Санкт-Петербургский государственный университет

Фундаментальная математика и механика
Алгебра

Воронецкий Егор Юрьевич

Квадратичные формы на бимодулях

Дипломная работа

Научный руководитель:
д. ф.-м. н., профессор Вавилов Н. А.

Рецензент:
д. ф.-м. н., ст. науч. сотр. Ягунов С. А.

Санкт-Петербург
2018

SAINT PETERSBURG STATE UNIVERSITY

Fundamental Mathematics and Mechanics
Algebra

Egor Voronetsky

Quadratic forms on bimodules

Graduation Thesis

Scientific supervisor:
D.Sc., professor Nikolai Vavilov

Reviewer:
D.Sc., senior researcher Sergei Yagunov

Saint Petersburg
2018

Оглавление

Введение **4**

1. Общие понятия **6**

2. Эрмитовы бимодули **8**

3. Квадратичные структуры **12**

4. Квадратичные формы **15**

5. Элементарные трансвекции **19**

6. Уровневые группы **22**

7. Локализация и корни **26**

8. Полные уровневые группы **30**

9. Глобальное извлечение трансвекций **34**

10. Локальное извлечение трансвекций **38**

Заключение **44**

Список литературы **45**

Введение

В настоящей работе даётся определение квадратичных форм на бимодулях и строится описание всех подгрупп полной линейной группы $\mathrm{GL}(P)$, нормализуемых элементарной унитарной группой $\mathrm{EU}(P)$, если P — бимодуль с хотя бы четыремя гиперболическими ортогональными слагаемыми.

Определение эрмитовых форм на бимодулях было дано достаточно давно, его можно найти в книгах [2] и [6]. В книге Бака [2] также определяются форменные параметры — объекты для описания квадратичной формы в случае гиперболического модуля. История этих определений и понятия, связанные с унитарными группами, написана в статье Бака и Вавилова [4]. В этом контексте описание нормальных подгрупп унитарной группы $\mathrm{U}(P)$ было доказано в статье Пройсера [9] (в том варианте, который ближе всего к данной работе), а описание надгрупп (то есть промежуточных подгрупп между $\mathrm{U}(P)$ и $\mathrm{GL}(P)$) — в статье Петрова [7].

В работе Петрова [1] были определены нечётные форменные параметры, позволяющие определить квадратичные формы на произвольных правых модулях с эрмитовой формой. Также существует статья Бака и Пройсера [5], в котором описываются подгруппы унитарной группы $\mathrm{U}(P)$ в случае нечётного эрмитова модуля P, то есть такого эрмитова модуля, в котором есть много ортогональных слагаемых, изоморфных гиперболическим плоскостям. Над коммутативным кольцом подобное описание (с относительно коротким доказательством) опубликовано в препринте [8].

В данной работе определяются квадратичные формы на бимодулях достаточно общего вида, что обобщает определение Петрова из [1] и позволяет построить бикатегорию эрмитовых бимодулей с квадратичными формами **qBim**. Описание всех подгрупп $\mathrm{GL}(P)$, нормализуемых $\mathrm{EU}(P)$, является частичным обобщением обоих результатов из [9] и [7]. Точная формулировка основного результата приведена ниже (все необходимые определения приведены в основном тексте).

Теорема. *Пусть* K *— коммутативное кольцо с инволюцией,* S *и* R *— квадратичные* K*-алгебры и* P *— квадратичный* S*-*R*-бимодуль, чья эрмитова форма невырожденная. Предположим, что* $\mathrm{End}(P)$ *квазиконечная* K*-алгебра,* $P = P_0 \perp \mathrm{H}(P_1) \perp \ldots \mathrm{H}(P_l)$*, где* $l \geqslant 4$*, причём* $\mathrm{End}(P_0)$ *порождено менее, чем* $4l^2$ *элементами как* K*-модуль и для всех* $i, j \in \{-l, \ldots, -1, 1, \ldots, l\}$ *бимодуль* P_i *изоморфен прямому слагаемому в* P_j^N *при достаточно большом* N *(где* $P_{-i} = \overline{P_i^\vee}$ *при* $i > 0$*). Тогда существуют некоторые явно описываемые уровни* L *и группы* $\mathrm{EU}(P, L), \mathrm{GU}(P, \lfloor L \rfloor) \leqslant \mathrm{GL}(P)$ *такие, что все подгруппы* $G \leqslant \mathrm{GL}(P)$*, нормализуемые* $\mathrm{EU}(P)$*, удовлетворяют неравенствам* $\mathrm{EU}(P, L) \leqslant G \leqslant \mathrm{GU}(P, \lfloor L \rfloor)$ *для единственного уровня* L*. Наоборот, все группы, удовлетворяющие одному из таких неравенств, нормализуются* $\mathrm{EU}(P)$*.*

1. Общие понятия

Будем предполагать, что все рассматриваемые кольца ассоциативные и имеют единицу. Для произвольного кольца R через R^* обозначается группа его обратимых элементов, через $R^\bullet$ — весь его мультипликативный моноид, через $\mathrm{C}(R)$ — его центр, это же обозначение используется для центра группы. Через $\mathrm{N}_G(H)$ и $\mathrm{C}_G(H)$ обозначаются нормализатор и централизатор подгруппы H в группе G соответственно. Для коммутативного кольца K с инволюцией $k \mapsto \bar{k}$ через $\mathrm{H}(K)$ будем обозначать кольцо самосопряжённых элементов $\{k \in K \mid k = \bar{k}\}$.

Нам понадобится пара стандартных теоретико-групповых тождеств, которые мы приведём здесь для удобства: $[xy, z] = {}^x[y, z]\,[x, z]$ и $[x, yz] = [x, y]\,{}^y[x, z]$. Если G группа, а $F, H \leqslant G$ её подгруппы, то через $[F, H]$ и ${}^F H$ мы будем обозначать подгруппы G, порождённые элементами вида $[f, h]$ и ${}^f h$ соответственно при $f \in F$ и $h \in H$. Ясно, что ${}^F H = [F, H]H$.

В следующих нескольких разделах используется понятие бикатегории. Приведём одно из возможных определений: бикатегория $\mathcal{B}$ — это такое множество объектов $\mathrm{Ob}(\mathcal{B})$, для любой пары $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$ которых задана категория $\mathcal{B}(X, Y)$ морфизмов из X в Y (морфизмы внутри $\mathcal{B}(X, Y)$ называются 2-морфизмами). Кроме того, морфизмы можно перемножать с помощью функторов композиции $\otimes\colon \mathcal{B}(X_{n-1}, X_n) \times \ldots \times \mathcal{B}(X_0, X_1) \to \mathcal{B}(X_0, X_n)$ (где $n \geqslant 0$ и $X_0, \ldots, X_n \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$), согласованных друг с другом при помощи естественных изоморфизмов (которые в свою очереди согласованы друг с другом при помощи некоторых тождеств). Нульарные композиции (то есть нейтральные элементы для этих функторов) также обозначаются через $I_X \in \mathcal{B}(X, X)$.

Через $\mathbf{Bim}_K$ будем обозначать бикатегорию K-алгебр и бимодулей, где K — коммутативное кольцо. Объектами в $\mathbf{Bim}_K$ являются K-алгебры, морфизмы из R в S — это S-R-бимодули (являющиеся модулями над K), а 2-морфизмы — гомоморфизмы бимодулей. Композиция морфизмов задаётся тензорным произведением, нейтральные элементы — это бимодули вида ${}_R R_R$.

Сопряжением в бикатегории $\mathcal{B}$ называется пара морфизмов $f \in$

$\mathcal{B}(Y, X)$ и $g \in \mathcal{B}(X, Y)$ вместе с 2-морфизмами $\varepsilon\colon f \otimes g \to I_X$ и $\eta\colon I_Y \to g \otimes f$ такими, что ε и η удовлетворяют обычным уравнениям единицы и коединицы сопряжения. Сопряжение называется сопряжённой эквивалентностью, если ε и η являются изоморфизмами.

2. Эрмитовы бимодули

Большая часть этого раздела взята из книг [2] и [6].

Псевдоинволюцией с симметрией $\lambda \in R^*$ в кольце R будем называть отображение $\bar{}: R \to R, a \mapsto \bar{a}$, для которого $\overline{r + r'} = \bar{r} + \bar{r}'$, $\bar{1} = 1$, $\overline{rr'} = \bar{r}' \bar{r}$ и $\bar{\bar{r}} = \lambda r \bar{\lambda}$. Нетрудно видеть, что тогда $\bar{\lambda} = \lambda^{-1}$. В случае $\lambda = 1$ получается обычная инволюция. Если R является K-алгеброй, где K коммутативное кольцо с инволюцией, то будем также предполагать, что $f(\bar{k}) = \overline{f(k)}$, где $f\colon K \to R$ задаёт структуру алгебры.

Введём бикатегорию $\mathbf{iBim}_K$ K-алгебр с псевдоинволюциями и бимодулями над ними (если K — коммутативное кольцо с инволюцией). Индекс K будем опускать, если $K = \mathbb{Z}$.

Пусть R и S кольца с псевдоинволюциями, ${}_SM_R$ — бимодуль. По нему можно построить бимодуль ${}_R\overline{M}_S = \{\bar{m} \mid m \in M\}$ с операциями $\bar{m} + \bar{m}' = \overline{m + m'}$, $\bar{r}\, \bar{m}\, \bar{s} = \overline{smr}$. Ясно, что имеются согласованные изоморфизмы

$$\overline{{}_{R_n}{M_n}_{R_{n-1}} \underset{R_{n-1}}{\otimes} \ldots \underset{R_1}{\otimes} {}_{R_1}{M_1}_{R_0}} \cong \overline{M_1} \underset{R_1}{\otimes} \ldots \underset{R_{n-1}}{\otimes} \overline{M_n},$$
$$\overline{m_n \otimes \ldots \otimes m_1} \mapsto \overline{m_1} \otimes \ldots \otimes \overline{m_n},$$

они образуют контравариантный бифунктор $\mathbf{iBim}_K \to \mathbf{iBim}_K$ для всех K (тождественный на объектах). Нетрудно видеть, что также имеются естественные изоморфизмы $\overline{\overline{{}_SM_R}} \cong {}_SM_R, \bar{\bar{m}} \mapsto \lambda_S m \overline{\lambda_R}$.

