Санкт-Петербургский государственный университет
Факультет прикладной математики — процессов управления
Кафедра математической теории игр и статистических решений

Лахина Юлия Эдуардовна

Выпускная квалификационная работа бакалавра

Оптимальное управление в задаче эксплуатации нескольких ресурсов

Направление 01.03.02

Прикладная математика и информатика

Заведующий кафедрой,
доктор физ.-мат.наук,
профессор
Петросян Л. А.

Научный руководитель,
доктор физ.-мат.наук,
доцент
Громова Е. В.

Рецензент,
кандидат физ.-мат. наук,
доцент
Егоров А. В.

Санкт-Петербург
2018

Содержание

Введение

Модели оптимального управления эксплуатации ресурсов широко применяются в таких науках, как экономика, экология. Это связано с тем, что эксплуатация ресурсов может иметь различные проблемы: исчерпаемость ресурсов, ущерб, наносимый окружающей среде и другие.

Одним из важных вопросов современной экологии является загрязнение окружающей среды. Совсем недавно экономика еще не учитывала затрат на устранение ущерба, наносимому природе. И только в последнее время, когда состояние природы отрицательно сказалось на условиях производства продукции и получении прибыли, стали задумываться о влиянии производственной деятельности на состояние окружающей среды. Поэтому рассмотрение задач оптимального управления эксплуатации ресурсов представляется актуальным.

Огромную роль в современной экономике играет реклама. Она представляет собой неотъемлемую часть производства и оказывает огромное влияние на успешное функционирование фирмы. Одной из важных составляющих экономической деятельности фирмы является грамотная политика денежных вложений в рекламу. В современном мире, в условиях высокой конкуренции, вопрос о ведении эффективной рекламной кампании становится наиболее актуальным.

В первой главе формализуется постановка задачи оптимального управления эксплуатации ресурсов. Рассматриваются различные уравнения динамики и функции выигрыша для соответствующих типов задач оптимального управления. Во второй главе более подробно изучается модель оптимального управления объемами вредных выбросов при производстве взаимозаменяемых товаров для двух игроков при отсутствии абсорбции. Дифференциальная игра изучается в некооперативной постановке. В третьей главе рассматривается теоретико-игровая модель управления объемами инвестиций в рекламу для случая двух фирм, которые конкурируют за объем собственных продаж некоторого однородного продукта с учетом амортизации, которая свойственна рынку. Фирмы могут увеличивать собственные продажи и, следовательно, свою прибыль с помощью рекламы, соответственно задача оптимизации, решаемая фирмой i, заключается в максимизации интегрального выигрыша. Линейно-квадратичная дифференциальная игра изучается в кооперативной и некооперативной постановках. Обе модели рассматривались для случая постоянного экспоненциального дисконтирования. Решение данных задач находится в классе позиционных стратегий. Отбор допустимых решений из множества полученных решений осуществляется двумя способами: с помощью экономического критерия и с помощью классического метода для линейно-квадратичных задач оптимизации (LQR). В последней главе к модели кооперативной игры из третьей главы применяется преобразование фазовой переменной, показывается, что данная замена существенно упрощает решение задачи.

Основная цель и задачи

Основной целью данной работы является исследование дифференциальных игр с несколькими фазовыми переменными, в ходе которого необходимо получить оптимальные решения и рассмотреть вопрос неединственности решения уравнения типа Беллмана, а также предложить способ отбора решения в случае неединственности.

В связи с поставленной целью формулируются следующий задачи:

1) Изучить различные типы задач оптимального управления в дифференциальных играх эксплуатации ресурсов;

2) Рассмотреть некооперативную игру эксплуатации нескольких ресурсов двух игроков;

3) Рассмотреть задачу оптимального управления инвестициями в рекламу в кооперативной и некооперативной постановках для двух игроков, а также изучить различные способы отбора допустимого решения из множества полученных решений;

4) Рассмотреть кооперативную игру оптимального управления инвестициями в рекламную кампанию, применяя преобразование фазовой переменной и показать, что решение данной задачи существенно упрощается.

Обзор литературы

В данной работе рассматривается один из наиболее изученных классов дифференциальных игр — линейно-квадратичные дифференциальные игры. Они имеют многочисленные приложения в экономике [1, 2].

Для определения оптимального поведения фирм-участников рынка целесообразно использовать теоретико-игровой подход [1, 3, 4]. В работе [5] рассматривалась дифференциальная игра управления инвестициями в рекламу для случая трех симметричных фирм, конкурирующих за объем собственных продаж некоторого однородного продукта. При этом амортизация, свойственная рынку, не учитывалась. В работе [6] этот пробел был восполнен, кроме того, задача рассматривалась для случайной продолжительности [7] рекламной кампании.

В работе [8] была рассмотрена игра управления инвестициями в рекламную кампанию для случая n симметричных игроков. Решение линейно-квадратичной задачи [9] разыскивалось в классе позиционных стратегий [10]. Рассматривалась как кооперативная постановка игры [3], так и некооперативная постановка [1,4], в которой находилось равновесие по Нэшу [3].

В статье [11] был предложен метод отбраковки несостоятельных решений из множества допустимых решений задачи оптимального управления. Также в работе [12] рассматривается еще один метод отбора решения из множества допустимых решений — классический метод, используемый для линейно-квадратичных задач оптимизации (LQR).

В статье [13] была предложена замена переменных для линейно-квадратичных дифференциальных игр, позволяющая записать подынтегральную функцию как сумму двух квадратичных членов и константы, что значительно упрощает дальнейшее решение задачи.

В данной работе используется модель с n игроками, предложенная в [6], которая рассматривается в двух вариантах: кооперативном и некооперативном. Задача решается методом динамического программирования [10, 14] для случая $n = 2$ игроков. Также рассмотрен случай применения преобразования [13] для кооперативного варианта игры $n = 2$ игроков. В ходе применения математического аппарата для решения данных задач также изучается вопрос о нахождении корней уравнения четвертой степени методом, предложенным Феррари, который описан в книгах [15, 16].

Глава 1. Оптимальное управление в дифференциальных играх эксплуатации ресурсов

Описание игры

Будем рассматривать дифференциальную игру [17] $\Gamma(t_0, x_0, T)$ n лиц, принадлежащих множеству $N = \{1, \ldots, n\}$, $|N| = n$, как конфликтно-управляемый процесс, где n—количество игроков, t_0 — начальный момент времени, $t_0 \geqslant 0$, T — момент окончания игры и x^0 — начальное состояние игрока, $x_0 > 0$. В качестве игроков в данной игре будем рассматривать кампании, страны, фирмы и т. п.

Динамика игры задается системой обыкновенных дифференциальных уравнений с начальным условием:

$$\dot{x}(t) = f(x, a_1, \ldots, a_n), \quad x(t_0) = x^0, \tag{1}$$

где $x(t) \in X \subseteq \mathbb{R}^m$, $t \in [t_0, T]$, а a_i — управление i-го игрока из множества допустимых управлений этого игрока $\mathcal{U}_i$, которые состоят из множества всех измеримых функций на $[t_0, T]$ в U_i, где U_i—множество допустимых значений управлений i-го игрока, которое представляет собой выпуклое компактное подмножество $\mathbb{R}^k$, такое что $\{0\} \in U_i$. $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \ldots \times \mathcal{U}_n$. $U = U_1 \times \ldots \times U_n$. Если $a_i \in \mathcal{U}_i \subset \mathbb{R}^1$, то $a_i \in [0, a_{max}]$.

Функция $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ непрерывна на множестве $X \times U_1 \times \ldots \times U_n$, липшицева по x, дифференцируема. Тогда, будем говорить, что выполнены условия существования и единственности решений [18] системы дифференциальных уравнений (1) для любого набора допустимых управлений $a_1, \ldots, a_n$.

Игроки конкурируют между собой или объединяются в коалиции для получения некоторого выигрыша и стремятся увеличить свою прибыль. С этой целью они эксплуатируют некие ресурсы. В дальнейшем ограничимся рассмотрением ресурсов следующих видов:

1) природные ресурсы;

Тогда a_i игрока i — скорость извлечения природных ресурсов.

2) загрязнение окружающей среды;

В качестве a_i i-го игрока выступает управление объемом вредных выбросов в окружающую среду.

3) репутация фирмы (гудвилл).

Здесь a_i игрока i — управление объемом инвестиций в рекламную кампанию.

Функция выигрыша

Каждый игрок i имеет свою функцию выигрыша, которую он стремится максимизировать. В кооперативной постановке игры, когда игроки действуют совместно, данная функция принимает следующий вид:

$$K_i(x^0, a_1, \ldots, a_n) \to \max_{a_1, \ldots, a_n}, \quad i = \overline{1, n}.$$

В некооперативной постановке игры, когда игроки действуют независимо друг от друга, функция выигрыша игрока i:

$$K_i(x^0, a_i) \to \max_{a_i}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Мгновенный выигрыш i-го игрока в момент времени $t \in [t_0, T]$ в кооперативном случае определяется следующим образом: $h_i(t, x(t), a_1(t), \ldots, a_n(t))$, где $h_i(\cdot)$ — непрерывная функция, а $x(t)$ — решение задачи Коши для (1). Тогда интегральный выигрыш i-го игрока запишется в виде:

$$K_i(x^0, a_1, \ldots, a_n) = \int_{t_0}^{T} h_i(t, x(t), a_1(t), \ldots, a_n(t))dt, \quad i = \overline{1, n}.$$

Функцию $h_i(\cdot)$ также называют функцией полезности. В случае некооперативной постановки игры она примет вид:

$$h_i(\cdot) = h_i(x, a_i),$$

где управления игроков связаны между собой уравнением динамики: $\dot{x} = a_1 + \ldots + a_n$. Тогда интегральный выигрыш i-го игрока будет следующим:

$$K_i(x^0, a_i) = \int_{t_0}^{T} h_i(t, x(t), a_i(t))dt, \quad i = \overline{1, n}.$$

Рассмотрим некоторые примеры функции полезности.

1) Линейная функция полезности:

$$h_i(\cdot) = Ca + Kx, \quad i = \overline{1, n}$$

2) Линейно-квадратичная функция полезности:

$$h_i(\cdot) = a^T Ca + x^T Kx, \quad i = \overline{1, n},$$
$$h_i(\cdot) = C_1 a + a^T C_2 a + K_1 x + x^T K_2 x, \quad i = \overline{1, n}.$$

3) Степенная функция полезности:

$$h_i(\cdot) = \frac{a_i^\eta}{1 - \eta}, \quad \text{где } \eta \neq 1, \quad i = \overline{1, n}.$$

4) Логарифмическая функция полезности:

$$h_i(\cdot) = ln(a_i), \quad \text{где } \eta = 1, \quad i = \overline{1,n}.$$

5) Альтернативный вид функции полезности:

$$h_i(\cdot) = \sqrt{a_i} - \frac{c_i}{\sqrt{x}} a_i, \quad i = \overline{1,n}.$$

Будем рассматривать игру с бесконечной продолжительностью. Пусть $t_0 = 0$. Тогда для существования несобственного интеграла, которым предстанет функция выигрыша, необходимо подынтегральную функцию домножить на дисконтирующий множитель.

Рассмотрим дисконтирование функцией $\Theta(t)$: $\Theta(0) = 1$, где $\Theta(t)$ — невозрастающая функция, тогда функция выигрыша игрока i:

$$K_i(\cdot) = \int_0^\infty h_i(\cdot)\Theta(t)dt, \quad i = \overline{1,n},$$

Дисконтирующий множитель может быть константой

$$\Theta(t) = \exp^{-\lambda t}, \quad \text{где } \lambda > 0, \quad i = \overline{1,n},$$

или изменяться в соответствии, например, со следующими законами:

$$\Theta(t) = \exp^{-\int_0^t \lambda(s)ds},$$
$$\Theta(t) = \exp^{-\lambda t + \psi(t)},$$
$$\Theta(t) = \beta \exp^{-\gamma t} + (1-\beta)\exp^{-\eta t}.$$

Рассмотрим дисконтирование для игрока i невозрастающей функцией $\Theta_i(t)$: $\Theta_i(0) = 1$. В этом случае функция выигрыша i-го игрока:

$$K_i(\cdot) = \int_0^\infty h_i(\cdot)\Theta_i(t)dt, \quad i = \overline{1,n}.$$

Постоянный дисконтирующий множитель с различными показателями дисконтирования для игроков

$$\Theta_i(t) = \exp^{-\lambda_i t}, \quad i = \overline{1,n}.$$

Тогда в кооперативной постановке суммарный выигрыш, который игроки стремятся максимизировать

$$\sum_{i=1}^n K_i(\cdot) \to \max_{a_1,\dots,a_n}.$$

Постановка задачи оптимального управления

Рассмотрим задачу оптимального управления [3] n игроков на бесконечном интервале для случая кооперации игроков

$$\max_a \int\limits_0^\infty e^{-\rho t} h(t, x(t), a(t))dt, \qquad (2)$$

когда фазовая переменная изменяется в соответствии с (1). $h(t, x(t), a(t)) = \sum_{i=1}^n h_i(t, x(t), a(t))$. Функции $h(t, x(t), a(t))$ и $f(x, a_1, \dots, a_n)$ будем считать дифференцируемыми.

