10)} \leqslant -\gamma_1 h^{a_1}(t)z_1^{\frac{\mu_1+\gamma_1-1}{\gamma_1}} - \gamma_2 h^{a_2+s-\frac{s(\mu_2+\gamma_2-1)}{\gamma_2}}(t)z_2^{\frac{\mu_2+\gamma_2-1}{\gamma_2}} + \gamma_1 h^{b-\frac{s\beta}{\gamma_2}}(t)z_1^{\frac{\alpha+\gamma_1-1}{\gamma_1}}z_2^{\frac{\beta}{\gamma_2}}$$

Для применения результатов теоремы 4 положим $\tilde{h}(t) = h^{-1}(t)$. Тогда $\tilde{h}(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$.

Построим систему неравенств

$$\frac{\alpha+\gamma_1-1}{\mu_1+\gamma_1-1} + \frac{\beta}{\mu_2+\gamma_2-1} > 1, \tag{11}$$

$$\begin{gathered} b \geqslant \frac{s\beta}{\gamma_2} + \min\left\{ \max\left\{a_1 + \left(a_2 - a_1 - \frac{s(\mu_2-1)}{\gamma_2}\right)\cdot\right.\right. \\ \left.\cdot \min\left\{1;\ \frac{\beta}{\mu_2+\gamma_2-1}\right\}; a_2 - \frac{s(\mu_2-1)}{\gamma_2}\right\};\ \max\left\{a_2 - \frac{s(\mu_2-1)}{\gamma_2} + \right. \\ \left.\left. + \left(a_1 - a_2 + \frac{s(\mu_2-1)}{\gamma_2}\right)\min\left\{1;\ \frac{\alpha+\gamma_1-1}{\mu_1+\gamma_1-1}\right\};\ a_1\right\}\right\}. \end{gathered} \tag{12}$$

Предположим, что эта система совместна относительно параметров γ_1, γ_2 и s. Выберем тогда значения этих параметров исходя из данной системы.

Пример 1.

Пусть, например, $\mu_1 = 3,\ \mu_2 = 5,\ \alpha = 1,\ \beta = 3,\ a_1 = 0,\ a_2 = -1,\ b = 1$ в системе (10). Положим $\gamma_2 = 2$. Тогда из неравенства (11) получим ограничение на выбор γ_1: $\gamma_1 > 2$. Неравенство (12) в данном случае примет вид:

$$1 \geqslant \frac{3s}{2} + \min\left\{ \max\left\{-\frac{1}{2}(1+2s);\ -(1+2s)\right\};\ \max\left\{\frac{-2(1+2s)}{2+\gamma_1};\ 0\right\}\right\}.$$

Достаточно взять, например, $s = 0, \gamma_1 = 3$.

В результате указанного выбора параметров γ_1, γ_2, s получаем, что при $t \geqslant 0$, $|z_1| < \widetilde{H}$, $|z_2| < \widetilde{H}$, где $\widetilde{H}$ — достаточно малая положительная постоянная, будет справедлива оценка:

$$\left.\frac{\mathrm{d}\widetilde{V}}{\mathrm{d}t}\right|_{(10)} \leqslant -Ah^{\theta}(t)\widetilde{V}^{1+\xi}. \tag{13}$$

Здесь A — некоторая положительная постоянная;

$$\theta = \max\left\{a_1;\ a_2 - \frac{s(\mu_2-1)}{\gamma_2}\right\};$$

$$\xi = \max\left\{\frac{\mu_1 - 1}{\gamma_1};\ \frac{\mu_2 - 1}{\gamma_2}\right\}.$$

Интегрируя дифференциальное неравенство (13), получим, что решения системы (10), начинающиеся при $t_0 \geqslant 0$ в области $|z_1| < \widetilde{H}$, $|z_2| < \widetilde{H}$ при достаточно малом значении $\widetilde{H}$ будут удовлетворять оценкам:

$$0 \leqslant z_1(t) + z_2(t) = \widetilde{V}(t, z_1(t), z_2(t)) \leqslant M I^{-1/\xi}(t).$$

Здесь M — положительная постоянная, зависящая от начальных данных решения; $I(t) = \int\limits_{t_0}^{t} h^{\theta}(\tau)\mathrm{d}\tau$.