Полуторалинейной формой B на бимодуле ${}_SM_R$ называется такое биаддитивное отображение $B\colon M \times M \to R$, что $B(mr, m'r') = \bar{r} B(m, m') r'$ и $B(sm, m') = B(m, \bar{s}\, m')$. Другими словами, это гомоморфизм бимодулей $\overline{M} \otimes_S M \to R$. Форма B называется невырожденной, если M_R конечно порождённый проективный и B индуцирует изоморфизм бимодулей $\widehat{B}\colon \overline{M} \cong \mathrm{Hom}_R(M, R)$.

Форма B называется эрмитовой, если композиция

$$\overline{M} \otimes_S M \cong \overline{\overline{\overline{M} \otimes_S M}} \xrightarrow{\overline{B}} \overline{R} \cong R$$

равна B. На языке элементов это значит, что $B(m, \lambda_S m') = \overline{B(m', m)} \lambda_R$.

Такую пару (M, B) будем называть эрмитовым бимодулем (и эрмитовым пространством, если B невырожденная).

Пусть $({}_SM_{1R}, B_{M_1})$, ..., $({}_SM_{nR}, B_{M_n})$ эрмитовы бимодули. Их ортогональной суммой называется эрмитов бимодуль

$$\bigperp_{i=1}^{n}(M_i, B_{M_i}) = (\bigoplus_{i=1}^{n} M_i, \bigperp_{i=1}^{n} B_{M_i}),$$

где $(\bigperp_{i=1}^{n} B_{M_i})((m_i)_{i=1}^{N}, (m'_i)_{i=1}^{n}) = \sum_{i=1}^{n} B_{M_i}(m_i, m'_i)$. Нетрудно видеть, что это моноидальная операция (нейтральным элементом является нулевой бимодуль). Если B_{M_i} были невырожденными, то и их ортогональная сумма невырожденная.

Тензорным произведением бимодулей $({}_{R_{i-1}}M_{i_{R_i}}, B_{M_i})$, $1 \leqslant i \leqslant n$, называется эрмитов бимодуль $\bigotimes_{i=1}^{n}({}_{R_{i-1}}M_{i_{R_i}}, B_{M_i}) = (\bigotimes_{i=1}^{n} M_i, \bigotimes_{i=1}^{n} B_{M_i})$, где $(\bigotimes_{i=1}^{n} B_{M_i})(\bigotimes_{i=1}^{n} m_i, \bigotimes_{i=1}^{n} m'_i) = B_{M_n}(m_n, \ldots B_{M_1}(m_1, m'_1) \ldots m'_n)$ (на остальных элеметах форма определяется по биаддитивности). Эти тензорные произведения согласованы (нейтральными элементами будут (R, B_1), где $B_1(r, r') = \bar{r} r'$). Таким образом, можно образовать бикатегорию $\mathbf{hBim}_K$ K-алгебр с псевдоинволюциями, эрмитовых бимодулей и изометрий (таких гомоморфизмов $f\colon M \to N$, что $B_N(f(m), f(m')) = B_M(m, m')$).

Напомним, что в $\mathbf{Bim}_K$ с точностью до единственного изоморфизма все сопряжения имеют вид $({}_RP^\vee{}_S, {}_SP_R)$, где $\varepsilon\colon P^\vee \otimes_S P \to R$ и $\eta\colon S \to \mathrm{End}_R(P) \cong P \otimes_R P^\vee$ канонические гомоморфизмы, P_R конечно порождённый проективный и $P^\vee = \mathrm{Hom}_R(P, R)$. Это сопряжение является сопряжённой эквивалентностью (то есть Морита-эквивалентностью), если P_R вполне проективный (то есть R выделяется прямым слагаемым из P^n при достаточно большом n) и $S \cong \mathrm{End}_R(P)$.

***Лемма* 1.** *Пусть $({}_TM_S, B_M)$ и $({}_SN_R, B_N)$ эрмитовы бимодули, M_S и N_R конечно порождённые проективные. Если B_M и B_N невырожденные, то и $B_M \otimes B_N$ невырожденная. Наоборот, если $B_M \otimes B_N$ невырожденная, M_S вполне проективный, N_R вполне проективный и $S \cong \mathrm{End}_R(N)$, то B_M и B_N невырожденные.*

Доказательство. Легко видеть, что $(M \otimes_S N)_R$ конечно порождённый проективный. Заметим, что $\widehat{B_M \otimes B_N}$ можно представить в виде композиции

$$\overline{M \otimes_S N} \cong \overline{N} \otimes_S \overline{M} \overset{\widehat{B}_N \otimes \widehat{B}_M}{\to} \mathrm{Hom}_R(N, R) \otimes_S \mathrm{Hom}_S(M, S) \cong$$
$$\cong \mathrm{Hom}_S(M, \mathrm{Hom}_R(N, R)) \cong \mathrm{Hom}_R(M \otimes_S N, R),$$

откуда следует первое утверждение.

Для доказательства второго утверждения заметим, что модули ${}_S\overline{M}$, ${}_S(\mathrm{Hom}_S(M, S))$, $\overline{N}_S$ и $\mathrm{Hom}_R(N, R)_S$ строго плоские. Так как изоморфизм $\widehat{B}_N \otimes \widehat{B}_M$ можно представить в виде $\overline{N} \otimes_S \overline{M} \overset{\mathrm{id} \otimes \widehat{B}_M}{\to} \overline{N} \otimes_S \mathrm{Hom}_S(M, S) \overset{\widehat{B}_N \otimes \mathrm{id}}{\to}$ $\mathrm{Hom}_R(N, R) \otimes_S \mathrm{Hom}_S(M, S)$ и в виде $\overline{N} \otimes_S \overline{M} \overset{\widehat{B}_N \otimes \mathrm{id}}{\to} \mathrm{Hom}_R(N, R) \otimes_S \overline{M} \overset{\mathrm{id} \otimes \widehat{B}_M}{\to}$ $\mathrm{Hom}_R(N, R) \otimes_S \mathrm{Hom}_S(M, S)$, то $\widehat{B}_M$ и $\widehat{B}_N$ являются инъективными и сюръективными. □

Лемма 2. *Пусть P_R конечно порождённый проективный модуль над кольцом с псевдоинволюцией, $B_P \colon P \times P \to R$ невырожденная полуторалинейная форма (если рассматривать P как бимодуль ${}_K P_R$). Тогда на $S = \mathrm{End}_R(P)$ существует единственная псевдоинволюция, при которой B является эрмитовой формой, причём $(P^\vee, P)$ является сопряжением в $\mathbf{hBim}_K$ (на $P^\vee = \mathrm{Hom}_R(P, R)$ эрмитова форма определена однозначно). Все сопряжённые эквивалентности в $\mathbf{hBim}_K$ имеют такой вид для вполне проективных P (с точностью до единственного изоморфизма).*

Доказательство. Начнём с построения псевдоинволюции на S. Для того, чтобы B_P была эрмитовой формой на ${}_S P_R$, необходимо и достаточно выполнения равенств $B_P(sp, p') = B_P(p, \bar{s}p')$ и $B_P(p, \lambda_S p') = \overline{B_P(p', p)}\lambda_R$ для всех $p, p' \in P$. Так как B_P невырожденная, то из первого равенства однозначно определяется $\bar{s}$ для всех $s \in S$. Нетрудно видеть, что $s \mapsto \bar{s}$ является антигомоморфизмом K-алгебр (и согласуется с инволюцией на K). Аналогичным образом из второго равенства находится элемент $\lambda_S \in S^*$, так что остаётся доказать, что мы получили псевдоинволюцию.

Из равенств $B_P(p', \lambda_S sp) = \overline{B_P(sp, p')}\lambda_R = \overline{B_P(p, \bar{s}p')}\lambda_R = B_P(\bar{s}p', \lambda_S p)$ следует, что $\bar{\bar{s}}\, \lambda_S = \lambda_S s$. Кроме того, из $B_P(p, p') = \overline{\overline{B_P(p, p')}\lambda_R}\, \lambda_R =$

$\overline{B_P(p', \lambda_S p)}\lambda_R = B_P(\lambda_S p, \lambda_S p') = B_P(p, \overline{\lambda_S}\lambda_S p')$ следует, что $\overline{\lambda_S} = \lambda_S^{-1}$, так что на S существует единственная псевдоинволюция.

Чтобы получить сопряжение, остаётся только завести подходящую эрмитову форму на $P^\vee$. Положим

$$B_{P^\vee}\colon \overline{P^\vee} \otimes_R P^\vee \cong {}_R\mathrm{Hom}(\bar{P}, R) \otimes_R P^\vee \cong P \otimes_R P^\vee \cong S,$$

то есть $B_{P^\vee}((p' \mapsto B_P(p\lambda_R, \lambda_S p')), q) = p \otimes q$ на уровне элементов. Несложная проверка показывает, что это эрмитова форма и пара $(P^\vee, P)$ задаёт сопряжение (где $\varepsilon\colon P^\vee \otimes_S P \to R$ и $\eta\colon S \cong P \otimes_R P^\vee$ канонические гомоморфизмы). Единственность такой эрмитовой формы на $P^\vee$ следует из общей теоремы о единственности сопряженного морфизма к данному.

Если (Q, P) сопряжённая эквивалентность, то это сопряжённая эквивалентность и в $\mathbf{Bim}_K$, поэтому по лемме 1 P и Q являются эрмитовыми пространствами. По теореме единственности сопряжённого морфизма к данному $Q \cong P^\vee$. $\square$

Заметим, что из леммы 1 теперь вытекает, что невырожденность эрмитовых форм сохраняется при внутренней эквивалентности.