Управление $a^*(t)$, доставляющее максимум функционала (2), будем называть оптимальным управлением.

Оптимальное управление может разыскивается в классе программных стратегий $a_i(t)$, когда стратегии игрока i зависят только от начального состояния игры x^0 и текущего момента времени t, или в классе позиционных стратегии $a_i(x, t)$, когда стратегии игрока i зависят от текущего состояния игры x и текущего момента времени t. В первом случае оптимальное управление игрока i находится в соответствии с принципом максимума Понтрягина, а во втором — с использованием уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана.

Принцип максимума Понтрягина

Для оптимальности управления $a^*(t)$ и соответствующего ему решения $x^*(t)$ (1) необходимо, чтобы существовала такая непрерывная функция $p(t)$ и константа $p_0(t) \geqslant 0$, одновременно не обращающиеся в 0, и для всех $t \geqslant 0$ выполнялись следующие условия:

1. Переменные $x(t)$ и $p(t)$ удовлетворяют системе $2m$ дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i(t) = \rho\, p_i(t) - \frac{\partial H}{\partial x_i}, \end{cases}$$

где $H(x(t), a(t), p(t)) = p_0(t)h(x(t), a(t)) + \langle p(t), g(x(t), a(t))\rangle$ — гамильтониан, соответствующий задаче (2).

2. Для всех t гамильтониан $H(x(t), a(t), p(t))$ достигает своего максимума:

$$H^*(x(t), p(t)) = \max_{a(t)\in U} H(x(t), a(t), p(t)).$$

3. Функция $H(x^*(t), a^*(t), p_0, p(t))$ удовлетворяет условию

$$H(x^0, a^*(0), p_0, p(0)) = \rho\, p_0 \int\limits_0^\infty e^{-\rho t} h(x^*(t), a^*(t)) dt.$$

4. Выполняется условие трансверсальности:

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} e^{-\rho t} H^*(x^*(t), a^*(t), p_0, p(t)).$$

Уравнение Гамильтона – Якоби – Беллмана

Если существует непрерывная по своим аргументам функция $W(t, x(t))$ удовлетворяющая уравнению

$$-\frac{\partial W(t,x)}{\partial t} = \max_{a(t,x) \in U} \left[\frac{\partial W(t,x)}{\partial x} f(x,a) + h(x,a) \right] \qquad (3)$$

с краевым условием $W(T, x(T)) = 0$ и существует допустимое управление $a^*(t, x)$, доставляющее максимум правой части (3), то управление $a^*(t, x)$ является оптимальным, а значение функции Беллмана, вычисленной в начальный момент времени, $W(0, x(0)) = \sum_{i=1}^n K_i(x^0, t_0, a^*)$ равно суммарному выигрышу игроков в игре.

Уравнение (3) называется уравнением Гамильтона – Якоби – Беллмана.

Уравнения динамики в различных типах задач оптимального управления

Будем рассматривать задачу, когда мы эксплуатируем только один ресурс x. Учтем, что ресурсы могут быть возобновляемыми (то есть запасы этих ресурсов восстанавливаются).

Модель оптимального управления эксплуатации ресурса

Рассмотрим первый вид ресурсов — природные. Динамика изменения доступного объема ресурса $x(t)$ описывается дифференциальным уравнением:

1) При отсутствии абсорбции (например: масло, газ, каменный уголь):

$$\dot{x}(t) = -\sum_{i=1}^n a_i, \quad x(t_0) = x^0, \quad x^0 > 0.$$

2) В случае возобновляемого ресурса (например: рыба, лес, вода):

$$\dot{x}(t) = -\sum_{i=1}^{n} a_i + \delta x, \quad x(t_0) = x^0, \quad x^0 > 0.$$

Здесь a_i — усилия, затрачиваемые игроком i на извлечение ресурса, $a_i \geqslant 0$, δ — коэффициент возобновления ресурса.

Ресурс может только убывать. Процесс добычи заканчивается при исчерпании данного ресурса.

Модель оптимального управления объемом вредных выбросов

Следующая модель — производство (загрязнение окружающей среды). В этом случае $x(t)$ — объем загрязнения в момент времени t. Тогда динамика накопления ресурса задается следующим уравнением:

1) При отсутствии абсорбции:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i, \quad x(t_0) = x^0, \quad x^0 \geqslant 0. \tag{4}$$

2) Если ресурс возобновляемый:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \delta x, \quad x(t_0) = x^0, \quad x^0 \geqslant 0. \tag{5}$$

Под a_i будем понимать интенсивность выброса вредных веществ игроком i в окружающую среду, $a_i \geqslant 0$, а δ — доля естественной очистки загрязнения.

Модель оптимального управления инвестициями в рекламу

Последний тип рассматриваемых ресурсов — репутация фирмы (гудвилл). Здесь $x(t)$ — значение репутации фирмы в текущий момент времени t. Уравнение динамики принимает вид (4) при отсутствии абсорбции, а если ресурс возобновляемый, то

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} b_i a_i - \delta x, \quad x(t_0) = x^0, \quad x^0 \geqslant 0,$$

где a_i — объем капитальных вложений в рекламную кампанию в единицу времени, $a_i \geqslant 0$, b_i — влияние инвестиций в рекламу на накопление гудвилла, $b_i \geqslant 0$, а δ — коэффициент амортизации, $\delta \geqslant 0$.

Теперь рассмотрим задачу нескольких ресурсов $x_1, x_2, ..., x_n$. Для всех трех моделей оптимального управления динамика будет описываться системой дифференциальных уравнений

1) "Независимые движения":

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= a_1, \qquad x_1(t_0) = x_1^0, \\ \dot{x}_2(t) &= a_2, \qquad x_2(t_0) = x_2^0, \\ &\qquad\qquad\qquad \dots \\ \dot{x}_n(t) &= a_n, \qquad x_n(t_0) = x_n^0. \end{aligned}$$

2) В случае возобновляемых ресурсов:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= a_1 - \delta_1 x_1, \qquad x_1(t_0) = x_1^0, \\ \dot{x}_2(t) &= a_2 - \delta_2 x_2, \qquad x_2(t_0) = x_2^0, \\ &\qquad\qquad\qquad \dots \\ \dot{x}_n(t) &= a_n - \delta_n x_n, \qquad x_n(t_0) = x_n^0. \end{aligned}$$

Функции выигрыша в различных типах задач оптимального управления

Функция мгновенного выигрыша игрока i обычно рассматривается в виде

$$h_i(x, a) = r_i(a) - d_i(x), \quad i = \overline{1, n},$$

где $r_i(a)$ — мгновенный доход игрока i, который зависит от его управления, и, возможно, от управлений других игроков, $r_i(a) \geqslant 0$, $a > 0$ и при $a_i = 0$: $r_i(a) = 0$. $d_i(x)$ — эксплуатационный расход игрока i, зависящий от переменных состояния. В большинстве случаев $d_i(x) = d_i x$, где $d_i > 0$.

Модель оптимального управления объемом вредных выбросов

Функция дохода от производства незаменимых товаров

$$r_i(a) = (k - \frac{1}{2}a_i)a_i, \quad k > 0, \quad i = \overline{1, n},$$

где $c(a_i) = k - \frac{1}{2}a_i$ — цена товара, функция $c(a_i)$ убывает, $a_i \in [0, k]$. Количество произведенных товаров пропорционально управлению a_i, тогда общий доход игрока i будет определяться как произведение цены товаров на количество произведенных товаров. В данном случае под $d_i(x)$ понимаются штрафы, связанные с загрязнением окружающей среды или затраты на сокращение вредных выбросов.

В этом случае выигрыш i-го игрока запишется в следующем виде:

$$K_i(x,a) = \int\limits_0^{\infty} e^{-\rho t}\left(\left[k - \frac{1}{2}a_i(t)\right]a_i(t) - d_i x(t)\right)dt, \quad i = \overline{1,n},$$

где $x(t)$ может удовлетворять либо (4), либо (5) в зависимости от типа ресурса.

Функция дохода от производства взаимозаменяемых товаров

$$r_i(a) = (k - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i)a_i, \quad k > 0, \quad i = \overline{1,n}.$$

Здесь $a_i \in [0, \frac{k}{n}]$. Функция цены зависит от общего количества однотипных товаров, производимых всеми игроками.

Тогда выигрыш i-го игрока

$$K_i(x,a) = \int\limits_0^{\infty} e^{-\rho t}\left(\left[k - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i(t)\right]a_i(t) - d_i x(t)\right)dt, \quad i = \overline{1,n}.$$

$x(t)$ также удовлетворяет либо (4), либо (5).

Модель оптимального управления инвестициями в рекламу

Мгновенный выигрыш игрока i в данной модели зависит от состояний всех остальных игроков и запишется в виде

$$h_i(x,a) = \left[\left(\beta - \sum_{i=1}^{n} x_i\right)x_i\right] - \frac{1}{2}\alpha_i a_i^2, \quad i = \overline{1,n},$$

где $\alpha_i > 0$.

Здесь в качестве дохода игрока i будем понимать его объем продаж

$$r_i(x) = \left(\beta - \sum_{i=1}^{n} x_i\right)x_i, \quad \beta > 0, \quad i = \overline{1,n},$$

а за расходы игрока i будем принимать стоимость затрат на рекламу

$$d_i(a) = \frac{1}{2}\alpha_i a_i^2, \quad i = \overline{1,n}.$$

Тогда интегральный выигрыш i-го игрока примет вид

$$K_i(a_i) = \int\limits_0^\infty e^{-\rho t}\left(\left[\left(\beta - \sum_{i=1}^n x_i\right)x_i\right] - \frac{1}{2}c_i a_i^2 dt\right), \quad i = \overline{1,n}.$$

Глава 2. Игра эксплуатации нескольких ресурсов

Постановка задачи

Пусть изменение загрязнения окружающей среды x_i фирмы i описывается ОДУ

$$\dot{x}_i = a_i, \quad i = \overline{1,n}, \quad x_i(0) = x_0^i \geqslant 0, \tag{6}$$

где a_i — поток выбросов игрока i (количество выбросов за единицу времени), $a_i \geqslant 0$, x_i — общее количество выбросов, x_0^i — начальное количество выбросов игрока i. Пусть $y_i = m_i a_i$ — поток продукта, произведенного игроком i. Функция выигрыша игрока i имеет следующий вид:

$$J_i(a_i) = \int\limits_0^\infty e^{-\rho t}\left(\pi\left[\left(k - \sum_{h=1}^n y_h\right) + \beta\right] y_i - d_i x_i\right) dt, \tag{7}$$

где π — коэффициент пропорциональности, k— требуемый (максимальный) поток продукта, $\pi\left[\left(k - \sum\limits_{h=1}^n y_h\right) + \beta\right] y_i(t)$ — цена продукта, β — базовая цена продукта в условиях полного насыщения рынка, а $d_i x_i$ —затраты на борьбу с загрязнением.

Для простоты положим $m_i = 1$, $d_i = 1$, а $\beta = 0$. Тогда интегральный функционал (7) примет вид:

$$J_i(a_i) = \int\limits_0^\infty e^{-\rho t}\left(\pi\left(k - \sum_{h=1}^n a_h\right) a_i - x_i\right) dt. \tag{8}$$

Некооперативный вариант игры

Рассмотрим некооперативную игру. Пусть игроки не смогли договориться до начала игры. В варианте конкуренции будем искать равновесие по Нэшу.

Определение 1 *Набор управлений $a^{NE} = \{a_1^{NE}, \ldots, a_n^{NE}\}$ называется равновесием по Нэшу если*

$$J_i(a^{NE}) \geqslant J_i(a^{NE}||a_i),$$

где $a^{NE}||a_i = \{a_1^{NE}, \ldots, a_{i-1}^{NE}, a_i, a_{i+1}^{NE}, \ldots, a_n^{NE}\}$, $a_i \in U$, $i \in N$.

Рассматриваем случай двух игроков, то есть считаем, что $n = 2$.

