

Санкт-Петербургский государственный университет  
**Кафедра компьютерных технологий и систем**

**Орлова Анастасия Николаевна**

**Выпускная квалификационная работа бакалавра**

**Условия пригодности линейной модели для  
оценки параметров движения морского объекта**

Направление 01.03.02  
«Прикладная математика и информатика»

Научный руководитель,  
кандидат физ.-мат. наук,  
доцент  
Чашникова В.В.

Санкт-Петербург  
2017

## Содержание

Введение.....	3
Постановка задачи.....	5
Обзор литературы.....	7
Глава 1.Эффективность линейной модели .....	8
1.1. Метод Ньютона.....	8
1.2. Экспериментальная оценка сходимости метода Ньютона для дальномерного метода навигации .....	9
1.3. Азимутальный метод.....	11
1.4. Условия устойчивости азимута в зависимости от широты судна.....	13
1.5. Анализ погрешности линейной модели для азимутального метода .....	15
Глава 2. Выбор оптимального состава измерений.....	17
2.1. Гарантирующий подход .....	17
2.2. Переход к задаче линейного программирования .....	18
2.3. Выбор оптимального измерительного базиса для азимутального метода .....	20
2.4. Выбор оптимального измерительного базиса для дальномерного метода .....	23
Выводы .....	24
Заключение .....	25
Список литературы: .....	26

## Введение

Морское судно является достаточно сложной системой, а его движение целенаправленно и заранее программируется. Но запрограммированное движение объекта есть не что иное, как приближенное описание его маневров.

На судно обычно действуют внешние случайные возмущающие силы. Следовательно, важной навигационной задачей является определение действительных характеристик движения судна, оценка степени неопределенности текущих координат, траектории и скорости движения.

Оценка точности получаемых результатов всегда играет важную роль в решении задач, таких как определение и коррекция движения морского объекта. В том случае если с достаточной точностью не может быть обеспечена требуемая точность решения поставленной задачи, то определение движения может оказаться бесполезным.

В настоящее время самым распространенным является статистический подход к оценке определения и коррекции движения, суть которого заключается в том, что функция распределения ошибок исходных данных считается заданной. По этой заданной функции могут быть вычислены характеристики точности решения рассматриваемой задачи.

Однако существенным недостатком этого подхода является то, что фактическое распределение ошибок всегда отличается от принятого. И, следовательно, это приводит к нарушению оптимальных свойств алгоритма.

Значительно более надежные и близкие к реальным условиям результаты дает гарантирующий подход, при котором задается не функция распределения вероятностей ошибок, а множество возможных значений этой функции.

В первой главе исследуется эффективность линейной модели. Используя дальномерный метод, рассматривается вопрос сходимости Ньютона для конкретной задачи. Описывается азимутальный метод

определения положения судна по радионаблюдениям навигационных спутников.

Во второй главе описана суть гарантирующего подхода, а также переход к задаче линейного программирования. В третьем параграфе приведены результаты выбора оптимального состава измерений, используя который далее произведен анализ погрешности линейной модели. В конце приведены формулы для доплеровского радиально скоростного метода.

## Постановка задачи

Состояние любой реальной системы может быть полностью описано лишь практически бесконечным числом параметров. Но в нашем распоряжении всегда имеется только конечное число независимых измерений, искаженных неизбежными ошибками. Следовательно, полное определение состояния реальной системы по данным измерений практически невозможно. Можно говорить лишь о некоторой его оценке.

Состояние математической модели должно определяться конечным числом параметров  $q_1 q_2 \dots q_m$ , совокупность которых будем называть  $m$ -мерным вектором состояния  $\mathbf{q} = \{q_1 q_2 \dots q_m\}$ .

Для определения вектора  $\mathbf{q}$  используют измерения величин, которые зависят от состояния системы. Совокупность всех используемых измерений образует  $n$ -мерный вектор измерений:  $\mathbf{d} = \{d_1 d_2 \dots d_m\}$ .

Для того чтобы по имеющимся измерениям можно было оценить состояние, необходимо знать зависимость между  $\mathbf{d}$  и  $\mathbf{q}$ . Она имеет вид:  $\mathbf{d} = \mathbf{F}(\mathbf{q})$ .

Это есть задача статистического вида. Для линеаризации (сведению к линейной модели) разложим  $\mathbf{F}(\mathbf{q})$  в окрестности точки

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}) = \mathbf{F}(\mathbf{q}_0) + \mathbf{A}|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0} \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) + \begin{bmatrix} (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0)^T \mathbf{B}_1 (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) \\ \dots \\ (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0)^T \mathbf{B}_n (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) \end{bmatrix},$$

где  $\mathbf{A} = \left[ \frac{\partial f_i}{\partial q_j} \right]$  – дважды непрерывно дифференцируемая матрица Якоби,

$\mathbf{B}_i$  – матрицы Гессе. Третье слагаемое в формуле – остаточный член ряда в форме Лагранжа. Матрицы Гессе вычислены в некоторой промежуточной точке.