3. Квадратичные структуры

Прежде чем определять квадратичные формы на эрмитовых бимодулях, нам придётся определить те объекты, куда эти формы будут действовать. Этим мы займёмся в этом разделе. В качестве мотивирующего примера можно взять модуль $\mathbb{F}_2^n$ ($\mathbb{Z}$-$\mathbb{F}_2$-бимодуль, если точнее) и квадратичную форму $q(b_1, \ldots, b_n) = \sum_{i=1}^n b_i^2$ на нём. Оказывается, что значения этой квадратичной формы можно рассматривать не в $\mathbb{F}_2$, а в $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, что имеет приложения в теории кодирования при определении дважды чётных кодов.

Пусть R кольцо с псевдоинволюцией. Тогда можно рассмотреть правое действие $R^\bullet$ на R, заданное формулой $r \cdot r' = \bar{r'} r r'$. Квадратичной структурой на R будем называть тройку $(A_R, \varphi, \mathrm{tr})$, где A_R правый $R^\bullet$-модуль, а $\varphi\colon R \to A_R$ и $\mathrm{tr}\colon A_R \to R$ гомоморфизмы $R^\bullet$-модулей, удовлетворяющие следующим аксиомам:

QS1. $\varphi(r) = \varphi(\bar{r}\lambda_R)$,

QS2. $\mathrm{tr}(\varphi(r)) = r + \bar{r}\lambda_R$,

QS3. $\mathrm{tr}(a) = \overline{\mathrm{tr}(a)}\lambda_R$,

QS4. $a \cdot (r + r') = a \cdot r + \varphi(\bar{r'}\,\mathrm{tr}(a) r) + a \cdot r'$.

Заметим, что аксиома QS4 на самом деле симметрична относительно r и r' в предположении QS1 и QS3. Кроме того, аксиомы QS3 и QS4 автоматически следуют из QS1 и QS2, если a лежит в образе φ. Из этих аксиом вытекает полезное соотношение $\varphi(\mathrm{tr}(a)) = a + a \cdot (-1)$.

В дальнейшем нас будут интересовать не просто кольца с псевдоинволюциями, а алгебры над коммутативным кольцом K (с инволюцией). Поэтому надо обобщить понятие алгебры на квадратичные структуры.

Квадратичным кольцом будем называть коммутативное кольцо K с инволюцией и квадратичной структурой A_K такой, что A_K сама является коммутативным кольцом (с тем же сложением, что и у структуры $K^\bullet$-модуля), причём выполнены дополнительные аксиомы

QR1. $a(a' \cdot k) = aa' \cdot k$,

QR2. $a\varphi(k) = \varphi(\operatorname{tr}(a)k)$,

QR3. $\operatorname{tr}(1) = 1$,

QR4. $\operatorname{tr}(aa') = \operatorname{tr}(a)\operatorname{tr}(a')$.

Наконец, квадратичной алгеброй над (K, A_K) будем называть такую алгебру с квадратичной структурой (R, A_R), что A_R является левым A_K-модулем, причём выполнены аксиомы

QA1. $a_K(a_R \cdot r) = a_K a_R \cdot r$,

QA2. $(a_K \cdot k)a_R = a_K a_R \cdot k$,

QA3. $a_K \varphi_R(r) = \varphi_R(\operatorname{tr}_K(a_K) r)$,

QA4. $\varphi_K(k) a_R = \varphi_R(k \operatorname{tr}_R(a_R))$,

QA5. $\operatorname{tr}_R(a_K a_R) = \operatorname{tr}_K(a_K)\operatorname{tr}_R(a_R)$.

Морфизмы между квадратичными кольцами определяются следующим образом: морфизм $(K, A_K) \to (L, A_L)$ — это пара гомоморфизмов колец $(f\colon K \to L, g\colon A_K \to A_L)$ таких, что $g(a_K \cdot k) = g(a_K) \cdot f(k)$, $g(\varphi_K(k)) = \varphi_L(f(k))$ и $\operatorname{tr}_L(g(a_K)) = f(\operatorname{tr}_K(a_K))$. Ясно, что такой морфизм превращает (L, A_L) в квадратичную алгебру над (K, A_K) (в частности, любое квадратичное кольцо является квадратичной алгеброй над собой). Наоборот, если (L, A_L) является квадратичным кольцом и одновременно квадратичной алгеброй над (K, A_K), причём $a_K(a_L a'_L) = (a_K a_L)a'_L$, то существует единственный морфизм $(K, A_K) \to (L, A_L)$, задающий эту структуру квадратичной алгебры. Кроме того, любая квадратичная алгебра над (L, A_L) с помощью морфизма $(K, A_K) \to (L, A_L)$ становится квадратичной алгеброй над (K, A_K) (это просто ограничение скаляров).

Пусть K — коммутативное кольцо с инволюцией. Оказывается, что на K есть универсальная квадратичная структура, превращающая его в квадратичную алгебру (более точно, начальная в категории всех таких квадратичных структур), причём все K-алгебры с квадратичными структурами при этом становятся квадратичными алгебрами. Определим группу Гейзенберга кольца K как множество $\mathrm{Heis}(K) = K \times K$ с операцией сложения $(x, y) \dotplus (x', y') = (x + x', y + y' - \bar{x}x')$ (она, вообще говоря, некоммутативная, но задаёт структуру группы, обратным элементов будет $\dot{-}(x, y) = (-x, -y - \bar{x}\,x))$. На этой группе есть действие $K^\bullet$, задаваемое формулой $(x, y) \cdot k = (xk,\ \bar{k}\ yk)$, а также умножение $(x, y) \dot{\times} (x', y') = (xx', \bar{x}y'x + \bar{x}'yx' + yy' + \bar{y}y')$ (оно ассоциативно и имеет нейтральный элемент $1 = (1, 0)$. Наконец, имеются гомоморфизмы групп $\varphi\colon K \to \mathrm{Heis}(K), k \mapsto (0, k)$ и $\mathrm{tr}\colon \mathrm{Heis}(K) \to K, (x, y) \mapsto \bar{x}x + y + \bar{y}$.

Лемма 3. *Группа $A_K = \mathrm{Heis}(K)^{\mathrm{ab}} = \mathrm{Heis}(K)/\{(0, k - \bar{k})\}$ задаёт структуру квадратичного кольца на K (все операции, определённые выше, корректно определены и на A_K). Пара (K, A_K) является универсальной квадратичной алгеброй при фиксированном K. Все алгебры над K с квадратичными структурами имеют единственную структуру квадратичной алгебры над (K, A_K).*

Доказательство. Нетрудно видеть, что $\dot{\times}$ дистрибутивна относительно $\dotplus$ слева, $\{(0, k - \bar{k})\}$ — коммутант $\mathrm{Heis}(K)$, и $\dot{\times}$ корректно определено на $A_K = \mathrm{Heis}(K)^{\mathrm{ab}}$. Кроме того, на A_K $\dot{\times}$ коммутативна, поэтому A_K является коммутативным кольцом. Далее, ясно, что $\mathrm{tr}(h \dotplus h') = \mathrm{tr}(h) + \mathrm{tr}(h')$ и $\mathrm{tr}(h \dot{\times} h') = \mathrm{tr}(h)\,\mathrm{tr}(h')$, поэтому $\mathrm{tr}\colon A_K \to K$ корректно определено и является гомоморфизмом колец. Также непосредственно проверяется, что φ и tr $K^\bullet$-линейные, и что (K, A_K) удовлетворяет всем аксиомам квадратичного кольца. Если A_R квадратичная структура на K-алгебре R, то по аксиомам QA2 и QA4 на (R, A_R) структура квадратичной алгебры над (K, A_K) задаётся однозначно (так как $A_K = 1 \cdot K \dotplus \varphi(K))$ и корректно. Универсальность очевидна. □

Как следствие, любое кольцо R с псевдоинволюцией и квадратичной структурой A_R является квадратичной алгеброй над $(\mathbb{Z}, \mathrm{Heis}(\mathbb{Z}))$ единственным образом. При этом есть изоморфизм колец $\mathrm{Heis}(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[T]/(T^2 - 2T)$, $(x, y) \mapsto x + (y + \binom{x}{2})T$.

4. Квадратичные формы

Перейдём к определению квадратичных форм. Пусть дан эрмитов бимодуль $({}_SM_R, B)$, а (S, A_S) и (R, A_R) — квадратичные алгебры над квадратичным кольцом (K, A_K). Квадратичной формой на (M, B) будем называть такое отображение $q\colon A_S \times M \to A_R$, что выполнены аксиомы

QF1. $q(a_S + a'_S, m) = q(a_S, m) + q(a'_S, m)$,

QF2. $q(a_S \cdot s, m) = q(a_S, sm)$,

QF3. $q(\varphi_S(s), m) = \varphi_R(B(m, sm))$,

QF4. $q(a_S, mr) = q(a_S, m) \cdot r$,

QF5. $q(a_S, m + m') = q(a_S, m) + \varphi_R(B(m, \operatorname{tr}_S(a_S)m')) + q(a_S, m')$,

QF6. $\operatorname{tr}_R(q(a_S, m)) = B(m, \operatorname{tr}_S(a_S)m)$,

QF7. $q(a_K a_S, m) = a_K q(a_S, m)$.