Пусть $V_i(x)$ — непрерывно-дифференцируемая функция Беллмана, которая является решением уравнения Гамильтона – Якоби – Беллмана:

$$\rho V_i(x) = \max_{a_i \geqslant 0, a_j^{NE}} \left\{ \pi\left(k - \sum_{h=1}^{2} a_h\right) a_i - x_i + \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial V_i}{\partial x_i} a_i \right\}, \quad i, j = \overline{1,2}, j \neq i. \quad (9)$$

Выберем следующий вид функции Беллмана

$$V_i(x) = x' \begin{bmatrix} q_{i1} & \frac{q_{i2}}{2} \\ \frac{q_{i2}}{2} & q_{i3} \end{bmatrix} x + x'[w_{i1},\, w_{i2}]' + z_i, \quad i = \overline{1,2}, \quad (10)$$

или

$$V_1(x) = q_{11}x_1^2 + q_{12}x_1x_2 + q_{13}x_2^2 + x_1w_{11} + x_2w_{12} + z_1,$$
$$V_2(x) = q_{21}x_1^2 + q_{22}x_1x_2 + q_{23}x_2^2 + x_1w_{21} + x_2w_{22} + z_2,$$

и эти функции имеют частные производные

$$\frac{\partial V_1(x)}{\partial x_1} = 2q_{11}x_1 + q_{12}x_2 + w_{11}; \quad \frac{\partial V_2(x)}{\partial x_2} = q_{22}x_1 + 2q_{23}x_2 + w_{22}.$$

Подставляя функцию $V_i(x)$,$i = \overline{1,2}$ и ее частные производные в (9), получаем

$$\rho\left(q_{11}x_1^2 + q_{12}x_1x_2 + q_{13}x_2^2 + x_1w_{11} + x_2w_{12} + z_1\right) = \max_{a_1 \geq 0, a_2^{NE}} \Big\{ \pi(k - a_1 - a_2)a_1 -$$
$$- x_1 + a_1(2q_{11}x_1 + q_{12}x_2 + w_{11}) + a_2(q_{22}x_1 + 2q_{23}x_2 + w_{22}) \Big\};$$
$$\rho\left(q_{21}x_1^2 + q_{22}x_1x_2 + q_{23}x_2^2 + x_1w_{21} + x_2w_{22} + z_2\right) = \max_{a_2 \geq 0, a_1^{NE}} \Big\{ \pi(k - a_1 - a_2)a_2 -$$
$$- x_2 + a_1(2q_{11}x_1 + q_{12}x_2 + w_{11}) + a_2(q_{22}x_1 + 2q_{23}x_2 + w_{22}) \Big\}. \quad (11)$$

Рассмотрим функции

$$F(a_1, a_2^{NE}) = \pi[k - a_1 - a_2]a_1 - x_1 + a_1(2q_{11}x_1 + q_{12}x_2 + w_{11}) + a_2(q_{22}x_1 + 2q_{23}x_2 + w_{22});$$
$$F(a_2, a_1^{NE}) = \pi[k - a_1 - a_2]a_2 - x_2 + a_1(2q_{11}x_1 + q_{12}x_2 + w_{11}) + a_2(q_{22}x_1 + 2q_{23}x_2 + w_{22}),$$

и найдем ее частные производные

$$\frac{\partial F(a_1, a_2^{NE})}{\partial a_1} = \pi k - 2\pi a_1 - \pi a_2 + 2q_{11}x_1 + q_{12}x_2 + w_{11},$$

$$\frac{\partial F(a_2, a_1^{NE})}{\partial a_2} = \pi k - \pi a_1 - 2\pi a_2 + 2q_{11}x_1 + q_{12}x_2 + w_{11}.$$

С необходимостью приравняем их к нулю и получим оптимальные управления следующего вида:

$$a_1^* = \frac{k}{3} + \frac{(4q_{11} - q_{22})x_1 + 2(q_{12} - q_{23})x_2 + 2w_{11} - w_{22}}{3\pi}; \tag{12}$$

$$a_2^* = \frac{k}{3} + \frac{2(q_{22} - q_{11})x_1 + (4q_{23} - q_{12})x_2 + 2w_{22} - w_{11}}{3\pi}. \tag{13}$$

Подставим (12) и (13) в исходные уравнения (11), раскроем скобки, приведем подобные и методом неопределенных коэффициентов придем к следующим двум системам уравнений. Из первого уравнения (11):

$$x_1^2 : 16{q_{11}}^2 - q_{11}(14q_{22} + 9\pi\rho) + 7{q_{22}}^2 = 0;$$

$$x_1x_2 : 4q_{11}(4q_{12} - 7q_{23}) + 7q_{22}(4q_{23} - q_{12}) = 9\pi q_{12}\rho;$$

$$x_1 : \pi k(8q_{11} + q_{22}) - 9\pi = w_{11}(9\pi\rho - 16q_{11} + 7q_{22}) + 14w_{22}(q_{11} - q_{22}); \tag{14}$$

$$x_2^2 : 4{q_{12}}^2 - 14q_{12}q_{23} + 28{q_{23}}^2 = 9\pi q_{13}\rho;$$

$$x_2 : 9\pi\rho w_{12} - 2\pi k(2q_{12} + q_{23}) = 2w_{11}(4q_{12} - 7q_{23}) + 7w_{22}(4q_{23} - q_{12}); \tag{15}$$

$$x_1^0x_2^0 : \pi k(4w_{11} + w_{22}) - 7w_{11}w_{22} + 4{w_{11}}^2 + 7{w_{22}}^2 = 9\pi\rho z_1 - \pi^2k^2. \tag{16}$$

Из второго уравнения (11) получим

$$x_1^2 : 28{q_{11}}^2 - 14q_{11}q_{22} + 4{q_{22}}^2 = 9\pi q_{21}\rho;$$

$$x_1x_2 : 28q_{11}(q_{23} - q_{12}) = q_{22}(16q_{23} - 7q_{12} - 9\pi\rho);$$

$$x_1 : 9\pi\rho w_{21} - 2\pi k(q_{11} + 2q_{22}) = 7w_{11}(4q_{11} - q_{22}) + 2w_{22}(4q_{22} - 7q_{11}); \tag{17}$$

$$x_2^2 : 16{q_{23}}^2 - q_{23}(14q_{12} + 9\pi\rho) + 7{q_{12}}^2 = 0;$$

$$x_2 : \pi k(q_{12} + 8q_{23}) - 9\pi = 14w_{11}(q_{23} - q_{12}) + w_{22}(7q_{12} - 16q_{23} + 9\pi\rho); \tag{18}$$

$$x_1^0x_2^0 : \pi k(w_{11} + 4w_{22}) - 7w_{11}w_{22} + 7{w_{11}}^2 + 4{w_{22}}^2 = 9\pi\rho z_2 - \pi^2k^2. \tag{19}$$

Рассмотрим систему из шести уравнений, которые зависят только от

$q_{11}, q_{12}, q_{13}, q_{21}, q_{22}, q_{23}$:

$$16{q_{11}}^2 - q_{11}(14q_{22} + 9\pi\rho) + 7{q_{22}}^2 = 0; \tag{20}$$

$$4q_{11}(4q_{12} - 7q_{23}) + 7q_{22}(4q_{23} - q_{12}) = 9\pi q_{12}\rho; \tag{21}$$

$$4{q_{12}}^2 - 14q_{12}q_{23} + 28{q_{23}}^2 = 9\pi q_{13}\rho; \tag{22}$$

$$28{q_{11}}^2 - 14q_{11}q_{22} + 4{q_{22}}^2 = 9\pi q_{21}\rho; \tag{23}$$

$$28q_{11}(q_{23} - q_{12}) = q_{22}(16q_{23} - 7q_{12} - 9\pi\rho); \tag{24}$$

$$16{q_{23}}^2 - q_{23}(14q_{12} + 9\pi\rho) + 7{q_{12}}^2 = 0. \tag{25}$$

Из (20) и (25) выразим

$$q_{11} = \frac{1}{32}(14q_{22} + 9\pi\rho \pm \sqrt{-252{q_{22}}^2 + 252q_{22}\pi\rho + 81\pi^2\rho^2}),$$

$$q_{23} = \frac{1}{32}(14q_{12} + 9\pi\rho \pm \sqrt{-252{q_{12}}^2 + 252q_{12}\pi\rho + 81\pi^2\rho^2}).$$

Введем следующие обозначения:

$$D_{22} = -252{q_{22}}^2 + 252q_{22}\pi\rho + 81\pi^2\rho^2, \quad D_{12} = -252{q_{12}}^2 + 252q_{12}\pi\rho + 81\pi^2\rho^2.$$

Сложим (21) и (24)

$$4q_{11}q_{12} - 4q_{22}q_{23} + 3\pi\rho(q_{12} - q_{22}) = 0,$$

и подставим в это равенство q_{11} и q_{23}. Тогда получим:

$$33\pi\rho(q_{12} - q_{22}) \pm q_{12}\sqrt{D_{22}} = \pm q_{22}\sqrt{D_{12}},$$

и возведем обе части этого равенства в квадрат:

$$(q_{12}-q_{22})(33^2\pi^2\rho^2(q_{12}-q_{22}) \pm 66\pi\rho q_{12}\sqrt{D_{22}} + 252\pi\rho q_{12}q_{22} + 81\pi^2\rho^2(q_{12}+q_{22})) = 0.$$

Получаем, что либо $q_{12} = q_{22}$, либо

$$363\pi\rho(q_{12} - q_{22}) + 84q_{12}q_{22} + 27\pi\rho(q_{12} + q_{22}) = \mp 22q_{12}\sqrt{D_{22}}. \tag{26}$$

Рассмотрим случай, когда $q_{12} = q_{22}$. Тогда из этого следует, что $q_{11} = q_{23}$, но тогда и $q_{13} = q_{21}$. Учитывая это, получаем, что равенства (20) и (25), (21) и (24), (22) и (23) идентичные, тогда система (20)-(25) из шести уравнений сведется к системе из трех уравнений:

$$\begin{aligned} 16{q_{11}}^2 - q_{11}(14q_{22} + 9\pi\rho) + 7{q_{22}}^2 = 0; \\ 44q_{11}q_{22} - 28q_{11}^2 - 7q_{22}^2 = 9\pi q_{22}\rho; \\ 4{q_{22}}^2 - 14q_{22}q_{11} + 28{q_{11}}^2 = 9\pi q_{13}\rho. \end{aligned} \tag{27}$$

Из второго уравнения этой системы выразим

$$q_{11} = \frac{1}{14}(11q_{22} \pm 3\sqrt{8q_{22}^2 - 7q_{22}\pi\rho}), \tag{28}$$

и, подставив (28) в первое уравнение системы (27), найдем

$$q_{22} = \pi\rho = q_{12}. \tag{29}$$

Тогда при подстановке (29) в (28) получим

$$q_{11} = \frac{4\pi\rho}{7} = q_{23}. \tag{30}$$

Учитывая (29) и (30), из последнего уравнения системы (27) находим

$$q_{13} = \frac{4\pi\rho}{7} = q_{21}. \tag{31}$$

Учитывая равенства $q_{12} = q_{22}$, $q_{11} = q_{23}$ и уравнения (14), (18), получаем, что $w_{11} = w_{22} = \dfrac{k\pi(q_{22} + 8q_{11}) - 9\pi}{9\pi\rho - 7q_{22} - 2q_{11}}$, тогда

$$w_{11} = \frac{13k\pi - 21}{2\rho} = w_{22}. \tag{32}$$

Учитывая равенства $q_{12} = q_{22}$, $q_{11} = q_{23}$, $w_{11} = w_{22}$ и уравнения (15), (17), получаем, что $w_{12} = w_{21} = \dfrac{2k\pi(2q_{22} + q_{11}) + w_{11}(14q_{11} + q_{22})}{9\pi\rho}$, тогда

$$w_{12} = \frac{8k\pi\rho + 91k\pi - 147}{14\rho} = w_{21}. \tag{33}$$

Учитывая равенство $w_{11} = w_{22}$ и уравнения (16), (19), получаем, что $z_1 = z_2 = \dfrac{k^2\pi^2 + 5k\pi w_{11} + 4w_{11}^2}{9\pi\rho}$, тогда

$$z_1 = \frac{(k\pi(26 + \rho) - 42)(k\pi(13 + 2\rho) - 21)}{18\pi\rho^3} = z_2. \tag{34}$$

Получили решения (29)-(34) систем уравнений (14)-(25). Уравнение (26) разрешается аналогично.

Таким образом, получили решение уравнения (9) $V_i(G)$, $i = \overline{1, n}$, со следующими коэффициентами:

$$q_{11} = \frac{4\pi\rho}{7}, q_{12} = \pi\rho, q_{13} = \frac{4\pi\rho}{7}, q_{21} = \frac{4\pi\rho}{7}, q_{22} = \pi\rho, q_{23} = \frac{4\pi\rho}{7},$$

$$w_{11} = \frac{13k\pi - 21}{2\rho}, \quad w_{12} = \frac{8k\pi\rho + 91k\pi - 147}{14\rho},$$

$$w_{21} = \frac{8k\pi\rho + 91k\pi - 147}{14\rho}, \quad w_{22} = \frac{13k\pi - 21}{2\rho},$$

$$z_1 = \frac{(k\pi(26+\rho) - 42)(k\pi(13+2\rho) - 21)}{18\pi\rho^3},$$

$$z_2 = \frac{(k\pi(26+\rho) - 42)(k\pi(13+2\rho) - 21)}{18\pi\rho^3}.$$

Оптимальные управления первого и второго игрока соответственно принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} a_1^* &= \frac{k}{3} + \frac{\rho}{7}(2x_1 + 3x_2) + \frac{13k\pi - 21}{2\rho}, \\ a_2^* &= \frac{k}{3} + \frac{\rho}{7}(3x_1 + 2x_2) + \frac{13k\pi - 21}{2\rho}. \end{aligned} \tag{35}$$

Глава 3. Оптимальное управление инвестициями в рекламу на рынке однородной продукции

Постановка задачи

Пусть динамика накопления репутации (гудвилл) G_i фирмы i описывается ОДУ [4]

$$\dot{G}_i = ka_i - \delta G_i, \quad G_i(0) = G_0^i > 0, \quad i = \overline{1,n}, \tag{36}$$

где $k \geqslant 0$ — характеристика рынка, отвечающая за влияние рекламы на накопление гудвилла (чем больше k, тем более восприимчив рынок к воздействию рекламы), a_i — управление игрока i (объем инвестиций за единицу времени), $a_i \geqslant 0$, δ — коэффициент амортизации, $\delta \geqslant 0$, G_0^i — значение гудвилла игрока i в начальный момент времени. Будем считать, что $k = 1$. Функция выигрыша игрока i имеет следующий вид:

$$J_i(a_i) = \int\limits_0^\infty e^{-\rho t}\left(\pi\left[\beta - \sum_{h=1}^n G_h\right]G_i - \frac{c}{2}a_i^2\right)dt, \quad i = \overline{1,n}, \tag{37}$$

где π — предельная прибыль рынка, т. е. прибыль за продажу единицы товара, $\left[\theta - \sum\limits_{h=1}^n G_h(t)\right]G_i(t)$ — объем продаж фирмы i в момент t, а $\frac{c}{2}a_i^2$ — стоимость рекламных усилий (затраты).