Рассматриваем гринвичскую геоцентрическую систему координат. Пусть дан спутник  $S$ , движущийся по *геостационарной орбите* Земли ( т.е. орбите, расположенной над экватором ( $0^\circ$  широты), находясь на которой искусственный спутник обращается вокруг планеты с угловой скоростью,

равной угловой скорости вращения Земли вокруг оси), и некое тело (морское судно), координаты которого следует оценить при помощи методов спутниковой навигации.

Очевидно, что спутник, находящийся на геостационарной орбите, неподвижен относительно Земли. Поэтому его местоположение на орбите называется *точкой стояния*.

В данной работе рассмотрены следующие вопросы:

- оценка параметров движения морского объекта;
- исследование сходимости метода Ньютона для рассматриваемой задачи;
- поиск оптимального базиса, т.е. пары спутников, которая дает минимальную ошибку;
- исследование положений морского объекта таких, что погрешность линейной модели будет меньше, чем погрешность измерений.

## Обзор литературы

Книга [1] посвящена определению параметров состояния и движения систем по данным измерений, а также оценке точности получаемых результатов и обработке измерений (выбору оптимального состава используемых измерений).

В работе [2] представлены основные критерии оценивания и ряд статистических методов.

В книге [3] излагаются вопросы построения и использования спутниковых систем морской навигации. На конкретных примерах дается методика обработки навигационной информации и оценки точности навигационных обсерваций.

В работе [4] рассматривается определение движения и управления им при дискретном характере измерительной информации и корректирующих воздействий. Особое внимание обращается на оценку точности получаемых результатов.

В работе [5] предложен метод гарантированной оценки точности и выбора оптимальной стратегии определения движения.

Обобщение выбора базиса для динамического случая был описан в статье [6]

В статье [7] рассмотрены условия пригодности линейных моделей к задачам идентификации.

# Глава 1. Эффективность линейной модели

## 1.1. Метод Ньютона

Для определения координат объекта и вектора скорости с использованием методов спутниковой навигации наиболее распространенными являются следующие навигационные функции:

- расстояние от спутника до объекта (дальномерный метод),
- азимут спутника (азимутальный метод),
- радиальная скорость (доплеровский метод).

Для линейной модели задается некоторое начальное приближение вектора состояния  $q_0$ , называемое числимым местом, и матрица  $A$  частных производных навигационных функций по координатам объекта и (в случае доплеровского метода) по компонентам вектора скорости.

Значения навигационных функций  $d_0$  вычисляются в точке  $q_0$ , а далее из системы линейных уравнений

$$A|_{q_{(i-1)}} \Delta q_{(i)} = \Delta d_{(i)}, i = 1, 2, \dots$$

где:

$$\Delta q_{(i)} = \hat{q}_{(i)} - \hat{q}_{(i-1)},$$

$$\Delta d_{(i)} = \tilde{d} - d_{(i)},$$

$\hat{q}_{(i)}$  – оценка вектора состояния на  $i$ -м шаге,

$\tilde{d}$  – результат измерения навигационных функций,

$d_{(i)}$  – в-р значений навигационных функций, вычисленных для  $(i-1)$  – го приближения вектора состояния  $\hat{q}$ .

Итерации продолжаются до тех пор пока  $\|q_{(i)} - q_{(i-1)}\| > \delta$ , где  $\delta$  – заданная характеристика точности.

Аналитически для получения условия сходимости метода Ньютона в зависимости от близости числимого места от фактического положения объекта требуется оценить матрицу Гессе в окрестности точки  $q_0$ , что в



общем случае весьма проблематично. Но в каждом конкретном случае можно проверить сходимость экспериментально, оценив максимально допустимые отклонения компонент вектора  $q_0$  от компонент вектора  $q$ .

## 1.2. Экспериментальная оценка сходимости метода Ньютона для дальномерного метода навигации

Рассмотрим метод Ньютона для случая, когда навигационной функцией является расстояние от судна до спутника. Радиус Земли положим равным 6300 км. Тогда имеем две компоненты вектора состояния: широта и долгота. Следовательно, для оценки координат объекта достаточно измерить расстояние до двух спутников.

Введем следующие обозначения:

$\lambda_1$  – долгота первого спутника;

$\lambda_2$  – долгота второго спутника;

$\lambda$  – долгота морского объекта;

$\psi$  – широта морского объекта;

$\rho_1$  – расстояние от первого спутника до объекта;

$\rho_2$  – расстояние от второго спутника до объекта;

$$q^i = \begin{bmatrix} \psi^i \\ \lambda^i \end{bmatrix}, \quad \rho^i = \begin{bmatrix} \rho_1^i \\ \rho_2^i \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} \frac{\partial \rho_1}{\partial \psi} & \frac{\partial \rho_1}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial \rho_2}{\partial \psi} & \frac{\partial \rho_2}{\partial \lambda} \end{bmatrix}.$$

$$\rho_i = \sqrt{(R \cos \psi \cos \lambda - x_c)^2 + (R \cos \psi \sin \lambda - y_c)^2 + (R \sin \psi - z_c)^2},$$

где  $x_c, y_c, z_c$  – координаты спутника.