Тройку (M, B, q) будем называть квадратичным бимодулем (и квадратичным пространством, если B невырожденная). Заметим также, что QF7 всегда выполняется, если $A_K = \operatorname{Heis}(K)^{\mathrm{ab}}$. Кроме того, из аксиом вытекает равенство $q(a_S, m) + q(a_S, -m) = \varphi_R(B(m, \operatorname{tr}_S(a_S), m))$

Прежде чем двигаться дальше, покажем связь между нашим определением и нечётными квадратичными формами из статьи [1]. Для модуля M_R с эрмитовой формой B (то есть M рассматривается как бимодуль ${}_KM_R$) там определяется группа Гейзенберга $\operatorname{Heis}(B)$ как множество $M \times R$ с операцией $(m, r) \dotplus (m', r') = (m + m', r + r' - B(m, m'))$ (она задаёт структуру группы, обратными элементами будут $\dot{-}(m, r) = (-m, -r - B(m, m))$. На $\operatorname{Heis}(B)$ имеется правое действие $R^\bullet$, задаваемое формулой $(m, r) \cdot r' = (mr', \overline{r'} r r')$. Кроме того, имеются $R^\bullet$-линейные отображения $\varphi\colon R \to \operatorname{Heis}(B), r \mapsto (0, r)$ и $\operatorname{tr}\colon \operatorname{Heis}(B) \to R, (m, r) \mapsto B(m, m) + r + \bar{r}\lambda_R$. Наконец, имеется отображение $q\colon M \to \operatorname{Heis}(B), m \mapsto (m, 0)$. Нечётным форменным параметром называется подгруппа $\mathcal{L} \leqslant \mathrm{Heis}(B)$, замкнутая относительно действия $R^\bullet$, причём $\mathcal{L}_{\min} \leqslant \mathcal{L} \leqslant \mathcal{L}_{\max}$, где $\mathcal{L}_{\min} = \{(0, r - \bar{r}\lambda_R)\}$, $\mathcal{L}_{\max} = \mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$ (всегда $\mathcal{L}_{\min} \leqslant \mathcal{L}_{\max}$, это подгруппы $\mathrm{Heis}(B)$, замкнутые относительно действия $R^\bullet$, причём $\mathcal{L}_{\min}$ содержит коммутант $\mathrm{Heis}(B)$).

Лемма 4. *Абелева группа* $\mathrm{Heis}(B)/\mathcal{L}$ *является квадратичной структурой, а пара* $(R, \mathrm{Heis}(B)/\mathcal{L})$ *— квадратичной алгеброй над* (K, A_K), *где* $A_K = \mathrm{Heis}(K)^{\mathrm{ab}}$, *а* q *единственным образом продолжается до квадратичной формы* $\tilde{q}$ *на* ${}_K M_R$ *так, чтобы* $\tilde{q}(1, m) = q(m)$. *Наоборот, любая квадратичная форма* $\tilde{q}$ *на* ${}_K M_R$ *вместе с квадратичной структурой на* R *имеет такой вид (с точностью до единственного изоморфизма), если* A_R *порождена как абелева группа образами* $\tilde{q}$ *и* φ_R.

Доказательство. Все утверждения проверяются несложными вычислениями. Форма $\tilde{q}$ строится с помощью явной формулы

$$\tilde{q}((x, y), m) = q(xm) + \varphi(B(m, ym)).$$

Нечётный форменный параметр $\mathcal{L}$ является ядром $R^\bullet$-линейного отображения $\mathrm{Heis}(B) \to A_R, (m, r) \mapsto \tilde{q}(1, m) + \varphi(r)$, это же отображение задаёт изоморфизм между $\mathrm{Heis}(B)/\mathcal{L}$ и A_R. $\square$

Если (M_1, B_{M_1}, q_{M_1}), ..., (M_n, B_{M_n}, q_{M_n}) квадратичные бимодули над (S, A_S) и (R, A_R), то определим их ортогональную сумму как квадратичный бимодуль $\perp_{i=1}^n (M_i, B_{M_i}, q_{M_i}) = (\bigoplus_{i=1}^n M_i, \perp_{i=1}^n B_{M_i}, \perp_{i=1}^n q_{M_i})$, где квадратичная форма задаётся формулой $(\perp_{i=1}^n q_{M_i})(a_S, (m_i)_{i=1}^n) = \sum_{i=1}^n q_{M_i}(a_S, m_i)$. Ясно, что это моноидальная операция (нейтральным элементом является нулевой бимодуль). Ортогональная сумма квадратичных пространств является квадратичным пространством.

Можно также ввести тензорное произведение квадратичных бимодулей. Если даны квадратичные алгебры (R_0, A_{R_0}), ..., (R_n, A_{R_n}) и квадратичные бимодули $({}_{R_{i-1}}{M_i}_{R_i}, B_{M_i}, q_{M_i})$ при $1 \leqslant i \leqslant n$, то их тензорное произведение — это $\bigotimes_{i=1}^n (M_i, B_{M_i}, q_{M_i}) = (\bigotimes_{i=1}^n M_i, \bigotimes_{i=1}^n B_{M_i}, \bigotimes_{i=1}^n q_{M_i})$, где

$$(\bigotimes_{i=1}^{n} q_{M_i})(a_{R_0}, \sum_{1\leqslant l\leqslant L} \bigotimes_{i=1}^{n} m_{l,i}) = \sum_{1\leqslant l\leqslant L} q_{M_n}(\dots q_{M_1}(a_{R_0}, m_{l,1}), \dots, m_{l,n}) +$$
$$+ \sum_{1\leqslant l<l'\leqslant L} \varphi_{R_n}(B_{M_n}(m_{l,n}, \dots B_{M_1}(m_{l,1}, \mathrm{tr}_{R_0}(a_{R_0}) m_{l,1}) \dots m_{l',n})).$$

Построенное тензорное произведение ассоциативно с точностью до изоморфизма, а его нейтральным элементом является (R, B_1, q_1), где $q_1(a_R, r) = a_R \cdot r$. Таким образом мы получили бикатегорию $\mathbf{qBim}_K$, где объекты — квадратичные алгебры над квадратичным кольцом (K, A_K), морфизмы — квадратичные бимодули, а 2-морфизмы — изометрии (сохраняющие и эрмитову, и квадратичную формы). При этом морфизмы $(K, A_K) \to (L, A_L)$ индуцируют бифункторы ограничения скаляров $\mathbf{qBim}_L \to \mathbf{qBim}_K$.

***Предложение* 1.** *Пусть (P_R, B_P) конечно порождённый проективный модуль с невырожденной полуторалинейной формой, (R, A_R) квадратичная алгебра. Тогда на $S = \mathrm{End}_R(P)$ существует единственная (с точностью до единственного изоморфизма) квадратичная структура вместе с квадратичной формой q_P на P такая, что (P, B_P, q_P) имеет левый сопряжённый в $\mathbf{qBim}_K$. Все сопряжённые эквивалентности получаются таким образом (с точностью до единственного изоморфизма).*

Доказательство. Псевдоинволюция на S строится единственным образом по лемме 2, и из неё же следует второе утверждение (если доказать единственность в первом). Пусть (Q, B_Q) левый сопряжённый к (P, Q_P) в $\mathbf{hBim}_K$ (теперь P мы рассматриваем как S-R-бимодуль). Заметим, что сопряжение для квадратичных форм означает, что $a_S \cdot (p \otimes q) = q_Q(q_P(a_S, p), q)$ и $a_R \cdot \langle q, p \rangle = q_P(q_Q(a_R, q), p)$.

Начнём с доказательства существования. Положим

$$A_S = \frac{\langle q_Q(a_R, q), \varphi_S(s) \mid a_R \in A_R, q \in Q, s \in S \rangle_{\mathbb{Z}}}{\left\langle \begin{matrix} \varphi_S(s+s') - \varphi_S(s) - \varphi_S(s'),\ \ \varphi_S(s - \bar{s}\lambda_S),\ \ q_Q(\varphi_R(r), q) - \varphi_S(B_Q(q, rq)), \\ q_Q(a_R + a'_R, q) - q_Q(a_R, q) - q_Q(a'_R, q),\ \ q_Q(a_R \cdot r, q) - q_Q(a_R, rq), \\ q_Q(a_R, q + q') - q_Q(a_R, q) - q_Q(a_R, q') - \varphi_S(B_Q(q, \mathrm{tr}_R(a_R) q')) \end{matrix} \right\rangle},$$

где $q_Q(a_R, q)$ и $\varphi_S(s)$ формальные символы (правда, теперь можно рассматривать их как значения отображений $q_Q\colon A_R \times Q \to A_S$ и $\varphi_S\colon S \to A_S$). На A_S как абелевой группе заведём структуру правого $S^\bullet$-модуля формулами $\varphi_S(s) \cdot s' = \varphi_S(\overline{s'} s s')$ и $q_Q(a_R, q) \cdot s = q_Q(a_R, qs)$ (эта структура корректно определена). Кроме того, построим аддитивное отображение $\mathrm{tr}_S\colon A_S \to S$ формулами $\mathrm{tr}_S(\varphi_S(s)) = s + \bar{s}\, \lambda_S$ и $\mathrm{tr}_S(q_Q(a_R, q)) = B_Q(q, \mathrm{tr}_R(a_R) q)$ (которые тоже задают его корректно). Наконец, на A_S зададим (тоже корректно определённую) структуру левого A_K-модуля формулами $a_K \varphi_S(s) = \varphi_S(\mathrm{tr}_K(a_K) s)$ и $a_K q_Q(a_R, q) = q_Q(a_K a_R, q)$.

Можно непосредственно проверить, что (S, A_S) является квадратичной алгеброй, а q_Q — квадратичной формой. Квадратичная форма на исходном бимодуле P задаётся формулами $q_P(\varphi_S(s), p) = \varphi_R(B_P(p, sp))$ и $q_P(q_Q(a_R, q), p) = a_R \cdot \langle q, p \rangle$, она тоже оказывается корректно определённой. Очередная проверка показывает, что это квадратичная форма, причём (Q, B_Q, q_Q) — левый сопряжённый к (P, B_P, q_P).