Возвращаясь к старым переменным, получим

$$\begin{cases} |x_1(t)| \leqslant M I^{-1/\xi\gamma_1}(t), \\ |x_2(t)| \leqslant M h^{-s/\gamma_2}(t) I^{-1/\xi\gamma_2}(t). \end{cases}$$

Тогда если $I(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$, то нулевое решение системы (10) асимптотически устойчиво по отношению к x_1. Если, кроме того, $h^{\xi s}(t)I(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$, то нулевое решение системы (10) асимптотически устойчиво по обеим координатам x_1 и x_2.

2. Предположим теперь, что на систему (10) действуют нестационарные возмущения. Пусть возмущенная система имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -h^{a_1}(t)x_1^{\mu_1} + h^{b}(t)x_1^{\alpha}x_2^{\beta} + r_1(t,x), \\ \dot{x}_2 = -h^{a_2}(t)x_2^{\mu_2} + r_2(t,x). \end{cases} \tag{14}$$

Здесь $x = (x_1, x_2)^T$; функция $h(t)$ и параметры a_1, a_2, b, μ_1, μ_2, α, β удовлетворяют тем же предположениям, что и в системе (10).

Будем считать, что возмущения удовлетворяют при $t \geqslant 0$, $\|x\| < H$ условиям

$$|r_1(t,x)| \leqslant A_1 h^{l_1}(t)|x_2|^{\nu_1},$$

$$|r_2(t,x)| \leqslant A_2 h^{l_2}(t)|x_1|^{\nu_2},$$

где A_1, A_2 — неотрицательные постоянные, ν_1, ν_2 — положительные постоянные, l_1, l_2 — постоянные параметры, которые могут быть как положительными, так и отрицательными, так и нулевыми. Таким образом, на систему могут воздействовать как исчезающие, так и, наоборот, возрастающие возмущения.

Предположим, что система неравенств (11), (12) совместна, и параметры γ_1, γ_2, s выбраны исходя из этой системы. С помощью той же функции Ляпунова $V(t, x_1, x_2)$ получим условия на l_1, l_2, ν_1, ν_2, при выполнении которых возмущения не нарушают асимптотическую усточивость переменной x_1 (переменных $x_1,\ x_2$).

Продифференцировав функцию $V(t, x_1, x_2)$ в силу системы (14), имеем

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(14)} = \gamma_1 x_1^{\gamma_1-1}\dot{x}_1 + sh^{s-1}(t)h'(t)x_2^{\gamma_2} + \gamma_2 h^s(t)x_2^{\gamma_2-1}\dot{x}_2 \leqslant$$

$$\leqslant -\gamma_1 h^{a_1}(t)x_1^{\mu_1+\gamma_1-1} - \gamma_2 h^{a_2+s}(t)x_2^{\mu_2+\gamma_2-1} + \gamma_1 h^b(t)|x_1|^{\alpha+\gamma_1-1}|x_2|^{\beta} +$$
$$+ A_1 h^{l_1}(t)|x_1|^{\gamma_1-1}|x_2|^{\nu_1} + A_2 h^{l_2+s}(t)|x_1|^{\nu_2}|x_2|^{\gamma_2-1}.$$

Вновь сделаем замену $z_1 = x_1^{\gamma_1},\ z_2 = h^s(t)x_2^{\gamma_2}$. Получим

$$V(t, x_1, x_2) = \widetilde{V}(t, z_1, z_2) = z_1 + z_2,$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}\widetilde{V}}{\mathrm{d}t}\right|_{(14)} \leqslant -\gamma_1 h^{a_1}(t) z_1^{\frac{\mu_1+\gamma_1-1}{\gamma_1}} - \gamma_2 h^{a_2+s-\frac{s(\mu_2+\gamma_2-1)}{\gamma_2}}(t) z_2^{\frac{\mu_2+\gamma_2-1}{\gamma_2}} +$$

$$+\gamma_1 h^{b-\frac{s\beta}{\gamma_2}}(t) z_1^{\frac{\alpha+\gamma_1-1}{\gamma_1}} z_2^{\frac{\beta}{\gamma_2}} + A_1 h^{l_1-\frac{s\nu_1}{\gamma_2}}(t) z_1^{\frac{\gamma_1-1}{\gamma_1}} z_2^{\frac{\nu_2}{\gamma_2}} + A_2 h^{l_2-s+\frac{s}{\gamma_2}}(t) z_1^{\frac{\nu_1}{\gamma_1}} z_2^{\frac{\gamma_2-1}{\gamma_2}}.$$