Кооперативный вариант игры

Рассмотрим кооперативный вариант игры [3]. Пусть до начала игры фирмы договорились об использовании оптимальных управлений, максимизирующих их суммарный выигрыш.

Общая сумма выигрышей имеет вид

$$J(a) = \int\limits_0^\infty e^{-\rho t}\left[-\mathbf{G}'Q\mathbf{G} + \mathbf{q}'\mathbf{G} - \frac{1}{2}\mathbf{a}'R\mathbf{a}\right]dt, \tag{38}$$

где $Q = \pi \cdot \mathbf{1}_{[n\times n]}$, $\mathbf{q} = \pi\beta \cdot \mathbf{1}_{[n\times 1]}$, $R = c \cdot E_n$. Будем искать решение данной линейно-квадратичной задачи [9] в классе позиционных стратегий [10].

Пусть $V(G)$ — непрерывно-дифференцируемая функция Беллмана, которая является решением уравнения Гамильтона – Якоби – Беллмана:

$$\rho V(G) = \max_{\{a_1,\dots,a_n\}}\left\{\pi\left[\beta - \sum_{h=1}^n G_h\right]\sum_{i=1}^n G_i - \frac{c}{2}\sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial G_i}\left(a_i - \delta G_i\right)\right\} \tag{39}$$

В качестве решения уравнения (39) будем рассматривать функцию [1, 10]

$$V(G) = \alpha + \frac{\varepsilon}{2}\sum_i G_i^2 + \frac{\eta}{2}\sum_{i\neq j} G_iG_j + \gamma\sum_i G_i. \tag{40}$$

Предполагаем, что $n = 2$, тогда $V(G) = \alpha + \frac{\varepsilon}{2}\left(G_1^2 + G_2^2\right) + \eta G_1G_2 + \gamma(G_1 + G_2)$, и эта функция имеет частные производные

$$\frac{\partial V(G)}{\partial G_1} = \varepsilon G_1 + \eta G_2 + \gamma, \quad \frac{\partial V(G)}{\partial G_2} = \varepsilon G_2 + \eta G_1 + \gamma.$$

Подставляя функцию $V(G)$ и ее частные производные в (39), получаем

$$\rho(\alpha + \frac{\varepsilon}{2}\left(G_1^2 + G_2^2\right) + \eta G_1G_2 + \gamma(G_1 + G_2)) =$$

$$= \max_{a_1,a_2\geqslant 0}\Bigg\{\pi[\beta - G_1 - G_2](G_1 + G_2) - \frac{c}{2}\left(a_1^2 + a_2^2\right) + (\varepsilon G_1 + \eta G_2 + \gamma)\times$$

$$\times(a_1 - \delta G_1) + (\varepsilon G_2 + \eta G_1 + \gamma)(a_2 - \delta G_2)\Bigg\}.$$

Рассмотрим функцию

$$F(a_1, a_2) = \pi[\beta - G_1 - G_2](G_1 + G_2) - \frac{c}{2}\left(a_1^2 + a_2^2\right) + (\varepsilon G_1 + \eta G_2 + \gamma)\times$$

$$\times(a_1 - \delta G_1) + (\varepsilon G_2 + \eta G_1 + \gamma)(a_2 - \delta G_2),$$

и найдем ее частные производные

$$\frac{\partial F(a)}{\partial a_1} = -ca_1 + \varepsilon G_1 + \eta G_2 + \gamma,$$

$$\frac{\partial F(a)}{\partial a_2} = -ca_2 + \varepsilon G_2 + \eta G_1 + \gamma.$$

С необходимостью приравняем их к нулю и найдем зависимость a_1 и a_2 от $\varepsilon, \eta, \gamma$:

$$a_1^* = \frac{1}{c}(\varepsilon G_1 + \eta G_2 + \gamma), \quad a_2^* = \frac{1}{c}(\varepsilon G_2 + \eta G_1 + \gamma).$$

Получаем вектор $(\mathbf{a}^*)' = (a_1^*, a_2^*)$ и подставляем его в (39). Тогда в матричном виде

$$\rho V(G) = -\mathbf{G}'Q\mathbf{G} + \mathbf{q}'\mathbf{G} - \frac{1}{2}(a')^*R\mathbf{a}^*,$$

или, расписывая покомпонентно, имеем

$$\rho(\alpha + \frac{\varepsilon}{2}\left(G_1^2 + G_2^2\right) + \eta G_1 G_2 + \gamma(G_1 + G_2)) = \pi[\beta - G_1 - G_2](G_1 + G_2) -$$

$$-\frac{1}{2c}\left((\varepsilon G_1 + \eta G_2 + \gamma)^2 + (\varepsilon G_2 + \eta G_1 + \gamma)^2\right) + (\varepsilon G_1 + \eta G_2 + \gamma)\times$$

$$\times\Big(\frac{1}{c}\left(\varepsilon G_1 + \eta G_2 + \gamma\right) - \delta G_1\Big) + (\varepsilon G_2 + \eta G_1 + \gamma)\Big(\frac{1}{c}\left(\varepsilon G_2 + \eta G_1 + \gamma\right) - \delta G_2\Big).$$

Раскроем скобки и с помощью метода неопределенных коэффициентов найдем $\alpha, \varepsilon, \eta, \gamma$:

$$G_1^2 : \pi = \frac{1}{2c}\left(\varepsilon^2 + \eta^2\right) - \varepsilon\left(\delta + \frac{\rho}{2}\right), \tag{41}$$

$$G_2^2 : \pi = \frac{1}{2c}\left(\varepsilon^2 + \eta^2\right) - \varepsilon\left(\delta + \frac{\rho}{2}\right),$$

$$G_1 G_2 : 2\varepsilon\eta = c\eta(\rho + 2\delta) + 2\pi c, \tag{42}$$

$$G_1 : c\pi\beta = \gamma(c(\rho + \delta) - (\varepsilon + \eta)), \tag{43}$$

$$G_2 : c\pi\beta = \gamma(c(\rho + \delta) - (\varepsilon + \eta)),$$

$$G_1^0 G_2^0 : \rho\alpha = \frac{\gamma^2}{c}. \tag{44}$$

Найдем из уравнения (43)

$$\gamma = \frac{c\pi\beta}{c(\rho + \delta) - (\varepsilon + \eta)}. \tag{45}$$

Выразим из уравнения (44) с учетом (45)

$$\alpha = \frac{c\pi^2\beta^2}{\rho(c(\rho + \delta) - (\varepsilon + \eta))}. \tag{46}$$

Решим неполное квадратное уравнение (41) относительно η:

$$\eta = \pm\sqrt{2c\pi - \varepsilon^2 + 2c\varepsilon\left(\delta + \frac{\rho}{2}\right)}. \tag{47}$$

Подставим (47) в (42), получим уравнение с одним неизвестным компонентом ε:

$$\pm\sqrt{2c\pi - \varepsilon^2 + 2c\epsilon\left(\delta + \frac{\rho}{2}\right)}(2\varepsilon - c(\rho + 2\delta)) = 2c\pi. \tag{48}$$

Возведем правую и левую части (48) в квадрат и получим уравнение четвертой степени относительно ε:

$$4\varepsilon^4-\varepsilon^3 8c(2\delta+\rho)+\varepsilon^2 c(-8\pi+20c\rho\delta+5c\rho^2+20c\delta^2)-\varepsilon c^2(-8\pi\rho-16\pi\delta+6c\rho^2\delta+$$

$$+c\rho^3+12c\rho\delta^2+8c\delta^3)+2\pi c^2(2\pi-c\rho^2-4c\rho\delta-4c\delta^2)=0. \tag{49}$$

Уравнение четвертой степени всегда имеет аналитическое решение в радикалах в общем виде (при любом значении коэффициентов). Это решение можно найти, например, методом Феррари или методом Декарта-Эйлера [15]. В силу громоздкости решения, полученного путем применения данных методов, будем рассматривать пример с определенными числовыми коэффициентами. Это сильно упростит задачу, и полученное в этом случае неединственное решение будет нетрудно в дальнейшем изучать с применением подходов из области экономического анализа для отбраковки несостоятельных с точки зрения экономики решений, а также при помощи математического аппарата, используемого для линейно-квадратичных задач оптимизации (LQR) [12] .

Пример

Рассмотрим численный пример.

Пусть $\delta=\frac{1}{2}$, $c=1$, $\rho=2$. Тогда уравнение (49) примет следующий вид:

$$4\varepsilon^4-24\varepsilon^3+(45-8\pi)\varepsilon^2-(27-24\pi)\varepsilon+2\pi(2\pi-9)=0. \tag{50}$$

Разрешая это уравнение относительно ε, получаем следующее:

$$\varepsilon=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}(3-\sqrt{16\pi+9})\\ \frac{1}{4}(9-\sqrt{16\pi+9})\\ \frac{1}{4}(3+\sqrt{16\pi+9})\\ \frac{1}{4}(9+\sqrt{16\pi+9})\end{bmatrix}. \tag{51}$$

Подставляя (51) в (47), получим следующие значения для η:

$$\eta = \begin{bmatrix} \dfrac{-4\pi}{3+\sqrt{16\pi+9}} \\ \dfrac{4\pi}{3-\sqrt{16\pi+9}} \\ \dfrac{4\pi}{\sqrt{16\pi+9}-3} \\ \dfrac{4\pi}{3+\sqrt{16\pi+9}} \end{bmatrix}. \tag{52}$$

Тогда, подставляя (51) и (52) в (45) и (46), найдем γ и α:

$$\gamma = \begin{bmatrix} \dfrac{2\pi\beta(3+\sqrt{16\pi+9})}{5(3+\sqrt{16\pi+9})+16\pi} \\ \dfrac{2\pi\beta(3-\sqrt{16\pi+9})}{\sqrt{16\pi+9}-3-16\pi} \\ \dfrac{2\pi\beta(\sqrt{16\pi+9}-3)}{5(\sqrt{16\pi+9}-3)-16\pi} \\ \dfrac{-2\pi\beta(\sqrt{16\pi+9}+3)}{3+\sqrt{16\pi+9}+16\pi} \end{bmatrix}, \alpha = \begin{bmatrix} \dfrac{\pi^2\beta^2(3+\sqrt{16\pi+9})}{5(3+\sqrt{16\pi+9})+16\pi} \\ \dfrac{\pi^2\beta^2(3-\sqrt{16\pi+9})}{\sqrt{16\pi+9}-3-16\pi} \\ \dfrac{\pi^2\beta^2(\sqrt{16\pi+9}-3)}{5(\sqrt{16\pi+9}-3)-16\pi} \\ \dfrac{-\pi^2\beta^2(\sqrt{16\pi+9}+3)}{3+\sqrt{16\pi+9}+16\pi} \end{bmatrix}. \tag{53}$$

Получили решения (51)-(53) системы уравнений (41)-(44).

Отбор допустимого решения из множества полученных решений с помощью экономического критерия

Чтобы отобрать допустимые решения из множества полученных решений, используем следующий экономический подход [11]: если маргинальную прибыль (прибыль за продажу единицы товара) приравнять к нулю, то общий доход должен также равняться нулю.

Используя обозначения нашей модели, сформулируем данный критерий.

Критерий (Bass et.al., 2005) 1 *Пусть в задаче маргинальная полезность $\pi = 0$. Тогда с необходимостью имеем общий доход $V(G) = 0$, где $V(G)$ – функция Беллмана, соответствующая искомому максимуму в (38).*

Пусть $\pi = 0$, тогда условию

$$\varepsilon = 0, \quad \eta = 0, \quad \alpha = 0, \quad \gamma = 0,$$

удовлетворяют только коэффициенты, которые соответствуют первой компоненте решения (51)-(53).