Наконец, перейдём к доказательству единственности. Пусть A'_S — какая-то другая квадратичная структура на S, q'_Q и q'_P — соответствующие квадратичные формы. Ясно, что имеется естественное отображение $\pi\colon A_S \to A'_S$, которое делает все нужные диаграммы коммутативными, и остаётся доказать его биективность. Заметим, что (Q, A_S)-(Q, A'_S)-бимодуль вида (S, B_1, q) с некоторой квадратичной формой q — это то же самое, что и отображение $f\colon A_S \to A'_S$, делающее коммутативными очевидные диаграммы (это верно для любого кольца S с двумя квадратичными структурами). Конкретно наше отображение π получается из бимодуля $(P, B_P, q_P) \otimes_R (Q, B_Q, q'_Q)$. Но у этого бимодуля есть квазиобратный $(P, B_P, q'_P) \otimes_R (Q, B_Q, q_Q)$ (из композиции в любом порядке есть изометрия в тождественный морфизм, которая является изоморфизмом в $\mathbf{hBim}_K$ — и, следовательно, в $\mathbf{qBim}_K$). Следовательно, π изоморфизм (единственность очевидна). $\square$

5. Элементарные трансвекции

Сформулируем ещё несколько стандартных определений для эрмитовых бимодулей в нашем контексте. Если $({}_T P_R, B_P, q_P)$ квадратичный бимодуль, P_R конечно порождённый проективный, то метаболическое пространство — это квадратичный бимодуль $(\mathrm{M}(P), B_{\mathrm{M}(P)}, q_{\mathrm{M}(P)})$, где $\mathrm{M}(P) = P \oplus \overline{P^\vee}$ T-R-бимодуль, $B_{\mathrm{M}(P)}(\left(\begin{smallmatrix} p \\ f \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} p' \\ f' \end{smallmatrix}\right)) = \lambda_R f(\bar{\lambda}_T p') + \overline{f'(p)} + B_P(p, p')$ и $q_{\mathrm{M}(P)}(a_T, \left(\begin{smallmatrix} p \\ f \end{smallmatrix}\right)) = \varphi_R(\lambda_R f(\overline{\lambda_T}\, \mathrm{tr}_T(a_T) p)) + q_P(a_T, p)$. Этот бимодуль на самом деле является квадратичным пространством. В случае, когда $B_P = q_P = 0$, метаболическое пространство называется гиперболическим и обозначается $\mathrm{H}(P)$.

Пусть $({}_T P_R, B_P, q_P)$ — квадратичное пространство. Его унитарной группой называется его группа автоморфизмов $\mathrm{U}(P) = \mathrm{U}(P, B_P, q_P)$. Нас будет интересовать случай, когда $P = P_0 \perp \mathrm{H}(P_1) \perp \ldots \perp \mathrm{H}(P_l)$, где P_0 квадратичное пространство (нечётная часть P). Положим $P_{-i} = \overline{P_i^\vee}$ при $1 \leqslant i \leqslant l$, тогда $P = \bigoplus_{i=-l}^{l} P_i$ как T-R-бимодуль. С этого момента мы будем также считать, что при всех $i, j \neq 0$ бимодуль P_i изоморфен прямому слагаемому в P_j^N для достаточно большого N.

Положим $E = \mathrm{End}_R(P_R)$, тогда по предложению 1 в $\mathbf{qBim}_K$ имеется сопряжение $(P^\vee, P)$. При этом E само по себе является квадратичным пространством (как бимодуль ${}_T E_E$) и сопряжение даёт изоморфизм $\mathrm{Aut}_{\mathbf{Bim}}(E) \cong \mathrm{Aut}_{\mathbf{Bim}}(P) = \mathrm{GL}(P)$ (так как $E \otimes_E P \otimes_R P^\vee \cong E$ и $P \otimes_R P^\vee \otimes_E P \cong P$), который индуцирует изоморфизм $\mathrm{U}(E) \cong \mathrm{U}(P)$. Положим также $C = \mathrm{C}_E(T) = \mathrm{End}_{\mathbf{Bim}}(E) = \mathrm{End}_{\mathbf{Bim}}(P)$, это K-алгебра с инволюцией (полученной сужением псевдоинволюции с E), коммутирующая с λ_E (так как λ_E равно образу λ_T по лемме 2). Тогда $\mathrm{Aut}_{\mathbf{Bim}}(E) = \mathrm{Aut}_{\mathbf{Bim}}(P) = C^*$.

Условие $P = P_0 \perp \mathrm{H}(P_1) \perp \ldots \perp \mathrm{H}(P_l)$ равносильно тому, что в C дана полная система попарно ортогональных идемпотентов e_i при $-l \leqslant i \leqslant l$, причём $\overline{e_i} = e_{-i}$, $q(A_T, e_i) = 0$ при $i \neq 0$ и по нашему предположению ещё $(1 - e_0) C e_i C (1 - e_0) = (1 - e_0) C (1 - e_0)$ при $i \neq 0$.

Положим

$$t_{i,j}(x) = 1 + x$$

при $x \in e_i C e_j$ и $i \neq j$ по аналогии с элементарными трансвекциями в полной линейной группе. Легко проверить, что они удовлетворяют соотношениям

LT1. $t_{i,j}(x)\, t_{i,j}(y) = t_{i,j}(x + y)$;

LT2. $[t_{i,j}(x), t_{j,k}(y)] = t_{i,k}(xy)$ при $i \neq k$;

LT3. $[t_{j,i}(x), t_{k,j}(y)] = t_{k,i}(-yx)$ при $i \neq k$;

LT4. $[t_{i,j}(x), t_{k,l}(y)] = 1$ при $j \neq k$ и $l \neq i$.

Элементарными трансвекциями будем называть

$$\tau_{i,j}(x, y) = t_{i,j}(x) t_{-j,-i}(-\bar{y}) = 1 + x - \bar{y}$$

при $x, y \in e_i C e_j$ и $0 \neq i \neq \pm j \neq 0$, а также

$$\tau_i(x, y, z) = t_{0,i}(x) t_{-i,i}(y) t_{-i,0}(z) = 1 + x + y + z$$

при $x \in e_0 C e_i$, $y \in e_{-i} C e_i$, $z \in e_{-i} C e_0$ и $i \neq 0$. Элементарной унитарной группой назовём группу

$$\mathrm{EU}(P) = \langle \tau_{i,j}(x, y), \tau_i(x, y, z) \mid \tau_{i,j}(x, y) \in \mathrm{U}(P), \tau_i(x, y, z) \in \mathrm{U}(P) \rangle \leqslant \mathrm{U}(P).$$

Для удобства работы с $\tau_{i,j}(x, y)$ и $\tau_i(x, y, z)$ положим $\mathcal{A} = C \times C$ (это K-алгебра с диагональным вложением $C \hookrightarrow A$) и $\mathcal{H} = e_0 C \times C \times C e_0$ (это группа с групповой операцией $(x, y, z) \dotplus (x', y', z') = (x + x', y + zx' + y', z + z')$, нейтральным элементом $\dot{0} = (0, 0, 0)$ и обратным $\dot{-}(x, y, z) = (-x, zx - y, -z)$). На этих объектах есть инволюции $\overline{(x, y)} = (\bar{y}, \bar{x})$ и $(x, y, z)^* = (x, zx - y, z)$. Кроме того, на $\mathcal{H}$ есть правое действие $\mathcal{A}^\bullet$, задаваемое формулой $(x, y, z) \cdot (p, q) = (xp, \bar{q} y p, \bar{q} z)$, и имеются гомоморфизмы групп $\pi \colon \mathcal{H} \to \mathcal{A}, (x, y, z) \mapsto (x, -\bar{z})$ и $\varphi \colon \mathcal{A} \to \mathcal{H}, (x, y) \mapsto (0, x - \bar{y}, 0)$. Наконец, есть отображение $\mathrm{tr} \colon \mathcal{H} \to \mathcal{A}, (x, y, z) \mapsto (y, \overline{zx - y})$. Все эти операции связаны следующими соотношениями:

NQ1. $h \dotplus h' \mathbin{\dot{-}} h \mathbin{\dot{-}} h' = \varphi(-\overline{\pi(h)}\pi(h'))$, $h \dotplus \varphi(a) = \varphi(a) \dotplus h$;

NQ2. $\varphi(\bar{a}) = \varphi(a)^* = \dot{-}\varphi(a) = \varphi(-a)$;

NQ3. $\pi(h^*) = \pi(h)$;

NQ4. $\pi(\varphi(a)) = 0$;

NQ5. $\mathrm{tr}(h \dotplus h') = \mathrm{tr}(h) - \overline{\pi(h)}\pi(h') + \mathrm{tr}(h')$, $\mathrm{tr}(\dot{0}) = 0$, $\mathrm{tr}(\dot{-}h) = \overline{\pi(h)}\pi(h) - \mathrm{tr}(h)$;

NQ6. $\mathrm{tr}(h^*) = \overline{\mathrm{tr}(h)} = \mathrm{tr}(\dot{-}h)$;

NQ7. $h \cdot (a + a') = h \cdot a \dotplus \varphi(\bar{a}' \,\mathrm{tr}(h) a) \dotplus h \cdot a'$, $h \cdot 0 = \dot{0}$, $h \cdot (-1) = \varphi(\mathrm{tr}(h)) \dot{-} h$;

NQ8. $(h \cdot a)^* = h^* \cdot a$;

NQ9. $\varphi(a) \cdot a' = \varphi(\bar{a}' a a')$;

NQ10. $\mathrm{tr}(h \cdot a) = \bar{a}\,\mathrm{tr}(h) a$;

NQ11. $\pi(h \cdot a) = \pi(h) a$;

NQ12. $\mathrm{tr}(\varphi(a)) = a - \bar{a}$, $\varphi(\mathrm{tr}(h)) = h \dot{-} h^* = h \dotplus h \cdot (-1)$.

Лемма 5. *Верны следующие соотношения:*

T1. $\tau_{i,j} \colon e_i \mathcal{A} e_j \to \mathrm{GL}(P)$ *и* $\tau_i \colon \mathcal{H} \cdot e_i \to \mathrm{GL}(P)$ *гомоморфизмы;*

T2. $\tau_{i,j}(a) = \tau_{-j,-i}(-\bar{a})$;

T3. $[\tau_{i,j}(a), \tau_{k,l}(a')] = 1$, *если* $i \neq l \neq -j \neq -k \neq i$;

T4. $[\tau_{i,j}(a), \tau_{j,k}(a')] = \tau_{i,k}(aa')$ *и* $[\tau_{j,i}(a), \tau_{k,j}(a')] = \tau_{k,i}(-a'a)$, *если* $i \neq \pm k$;

T5. $[\tau_{-i,j}(a), \tau_{j,i}(a')] = \tau_i(\varphi(aa'))$;

T6. $[\tau_i(h), \tau_j(h')] = \tau_{-i,j}(-\overline{\pi(h)}\pi(h'))$, *если* $i \neq \pm j$;

T7. $[\tau_i(h), \tau_{j,k}(a)] = 1$, *если* $j \neq i \neq -k$;

T8. $[\tau_i(h), \tau_{i,j}(a)] = \tau_{-i,j}(\mathrm{tr}(h) a) \tau_j(h^* \cdot a)$.