Рассмотрим систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha+\gamma_1-1}{\mu_1+\gamma_1-1} + \dfrac{\beta}{\mu_2+\gamma_2-1} > 1, \\ \dfrac{\nu_1}{\mu_2+\gamma_2-1} + \dfrac{\gamma_1-1}{\mu_1+\gamma_1-1} > 1, \\ \dfrac{\nu_2}{\mu_1+\gamma_1-1} + \dfrac{\gamma_2-1}{\mu_2+\gamma_2-1} > 1. \end{cases} \tag{15}$$

$$l_1 \geqslant \frac{s\nu_1}{\gamma_2} + \min\Bigg\{ \max\Bigg\{ a_1 + \left(a_2 - a_1 - \frac{s(\mu_2-1)}{\gamma_2}\right)\cdot$$
$$\cdot \min\Big\{1;\ \frac{\nu_1}{\mu_2+\gamma_2-1}\Big\}; a_2 - \frac{s(\mu_2-1)}{\gamma_2}\Bigg\};\ \max\Bigg\{a_2 - \frac{s(\mu_2-1)}{\gamma_2} + \tag{16}$$

$$+\left(a_1 - a_2 + \frac{s(\mu_2 - 1)}{\gamma_2}\right)\min\left\{1;\ \frac{\gamma_1 - 1}{\mu_1 + \gamma_1 - 1}\right\};\ a_1\Big\}\Big\},$$

$$l_2 \geqslant s - \frac{s}{\gamma_2} + \min\left\{ \max\left\{a_1 + \left(a_2 - a_1 - \frac{s(\mu_2 - 1)}{\gamma_2}\right)\cdot\right.\right.$$

$$\cdot \min\left\{1;\ \frac{\gamma_2 - 1}{\mu_2 + \gamma_2 - 1}\right\}; a_2 - \frac{s(\mu_2 - 1)}{\gamma_2}\Big\};\ \max\Big\{a_2 - \frac{s(\mu_2 - 1)}{\gamma_2} + \tag{17}$$

$$+\left(a_1 - a_2 + \frac{s(\mu_2 - 1)}{\gamma_2}\right)\min\left\{1;\ \frac{\nu_2}{\mu_1 + \gamma_1 - 1}\right\};\ a_1\Big\}\Big\}.$$

Несложно заметить, что неравенства (15) можно переписать в виде

$$\nu_1\nu_2 > \mu_1\mu_2, \quad \nu_2(\mu_1 - \alpha) > \beta\mu_2. \tag{18}$$

Значит, при выполнении неравенств (16)—(18) снова придем к дифференциальному неравенству (13). Дальнейший анализ асимптотической устойчивости системы (14) аналогичен исследованию устойчивости системы (10).

Пример 2.

Рассмотрим систему (10) с теми же самыми значениями параметров, что и в примере 1. Положим $\gamma_1 = 4, \gamma_2 = 2, s = 0$. Тогда, как было отмечено в примере 1, неравенства (11)—(12) будут выполнены. Исследуем теперь соответствующую возмущенную систему (14). Неравенства (16)—(18) в этом случае примут вид:

$$l_1 \geqslant \max\left\{-\frac{\nu_1}{6};\ -1\right\},$$

$$l_2 \geqslant 0,$$

$$\nu_1 > \frac{15}{\nu_2}, \quad \nu_2 > 7{,}5.$$

Таким образом, если возмущения удовлетворяют полученным оценкам, то они не будут влиять на структуру устойчивости системы.

Замечание 3. Для нахождения более точных оценок на параметры l_1, l_2 можно рассмотреть задачу двукритериального математического программирования (вообще говоря, нелинейного):

$$l_1 \to \min, \quad l_2 \to \min$$

при ограничениях (11), (12), (16)—(18). Данную оптимизацию можно, например, проводить за счет выбора параметров γ_1, γ_2, s при заданных значениях порядков возмущений ν_1 и ν_2. Некоторые методы решения многокритериальных задач оптимизации, в том числе нелинейных, описаны в [11].

3. Полученные оценки на возмущения можно уточнить для конкретных функций $h(t)$. Пусть, например, $h(t) = (t+1)^\alpha$, где $\alpha < 0$. Тогда

$$I(t) = \int\limits_{t_0}^{t} h^\theta(\tau)\mathrm{d}\tau = \int\limits_{t_0}^{t} (\tau+1)^{\alpha\theta}\mathrm{d}\tau = \frac{(t+1)^{\alpha\theta+1} - (t_0+1)^{\alpha\theta+1}}{\alpha\theta+1}.$$

Не умаляя общности, будем считать, что $t_0 = 0$.