Отбор допустимого решения из множества полученных решений с помощью математического аппарата

Напомним, что функция Беллмана $V(G)$ представляет собой сумму квадратичного члена, линейного члена и константы. Рассмотрим матрицу M квадратичной формы:

$$M = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \varepsilon & \eta \\ \eta & \varepsilon \end{bmatrix},$$

которая имеет два собственных числа $\lambda_1 = \varepsilon - \eta$, $\lambda_2 = \varepsilon + \eta$, соответствующих собственным векторам $v_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}'$, $v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}'$.

Будем рассматривать матрицу M для различных компонент решения (51)-(52):

- $\varepsilon = \frac{1}{4}(3 - \sqrt{16\pi + 9})$, $\quad \eta = \dfrac{-4\pi}{3 + \sqrt{16\pi + 9}}$.

  Тогда
  $$M = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{1}{4}(3 - \sqrt{16\pi + 9}) & \dfrac{-4\pi}{3 + \sqrt{16\pi + 9}} \\ \dfrac{-4\pi}{3 + \sqrt{16\pi + 9}} & \frac{1}{4}(3 - \sqrt{16\pi + 9}) \end{bmatrix},$$
  $\lambda_1 = 0$, $\quad \lambda_2 = \dfrac{-8\pi}{3 + \sqrt{16\pi + 9}}$. Учитывая, что $\pi > 0$, получим $\lambda_2 < 0$.

- $\varepsilon = \frac{1}{4}(9 - \sqrt{16\pi + 9})$, $\quad \eta = \dfrac{4\pi}{3 - \sqrt{16\pi + 9}}$.

  Тогда
  $$M = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{1}{4}(9 - \sqrt{16\pi + 9}) & \dfrac{4\pi}{3 - \sqrt{16\pi + 9}} \\ \dfrac{4\pi}{3 - \sqrt{16\pi + 9}} & \frac{1}{4}(9 - \sqrt{16\pi + 9}) \end{bmatrix},$$
  $\lambda_1 = \frac{9 - 3\sqrt{16\pi + 9}}{3 - \sqrt{16\pi + 9}} > 0$, $\quad \lambda_2 = \dfrac{8\pi + 9 - 3\sqrt{16\pi + 9}}{3 - \sqrt{16\pi + 9}}$. Знак λ_2 зависит от значения π.

- $\varepsilon = \frac{1}{4}(3 + \sqrt{16\pi + 9})$, $\quad \eta = \dfrac{4\pi}{\sqrt{16\pi + 9} - 3}$.

  Тогда
  $$M = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{1}{4}(3 + \sqrt{16\pi + 9}) & \dfrac{4\pi}{\sqrt{16\pi + 9} - 3} \\ \dfrac{4\pi}{\sqrt{16\pi + 9} - 3} & \frac{1}{4}(3 + \sqrt{16\pi + 9}) \end{bmatrix},$$
  $\lambda_1 = 0$, $\quad \lambda_2 = \dfrac{8\pi}{\sqrt{16\pi + 9} - 3} > 0$.

- $\varepsilon = \frac{1}{4}(9+\sqrt{16\pi+9}), \quad \eta = \dfrac{4\pi}{3+\sqrt{16\pi+9}}.$

  Тогда
$$M = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{1}{4}(9+\sqrt{16\pi+9}) & \dfrac{4\pi}{3+\sqrt{16\pi+9}} \\ \dfrac{4\pi}{3+\sqrt{16\pi+9}} & \frac{1}{4}(9+\sqrt{16\pi+9}) \end{bmatrix},$$
$$\lambda_1 = \tfrac{9+3\sqrt{16\pi+9}}{3+\sqrt{16\pi+9}} > 0, \quad \lambda_2 = \frac{8\pi+9+3\sqrt{16\pi+9}}{3+\sqrt{16\pi+9}} > 0.$$

В зависимости от знаков λ_1, λ_2 квадратичная форма в функции Беллмана будет либо положительно определенной, либо отрицательно определенной. Это согласуется с общей практикой, которая гласит, что задача линейно-квадратичной оптимизации (LQR) имеет два решения: допустимое (стабильное) и недопустимое (нестабильное). В отличие от классического случая задачи LQR, в данной постановке решается задача максимизации, поэтому функция Беллмана должна быть отрицательно полуопределенной. Этому условию соответствует первая компонента решения (51)-(52).

Оба подхода дали одинаковый результат. Таким образом, получили единственное допустимое решение уравнения (39) $V(G)$ со следующими коэффициентами:
$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{4}(3-\sqrt{16\pi+9}); \\ \eta &= \frac{-4\pi}{3+\sqrt{16\pi+9}}; \\ \alpha &= \frac{\pi^2\beta^2(3+\sqrt{16\pi+9})}{5(3+\sqrt{16\pi+9})+16\pi}; \\ \gamma &= \frac{2\pi\beta(3+\sqrt{16\pi+9})}{5(3+\sqrt{16\pi+9})+16\pi}, \end{aligned}$$
которое удовлетворяет и экономическому критерию и методу, используемому для задач LQR.

Оптимальные управления первого и второго игрока соответственно принимают следующий вид:
$$a_1^* = \frac{1}{4}(3-\sqrt{16\pi+9})G_1 + \frac{-4\pi}{3+\sqrt{16\pi+9}}G_2 + \frac{2\pi\beta(3+\sqrt{16\pi+9})}{5(3+\sqrt{16\pi+9})+16\pi},$$
$$a_2^* = \frac{1}{4}(3-\sqrt{16\pi+9})G_2 + \frac{-4\pi}{3+\sqrt{16\pi+9}}G_1 + \frac{2\pi\beta(3+\sqrt{16\pi+9})}{5(3+\sqrt{16\pi+9})+16\pi}.$$

Некооперативный вариант игры

Рассмотрим некооперативную игру [1, 4]. Пусть фирмы не смогли прийти к соглашению до начала игры, тогда они конкурируют между собой. В этом случае будем искать равновесие по Нэшу.

Рассмотрим функцию выигрыша игрока i :

$$J_i(a_i) = \int\limits_0^\infty e^{-\rho t}\left(\pi\left[\theta - \sum_{j=1}^n G_j\right]G_i - \frac{c}{2}a_i^2\right)dt, \quad i = \overline{1,n}. \tag{54}$$

Решим данную задачу методом динамического программирования [10, 14].

Выберем функцию Беллмана для обоих игроков в следующем виде:

$$V_i(G) = \alpha + \gamma_A G_i + \gamma_B \sum_{j\neq i} G_j + \frac{\varepsilon_A}{2}G_i^2 + \frac{\varepsilon_B}{2}\sum_{j\neq i} G_j^2 + \eta_A G_i \sum_{j\neq i} G_j +$$

$$+\eta_B\left(\sum_{i,j} G_i G_j - G_i \sum_{j\neq i} G_j\right), \tag{55}$$

то есть как сумма квадратичного члена, линейного члена и константы.

Пусть $n = 2$. Имеем:

$$\begin{aligned} V_1(G) &= \alpha + \gamma_A G_1 + \gamma_B G_2 + \frac{\varepsilon_A}{2}G_1^2 + \frac{\varepsilon_B}{2}G_2^2 + \eta G_1 G_2, \\ V_2(G) &= \alpha + \gamma_A G_2 + \gamma_B G_1 + \frac{\varepsilon_A}{2}G_2^2 + \frac{\varepsilon_B}{2}G_1^2 + \eta G_1 G_2, \end{aligned} \tag{56}$$

где $\eta = \eta_A + \eta_B$, $V_i(G),\ i = 1,2$— непрерывно-дифференцируемые функции, являющиеся решением системы уравнений Гамильтона – Якоби – Беллмана [6]:

$$\rho V_1(G) = \max_{a_1\geq 0, a_2^{NE}}\left\{\pi\left[\theta - (G_1+G_2)\right]G_1 - \frac{c}{2}a_1^2 + \frac{\partial V_1}{\partial G_1}(a_1 - \delta G_1) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial V_2}{\partial G_2}(a_2 - \delta G_2)\right\},$$

$$\rho V_2(G) = \max_{a_2 \geq 0, a_1^{NE}} \left\{ \pi \left[\theta - (G_1 + G_2) \right] G_2 - \frac{c}{2} a_2^2 + \frac{\partial V_2}{\partial G_2}(a_2 - \delta G_2) + \frac{\partial V_1}{\partial G_1}(a_1 - \delta G_1) \right\}. \quad (57)$$

Частные производные $V_i(G),\ i = 1, 2$ имеют вид:

$$\frac{\partial V_1(G)}{\partial G_1} = \gamma_A + \varepsilon_A G_1 + \eta G_2;$$
$$\frac{\partial V_2(G)}{\partial G_2} = \gamma_A + \varepsilon_A G_2 + \eta G_1. \quad (58)$$

Подставив (56) и (58) в (57), получаем

$$\rho(\alpha + \gamma_A G_1 + \gamma_B G_2 + \frac{\varepsilon_A}{2} G_1^2 + \frac{\varepsilon_B}{2} G_2^2 + \eta G_1 G_2) =$$
$$= \max_{a_1 \geq 0, a_2^{NE}} \left\{ \pi \left[\theta - (G_1 + G_2) \right] G_1 - \frac{c}{2} a_1^2 + (\gamma_A + \epsilon_A G_1 + \eta G_2)(a_1 - \delta G_1) + \right.$$
$$\left. +(\gamma_A + \epsilon_A G_2 + \eta G_1)(a_2 - \delta G_2) \right\},$$
$$\rho(\alpha + \gamma_A G_2 + \gamma_B G_1 + \frac{\varepsilon_A}{2} G_2^2 + \frac{\varepsilon_B}{2} G_1^2 + \eta G_1 G_2) =$$
$$= \max_{a_2 \geq 0, a_1^{NE}} \left\{ \pi \left[\theta - (G_1 + G_2) \right] G_2 - \frac{c}{2} a_2^2 + (\gamma_A + \varepsilon_A G_2 + \eta G_1)(a_2 - \delta G_2) + \right.$$
$$\left. +(\gamma_A + \varepsilon_A G_1 + \eta G_2)(a_1 - \delta G_1) \right\}. \quad (59)$$

Рассмотрим функции

$$F(a_1, a_2^{NE}) = \pi \left[\theta - (G_1 + G_2) \right] G_1 - \frac{c}{2} a_1^2 + (\gamma_A + \varepsilon_A G_1 + \eta G_2)(a_1 - \delta G_1) +$$
$$+(\gamma_A + \varepsilon_A G_2 + \eta G_1)(a_2 - \delta G_2),$$

и

$$F(a_2, a_1^{NE}) = \pi \left[\theta - (G_1 + G_2) \right] G_2 - \frac{c}{2} a_2^2 + (\gamma_A + \varepsilon_A G_2 + \eta G_1)(a_2 - \delta G_2) +$$

$$+(\gamma_A + \varepsilon_A G_1 + \eta G_2)(a_1 - \delta G_1),$$

и найдем их частные производные:

$$\frac{\partial F(a_1, a_2^{NE})}{\partial a_1} = -ca_1 + \gamma_A + \varepsilon_A G_1 + \eta G_2,$$

$$\frac{\partial F(a_2, a_1^{NE})}{\partial a_2} = -ca_2 + \gamma_A + \varepsilon_A G_2 + \eta G_1.$$

С необходимостью приравняем их к нулю и найдем зависимость a_1 и a_2 от $\gamma_A, \epsilon_A, \eta$:

$$\begin{aligned} a_1^* &= \frac{1}{c}(\gamma_A + \varepsilon_A G_1 + \eta G_2); \\ a_2^* &= \frac{1}{c}(\gamma_A + \varepsilon_A G_2 + \eta G_1). \end{aligned} \tag{60}$$

Подставляя (60) в (59), получим:

$$\begin{aligned} &\rho(\alpha + \gamma_A G_1 + \gamma_B G_2 + \frac{\epsilon_A}{2} G_1^2 + \frac{\varepsilon_B}{2} G_2^2 + \eta G_1 G_2) = \\ &= \pi\Big[\theta - (G_1 + G_2)\Big] G_1 - \frac{1}{2c}(\gamma_A + \varepsilon_A G_1 + \eta G_2)^2 + \\ &+ \frac{1}{c}(\gamma_A + \varepsilon_A G_1 + \eta G_2)^2 - (\gamma_A + \varepsilon_A G_1 + \eta G_2)\delta G_1 + \\ &+ \frac{1}{c}(\gamma_A + \varepsilon_A G_2 + \eta G_1)^2 - (\gamma_A + \varepsilon_A G_2 + \eta G_1)\delta G_2, \end{aligned} \tag{61}$$

и

$$\begin{aligned} &\rho(\alpha + \gamma_A G_2 + \gamma_B G_1 + \frac{\varepsilon_A}{2} G_2^2 + \frac{\varepsilon_B}{2} G_1^2 + \eta G_1 G_2) = \\ &= \pi\Big[\theta - (G_1 + G_2)\Big] G_2 - \frac{1}{2c}(\gamma_A + \epsilon_A G_2 + \eta G_1)^2 + \\ &+ \frac{1}{c}(\gamma_A + \varepsilon_A G_2 + \eta G_1)^2 - (\gamma_A + \varepsilon_A G_2 + \eta G_1)\delta G_2 + \\ &+ \frac{1}{c}(\gamma_A + \varepsilon_A G_1 + \eta G_2)^2 - (\gamma_A + \varepsilon_A G_1 + \eta G_2)\delta G_1. \end{aligned} \tag{62}$$

С помощью метода неопределенных коэффициентов найдем $\alpha, \gamma_A, \gamma_B, \varepsilon_A, \varepsilon_B, \eta$. Из уравнения (61) получаем:

$$G_1^2 : \varepsilon_A^2 - \varepsilon_A c(\rho + 2\delta) + 2(\eta^2 - c\pi) = 0; \tag{63}$$

$$G_1 G_2 : \eta(3\varepsilon_A - c(\rho + 2\delta)) = c\pi; \tag{64}$$

$$G_1 : \gamma_A(c(\rho+\delta) - 2\eta - \varepsilon_A) = c\pi\theta; \tag{65}$$

$$G_2^2 : \varepsilon_B c\rho - \eta^2 - 2\varepsilon_A^2 - 2c\delta\varepsilon_A = 0; \tag{66}$$

$$G_2 : \gamma_B \rho c - \gamma_A(\eta + 2\varepsilon_A - c\delta) = 0; \tag{67}$$

$$G_1^0 G_2^0 : \rho\alpha = \frac{3\gamma_A^2}{2c}. \tag{68}$$

Из уравнения (62) также получим систему уравнений (63)-(68).