Доказательство. Это следует из соотношений для $t_{i,j}(x)$. $\square$

6. Уровневые группы

Положим $\Lambda_i = \{h \in \mathcal{H} \cdot e_i \mid \tau_i(h) \in \mathrm{U}(P)\}$ при $i \neq 0$. Эта группа зависит от квадратичной формы q, хотя для $(x, y, z) \in \Lambda_i$ всегда верно $z = -\bar{x}$ и $y + \bar{y} = zx$ (что равносильно $\overline{\tau_i(x, y, z)} = \tau_i(-x, zx - y, -z)$). Пусть также $\Lambda = \sum_{i \neq 0}^{\cdot} \Lambda_i \dotplus \varphi(C) \cdot (1 - e_0)$.

Лемма 6. *Пусть $l \geqslant 3$. Тогда $\varphi(C) \cdot (1 - e_0) \leqslant \Lambda$, $\pi(\Lambda) \leqslant e_0 C(1 - e_0)$, $\mathrm{tr}(\Lambda) + \overline{\pi(\Lambda)}\pi(\Lambda) \leqslant (1 - e_0)C(1 - e_0)$, $\Lambda \cdot (1 - e_0)C(1 - e_0) \dotplus \varphi(C) \cdot (1 - e_0) \leqslant \Lambda$ и $\Lambda^* = \Lambda$. Кроме того, $\Lambda_i = \Lambda \cdot e_i$ при $i \neq 0$.*

Доказательство. Это следует из леммы 5, так как $\tau_{i,j}(a) \in \mathrm{U}(P)$ тогда и только тогда, когда $a \in e_i C e_j$. $\square$

Для примера найдём явно Λ в случае, когда $T = K$ и квадратичная форма задаётся форменным параметром $\mathcal{L} \leqslant \mathrm{Heis}(B)$. Условие $q(1, e_i) = 0$ означает, что $(e_i, 0) \in \mathcal{L}$ при всех $0 \neq i$. Элемент $\tau_i(x, y, z)$ лежит в $\mathrm{U}(P)$, если $z = -\bar{x}$ и $(xp, B(p, yp)) \in \mathcal{L}$ при всех $p \in P_i$. Таким образом, $\Lambda = \{(x, y, -\bar{x}) \in \mathcal{H} \cdot e_i \mid (xp, B(p, yp)) \in \mathcal{L}$ при $p \in \bigoplus_{i \neq 0} P_i\}$. Наоборот, если Λ удовлетворяет всем условиям из леммы 6, $T = K$ и $P = E = C$, то Λ получается из нечётного форменного параметра $\mathcal{L} = \{(x, y) \mid (x, y, -\bar{x}) \in \Lambda\} \cdot C \dotplus \langle (e_i, 0) \mid i \neq 0 \rangle \dotplus \mathcal{L}_{\min}$.

Расширенным уровнем мы будем называть пару $L = (I, \Gamma)$, где $I = \bar{I} \leqslant \mathcal{A}$ и $\Gamma = \Gamma^* \leqslant \mathcal{H}$, причём $I\,(I + K + (1 - e_0)C(1 - e_0) + \pi(\Lambda) + \overline{\pi(\Lambda)}) \leqslant I$, $\pi(\Gamma) \leqslant I$, $\mathrm{tr}(\Gamma) + \overline{\pi(\Gamma)}\pi(\Gamma) \leqslant I$, $\Gamma \cdot (I + K + (1 - e_0)C(1 - e_0) + \pi(\Lambda) + \overline{\pi(\Lambda)}) \dotplus \Lambda \cdot I \dotplus \varphi(I) \leqslant \Gamma$, $e_0 I(1 - e_0) = \pi(\Gamma \cdot (1 - e_0))$. Два расширенных уровня $L = (I, \Gamma)$ и $L' = (I', \Gamma')$ будем называть эквивалентными, если $I(1 - e_0) = I'(1 - e_0)$ и $\Gamma \cdot (1 - e_0) = \Gamma' \cdot (1 - e_0)$, класс эквивалентности будем называть просто уровнем и обозначать той же буквой L, когда это не будет приводить к недоразумениям. Для уровня L можно также определить обёртывающий уровень $\widehat{L}$, где $\widehat{I}(1 - e_0) = I(1 - e_0) + (1 - e_0)C(1 - e_0) + \pi(\Lambda)$ и $\widehat{\Gamma} \cdot (1 - e_0) = \Gamma \cdot (1 - e_0) \dotplus \Lambda$. Каждому уровню L соответствуют наибольший и наименьший расширенные уровни $\lfloor L \rfloor$ и $\lceil L \rceil$, где $e_0 \lfloor I \rfloor e_0 = e_0 I(1 - e_0)\widehat{I} e_0 + e_0 \widehat{I}(1 - e_0) I e_0$, $\lfloor \Gamma \rfloor \cdot e_0 = \Gamma \cdot (1 - e_0)\widehat{I} e_0 \dotplus$

$\Lambda \cdot Ie_0 \dotplus \varphi(\lfloor I \rfloor) \cdot e_0$, $e_0 \lceil I \rceil e_0 = \{a \in e_0 \mathcal{A} e_0 \mid a\widehat{I}(1-e_0) + (1-e_0)\widehat{I}a \leqslant I\}$ и $\lceil \Gamma \rceil \cdot e_0 = \{h \in \mathcal{H} \cdot e_0 \mid \pi(h) \in \lceil I \rceil, \mathrm{tr}(h) \in \lceil I \rceil, h \cdot \widehat{I}(1-e_0) + \varphi(I) \cdot (1-e_0) \leqslant \Gamma\}$.

Лемма 7. *Пусть $l \geqslant 3$ и $G \leqslant \mathrm{GL}(P)$ нормализуется $\mathrm{EU}(P)$. Тогда существует единственный уровень $L(G) = (I(G), \Gamma(G))$ такой, что $\tau_{i,j}(a) \in G$ только при $a \in I(G)$ и $\tau_i(h) \in G$ только при $h \in \Gamma(G)$.*

Доказательство. Доказательство полностью аналогично лемме 6, если заметить, что $[G, G] \leqslant G$ и $[G, \mathrm{EU}(P)] \leqslant G$. □

Таким образом, каждой группе G, нормализуемой $\mathrm{EU}(P)$, сопоставляется её уровень $L(G)$. По уровню $L = (I, \Gamma)$ можно определить группу

$$\mathrm{EU}(L) = \langle \tau_{i,j}(a), \tau_i(h) \mid a \in e_i I e_j, h \in \Gamma \cdot e_i, 0 \neq i \neq \pm j \neq 0 \rangle$$

и элементарную уровневую группу

$$\mathrm{EU}(P, L) = {}^{\mathrm{EU}(P)}\,\mathrm{EU}(L).$$

Введём обозначения $\alpha(g) = (g, \overline{g^{-1}})$ и $\varepsilon = (e_0, e_+, -e_0)$, где $e_+ = \sum_{i>0} e_i$ и $e_- = \sum_{i<0} e_i$. Легко видеть, что $\pi(\varepsilon) = e_0$ и $\mathrm{tr}(\varepsilon) = e_+ - \zeta$, где $\zeta = (0, 1)$.

Лемма 8. *Отображение $\alpha \colon C^* \to \mathcal{A}^*$ является гомоморфизмом, причём $\overline{\alpha(g)} = \alpha(g^{-1})$ и верны соотношения*

$$\begin{gathered}
\alpha(\tau_{i,j}(a)) = 1 + a - \bar{a};\\
\alpha(\tau_i(h)) = 1 + \mathrm{tr}(h) + \pi(h) - \overline{\pi(h)};\\
\varepsilon \cdot \alpha(\tau_{i,j}(a)) \dot{-} \varepsilon = \begin{cases} \varphi(\bar{a}), & \text{если } i < 0 < j,\\ \varphi(a), & \text{если } i > 0 > j,\\ \dot{0}, & \text{если } ij > 0;\end{cases}\\
\varepsilon \cdot \alpha(\tau_i(h)) \dot{-} \varepsilon = \begin{cases} h^* \dot{-} \varphi(\pi(h)), & \text{если } i > 0,\\ h, & \text{если } i < 0.\end{cases}
\end{gathered}$$

Доказательство. Все эти равенства проверяются по определению. □

Теперь можно по расширенному уровню L определить главную уровневую группу

$$\mathrm{U}(P,L)=\{g\in C^*\mid \alpha(g)-1\in I, \varepsilon\cdot\alpha(g)\mathbin{\dot-}\varepsilon\in\Gamma\}.$$

Лемма 8 гарантирует, что это группа: действительно, $\alpha(g^{-1})-1=\overline{(\alpha(g)-1)}$, $\alpha(gg')-1=(\alpha(g)-1)\alpha(g')+(\alpha(g')-1)$, $\varepsilon\cdot\alpha(g^{-1})\mathbin{\dot-}\varepsilon=\dot-(\varepsilon\cdot\alpha(g)\mathbin{\dot-}\varepsilon)\cdot\alpha(g^{-1})$ и $\varepsilon\cdot\alpha(gg')\mathbin{\dot-}\varepsilon=(\varepsilon\cdot\alpha(g))\cdot\alpha(g')+(\varepsilon\cdot\alpha(g')\mathbin{\dot-}\varepsilon)$. Кроме того, из этой же леммы следует, что $\mathrm{U}(P,L)$ нормализуется $\mathrm{EU}(P)$ (потому что ${}^{\alpha(h)}\alpha(g)-1={}^{\alpha(h)}(\alpha(g)-1)$ и $(\varepsilon\cdot{}^{\alpha(h)}\alpha(g)\mathbin{\dot-}\varepsilon)\cdot\alpha(h)=(\varepsilon\cdot\alpha(h)\mathbin{\dot-}\varepsilon)\cdot\alpha(g)\mathbin{\dot+}(\varepsilon\cdot\alpha(g)\mathbin{\dot-}\varepsilon)\mathbin{\dot-}(\varepsilon\cdot\alpha(h)\mathbin{\dot-}\varepsilon)$) и имеет уровень L. Следовательно, $\mathrm{EU}(P,L)$ тоже имеет уровень L. Нам также понадобится полная уровневая группа

$$\mathrm{GU}(P,L)=\{g\in\mathrm{N}_{\mathrm{GL}(P)}(\mathrm{U}(P,L))\mid[g,\mathrm{EU}(P,\widehat{L})]\subseteq\mathrm{U}(P,L)\}.$$

Ясно, что это группа, нормализуемая $\mathrm{EU}(P)$.