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial \psi} = \frac{R}{\rho_i} (x_c \cos \lambda \sin \psi + y_c \sin \lambda \sin \psi - z_c \cos \psi);$$

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial \lambda} = \frac{R}{\rho_i} \cos \psi (x_c \sin \lambda - y_c \cos \lambda), \quad i = 1, 2.$$

Пусть объект имеет координаты (компоненты вектора  $q$ )  $30^\circ$  с.ш. и  $170^\circ$  з.д. Спутники имеют долготу  $150^\circ$  и  $130^\circ$  (оптимальный базис). Метод его нахождения описан в п.2.3.

Предположим, что имеется начальное приближение вектора состояния  $q_0$ . Мы можем вычислить расстояния  $\rho_0^1$  и  $\rho_0^2$  от  $q_0$  до спутников, а затем, используя матрицу частных производных  $A$ , вычисленную в точке  $q_0$ , а также измеренные расстояния  $\rho_1$  и  $\rho_2$ , применить метод Ньютона. Решаем систему линейных уравнений:

$$A(\hat{q}_{(1)} - q_0) = \rho - \rho_0, \quad \rho_{(1)} = \rho(\hat{q}_1).$$

Затем

$$A(\hat{q}_{(i+1)} - \hat{q}_i) = \rho - \rho_{(i)}.$$

Постепенно удаляя точку  $q_0$  от фактического положения  $q$ , получаем границы сходимости метода.

Исследуем сходимость для случая двух геостационарных спутников, находящихся в точках  $130$  градусов восточной долготы и  $150$  градусов западной долготы и объекта, находящегося в том же промежутке по долготе и от  $10$  до  $60$  градусов северной широты.

Разобьем эту область на квадраты шагом  $10$  градусов по широте и долготе и для каждого квадрата определим максимально возможное расстояние в градусах по широте и долготе от  $q$  до  $q_0$  такое, например, чтобы третья итерация в методе Ньютона давала ошибку по широте и долготе не более  $0.1$  градуса.

Таблица 1.1. Допустимые отклонения начального приближения.

	130з.д.	140з.д.	150з.д.	160з.д.	170з.д.	180з.д.	170в.д.	160в.д.	150в.д.	140в.д.
10°	8.5	8.5	8.5	8.5	8.5	8.5	8.5	8.5	8.5	8.5
20°	14.1	14.1	14.1	14.1	14.1	14.1	14.1	14.1	14.1	14.1
30°	19.8	19.8	19.8	19.8	19.8	19.8	19.8	19.8	19.8	19.8
40°	24.0	24.0	24.0	24.0	24.0	24.0	24.0	24.0	24.0	24.0
50°	25.5	25.5	25.5	25.5	25.5	25.5	25.5	25.5	25.5	25.5

Как видно из таблицы, размеры допустимой области практически не зависят от долготы объекта, а с возрастанием широты увеличиваются

### 1.3. Азимутальный метод

Азимут – это угол между направлением на север и направлением на объект наблюдения (спутник). Введем следующие обозначения:

$A$  – азимут спутника  $S$ ;

$(\psi_s, \lambda_s)$  – координаты спутника;

$(\psi, \lambda)$  – координаты судна.

Для азимута спутника справедлива формула:

$$\operatorname{ctg} A = \operatorname{tg}(\psi_s) \cos(\psi) \operatorname{cosec}(\lambda - \lambda_s) - \sin(\psi) \operatorname{ctg}(\lambda - \lambda_s). \quad (1.1)$$

Рассмотрим случай, когда на орбите находятся два геостационарных спутника.

Введем следующие обозначения:

$\lambda_1$  – долгота первого спутника;

$\lambda_2$  – долгота второго спутника;

$\lambda$  – долгота морского объекта;

$\psi$  – широта морского объекта;

$\operatorname{ctg} A_1$  – котангенс азимута первого спутника;

$\operatorname{ctg} A_2$  – котангенс азимута второго спутника;

$$q^i = \begin{bmatrix} \psi^i \\ \lambda^i \end{bmatrix}, \quad ctgA^i = \begin{bmatrix} ctgA_1^i \\ ctgA_2^i \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} \frac{\partial ctgA_1}{\partial \psi} & \frac{\partial ctgA_1}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial ctgA_2}{\partial \psi} & \frac{\partial ctgA_2}{\partial \lambda} \end{bmatrix}.$$

Рассматриваем метод Ньютона для функции двух переменных, строим оценку вектора  $q$  как решения уравнения  $F(q)=d$  ( $q$  – вектор состояний,  $d$  – вектор измерений) при помощи линейного приближения в окрестности точки  $q_0$ , решая систему линейных уравнений:

$$\begin{bmatrix} ctgA_1^i \\ ctgA_2^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ctgA_1^0 \\ ctgA_2^0 \end{bmatrix} + A [q^i - q^0]. \quad (1.2)$$