Решим квадратное уравнение (63) относительно ε_A:

$$\varepsilon_A = \begin{cases} c(\frac{\rho}{2}+\delta) + \sqrt{(c(\frac{\rho}{2}+\delta))^2 - 2\,(\eta^2 - c\pi)}, \\ c(\frac{\rho}{2}+\delta) - \sqrt{(c(\frac{\rho}{2}+\delta))^2 - 2\,(\eta^2 - c\pi)}. \end{cases} \tag{69}$$

Введем обозначение $D = (c(\frac{\rho}{2}+\delta))^2 - 2\left(\eta^2 - c\pi\right)$.

Из (65) с учетом (69) получаем:

$$\gamma_A = \frac{2c\pi\theta}{c\rho - 4\eta \mp 2\sqrt{D}}. \tag{70}$$

Подставим (69) в (66) и найдем:

$$\varepsilon_B = \frac{4\pi c - 3\eta^2 \pm 2\sqrt{D}c(\rho+3\delta) + c^2(\rho^2 + 5\rho\delta + 6\delta^2)}{c\rho}.$$

Из (67), (69) и (70):

$$\gamma_B = \frac{2\pi\theta(\eta + c(\rho+\delta) \pm 2\sqrt{D})}{\rho(c\rho - 4\eta \mp 2\sqrt{D})}.$$

При подстановке (70) в (68):

$$\alpha = \frac{6c(\pi\theta)^2}{\rho(c\rho - 4\eta \mp 2\sqrt{D})^2}.$$

Заметим, что коэффициенты $\alpha, \gamma_A, \gamma_B, \varepsilon_A, \varepsilon_B$ зависят от η.

Подставим (69) в (64), получим уравнение четвертой степени относительно η:

$$18\eta^4 - 2\eta^2 c(4c\left(\frac{\rho}{2}+\delta\right)^2 + 9\pi) - 2c^2\pi\eta\left(\frac{\rho}{2}+\delta\right) + c^2\pi^2 = 0. \tag{71}$$

Данное уравнение имеет неединственное решение. В силу аналогичных обстоятельств, приведенных в предыдущем разделе, необходимо упростить вид коэффициентов уравнения (71). В этом случае рассмотрим следующий пример.

Пример

Для упрощения коэффициентов воспользуемся способом Феррари [16], который говорит о том, что решение уравнения четвертой степени

$$\eta^4 - \eta^2 c\left(\frac{4}{9}cl^2 + \pi\right) - \frac{\pi l c^2}{9}\eta + \frac{c^2\pi^2}{18} = 0,$$

где $l = (\frac{\varrho}{2} + \delta)$, опирается на предварительное решение вспомогательного кубического уравнения

$$y^3 + c\left(\frac{4}{9}cl^2 + \pi\right)y^2 - \frac{2}{9}c^2\pi^2 y - \frac{1}{9}c^4\pi^2 l^2 - \frac{2}{9}c^3\pi^3 = 0.$$

Видно, что $y = -\pi$ корень этого уравнения при $c = \frac{1}{2}$, $l = \sqrt{\frac{68}{15}\pi}$. Тогда далее будем рассматривать частный случай. Представим левую часть уравнения (71) в виде разности двух квадратов

$$\left(\eta^2 - \frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{\pi}{30}}\eta + \frac{\pi}{6}\sqrt{\frac{17}{2}}\right)^2 = 0,$$

или

$$\left(\eta^2 - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{\pi}{30}}\eta + \frac{\pi}{6}\sqrt{\frac{17}{2}}\right)\left(\eta^2 - \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{\pi}{30}}\eta - \frac{\pi}{6}\sqrt{\frac{17}{2}}\right) = 0.$$

Приравнивая нулю оба сомножителя, найдем четыре корня уравнения (71):

$$\eta = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{3}(\frac{541}{90} - 2\sqrt{\frac{17}{2}})} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{\pi}{30}} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{3}(\frac{541}{90} - 2\sqrt{\frac{17}{2}})} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{\pi}{30}} \\ \frac{1}{6}\sqrt{\frac{\pi}{30}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{3}(\frac{541}{90} + 2\sqrt{\frac{17}{2}})} \\ \frac{1}{6}\sqrt{\frac{\pi}{30}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{3}(\frac{541}{90} + 2\sqrt{\frac{17}{2}})} \end{bmatrix}. \tag{72}$$

Тогда, учитывая (69) и (72)

$$\varepsilon_A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\frac{\rho}{2}+\delta)+\sqrt{\frac{1}{4}(\frac{\rho}{2}+\delta)^2+\frac{\pi}{3}(\sqrt{\frac{17}{2}}+\frac{1}{3}\sqrt{\frac{541}{900}-\frac{1}{5}\sqrt{\frac{17}{2}}}-\frac{1}{90})} \\ \frac{1}{2}(\frac{\rho}{2}+\delta)+\sqrt{\frac{1}{4}(\frac{\rho}{2}+\delta)^2+\frac{\pi}{3}(\sqrt{\frac{17}{2}}-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{541}{900}-\frac{1}{5}\sqrt{\frac{17}{2}}}-\frac{1}{90})} \\ \frac{1}{2}(\frac{\rho}{2}+\delta)-\sqrt{\frac{1}{4}(\frac{\rho}{2}+\delta)^2-\frac{\pi}{3}(\sqrt{\frac{17}{2}}+\frac{1}{3}\sqrt{\frac{541}{900}+\frac{1}{5}\sqrt{\frac{17}{2}}}+\frac{1}{90})} \\ \frac{1}{2}(\frac{\rho}{2}+\delta)-\sqrt{\frac{1}{4}(\frac{\rho}{2}+\delta)^2+\frac{\pi}{3}(-\sqrt{\frac{17}{2}}+\frac{1}{3}\sqrt{\frac{541}{900}+\frac{1}{5}\sqrt{\frac{17}{2}}}-\frac{1}{90})} \end{bmatrix}. \quad (73)$$

Из (72) и (70)

$$\gamma_A = \begin{bmatrix} \frac{\pi\theta}{\frac{\rho}{2}-\sqrt{\frac{\pi}{3}(\frac{541}{90}-2\sqrt{\frac{17}{2}})}+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{\pi}{30}}-2\sqrt{\frac{1}{4}(\frac{\rho}{2}+\delta)^2+\frac{\pi}{3}(\sqrt{\frac{17}{2}}+\frac{1}{3}\sqrt{\frac{541}{900}-\frac{1}{5}\sqrt{\frac{17}{2}}}-\frac{1}{90})}} \\ \frac{\pi\theta}{\frac{\rho}{2}+\sqrt{\frac{\pi}{3}(\frac{541}{90}-2\sqrt{\frac{17}{2}})}+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{\pi}{30}}-2\sqrt{\frac{1}{4}(\frac{\rho}{2}+\delta)^2+\frac{\pi}{3}(\sqrt{\frac{17}{2}}-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{541}{900}-\frac{1}{5}\sqrt{\frac{17}{2}}}-\frac{1}{90})}} \\ \frac{\pi\theta}{\frac{\rho}{2}-\sqrt{\frac{\pi}{3}(\frac{541}{90}+2\sqrt{\frac{17}{2}})}-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{\pi}{30}}+2\sqrt{\frac{1}{4}(\frac{\rho}{2}+\delta)^2-\frac{\pi}{3}(\sqrt{\frac{17}{2}}+\frac{1}{3}\sqrt{\frac{541}{900}+\frac{1}{5}\sqrt{\frac{17}{2}}}+\frac{1}{90})}} \\ \frac{\pi\theta}{\frac{\rho}{2}+\sqrt{\frac{\pi}{3}(\frac{541}{90}+2\sqrt{\frac{17}{2}})}-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{\pi}{30}}+2\sqrt{\frac{1}{4}(\frac{\rho}{2}+\delta)^2+\frac{\pi}{3}(-\sqrt{\frac{17}{2}}+\frac{1}{3}\sqrt{\frac{541}{900}+\frac{1}{5}\sqrt{\frac{17}{2}}}-\frac{1}{90})}} \end{bmatrix}. \quad (74)$$

Подставим (72) в выражение для ε_B

$$\varepsilon_B = \begin{bmatrix} \frac{4\pi-\pi(\sqrt{\frac{271}{90}-\frac{17}{2}}-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{541}{900}-\frac{1}{5}\sqrt{\frac{17}{2}}})+2\sqrt{\frac{1}{4}(\frac{\rho}{2}+\delta)^2+\frac{\pi}{3}(\sqrt{\frac{17}{2}}+\frac{1}{3}\sqrt{\frac{541}{900}-\frac{1}{5}\sqrt{\frac{17}{2}}}-\frac{1}{90})}(\rho+3\delta)+\frac{1}{2}(\rho^2+5\rho\delta+6\delta^2)}{\rho} \\ \frac{4\pi-\pi(\sqrt{\frac{271}{90}-\frac{17}{2}}+\frac{1}{3}\sqrt{\frac{541}{900}-\frac{1}{5}\sqrt{\frac{17}{2}}})+2\sqrt{\frac{1}{4}(\frac{\rho}{2}+\delta)^2+\frac{\pi}{3}(\sqrt{\frac{17}{2}}-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{541}{900}-\frac{1}{5}\sqrt{\frac{17}{2}}}-\frac{1}{90})}(\rho+3\delta)+\frac{1}{2}(\rho^2+5\rho\delta+6\delta^2)}{\rho} \\ \frac{4\pi-\pi(\sqrt{\frac{271}{90}+\frac{17}{2}}+\frac{1}{3}\sqrt{\frac{541}{900}+\frac{1}{5}\sqrt{\frac{17}{2}}})-2\sqrt{\frac{1}{4}(\frac{\rho}{2}+\delta)^2-\frac{\pi}{3}(\sqrt{\frac{17}{2}}+\frac{1}{3}\sqrt{\frac{541}{900}+\frac{1}{5}\sqrt{\frac{17}{2}}}+\frac{1}{90})}(\rho+3\delta)+\frac{1}{2}(\rho^2+5\rho\delta+6\delta^2)}{\rho} \\ \frac{4\pi-\pi(\sqrt{\frac{271}{90}+\frac{17}{2}}-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{541}{900}+\frac{1}{5}\sqrt{\frac{17}{2}}})-2\sqrt{\frac{1}{4}(\frac{\rho}{2}+\delta)^2+\frac{\pi}{3}(-\sqrt{\frac{17}{2}}+\frac{1}{3}\sqrt{\frac{541}{900}+\frac{1}{5}\sqrt{\frac{17}{2}}}-\frac{1}{90})}(\rho+3\delta)+\frac{1}{2}(\rho^2+5\rho\delta+6\delta^2)}{\rho} \end{bmatrix}.(75)$$