Пусть снова параметры γ_1, γ_2, s выбраны в соответствии с условиями (11), (12). Учитывая оценки решений системы (10), найденные ранее, имеем в малой окрестности положения равновесия неравенства

$$\begin{cases} |z_1(t)| \leqslant M_1(t+1)^{-\frac{\alpha\theta+1}{\xi}}, \\ |z_2(t)| \leqslant M_2(t+1)^{-\frac{\alpha\theta+1}{\xi}}, \end{cases}$$

где M_1, M_2 — положительные постоянные.

Для асимптотической устойчивости нулевого решения системы (10) по x_1 достаточно выполнение условия $\alpha > -1/\theta$, а для асимптотической устойчивости нулевого решения системы (10) по x_1 и x_2 достаточно, чтобы выполнялось условие $\alpha > \frac{-1}{\theta+\xi s}$.

Далее достаточно получить условия на параметры l_1 и l_2, при выполнении которых решения возмущенной системы (12) будут удовлетворять тем же оценкам в малой окрестности положения равновесия. Получаем

$$\left.\frac{\mathrm{d}\widetilde{V}}{\mathrm{d}t}\right|_{(14)} \leqslant -B(t+1)^{p_1} - C(t+1)^{p_2} + D_1(t+1)^{\eta_1} + D_2(t+1)^{\eta_2},$$

где B, C, D_1, D_2 — положительные постоянные;

$$p_1 = \alpha a_1 - \frac{(\alpha\theta+1)(\mu_1+\gamma_1-1)}{\xi\gamma_1},$$

$$p_2 = \alpha\left(a_2 - \frac{s(\mu_2-1)}{\gamma_2}\right) - \frac{(\alpha\theta+1)(\mu_2+\gamma_2-1)}{\xi\gamma_2},$$

$$\eta_1 = l_1 - \frac{s\nu_1}{\gamma_2} - \frac{\alpha\theta+1}{\xi}\left(\frac{\gamma_1-1}{\gamma_1} + \frac{\nu_2}{\gamma_2}\right),$$

$$\eta_2 = l_2 - s - \frac{s}{\gamma_2} - \frac{\alpha\theta+1}{\xi}\left(\frac{\nu_1}{\gamma_1} + \frac{\gamma_2-1}{\gamma_2}\right).$$

Для того, чтобы возмущения не нарушали структуру устойчивости нулевого положения равновесия системы (14) достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$\begin{cases} \eta_1 < \max\{p_1, p_2\}, \\ \eta_2 < \max\{p_1, p_2\}. \end{cases} \tag{19}$$

Нетрудно проверить, что неравенства (19) задают более слабые ограничения на l_1 и l_2 по сравнению с неравенствами (16), (17).

Пример 3.

Вновь рассмотрим систему (10) с теми же значениями параметров, что и в примерах 1 и 2. В этом случае $\theta = 0$, $\xi = 2$, а неравенства (19) примут вид:

$$\begin{cases} l_1 < \frac{3+2\nu_2}{8} + \max\left\{ -\frac{3}{4};\ -\alpha - \frac{3}{4}\right\}, \\ l_2 < \frac{\nu_1+2}{8} + \max\left\{ -\frac{3}{4};\ -\alpha - \frac{3}{4}\right\}. \end{cases}$$

Полученные в данном параграфе результаты можно применить к системам более общего вида. Пусть задана система

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = F_1(t, x_1) + G(t, x) + R_1(t, x), \\ \dot{x}_2 = F_2(t, x_1) + R_2(t, x). \end{cases} \tag{20}$$

Система (20) относится к классу треугольных (каскадных) систем [5]. Уравнения

$$\dot{x}_1 = F_1(t, x_1), \quad \dot{x}_2 = F_2(t, x_1)$$

описывают работу двух изолированных подсистем, функция $G(t, x)$ описывает влияние второй подсистемы на первую, а функции $R_1(t, x)$ и $R_2(t, x)$ задают возмущения, действующие на систему.