Здесь  $A$  – дважды непрерывно-дифференцируемая матрица Якоби.

$$\frac{\partial ctgA_1}{\partial \psi} = -tg\psi_{s_1} cosec(\lambda_{s_1} - \lambda) \sin \psi - \cos \psi ctg(\lambda - \lambda_{s_1})$$

$$\frac{\partial ctgA_2}{\partial \psi} = -tg\psi_{s_2} cosec(\lambda_{s_2} - \lambda) \sin \psi - \cos \psi ctg(\lambda - \lambda_{s_2})$$

$$\frac{\partial ctgA_1}{\partial \lambda} = tg\psi_{s_1} cosec(\lambda_{s_1} - \lambda) \cos \psi ctg(\lambda_{s_1} - \lambda) + \frac{\sin \psi}{(\sin(\lambda - \lambda_{s_1}))^2}$$

$$\frac{\partial ctgA_2}{\partial \lambda} = tg\psi_{s_2} cosec(\lambda_{s_2} - \lambda) \cos \psi ctg(\lambda_{s_2} - \lambda) + \frac{\sin \psi}{(\sin(\lambda - \lambda_{s_2}))^2}$$

В формулу (1.2) можно также добавить ошибку метода  $\eta$ , тогда формула (1.2) примет следующий вид:

$$\begin{bmatrix} ctgA_1^i \\ ctgA_2^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ctgA_1^0 \\ ctgA_2^0 \end{bmatrix} + A [q^i - q^0] + \begin{bmatrix} (q - \tilde{q})^T B_1 (q - \tilde{q}) \\ \vdots \\ (q - \tilde{q})^T B_n (q - \tilde{q}) \end{bmatrix}.$$

Т.е. ошибку метода можно вычислить используя следующую формулу:

$$\eta = \begin{bmatrix} (q - \tilde{q})^T B_1 (q - \tilde{q}) \\ \vdots \\ (q - \tilde{q})^T B_n (q - \tilde{q}) \end{bmatrix}.$$

Здесь  $B_i$  – это матрицы Гессе.

$$\frac{\partial^2 ctg A_i}{\partial \psi^2} = \frac{1}{\sin(\lambda_{s_i} - \lambda)} [-\sin \psi \cos(\lambda - \lambda_{s_i}) - tg \psi_{s_i} \cos \psi];$$

$$\frac{\partial^2 ctg A_i}{\partial \psi \partial \lambda} = \cos \psi + \frac{(\cos \psi \cos(\lambda - \lambda_{s_i}) - tg \psi_{s_i} \sin \psi) \cos(\lambda_{s_i} - \lambda)}{\sin^2(\lambda_{s_i} - \lambda)};$$

$$\frac{\partial^2 ctg A_i}{\partial \lambda \partial \psi} = \frac{\cos \psi - tg \psi s_i \sin \psi \cos(\lambda_{s_i} - \lambda)}{\sin^2(\lambda_{s_i} - \lambda)};$$

$$\frac{\partial^2 ctg A_i}{\partial \lambda^2} = \frac{\cos \psi tg \psi s_i}{\sin(\lambda_{s_i} - \lambda)} + 2 \frac{\cos \psi \cos^2(\lambda_{s_i} - \lambda) tg \psi s_i + \sin \psi \cos(\lambda_{s_i} - \lambda)}{\sin^3(\lambda_{s_i} - \lambda)};$$

$$B_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 ctg A_i}{\partial \psi^2} & \frac{\partial^2 ctg A_i}{\partial \psi \partial \lambda} \\ \frac{\partial^2 ctg A_i}{\partial \lambda \partial \psi} & \frac{\partial^2 ctg A_i}{\partial \lambda^2} \end{bmatrix}.$$

Измеряем азимут и как следствие котангенс азимута. Положим ошибку измерения азимута в 0.1 градуса и вычислим соответствующую ошибку котангенса. Ошибка измерений  $z = ctg A - ctg \widehat{A}$ .

Рассмотрим участок в Тихом океане от 150° в.д. до 130° з.д. и от 10° с.ш. до 50° с.ш. Разобьем этот участок на квадраты с интервалом в 10° по долготе и в 5° по широте.

На данном этапе можно дать оценку матрицам Гессе, т.к. знаем пределы изменения компонент вектора  $q$ , и, следовательно, оценить ошибку метода  $\eta$ .

$$norm(B_2) \leq norm \begin{bmatrix} -0.9848 & 32.6596 \\ 32.6596 & 65.3192 \end{bmatrix}.$$

Вектор  $\Delta q$  оставим равным  $[3^0; 3^0]$ . Тогда:  $\eta \leq 0.3555$ .