γ_B с учетом (72), (74) и (75)

$$\gamma_B = \begin{bmatrix} \dfrac{\pi\theta(\sqrt{\frac{\pi}{3}(\frac{541}{90}-2\sqrt{\frac{17}{2}})}-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{\pi}{30}}+(\rho+\delta)+4\sqrt{\frac{1}{4}(\frac{\varrho}{2}+\delta)^2+\frac{\pi}{3}(\sqrt{\frac{17}{2}}+\frac{1}{3}\sqrt{\frac{541}{900}-\frac{1}{5}\sqrt{\frac{17}{2}}-\frac{1}{90}}))}}{\rho(\frac{\varrho}{2}-\sqrt{\frac{\pi}{3}(\frac{541}{90}-2\sqrt{\frac{17}{2}})}+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{\pi}{30}}-2\sqrt{\frac{1}{4}(\frac{\varrho}{2}+\delta)^2+\frac{\pi}{3}(\sqrt{\frac{17}{2}}+\frac{1}{3}\sqrt{\frac{541}{900}-\frac{1}{5}\sqrt{\frac{17}{2}}-\frac{1}{90}}))}} \\ \\ \dfrac{\pi\theta(-\sqrt{\frac{\pi}{3}(\frac{541}{90}-2\sqrt{\frac{17}{2}})}-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{\pi}{30}}+(\rho+\delta)+4\sqrt{\frac{1}{4}(\frac{\varrho}{2}+\delta)^2+\frac{\pi}{3}(\sqrt{\frac{17}{2}}-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{541}{900}-\frac{1}{5}\sqrt{\frac{17}{2}}-\frac{1}{90}}))}}{\rho(\frac{\varrho}{2}+\sqrt{\frac{\pi}{3}(\frac{541}{90}-2\sqrt{\frac{17}{2}})}+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{\pi}{30}}-2\sqrt{\frac{1}{4}(\frac{\varrho}{2}+\delta)^2+\frac{\pi}{3}(\sqrt{\frac{17}{2}}-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{541}{900}-\frac{1}{5}\sqrt{\frac{17}{2}}-\frac{1}{90}}))}} \\ \\ \dfrac{\pi\theta(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{\pi}{30}}+\sqrt{\frac{\pi}{3}(\frac{541}{90}+2\sqrt{\frac{17}{2}})}+(\rho+\delta)-4\sqrt{\frac{1}{4}(\frac{\varrho}{2}+\delta)^2-\frac{\pi}{3}(\sqrt{\frac{17}{2}}+\frac{1}{3}\sqrt{\frac{541}{900}+\frac{1}{5}\sqrt{\frac{17}{2}}+\frac{1}{90}}))}}{\rho(\frac{\varrho}{2}-\sqrt{\frac{\pi}{3}(\frac{541}{90}+2\sqrt{\frac{17}{2}})}-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{\pi}{30}}+2\sqrt{\frac{1}{4}(\frac{\varrho}{2}+\delta)^2-\frac{\pi}{3}(\sqrt{\frac{17}{2}}+\frac{1}{3}\sqrt{\frac{541}{900}+\frac{1}{5}\sqrt{\frac{17}{2}}+\frac{1}{90}}))}} \\ \\ \dfrac{\pi\theta(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{\pi}{30}}-\sqrt{\frac{\pi}{3}(\frac{541}{90}+2\sqrt{\frac{17}{2}})}+(\rho+\delta)-4\sqrt{\frac{1}{4}(\frac{\varrho}{2}+\delta)^2+\frac{\pi}{3}(-\sqrt{\frac{17}{2}}+\frac{1}{3}\sqrt{\frac{541}{900}+\frac{1}{5}\sqrt{\frac{17}{2}}-\frac{1}{90}}))}}{\rho(\frac{\varrho}{2}+\sqrt{\frac{\pi}{3}(\frac{541}{90}+2\sqrt{\frac{17}{2}})}-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{\pi}{30}}+2\sqrt{\frac{1}{4}(\frac{\varrho}{2}+\delta)^2+\frac{\pi}{3}(-\sqrt{\frac{17}{2}}+\frac{1}{3}\sqrt{\frac{541}{900}+\frac{1}{5}\sqrt{\frac{17}{2}}-\frac{1}{90}}))}} \end{bmatrix}. \quad (76)$$

При подстановке (74) в α получим:

$$\alpha = \begin{bmatrix} \dfrac{3(\pi\theta)^2}{\rho(\frac{\varrho}{2}-\sqrt{\frac{\pi}{3}(\frac{541}{90}-2\sqrt{\frac{17}{2}})}+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{\pi}{30}}-2\sqrt{\frac{1}{4}(\frac{\varrho}{2}+\delta)^2+\frac{\pi}{3}(\sqrt{\frac{17}{2}}+\frac{1}{3}\sqrt{\frac{541}{900}-\frac{1}{5}\sqrt{\frac{17}{2}}-\frac{1}{90}}))}^2} \\ \dfrac{3(\pi\theta)^2}{\rho(\frac{\varrho}{2}+\sqrt{\frac{\pi}{3}(\frac{541}{90}-2\sqrt{\frac{17}{2}})}+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{\pi}{30}}-2\sqrt{\frac{1}{4}(\frac{\varrho}{2}+\delta)^2+\frac{\pi}{3}(\sqrt{\frac{17}{2}}-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{541}{900}-\frac{1}{5}\sqrt{\frac{17}{2}}-\frac{1}{90}}))}^2} \\ \dfrac{3(\pi\theta)^2}{\rho(\frac{\varrho}{2}-\sqrt{\frac{\pi}{3}(\frac{541}{90}+2\sqrt{\frac{17}{2}})}-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{\pi}{30}}+2\sqrt{\frac{1}{4}(\frac{\varrho}{2}+\delta)^2-\frac{\pi}{3}(\sqrt{\frac{17}{2}}+\frac{1}{3}\sqrt{\frac{541}{900}+\frac{1}{5}\sqrt{\frac{17}{2}}+\frac{1}{90}}))}^2} \\ \dfrac{3(\pi\theta)^2}{\rho(\frac{\varrho}{2}+\sqrt{\frac{\pi}{3}(\frac{541}{90}+2\sqrt{\frac{17}{2}})}-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{\pi}{30}}+2\sqrt{\frac{1}{4}(\frac{\varrho}{2}+\delta)^2+\frac{\pi}{3}(-\sqrt{\frac{17}{2}}+\frac{1}{3}\sqrt{\frac{541}{900}+\frac{1}{5}\sqrt{\frac{17}{2}}-\frac{1}{90}}))}^2} \end{bmatrix}. \quad (77)$$

Получили решения (72)-(77) системы уравнений (63)-(68).

Отбор допустимого решения из множества полученных решений с помощью экономического критерия

Как и в случае кооперативной игры для отбраковки несостоятельных решений из множества полученных решений воспользуемся экономическим критерием [11]. В случае некооперативной игры он запишется следующим образом:

Критерий (Bass et.al., 2005) 2 *Пусть в задаче маргинальная полезность* $\pi = 0$. *Тогда с необходимостью имеем* $V_i(G) = 0$, $i = \overline{1,n}$, *где* $V_i(G)$ – *функция Беллмана, соответствующая искомому максимуму в (54).*

Пусть $\pi = 0$, тогда условию

$$\varepsilon_A = 0, \quad \varepsilon_B = 0, \quad \eta = 0, \quad \gamma_A = 0, \quad \gamma_B = 0, \quad \alpha = 0,$$

удовлетворяют только коэффициенты, которые соответствуют третьей и четвертой компоненте решения (72)-(77).

Таким образом, получили два допустимых решения уравнений (57) $V_i(G)$, $i = \overline{1, 2}$, с коэффициентами, соответствующими третьей и четвертой компоненте решения (72)-(77).

Глава 4. Об упрощении интегрального функционала кооперативной игры оптимального управления эксплуатации ресурсов

В предыдущей главе был рассмотрен кооперативный вариант игры оптимального управления инвестициями в рекламу. В процессе решения системы уравнений (41)-(44) возникли трудности с разрешением уравнения четвертой степени в общем виде. Во избежание данной проблемы воспользуемся преобразованием фазовой переменной [13], которое в дальнейшем существенно упростит решение задачи.

Напомним, что динамика накопления репутации (гудвилл) G_i фирмы i изменяется в соответствии с (36), а общая сумма выигрыша выражается в виде (38).

Ранее в [13] была предложена замена: $\mathbf{G} = M\mathbf{Y}+\frac{\beta}{2n}\cdot\mathbf{1}_{[n\times 1]}$, подставляя которую в (38), получаем:

$$J(a) = \int\limits_0^\infty e^{-\rho t}\left[-\mathbf{Y}'M'QM\mathbf{Y} - \frac{1}{2}\mathbf{a}'R\mathbf{a} + \frac{\pi\beta^2}{4}\right]dt. \tag{78}$$

Определим матрицу M ортогонального преобразования. Пусть

$M = [m_1|m_2|...|m_n]$, где $m_1 = \alpha\cdot\mathbf{1}_{[n\times 1]}, \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n), \alpha_i \in [0,1], i = \overline{1,n}, \sum\limits_{i=1}^n \alpha_i = 1$, а остальные столбцы матрицы M должны удовлетворять условию: $\sum\limits_{i=1}^n m_{ij} = 0, j = \overline{2,n}$, причем вектора $m_2, ..., m_n$ - линейно независимые.

Поскольку $\frac{\pi\beta^2}{4}$ не зависит от управления, которое доставляет максимум функционалу (78), то управление будет доставлять максимум и следующему функционалу

$$J(a) = \int\limits_0^\infty e^{-\rho t}\left[-\mathbf{Y}'M'QM\mathbf{Y} - \frac{1}{2}\mathbf{a}'R\mathbf{a}\right]dt. \tag{79}$$

Пусть $f_i = a_i - \delta G_i = a_i - \delta\left(\sum\limits_{j=1}^n M_{ij}Y_j + \frac{\delta\beta}{2n}\right)$. Так как $\frac{\delta\beta}{2n}$ -константа, то можем сделать следующую замену:

$$\hat{a}_i = a_i - \frac{\delta\beta}{2n};$$

Тогда $f_i = \hat{a}_i - \delta\sum\limits_{j=1}^n M_{ij}Y_j$. Подставляем $\hat{a}_i$ в $\mathbf{a}'R\mathbf{a}$ и получим $(\hat{\mathbf{a}})'R\hat{\mathbf{a}} +$

$\frac{\delta}{2n\pi}\mathbf{q}'R\hat{\mathbf{a}} + \frac{c\delta^2\beta^2}{4n}$. Подставляем это в (79) и, поскольку $\frac{c\delta^2\beta^2}{4n}$ - константа, то функционал (79) примет следующий вид:

$$J(\hat{a}) = \int_0^{\infty} e^{-\rho t}\left[-\mathbf{Y}'M'QM\mathbf{Y} - \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{a}})'R\hat{\mathbf{a}} - \frac{\delta}{4n\pi}\mathbf{q}'R\hat{\mathbf{a}}\right] dt. \tag{80}$$

Пусть $V(Y)$ — непрерывно-дифференцируемая функция Беллмана, которая является решением уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана:

$$\rho V(Y) = \max_{\hat{\mathbf{a}} \geqslant -\frac{\delta\beta}{2n}\cdot \mathbf{1}_{[n\times 1]}} \left\{ -\mathbf{Y}'M'QM\mathbf{Y} - \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{a}})'R\hat{\mathbf{a}} - \frac{\delta}{4n\pi}\mathbf{q}'R\hat{\mathbf{a}} + \left\langle \bigtriangledown V, \mathbf{f} \right\rangle \right\} (81)$$

Предполагаем, что $n = 2$.

В качестве решения уравнения (81) будем рассматривать функцию

$$V(Y) = \alpha + \frac{\varepsilon}{2}\left(Y_1^2 + Y_2^2\right) + \eta Y_1 Y_2 + \gamma_1 Y_1 + \gamma_2 Y_2, \tag{82}$$

и эта функция имеет частные производные:

$$\frac{\partial V(Y)}{\partial Y_1} = \varepsilon Y_1 + \eta Y_2 + \gamma_1, \quad \frac{\partial V(Y)}{\partial Y_2} = \varepsilon Y_2 + \eta Y_1 + \gamma_2.$$

Будем полагать, что

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix},$$

тогда, поскольку Q - симметричная матрица, то

$$\mathbf{Y}'M'QM\mathbf{Y} = \pi Y_1^2.$$

Тогда уравнение (80) примет следующий вид:

$$J(\hat{a}) = \int_0^{\infty} e^{-\rho t}\left[-\pi Y_1^2 - \frac{c}{2}\left(\hat{a_1}^2 + \hat{a_2}^2\right) - \frac{c\delta\beta}{8}(\hat{a_1} + \hat{a_2})\right] dt.$$

Подставляя функцию $V(Y)$ и ее частные производные в (81):

$$\rho(\alpha + \frac{\varepsilon}{2}\left(Y_1^2 + Y_2^2\right) + \eta Y_1 Y_2 + \gamma_1 Y_1 + \gamma_2 Y_2) = \max_{\hat{a_1}, \hat{a_2} \geqslant -\frac{\delta\beta}{2nk}} \left\{ -\pi Y_1^2 - \frac{c}{2}\left(\hat{a_1}^2 + \hat{a_2}^2\right) - \right.$$

$$-\frac{c\delta\beta}{8}(\hat{a_1} + \hat{a_2}) + (\varepsilon Y_1 + \eta Y_2 + \gamma_1)(\hat{a_1} - \delta\left(\frac{Y_1}{2} + Y_2)\right) + (\varepsilon Y_2 + \eta Y_1 + \gamma_2)\times$$

$$\times(\hat{a_2}-\delta\left(\frac{Y_1}{2}-Y_2)\right)\Bigg\}.$$

Рассмотрим функцию

$$F(\hat{a_1},\hat{a_2})=-\pi Y_1^2-\frac{c}{2}\left(\hat{a_1}^2+\hat{a_2}^2\right)-\frac{c\delta\beta}{8}(\hat{a_1}+\hat{a_2})+$$

$$+(\varepsilon Y_1+\eta Y_2+\gamma_1)(\hat{a_1}-\delta\left(\frac{Y_1}{2}+Y_2\right))+(\varepsilon Y_2+\eta Y_1+\gamma_2)(\hat{a_2}-\delta\left(\frac{Y_1}{2}-Y_2\right)),$$