Здесь x_1 и x_2 — векторы размерности n_1 и n_2, соответственно; $x = (x_1^T, x_2^T)^T$. Будем считать, что $F_1(t, x_1)$, $F_2(t, x_2)$ непрерывные при $t \geqslant 0$, $x_1 \in R^{n_1}$, $x_2 \in R^{n_2}$ однородные функции порядка $\mu_1 \geqslant 1$ и $\mu_2 \geqslant 1$, соответственно; $G(t, x)$, $R_1(t, x)$, $R_2(t, x)$ — непрерывные при $t \geqslant 0$, $\|x\| < H$ ($H = \mathrm{const} > 0$)

функции, удовлетворяющие оценкам

$$\|G(t,x)\| \leqslant m(t)\|x_1\|^{\alpha}\|x_2\|^{\beta},$$

$$\|R_1(t,x)\| \leqslant u_1(t)\|x_1\|^{\sigma_1}\|x_2\|^{\lambda_1}, \quad \|R_2(t,x)\| \leqslant u_2(t)\|x_1\|^{\sigma_2}\|x_2\|^{\lambda_2},$$

где $\alpha, \beta, \lambda_1, \lambda_2, \sigma_1, \sigma_2$ — неотрицательные постоянные, характеризующие порядок влияния второй подсистемы на первую и порядок влияния возмущений, $\alpha+\beta>0$, $\lambda_1+\sigma_1>0$, $\lambda_2+\sigma_2>0$; $m(t), u_1(t), u_2(t)$ — непрерывные неотрицательные при $t \geqslant 0$ функции, характеризующие изменение мощности указанного влияния со временем.

Предположим, что существуют непрерывно дифференцируемые при $t \geqslant 0$, $x_1 \in R^{n_1}$, $x_2 \in R^{n_2}$ функции $v_1(t,x_1)$ и $v_2(t,x_2)$, такие что

$$a_{1i}\|x_i\|^{\gamma_i} \leqslant v_i(t,x_i) \leqslant a_{2i}\|x_i\|^{\gamma_i}, \quad \left\|\frac{\partial v_i}{\partial x_i}\right\| \leqslant a_{3i}\|x_i\|^{\gamma_i-1},$$

$$\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i}\right)^T F_i(t,x_i) \leqslant -q_i(t)\|x_i\|^{\gamma_i-1+\mu_i}.$$

Здесь a_{1i}, a_{2i}, a_{3i} — положительные постоянные; $\gamma_i \geqslant 1$; $q_i(t)$ — непрерывные неотрицательные при $t \geqslant 0$ функции; $i=1,2$.

Дифференцируя функции $v_1(t,x_1)$ и $v_2(t,x_2)$ в силу системы (20), получим

$$\begin{cases} \dot{v}_1\big|_{(20)} \leqslant -q_1(t)\|x_1\|^{\gamma_1-1+\mu_1} + a_{31}m(t)\|x_1\|^{\gamma_1-1+\alpha}\|x_2\|^{\beta} + \\ \qquad\qquad + a_{31}u_1(t)\|x_1\|^{\gamma_1-1+\sigma_1}\|x_2\|^{\lambda_1}, \\ \dot{v}_2\big|_{(20)} \leqslant -q_2(t)\|x_2\|^{\gamma_2-1+\mu_2} + a_{32}u_2(t)\|x_1\|^{\sigma_2}\|x_2\|^{\gamma_2-1+\lambda_2}. \end{cases}$$

Значит,

$$\begin{cases} \dot{v}_1\big|_{(20)} \leqslant -c_1q_1(t)v_1^{(\gamma_1-1+\mu_1)/\gamma_1} + c_3m(t)v_1^{(\gamma_1-1+\alpha)/\gamma_1}v_2^{\beta/\gamma_2} + \\ \qquad\qquad + c_4u_1(t)v_1^{(\gamma_1-1+\sigma_1)/\gamma_1}v_2^{\lambda_1/\gamma_2}, \\ \dot{v}_2\big|_{(20)} \leqslant -c_2q_2(t)v_2^{(\gamma_2-1+\mu_2)/\gamma_2} + c_5u_2(t)v_1^{\sigma_2/\gamma_1}v_2^{(\gamma_2-1+\lambda_2)/\gamma_2}, \end{cases}$$