#### 1.4. Условия устойчивости азимута в зависимости от широты судна

Не всегда целесообразно использовать котангенс азимута как навигационную функцию. В тех случаях, когда азимут меньше  $\frac{\pi}{4}$  или больше  $\frac{3\pi}{4}$ , котангенс ведет себя неустойчиво. Это означает, что даже при незначительных ошибках измерения азимута значения котангенса могут существенно различаться, что в свою очередь влияет на точность оценки вектора состояния. Если требуется, например, чтобы изменения функции превосходили изменения аргумента не более чем вдвое, необходимо выполнение неравенства

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha} \leq 2.$$

Из этого следует, что значения азимута ограничены промежутком  $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ .

Азимут вычисляется по следующей формуле:

$$A = \text{arcctg}(\text{tg}(\psi_s) \cos(\psi) \text{cosec}(\lambda - \lambda_s) - \sin(\psi) \text{ctg}(\lambda - \lambda_s)).$$

Исследуем следующую зависимость: найдем, при какой минимально допустимой разности  $|\lambda - \lambda_s|$  на данной широте, азимут будет оставаться внутри допустимого промежутка. Для этого выражение, которое стоит в формуле азимута под знаком арккотангенса, мы должны сделать по модулю не больше 1.

. Так как спутники находятся на геостационарной орбите, то первое слагаемое под знаком арктангенса обнуляется. Второе слагаемое монотонно возрастает вместе с широтой объекта. Если оно на всём промежутке широты не достигнет 1, значит, нашу разность можно ещё уменьшить, тем самым увеличив её котангенс. Начиная с широты 10 градусов, и далее на всём участке ищем минимальную допустимую разность лямбда, то есть ту, для которой второе слагаемое в формуле всё ещё не больше 1.

Результаты эксперимента представлены на графике ниже.

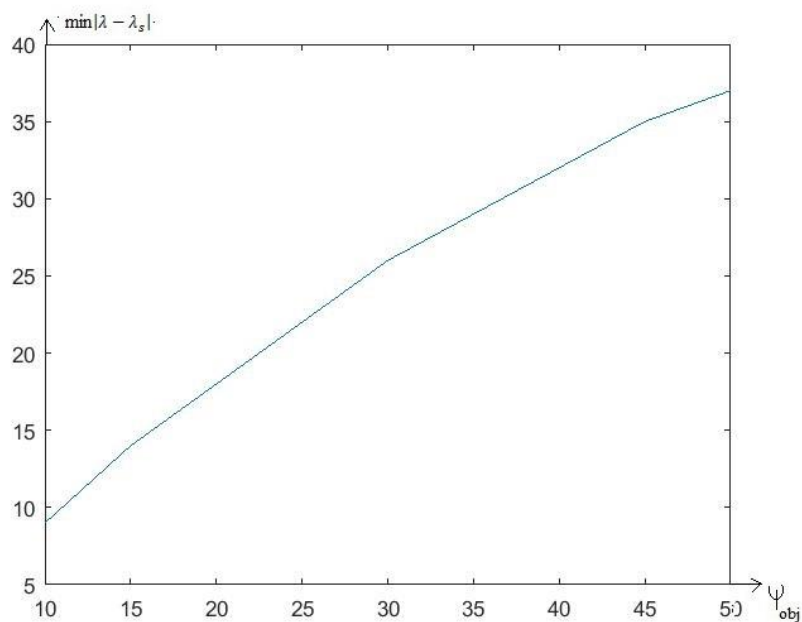


Рис.1.3. График зависимости  $\min|\lambda - \lambda_s|$  от ширины объекта

Из графика можно сделать вывод о том, что минимально допустимое значение величины  $|\lambda - \lambda_s|$  является монотонно возрастающей функцией.

### **1.5. Анализ погрешности линейной модели для азимутального метода**

Теперь исследуем, при каких положениях морского объекта погрешность линейной модели будет меньше, чем погрешность измерений, если брать оптимальный базис. Для погрешности модели используем гарантированную оценку при помощи матрицы Гессе, как показано в п.1.3. Погрешность измерения берем 0.5 градуса.

Результаты эксперимента можно свести в таблицу:

Таблица 1.2. Результаты анализа погрешности

Коор-ты объекта		Северная широта								
		10	15	20	25	30	35	40	45	50
В.д.	150									
	160									
	170									
	180									
З.д.	170									
	160									
	150									
	140									
	130									

Цветом в таблице отмечены те координаты объекта (при положении спутников соответствующем оптимальному базису), где погрешность модели меньше погрешности измерений. Отсюда следует, что линейная модель для азимутального метода наиболее эффективна вблизи экватора.



## Глава 2. Выбор оптимального состава измерений

### 2.1. Гарантирующий подход

Пусть цель управления это выполнение следующего условия:

$$l \in \mathfrak{Z}, \quad (2.1)$$

где  $l$  – вектор корректируемых параметров,  $\mathfrak{Z}$  – множество допустимых значений этого вектора.