***Лемма* 9.** *Пусть $l\geqslant 3$, L — расширенный уровень. Тогда группа $\mathrm{GU}(P,L)$ содержит $\mathrm{U}(P,L)$ и имеет уровень L. При этом $\mathrm{GU}(P,L)$ содержится в множестве $\mathrm{GU}'(P,L)=\{g\in\mathrm{GL}(P)\mid[\{g,g^{-1}\},\mathrm{EU}(P,\widehat{L})]\subseteq\mathrm{U}(P,L)\}$, которое задаётся уравнениями*

$$\begin{aligned}{}^{\alpha(g^{\pm1})}a-a,\ a^{\alpha(g^{\pm1})}-a\in I\ \textit{при}\ a\in\lfloor\widehat{I}\rfloor+K,\\ \varepsilon\cdot{}^{\alpha(g^{\pm1})}a\mathbin{\dot-}\varepsilon\cdot a\alpha(g^{\mp1})\in\Gamma\ \textit{при}\ a\in(1-e_0)\widehat{I},\\ \varepsilon\cdot{}^{\alpha(g^{\pm1})}\pi(h)\mathbin{\dot-}\varepsilon\cdot\pi(h)\alpha(g^{\mp1})\mathbin{\dot+}h\cdot\alpha(g^{\mp1})\mathbin{\dot-}h\in\Gamma\ \textit{при}\ h\in\lfloor\widehat{\Gamma}\rfloor.\end{aligned}$$

Кроме того, $[\mathrm{GU}'(P,\lfloor L\rfloor),\mathrm{U}(P,\lfloor\widehat{I}\rfloor+K,\lfloor\widehat{\Gamma}\rfloor)]\subseteq\mathrm{U}(P,\lfloor L\rfloor)$ и $\mathrm{GU}(P,\lfloor L\rfloor)=\mathrm{GU}'(P,\lfloor L\rfloor)$.

Доказательство. Пусть $g\in C^*$ удовлетворяет $[g,\mathrm{EU}(P,\widehat{L})]\subseteq\mathrm{U}(P,L)$. Это равносильно тому, что при всех $a\in e_i\widehat{I}e_j$ (где $0\neq i\neq\pm j\neq 0$) верно $\alpha([g,\tau_{i,j}(a)])-1\in I$ и $\varepsilon\cdot\alpha([g,\tau_{i,j}(a)])\mathbin{\dot-}\varepsilon\in\Gamma$, а также при всех $h\in\widehat{\Gamma}\cdot e_i$ (при $i\neq 0$) верно $\alpha([g,\tau_i(h)])-1\in I$ и $\varepsilon\cdot\alpha([g,\tau_i(h)])\mathbin{\dot-}\varepsilon\in\Gamma$. Тогда ${}^{\alpha(g)}(a-\bar{a})\equiv a-\bar{a}\mod I$ и ${}^{\alpha(g)}(\mathrm{tr}(h)+\pi(h)-\overline{\pi(h)})\equiv\mathrm{tr}(h)+\pi(h)-\overline{\pi(h)}$ $\mathrm{mod}\ I$. Перемножая сравнения первого вида при различных i и j (здесь достаточно $l \geqslant 2$), получим, что ${}^{\alpha(g)}a \equiv a \mod I$ при $a \in (1-e_0)\widehat{I}(1-e_0)$. Но тогда, используя сравнения второго вида, мы получаем первое уравнение на g, то есть ${}^{\alpha(g)}a \equiv a \mod I$ при $a \in \lfloor \widehat{I} \rfloor + K$.

Далее, при всех $a \in e_i \widehat{I} e_j$ (где $0 \neq i \neq \pm j \neq 0$) нам известно, что $\varepsilon \cdot {}^{\alpha(g)}(1 + a - \bar{a}) \equiv \varepsilon \cdot (1 + a - \bar{a}) \mod \Gamma$, откуда $\varepsilon \cdot {}^{\alpha(g)}a \in \Gamma$ (ясно, что $\Gamma \trianglelefteq \langle \varepsilon \cdot (I + \lfloor \widehat{I} \rfloor + K) \rangle \dotplus \Gamma$ и $\varphi(\zeta(a - \bar{a})) = \varphi(a)$ при всех $a \in \mathcal{A}$). Следовательно, $\varepsilon \cdot {}^{\alpha(g)}a \equiv \varepsilon \cdot a\alpha(g^{-1}) \mod \Gamma$ при $a \in (1-e_0)\widehat{I}$. Кроме того, $\varepsilon \cdot {}^{\alpha(g)}(1 + \operatorname{tr}(h) + \pi(h) - \overline{\pi(h)}) \equiv \varepsilon \cdot (1 + \operatorname{tr}(h) + \pi(h) - \overline{\pi(h)}) \mod \Gamma$ при $h \in \widehat{\Gamma} \cdot e_i$ и $i \neq 0$. После упрощения получаем $\varepsilon \cdot {}^{\alpha(g)}\pi(h) \dotplus \varepsilon \cdot {}^{\alpha(g)}(-\overline{\pi(h)}) \equiv h^* \dotplus \varphi(\zeta^{\alpha(g)} \operatorname{tr}(h)) \mod \Gamma$. По уже доказанному $\varepsilon \cdot {}^{\alpha(g)}(-\overline{\pi(h)}) \equiv \varepsilon \cdot (-\overline{\pi(h)}\,\alpha(g^{-1})) = 0$, поэтому $\varepsilon \cdot {}^{\alpha(g)}\pi(h) \mathbin{\dot{-}} \varepsilon \cdot \pi(h)\alpha(g^{-1}) \dotplus h^* \cdot \alpha(g^{-1}) \mathbin{\dot{-}} h^* \in \Gamma$. Из этого следует третье уравнение на g (если заменить h на h^*).

Уровень $\mathrm{GU}(P, L)$ находится с помощью полученных уравнений. Если доказать включение $[\mathrm{GU}'(P, \lfloor L \rfloor), \mathrm{U}(P, \lfloor \widehat{I} \rfloor + K, \lfloor \widehat{\Gamma} \rfloor)] \subseteq \mathrm{U}(P, \lfloor L \rfloor)$, то сразу станет понятно, что $\mathrm{GU}'(P, \lfloor L \rfloor)$ является группой и совпадает с $\mathrm{GU}(P, \lfloor L \rfloor)$. Пусть $[g, \mathrm{EU}(P, \widehat{L})] \subseteq \mathrm{U}(P, \lfloor L \rfloor)$ и $x \in \mathrm{EU}(P, \lfloor \widehat{I} \rfloor + K, \lfloor \widehat{\Gamma} \rfloor)$, тогда

$$\alpha([g, x]) - 1 = ({}^{\alpha(g)}\alpha(x) - \alpha(x))\alpha(x^{-1}) \in \lfloor I \rfloor$$

и если $h = \varepsilon \cdot \alpha(x) \mathbin{\dot{-}} \varepsilon \in \lfloor \widehat{\Gamma} \rfloor$, то

$$\begin{aligned}
&(\varepsilon \cdot \alpha([g, x]) \mathbin{\dot{-}} \varepsilon) \cdot \alpha(x) \equiv \\
&\qquad \equiv \varepsilon \cdot {}^{\alpha(g)}(e_0\alpha(x)) \dotplus \varepsilon \cdot {}^{\alpha(g)}((1-e_0)\alpha(x)) \mathbin{\dot{-}} \varepsilon \cdot \alpha(x) \equiv \\
&\qquad \equiv \varepsilon \cdot {}^{\alpha(g)}\pi(\varepsilon \cdot \alpha(x) \mathbin{\dot{-}} \varepsilon) \mathbin{\dot{-}} \varphi({}^{\alpha(g)}(\zeta e_0(\alpha(x) - 1))) \dotplus \\
&\qquad\quad \dotplus \varepsilon \cdot {}^{\alpha(g)}e_0 \dotplus \\
&\qquad\quad \dotplus \varepsilon \cdot (1-e_0)\alpha(x)\alpha(g^{-1}) \mathbin{\dot{-}} \varepsilon \cdot \alpha(x) \equiv \\
&\qquad \equiv \varepsilon \cdot \alpha(x) \mathbin{\dot{-}} \varepsilon \mathbin{\dot{-}} (\varepsilon \cdot \alpha(x) \mathbin{\dot{-}} \varepsilon) \cdot \alpha(g^{-1}) \dotplus \\
&\qquad\quad \dotplus \varepsilon \cdot e_0(\alpha(x) - 1)\alpha(g^{-1}) \mathbin{\dot{-}} \varphi({}^{\alpha(g)}(\zeta e_0(\alpha(x) - 1))) \dotplus \\
&\qquad\quad \dotplus \varepsilon \mathbin{\dot{-}} \varepsilon \cdot \alpha(x) \mathbin{\dot{-}} \varepsilon \cdot (1-e_0)\alpha(g^{-1}) \dotplus \\
&\qquad\quad \dotplus \varepsilon \cdot (1-e_0)\alpha(x)\alpha(g^{-1}) \equiv \dot{0} \mod \Gamma.
\end{aligned}$$

□

7. Локализация и корни

Пусть $S \leqslant \mathrm{H}(K)^\bullet$ мультипликативное подмножество, L — уровень. В этом случае $S^{-1}L \subseteq S^{-1}\mathcal{A} \times S^{-1}\mathcal{H}$ тоже можно рассматривать как уровень (если вместо Λ взять $S^{-1}\Lambda$), поэтому можно определить соответствующие подгруппы $\mathrm{EU}(S^{-1}P, S^{-1}L)$, $\mathrm{U}(S^{-1}P, S^{-1}L)$ и $\mathrm{GU}(S^{-1}P, S^{-1}L)$ в $(S^{-1}C)^*$ (вообще говоря, они не связаны с бимодулем $S^{-1}P$, у которого кольцо эндоморфизмов может быть строго больше $S^{-1}C$). Обозначим через L_0 уровень $\mathrm{EU}(P)$, а через $\mathrm{EU}(S^{-1}P)$ — группу $\mathrm{EU}(S^{-1}P, S^{-1}L_0)$, тогда $\mathrm{EU}(S^{-1}P, S^{-1}L) = {}^{\mathrm{EU}(S^{-1}P)}\,\mathrm{EU}(S^{-1}L)$. Гомоморфизм локализации будем обозначать через Ψ_S.