где

$$c_1 = a_{21}^{-(\gamma_1-1+\mu_1)/\gamma_1}, \quad c_2 = a_{22}^{-(\gamma_2-1+\mu_2)/\gamma_2}, \quad c_3 = a_{31}a_{11}^{-(\gamma_1-1+\alpha)/\gamma_1}a_{12}^{-\beta/\gamma_2},$$

$$c_4 = a_{31}a_{11}^{-(\gamma_1-1+\sigma_1)/\gamma_1}a_{12}^{-\lambda_1/\gamma_2}, \quad c_5 = a_{32}a_{11}^{-\sigma_2/\gamma_1}a_{12}^{-(\gamma_2-1+\lambda_2)/\gamma_2}.$$

Таким образом, систему

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -c_1q_1(t)z_1^{(\gamma_1-1+\mu_1)/\gamma_1} + c_3m(t)z_1^{(\gamma_1-1+\alpha)/\gamma_1}z_2^{\beta/\gamma_2}+ \\ \qquad + c_4u_1(t)z_1^{(\gamma_1-1+\sigma_1)/\gamma_1}z_2^{\lambda_1/\gamma_2}, \\ \dot{z}_2 = -c_2q_2(t)z_2^{(\gamma_2-1+\mu_2)/\gamma_2} + c_5u_2(t)z_1^{\sigma_2/\gamma_1}z_2^{(\gamma_2-1+\lambda_2)/\gamma_2}, \end{cases} \tag{21}$$

где z_1, z_2 — скалярные переменные, можно рассматривать в качестве системы сравнения для системы (20), т.е. асимптотическая устойчивость нулевого решения системы (21) будет влечь за собой аналогичное свойство для нулевого решения системы (20).

Рассмотренные ранее системы (10), (14), являются частным случаем системы вида (21). А именно, предполагалось, что все присутствующие в системе нестационарности $q_1(t)$, $q_2(t)$, $m(t)$, $u_1(t)$, $u_2(t)$ соизмеримы (являются степенями некоторой одной функции $h(t)$). Такая ситуация характерна, когда на поведение двух подсистем, на связь между ними и на возмущения влияет один и тот же нестационарный процесс. В то же время отметим, что все результаты данного и предыдущего параграфов можно распространить на случай несоизмеримых нестационарностей.

§4. Задача стабилизации вращательного движения твердого тела

Рассмотрим задачу гашения угловых движений твердого тела. Пусть задано твердое тело, вращающееся в инерциальном пространстве с угловой скоростью $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$ вокруг своего центра инерции O. Будем считать, что с телом связана система координат с центром в точке O и осями, которые являются главными центральными осями данного тела. Тогда движение тела будет описываться уравнениями Эйлера

$$\Theta\dot{\omega} + \omega \times (\Theta\omega) = M_1(t, \omega) + M_2(t, \omega). \tag{22}$$

Здесь $\Theta = \mathrm{diag}\{A, B, C\}$ — тензор инерции тела, $M_1(t, \omega)$ — управляющий момент, $M_2(t, \omega)$ — момент внешних возмущающих сил.

Предположим, что $M_1(t, \omega) = (c_1 h^{a_1}(t)\omega_1^{\mu_1},\ c_2 h^{a_2}(t)\omega_2^{\mu_2},\ c_3 h^{a_3}(t)\omega_3^{\mu_3})^T$, где a_i, c_i — некоторые постоянные, $c_i < 0$, μ_i — положительные рациональные числа с нечетными числителями и знаменателями, $\mu_i \geqslant 1$, $i = 1, 2, 3$, $h(t)$ — непрерывная неотрицательная функция, определенная при $t \geqslant 0$.

Будем считать, что $M_2(t, \omega) = \Big(M_2^{(1)}(t, \omega), M_2^{(2)}(t, \omega), M_2^{(3)}(t, \omega)\Big)^T$, где

$$|M_2^{(i)}(t, \omega)| \leqslant \sum_{j=1}^{3} d_{ij} h^{b_{ij}}(t) \|\omega_j\|^{\sigma_{ij}},$$

$$d_{ij} \geqslant 0, \quad b_{ij} = \mathrm{const}, \quad \sigma_{ij} > 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Систему (22) можно переписать в виде

$$\begin{cases} A\dot{\omega}_1 + (C - B)\omega_2\omega_3 = c_1 h^{a_1}(t)\omega_1^{\mu_1} + M_2^{(1)}(t, \omega), \\ B\dot{\omega}_2 + (A - C)\omega_1\omega_3 = c_2 h^{a_2}(t)\omega_2^{\mu_2} + M_2^{(2)}(t, \omega), \\ C\dot{\omega}_3 + (B - A)\omega_1\omega_2 = c_3 h^{a_3}(t)\omega_3^{\mu_3} + M_2^{(3)}(t, \omega). \end{cases}$$