Сначала рассмотрим статистическую модель управления. Она основывается на предположении, что известны необходимые статистические характеристики ошибок исходных данных. Иногда условие  $l \in \mathfrak{Z}$  оказывается слишком жестким. Поэтому в общем случае требуют лишь выполнение этого условия с некоторой вероятностью  $H$  (*надежностью решения задачи*). Тогда вместо (2.1) сформулируем основную задачу управления в виде:

$$H = P(l \in \mathfrak{Z}) \geq H_0, \quad (2.2)$$

$P(A)$  – вероятность события  $A$ ,  $H_0$  – минимальная величина надежности.

Так как статистическая модель опирается на заданные вероятностные характеристики ошибок исходных данных, то фактическая надежность решения задачи может отличаться от определяемой по формуле (2.2). Это значительный недостаток статистической модели. Но рассмотрим более общий - гарантирующий подход.

Обозначим через  $z$  случайный  $n$ -мерный вектор ошибок. Пусть точные значения вероятностных характеристик этого вектора неизвестны, но задано  $\mathfrak{F}_z$  - множество возможных значений функции распределения ошибок.

$$F(z) \in \mathfrak{F}_z, \quad (2.3)$$

где  $F(\xi)$  – возможные функции распределения.

В этом заключается суть гарантирующего подхода.

Можно найти нижнюю границу надежности  $H$ . Будем использовать эту границу в качестве гарантированного значения  $H$ .

То есть, если задано мн-во возможных статистических характеристик ошибок исходных данных, то можно сформулировать задачу управления следующим образом:

$$P(l \in \xi) \geq H_{\text{гар}} \geq H_0.$$

## 2.2. Переход к задаче линейного программирования

Общей задачей линейного программирования (ОЗЛП) называются такая задача, в которой целевая функция (ее надо оптимизировать) представляет собой линейную комбинацию известных коэффициентов  $c_j$  ( $i = 1, n$ ) и неизвестных переменных  $x_j$  ( $j = 1, n$ ) вида:

$$f = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

Переменные  $x_j$  также называются управляющими переменными.

Ограничения, накладываемые на область возможных решений, имеют вид линейных неравенств или равенств:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = \overline{1, m_1} \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i = \overline{m_1 + 1, m_2} \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{m_2 + 1, m} \end{array} \right.$$

где  $a_{ij}, b_i$  – известные величины, причем величины  $a_{ij}, x_j, b_i$  ( $j = 1, \dots, n$ ,  $i = 1, \dots, m$ ) положительные.

Решить задачу линейного программирования – это значит найти значения управляющих переменных  $x_j$ , удовлетворяющих ограничениям, при которых целевая функция принимает минимальное или максимальное значение.

Пусть есть линейная модель:

$$Aq = d.$$

Обозначим  $z$  – ошибка измерений,  $\tilde{d} = d_T + z$  – случайная ошибка.

Рассмотрим алгоритм фильтрации  $Y_{\min}$ :

$$\hat{q} = Y\tilde{d}, \quad \hat{q} = q_T + \delta q,$$

где  $\hat{q}$  – оценка,  $\delta q$  – ошибка оценки.

В качестве  $Y$  можно взять псевдообратную матрицу.

$$\text{rank } A = m \Rightarrow A^+ = (A^T A)^{-1} A^T.$$

Условие несмещенности оценки:

$$YA = I - \text{единичная матрица.}$$

$$\hat{q} = Y\tilde{d} = Yd_T + Yz = q_T + \text{ошибка.}$$

Хотим минимизировать ошибку.

При гарантирующем подходе можно ограничить:

$$|z_i| \leq \delta_i.$$

Линейная оценка:  $\hat{l} = C\hat{q}$ ,  $C = \text{const}$ .

$$|\delta\hat{l}| \rightarrow \min.$$

$|\delta\hat{l}|$  – ошибка оценки линейной функции  $\hat{l} = C\hat{q}$ .

Тогда условие несмещенности примет вид:

$$CYA = C$$

$C$  – строка длины  $m$ ,  $X = CY$  – строка длины  $n$ .

$$A\hat{q} = \tilde{d}, \quad X\tilde{d} = \hat{l}.$$

Нужно найти такую строку  $X$ .

Разделим каждую строку матрицы:

$$A_i \rightarrow \frac{A_i}{\delta_i}.$$

$$\Rightarrow |z_i| \leq 1, i = \overline{1, n}.$$

$$\hat{l} = X\tilde{d} = X(d_T + z) = l_T + Xz.$$

$$\min_x \max \delta l = \sum_{i=1}^n |x_i| \rightarrow \min_x .$$

$XA = C$  – условие несмещенности.

Ищем:

$$\min_x \sum_{i=1}^n |x_i|$$

Таким образом можно сделать целевую функцию линейной.

### 2.3. Выбор оптимального измерительного базиса для азимутального метода

Рассматриваем участок в Тихом океане от 150°в.д. до 130°з.д. и от 10°с.ш. до 50°с.ш. Разобьем этот участок на квадраты с интервалом в 10° по долготе и в 5° по широте.

Используя симплекс-метод, исследуем, какая пара спутников даёт наименьшую ошибку для каждого квадрата исследуемого участка.