и найдем ее частные производные:

$$\frac{\partial F(\hat{a})}{\partial\hat{a_1}}=-c\hat{a_1}-\frac{c\delta\beta}{8}+\varepsilon Y_1+\eta Y_2+\gamma_1;$$

$$\frac{\partial F(\hat{a})}{\partial\hat{a_2}}=-c\hat{a_2}-\frac{c\delta\beta}{8}+\varepsilon Y_2+\eta Y_1+\gamma_2.$$

С необходимостью приравняем их к нулю и найдем зависимость $\hat{a_1}$ и $\hat{a_2}$ от ε,η,γ:

$$\hat{a_1}^*=\frac{1}{c}(\varepsilon Y_1+\eta Y_2+\gamma_1-\frac{c\delta\beta}{8});\quad \hat{a_2}^*=\frac{1}{c}(\varepsilon Y_2+\eta Y_1+\gamma_2-\frac{c\delta\beta}{8}).$$

Получаем вектор $(\hat{\mathbf{a}}^*)'=(\hat{a_1}^*,\hat{a_2}^*)$ и подставляем его в (81). Тогда в матричном виде получаем:

$$\rho V(Y)=\left\{-\mathbf{Y}'M'QM\mathbf{Y}-\frac{1}{2}(\hat{\mathbf{a}}^*)'R\hat{\mathbf{a}}^*-\frac{\delta}{4n\pi}\mathbf{q}'R\hat{\mathbf{a}}^*+\left\langle\bigtriangledown V,\mathbf{f}\right\rangle\right\},$$

или расписывая покомпонентно:

$$\rho(\alpha+\frac{\varepsilon}{2}\left(Y_1^2+Y_2^2\right)+\eta Y_1Y_2+\gamma_1Y_1+\gamma_2Y_2)=-\pi Y_1^2-\frac{1}{2c}((\varepsilon Y_1+\eta Y_2+\gamma_1-\frac{c\delta\beta}{8})^2+$$

$$+(\varepsilon Y_2+\eta Y_1+\gamma_2-\frac{c\delta\beta}{8})^2)-\frac{\delta\beta}{8}\left((\varepsilon+\eta)(Y_1+Y_2)+\gamma_1+\gamma_2-\frac{c\delta\beta}{4}\right)+$$

$$+(\varepsilon Y_1+\eta Y_2+\gamma_1)\left(\frac{1}{c}(\varepsilon Y_1+\eta Y_2+\gamma_1-\frac{c\delta\beta}{8})-\delta(\frac{Y_1}{2}+Y_2)\right)+$$

$$+(\varepsilon Y_2+\eta Y_1+\gamma_2)(\frac{1}{c}(\varepsilon Y_2+\eta Y_1+\gamma_2-\frac{c\delta\beta}{8})-\delta(\frac{Y_1}{2}-Y_2)).$$

Раскроем скобки, приведем подобные и с помощью метода неопределенных коэффициентов найдем $\alpha,\varepsilon,\eta,\gamma_1,\gamma_2$:

$$Y_1^2:2c\pi=\varepsilon^2+\eta^2-c\delta(\varepsilon+\eta)-c\varepsilon\rho; \qquad (83)$$

$$Y_1Y_2 : 4\varepsilon\eta = c\eta(2\rho - \delta) + 3c\delta\varepsilon; \tag{84}$$

$$Y_2^2 : c\varepsilon\rho = \varepsilon^2 + \eta^2 + 2\delta c(\varepsilon - \eta); \tag{85}$$

$$Y_1 : 4c(\delta(\gamma_1 + \gamma_2) + 2\gamma_1\rho) = 8(\eta\gamma_2 + \varepsilon\gamma_1) - c\beta\delta(\varepsilon + \eta); \tag{86}$$

$$Y_2 : 8c(\delta(\gamma_1 - \gamma_2) + \gamma_2\rho) = 8(\eta\gamma_1 + \varepsilon\gamma_2) - c\beta\delta(\varepsilon + \eta); \tag{87}$$

$$Y_1^0Y_2^0 : 64c\rho\alpha = 32(\gamma_1^2 + \gamma_2^2) - 8c\beta\delta(\gamma_1 + \gamma_2) + c^2\beta^2\delta^2. \tag{88}$$

При вычитании из (83) (85) получим, что

$$\eta = \frac{2\pi}{\delta} + 3\varepsilon.$$

Подставим выражение для η в (84) и найдем ε:

$$\varepsilon = \begin{cases} \dfrac{3c\delta\rho - 4\pi + \sqrt{9c^2\delta^2\rho^2 - 24\pi c\delta^2 + 24\pi c\delta\rho + 16\pi^2}}{12\delta}, \\ \dfrac{3c\delta\rho - 4\pi - \sqrt{9c^2\delta^2\rho^2 - 24\pi c\delta^2 + 24\pi c\delta\rho + 16\pi^2}}{12\delta}. \end{cases} \tag{89}$$

Тогда η с учетом (89):

$$\eta = \begin{cases} \dfrac{3c\delta\rho + 4\pi + \sqrt{9c^2\delta^2\rho^2 - 24\pi c\delta^2 + 24\pi c\delta\rho + 16\pi^2}}{4\delta}, \\ \dfrac{3c\delta\rho + 4\pi - \sqrt{9c^2\delta^2\rho^2 - 24\pi c\delta^2 + 24\pi c\delta\rho + 16\pi^2}}{4\delta}. \end{cases} \tag{90}$$

Из (86) выразим

$$\gamma_1 = \frac{8\eta\gamma_2 - 4c\delta\gamma_2 - c\beta\delta(\varepsilon + \eta)}{4c\delta - 8\varepsilon + 8c\rho},$$

и, подставив в (87), найдем

$$\gamma_2 = \frac{(2(\varepsilon - \eta) + c(\delta - 2\rho))c\beta\delta(\varepsilon + \eta)}{8(2(\varepsilon^2 - \eta^2) + \varepsilon c(\delta - 4\rho) + 3c\eta\delta - 2c^2\delta^2 - c^2\delta\rho + 2c^2\rho^2)}. \tag{91}$$

Тогда

$$\gamma_1 = \frac{(2(\varepsilon - \eta) + c(3\delta - 2\rho))c\beta\delta(\varepsilon + \eta)}{8(2(\varepsilon^2 - \eta^2) + \varepsilon c(\delta - 4\rho) + 3c\eta\delta - 2c^2\delta^2 - c^2\delta\rho + 2c^2\rho^2)}. \tag{92}$$

Подставляя γ_1 и γ_2 в (88), находим

$$\alpha = \frac{((2(\varepsilon-\eta)+c(\delta-2\rho))^2+(2(\varepsilon-\eta)+c(3\delta-2\rho))^2)(c\beta\delta(\varepsilon+\eta))^2}{2c\rho(8(2(\varepsilon^2-\eta^2)+\varepsilon c(\delta-4\rho)+3c\eta\delta-2c^2\delta^2-c^2\delta\rho+2c^2\rho^2)^2)}-$$

$$-\frac{c\beta^2\delta^2(\varepsilon+\eta)(4(\varepsilon-\eta)+4c(\delta-\rho))}{8\rho(8(2(\varepsilon^2-\eta^2)+\varepsilon c(\delta-4\rho)+3c\eta\delta-2c^2\delta^2-c^2\delta\rho+2c^2\rho^2))}+\frac{c\beta^2\delta^2}{64\rho}. \quad (93)$$

Таким образом, было получено два решения (89)-(93) системы уравнений (83)-(88) (два решения $V(Y)$ уравнения (81) с коэффициентами (89)-(93)). Поскольку было сделано преобразование фазовой переменной, то экономический критерий такого вида, как в кооперативной игре предыдущей главы, неприменим к данной задаче.

Выводы

Для решения задач оптимального управления (7) и (37) с уравнениями динамики (6) и (36) соответственно было использовано уравнение Гамильтона – Якоби – Беллмана в виде (39) для кооперативной постановки игры и (57) для некооперативной постановки. Решением этого уравнения является функция Беллмана, которая в данной работе рассматривалась в различных видах (10), (40), (55) и (82). В ходе исследования были получены системы уравнений, решения которых в общем виде оказалось проблематичным для задачи оптимального управления инвестициями в рекламу и были получены для определенного вида коэффициентов. Вопрос о разрешимости систем уравнений (41)-(44) и (63)-(68) в общем виде остается открытым.

Дальнейшие перспективы исследования заключаются в рассмотрении совместности систем (41)-(44) и (63)-(68), разрешения уравнений четвертой степени (49) и (71) в общем виде, а также в переформулировании экономического критерия в соответствии с приведенной заменой (80) для кооперативной игры оптимального управления инвестициями в рекламу, применении к решениям системы (83)-(88) и, в дальнейшем, в сравнении полученных результатов с результатами, полученными при рассмотрении этой задачи без использования данного преобразования в главе 3.

Заключение

В ходе проделанной работы были рассмотрены различные модели задач оптимального управления в дифференциальных играх эксплуатации ресурсов для двух игроков, такие как некооперативная игра эксплуатации нескольких ресурсов и задача оптимального управления инвестициями в рекламу в кооперативной и некооперативной постановках.

Показано, что задача оптимального управления имеет неединственное решение, которое требует изучения с применением подходов из области экономического анализа для отбраковки несостоятельных с точки зрения экономики решений. Было установлено, что допустимые решения удовлетворяют и экономическому критерию, и классическому методу для линейно-квадратичных задач оптимизации (LQR).

Также было применено преобразование фазовой переменной для упрощения интегрального функционала кооперативной игры и показано, что решение данной задачи существенно упростилось.

Таким образом, поставленные цель и задачи были достигнуты.

Список литературы

[1] Dockner E. J., Jorgensen S., Long N. V., Sorger G. Differential Games in Economics and Management Science. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. 396 p.

[2] Haurie A., Krawczyk J. B., Zaccour G. Games and Dynamic Games. Singapore: World Scientific Publishing, 2012. 465 p.

[3] Петросян Л. А., Зенкевич Н. А., Шевкопляс Е. В. Теория игр. СПБ.: Изд-во БХВ-Петербург, 2012. 432 с.

[4] Jorgensen S., Zaccour G. Differential Games in Marketing. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2004. 159 p.

[5] Jorgensen S., Gromova E. Sustaining cooperation in a differential game of advertising goodwill accumulation // European Journal of Operational Research. 2016. P. 294–303.

[6] Garcia-Meza M. A., Gromova E. V., Lopez-Barrientos J. D. Stable marketing cooperation in a differential game for an oligopoly // International Game Theory Review. Vol. 20, No 1. 2017.

[7] Костюнин С. Ю., Шевкопляс Е. В. Об упрощении интегрального выигрыша в дифференциальных играх со случайной продолжительностью // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. № 4. 2011. С. 47–56.

[8] Громова Е. В., Громов Д. В., Лахина Ю. Э. О дифференциальной игре управления инвестициями в рекламную кампанию // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Т.24, № 2. 2018.

[9] Жуковский В. И., Чикрий А. А. Линейно-квадратичные дифференциальные игры. Киев: Наукова думка, 1994. 320 с.

[10] Olsder G. G., Basar T. Dynamic Noncooperative Game Theory, 2nd Edition. New York: Academic Press, 1999. 519 p.

[11] Bass F. M., Krishnamoorthy A., Prasad A., Sethi S. P. Generic and brand advertising strategies in a dynamic duopoly // Marketing Science. Vol.24, № 4. 2005. P. 556–568.

[12] Александров А. Г. Оптимальные и адаптивные системы: Учеб. пособие для вузов по спец. «Автоматика и упр. в техн. системах». М.: Высшая школа, 1989. 263 с.

[13] Gromov D., Gromova E. On a class of hybrid differential games // Dynamic games and applications. Vol.7, № 2. 2016. P. 266-288.

[14] Мазалов В. В. Математическая теория игр и приложения. Спб.: Изд-во Лань, 2010. 448 с.

[15] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). М.: Наука, 1974. 832 с.

[16] Александров А. Д., Колмогоров А. Н., Лаврентьев М. А. Математика, ее содержание, методы и значение. М.: Изд. Академии наук СССР, 1956. Т.1, 296 с.

[17] Петросян Л. А. Кооперативные дифференциальные игры и их приложения. Томск: Изд-во Томского университета, 1985. 273 с.

[18] Жабко А. П., Котина Е. Д., Чижова О. Н. Дифференциальные уравнения и устойчивость. Спб.: Изд-во Лань, 2015. 310 с.