Использование функции $h(t)$ в схеме управления движением тела позволяет более тонко учитывать различные технические особенности. Например, крайние случаи, когда $h(t) \to 0$ или $h(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$ могут возникать при ограниченных ресурсах управления (когда управляющее воздействие будет со временем затухать) или при наличии сильных возмущений (когда для гашения возмущений требуется использовать нарастающее управляющее воздействие). Разные показатели степеней (числа a_1, a_2, a_3) у функции $h(t)$ в компонентах управления могут характеризовать разную мощность управляющего воздействия вдоль осей координат.

В качестве функции Ляпунова будем использовать кинетическую энергию тела

$$V(\omega) = \frac{1}{2}\left(A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2\right).$$

Продифференцируем функцию $V(\omega)$ в силу невозмущенной системы $(M_2(t,\omega) \equiv 0)$. Получим

$$\dot{V} = c_1 h^{a_1}(t)\omega_1^{\mu_1+1} + c_2 h^{a_2}(t)\omega_2^{\mu_2+1} + c_3 h^{a_3}(t)\omega_3^{\mu_3+1} \leqslant c\bar{h}(t)V^{\xi}(\omega), \qquad (23)$$

где $\bar{h}(t) = \min\{h^{a_1}(t);\, h^{a_2}(t);\, h^{a_3}(t)\}$, $\xi = (\max\{\mu_1;\, \mu_2;\, \mu_3\} + 1)/2$, $c < 0$.

Интегрируя дифференциальное неравенство (23), нетрудно показать, что если

$$\int\limits_0^{+\infty} \bar{h}(t)\,\mathrm{d}t = +\infty,$$

то тривиальное положение равновесия $\omega = (0,0,0)^T$ асимптотически устойчиво.

Для нахождения оценок на возмущения, при выполнении которых асимптотическая устойчивость рассматриваемого положения равновесия сохраняется для возмущенной системы (22), достаточно использовать результаты §2 (теорему 4).

Заключение

В ходе работы изучались и разрабатывались методы анализа устойчивости решений нелинейных нестационарных систем. Для этого использовалась комбинация подходов и идей, используемых в прямом методе Ляпунова и теории дифференциальных неравенств. Особое внимание было уделено случаю, когда нестационарные коэффициенты системы либо неограниченно возрастают, либо, наоборот, исчезают со временем. Причем, предполагалось, что предельные системы, если таковые имеются, свойством устойчивости не обладают.

Были получены условия асимптотической устойчивости заданного положения равновесия нелинейной нестационарной системы так называемого треугольного вида, оценено влияние нестационарных возмущений на такую систему. Оценки на возмущения, при выполнении которых гарантируется асимптотическая устойчивость положения равновесия, в общем виде оказались достаточно объемными и громоздкими. Однако, при заданных числовых значениях параметров системы они довольно легко преобразуются в простые алгебраические неравенства.

Полученные результаты можно применять, в частности, для анализа поведения нелинейных механических систем, находящихся под воздействием нестационарных силовых полей.

Список литературы

1. *Александров А. Ю.*, Об устойчивости решений нелинейных систем с неограниченными возмущениями // *Матем. заметки, 1998, том 63, выпуск №1, С. 3–8*

2. *Александров А. Ю., Александрова Е. Б., Екимов А. В., Смирнов Н. В.*, Сборник задач и упражнений по теории устойчивости. СПб. 2003.

3. *Александров А. Ю., Платонов А. В.*, Метод сравнения и устойчивость движений нелинейных систем. СПб. 2012.

4. *Беллман Р.*, Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1954.

5. *Демидович Б. П.*, Лекции по математической теории устойчивости. М. 1967.

6. *Зенкевич Н. А., Губар Е. А.*, Практикум по исследованию операций. СПб. 2007.

7. *Зубов В. И.*, Математические методы исследования систем автоматического регулирования. Л. 1959.

8. *Зубов В. И.*, Устойчивость движения. Л. 1973.

9. *Красовский Н. Н.*, Некоторые задачи теории устойчивости движения. М. 1959.

10. *Малкин И. Г.*, Теория устойчивости движения. Л. 1952.

11. *Соболь И. М., Статников Р. Б.*, Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями. М. 2006.

12. *Чаплыгин С. А.*, Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. М.; Л: Гостехиздат, 1950.