Ниже приведен алгоритм симплекс-метода.

1. Строим матрицу частных производных:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial ctg A_1}{\partial \psi} & \frac{\partial ctg A_1}{\partial \lambda} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial ctg A_n}{\partial \psi} & \frac{\partial ctg A_n}{\partial \lambda} \end{bmatrix}.$$

В случае если спутник невидим объектом, соответствующая этому спутнику строка матрицы частных производных обращается в ноль.

Условие видимости спутника:

$$\sqrt{1 - \frac{R_3^2}{|R|^2} + \frac{(\bar{R}, \bar{r} - \bar{R})}{|\bar{R}||\bar{r} - \bar{R}|}} > 0.$$

Здесь  $R_3^2$ - радиус Земли в квадрате,  $\bar{R}$  – радиус-вектор спутника (пусть спутники находятся на высоте 42000км),  $\bar{r}$  – радиус-вектор судна.

2. Далее составляем матрицу  $H = \begin{bmatrix} B \\ -B \end{bmatrix}^T$ . Из этой матрицы выбираем любые два линейно независимых столбца:

$$[G_1 \ G_2] = G.$$

Строим матрицы:  $G^{-1}H = S, G^{-1}C = V$ . Теперь составляем таблицу

G		S			V
$G_1$	$G_2$	$S_1$	...	$S_{18}$	$V_1$
					$V_2$
		$\Delta_1$	...	$\Delta_{18}$	

Если  $\Delta_i < 0$ , тогда  $G_i$  меняем на  $-G_i$ .

$$\Delta_i = S_{1i} + S_{2i} \text{ (сумма компонент).}$$

3. Если в таблице есть  $\Delta_i > 1$  и  $S_{ji} > 0$ , составляем дробь  $\frac{V_j}{S_{ji}} \rightarrow \min$  (выбираем минимальное отношение). Получаем пару индексов  $i_0$  и  $j_0$ . Затем меняем  $G_{j_0}$  на  $H_{i_0}$ . Повторяем алгоритм, пока все  $\Delta_i$  не будут меньше 1. Если все  $\Delta_i \leq 1$ , то G – оптимальный базис.

Положим, что спутники расположены от  $150^\circ$  в.д. до  $130^\circ$  з.д. через каждые  $10^\circ$  (т.е. имеем 9 спутников).

Таблица 2.1. Нумерация спутников

№ спутника	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\lambda_s$	150в.д.	160в.д.	170в.д.	180в.д.	170з.д.	160з.д.	150з.д.	140з.д.	130з.д.

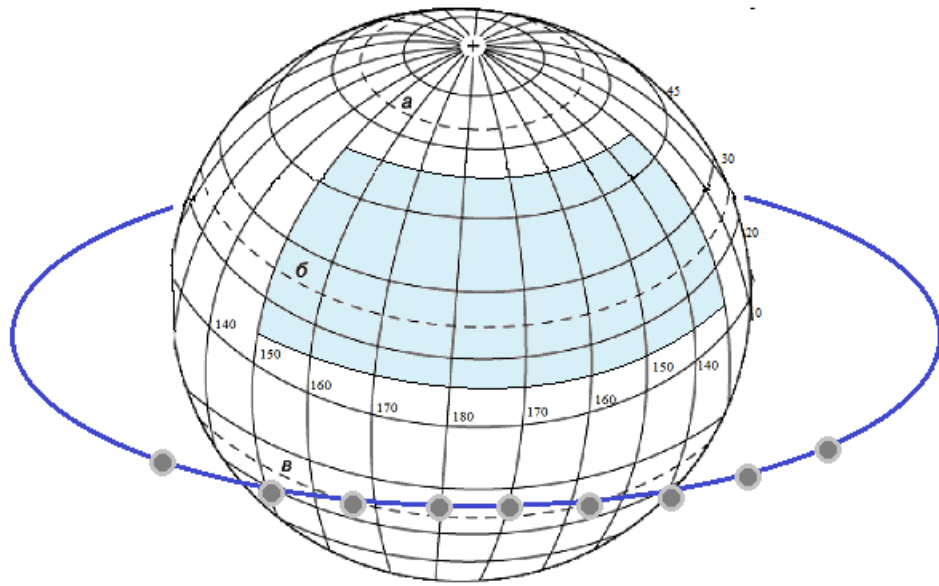


Рис. 2.1. Положения спутников

Исследование доступных для наблюдений спутников показало, что все спутники видны из всех рассматриваемых положений объекта.

Далее, действуя по описанному выше алгоритму, нашли оптимальный базис для каждого положения объекта.

Таблица 2.2. Оптимальные базисы

Координаты	150	160	170	180	170	160	150	140	130
	в.д.	в.д.	в.д.	в.д.	з.д.	з.д.	з.д.	з.д.	з.д.
Опт.базис	[2;3]	[1;3]	[2;4]	[3;5]	[4;6]	[7;5]	[8;6]	[9;7]	[8;7]

Запись  $[i ; j]$  означает, что оптимальным базисом являются спутники с номерами  $i$  и  $j$ . Первый спутник имеет долготу 150 в.д., второй 160в.д. и т.д.

В результате эксперимента было замечено, что оптимальный базис не зависит от широты объекта, каким бы ни был вектор  $C$ :  $[1 0]$  или  $[0 1]$ .

## 2.4. Выбор оптимального измерительного базиса для дальномерного метода

Формулы дальномерного метода описаны в пункте 1.2. По аналогии с пунктом 2.3. найдем оптимальный базис для каждого квадрата рассматриваемого участка, заменив в алгоритме поиска матрицу

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial ctg A_1}{\partial \psi} & \frac{\partial ctg A_1}{\partial \lambda} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial ctg A_n}{\partial \psi} & \frac{\partial ctg A_n}{\partial \lambda} \end{bmatrix}$$

на матрицу  $B = \begin{bmatrix} \frac{\partial \rho_1}{\partial \psi} & \frac{\partial \rho_1}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial \rho_2}{\partial \psi} & \frac{\partial \rho_2}{\partial \lambda} \end{bmatrix}$ .

В результате эксперимента были получены результаты представленные в следующей таблице.

Таблица 2.3. Оптимальные базисы

Опт. базис		Северная широта								
		10	15	20	25	30	35	40	45	50
В.д.	150	[1,9]	[1,9]	[1,9]	[1,9]	[1,9]	[1,8]	[1,8]	[1,8]	[1,8]
	160	[1,9]	[1,9]	[1,9]	[1,9]	[1,9]	[1,9]	[1,9]	[1,9]	[1,9]
	170	[1,9]	[1,9]	[1,9]	[1,9]	[1,9]	[1,9]	[1,9]	[1,9]	[1,9]
	180	[1,9]	[1,9]	[1,9]	[1,9]	[1,9]	[1,9]	[1,9]	[1,9]	[1,9]
З.д.	170	[1,9]	[1,9]	[1,9]	[1,9]	[1,9]	[1,9]	[1,9]	[1,9]	[1,9]
	160	[1,9]	[1,9]	[1,9]	[1,9]	[1,9]	[1,9]	[1,9]	[1,9]	[1,9]
	150	[1,9]	[1,9]	[1,9]	[1,9]	[1,9]	[1,9]	[1,9]	[1,9]	[1,9]
	140	[1,9]	[1,9]	[1,9]	[1,9]	[1,9]	[1,9]	[1,9]	[1,9]	[1,9]
	130	[1,9]	[1,9]	[1,9]	[1,9]	[1,9]	[2,9]	[2,9]	[2,9]	[2,9]

Из таблицы видно, что оптимальная пара наблюдаемых спутников остается неизменной почти на всем рассматриваемом участке.

## Выводы

\* Линейная модель для азимутального метода с использованием геостационарных спутников является наиболее эффективной вблизи экватора.

\* С возрастанием широты объекта количество пригодных для азимутального метода геостационарных спутников уменьшается.

\* Оптимальная наблюдаемая пара геостационарных спутников для азимутального метода не зависит от широты объекта. Одна и та же пара является оптимальной для определения и широты, и долготы объекта.

\* Оптимальная наблюдаемая пара геостационарных спутников для дальномерного метода остается неизменной почти на всем рассматриваемом участке и начинает изменяться только в высоких широтах.



## Заключение

В ходе выполнения работы получены следующие результаты:

Произведена оценка параметров движения морского объекта с использованием дальномерного метода.

Рассмотрен вопрос сходимости метода Ньютона для рассматриваемой задачи.

Найден оптимального базиса, т.е. пары спутников, которая дает минимальную ошибку оценки координат для азимутального и дальномерного методов.

Для азимутального метода проанализированы положения морского объекта, такие, что погрешность линейной модели будет меньше, чем погрешность измерений, а также найдены границы допустимого расположения геостационарных спутников.

## Список литературы:

1. П.Е.Эльясберг Определение движения по результатам измерений. М.:Наука, 1976. 416с.
2. С.Р.Рао Линейные статистические методы и их применения. Наука, 1968.
3. Е.П. Чуров, Е.Ф. Суворов Космические средства судовождения. М.,Транспорт, 1978. 287 с.
4. Б.Ц.Бахшиян, Р.Р.Назирова, П.Е.Эльясберг Определение и коррекция движения (гарантирующий подход). М.:Наука, 1980. 360с.
5. Б.Ц.Бахшиян, Р.Р.Назирова, П.Е.Эльясберг О гарантированных характеристиках точности определения параметров движения космических аппаратов. – Космические исследования, 1977, т.15, №4
6. Chashnikova V. Choosing a measuring basis to estimate parameters of a dynamic object. AIP Conference Proceedings. Volume 1738. June 2016. №160004
7. Chashnikova V. The suitability conditions of linear models for the identification of dynamic systems. AIP Conference Proceedings. Volume 1863. July 2017. №170004