Если $L = (I, \Gamma)$ уровень и $s \in S$, то положим $L \cdot s = (Is, \Gamma \cdot s + \varphi(Is))$, это тоже уровень. Введём систему подгрупп $\Omega_S(P, L) = \{\mathrm{EU}(P, L \cdot s) \mid s \in S\}$ в $\mathrm{EU}(P, L)$. Мы хотим показать, что $\Omega_S(P, L)$ является базой окрестностей единицы некоторой групповой топологии (для краткости просто базой) на $\mathrm{EU}(P, L)$, хотя и не обязательно хаусдорфовой, и что $\mathrm{EU}(P, \widehat{L})$ непрерывно действует сопряжениями на $\mathrm{EU}(P, L)$. Кроме того, мы хотим доказать аналогичные утверждения для $\mathrm{EU}(S^{-1}P, S^{-1}L)$ с системой подгрупп $\Psi_S(\Omega_S(P, L))$.

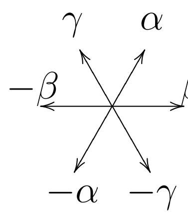
Положим $\Phi = \{\pm \mathrm{e}_i \pm \mathrm{e}_j, \pm \mathrm{e}_k, \pm 2\mathrm{e}_k \mid 1 \leqslant i < j \leqslant l; 1 \leqslant k \leqslant l\} \subseteq \mathbb{R}^l$, это неприведённая (кристаллографическая) система корней типа BC_l. Её элементы (то есть корни) длины 2 называются длинными, длины $\sqrt{2}$ — короткими, а длины 1 — ультракороткими. Каждому корню $\alpha \in \Phi$ и уровню $L = (I, \Gamma)$ можно сопоставить подгруппу $U_\alpha(L) \leqslant \mathrm{EU}(P, L)$ следующим образом (считается, что $\mathrm{e}_i = -\mathrm{e}_{-i}$ при $i < 0$):

$$U_\alpha(L) = \begin{cases} \tau_{i,j}(I), & \alpha = \mathrm{e}_j - \mathrm{e}_i, 0 \neq i \neq \pm j \neq 0; \\ \tau_i(\Gamma), & \alpha = \mathrm{e}_i, 0 \neq i; \\ \tau_i(\varphi(I)), & \alpha = 2\mathrm{e}_i, 0 \neq i. \end{cases}$$

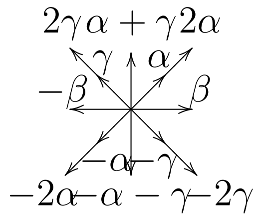
Ясно, что $U_{2\mathrm{e}_i}(L) \trianglelefteq U_{\mathrm{e}_i}(L)$. Согласно лемме 5,

$$[U_\alpha(L), U_\beta(\widehat{L})] \leqslant \prod_{\substack{i\alpha + j\beta \in \Phi \\ i,j > 0}} U_{i\alpha + j\beta}(L),$$

если $i\alpha + j\beta \neq 0$ при всех $i, j > 0$ (по той же лемме произведение в правой части является группой и не зависит от порядка сомножителей).



Система корней типа A_2



Система корней типа BC_2

***Лемма* 10.** *Если $l \geqslant 3$ и L — уровень, то* $[\mathrm{EU}(P, L), \mathrm{EU}(P)] = \mathrm{EU}(P, L)$.

Доказательство. Достаточно доказать, что $\mathrm{EU}(L) \leqslant [\mathrm{EU}(L), \mathrm{EU}(L_0)]$. Если α короткий корень, то он представляется в виде $\alpha = \beta + \gamma$, где β и γ тоже короткие, и тогда $U_\alpha(L) = [U_\beta(L), U_\gamma(L_0))]$. Если же α ультракороткий, то $\alpha = \beta + \gamma$, где β короткий и γ ультракороткий, поэтому

$$\begin{aligned} U_\alpha(L) &\leqslant \langle U_{2\alpha}(L), [U_\gamma(L), U_\beta(L_0)], U_{\alpha+\gamma}(L)\rangle \leqslant \\ &\leqslant \langle [U_{\alpha+\gamma}(L), U_\beta(L_0))], [U_\gamma(L), U_\beta(L_0)], U_{\alpha+\gamma}(L)\rangle. \end{aligned}$$ □

Заметим, что если $H, H' \in \Omega_S(P, L)$, то существует $H'' \in \Omega_S(P, L)$ такое, что $H'' \leqslant H \cap H'$ (если $H = \mathrm{EU}(P, L \cdot s)$ и $H' = \mathrm{EU}(P, L \cdot s')$, то положим $H'' = \mathrm{EU}(P, L \cdot ss')$). Следовательно, для доказательства того, что $\Omega_S(P, L)$ является базой и $\mathrm{EU}(P, \widehat{L})$ непрерывно действует на $\mathrm{EU}(P, L)$, достаточно доказать непрерывность в 1 (или в $(1, 1)$) отображений $\mathrm{EU}(P, L) \to \mathrm{EU}(P, L), g \mapsto [g, x]$ для фиксированного $x \in \mathrm{EU}(P, \widehat{L})$, $\mathrm{EU}(P, \widehat{L}) \to \mathrm{EU}(P, L), x \mapsto [g, x]$ для фиксированного $g \in \mathrm{EU}(P, \widehat{L})$ и $\mathrm{EU}(P, L)\ \mathrm{EU}(P, \widehat{L}) \to \mathrm{EU}(P, L), (g, x) \mapsto [g, x]$.

***Лемма* 11.** *Если $l \geqslant 3$ и L — уровень, то* $\mathrm{EU}(P, L) = \langle {}^{U_{-\alpha}(L_0)}U_\alpha(L) \mid \alpha \in \Phi\rangle$. *Если $S \leqslant \mathrm{H}(K)^\bullet$ мультипликативное подмножество, то $\Omega_S(P, L)$ является базой $\mathrm{EU}(P, L)$, а $\Psi_S(\Omega_S(P, L))$ — базой $\mathrm{EU}(S^{-1}P, S^{-1}L)$. Кроме того, $\mathrm{EU}(P, \widehat{L})$ непрерывно действует сопряжениями на $\mathrm{EU}(P, L)$ и $\mathrm{EU}(S^{-1}P, S^{-1}\widehat{L})$ — на $\mathrm{EU}(S^{-1}P, S^{-1}L)$.*

Доказательство. Определим группу $\mathrm{EU}'(L) = \langle {}^{U_{-\alpha}(L_0)}U_\alpha(L) \mid \alpha \in \Phi\rangle$, тогда $\mathrm{EU}(L) \leqslant \mathrm{EU}'(L) \leqslant \mathrm{EU}(P, L)$. Вначале мы докажем, что $\mathrm{EU}'(L)$ замкнуто относительно сопряжений с помощью элементов $x \in U_\delta(\widehat{L})$ и что эти сопряжения непрерывны в $1 \in \mathrm{EU}'(L) = \mathrm{EU}(P, L)$. Это достаточно сделать для подгрупп ${}^{U_{-\alpha}(L_0)}U_\alpha(L)$ (с базой $\{{}^{U_{-\alpha}(L_0)}U_\alpha(L \cdot s) \mid s \in S\}$), которые сопряжением отображаются в $\mathrm{EU}(P, L)$.

Если α и δ линейно независимы, то

$$\begin{aligned}[U_\delta(\widehat{L}), {}^{U_{-\alpha}(L_0)}U_\alpha(L \cdot s)] &\leqslant \langle \mathrm{EU}'(L \cdot s), {}^{U_{-\alpha}(L_0)}[{}^{U_{-\alpha}(L_0)}U_\delta(\widehat{L}), U_\alpha(L \cdot s)]\rangle \leqslant \\ &\leqslant \langle \mathrm{EU}'(L \cdot s), \prod_{\substack{i\alpha + j\delta \in \Phi \\ j > 0}} U_{i\alpha + j\beta}(L \cdot s)\rangle \leqslant \mathrm{EU}'(L \cdot s).\end{aligned}$$

Если $\alpha = \pm\delta$ короткий, то $\alpha = \beta + \gamma$, где β и γ тоже короткие, тогда

$$\begin{aligned}{}^{U_\alpha(\widehat{L})U_{-\alpha}(\widehat{L})}U_\alpha(L \cdot s^2) &\leqslant [{}^{U_\alpha(\widehat{L})U_{-\alpha}(\widehat{L})}U_\beta(L \cdot s), {}^{U_\alpha(\widehat{L})U_{-\alpha}(\widehat{L})}U_\gamma(L_0 \cdot s)] \leqslant \\ &\leqslant [U_\beta(L \cdot s)U_{-\gamma}(L \cdot s), \\ &\qquad U_\gamma(L \cdot s)U_{-\beta}(L \cdot s)U_\gamma(L_0)U_{-\beta}(L_0)] \leqslant \\ &\leqslant \mathrm{EU}'(L \cdot s).\end{aligned}$$

Если же $\alpha = \pm\delta$ ультракороткий, то $\alpha = \beta + \gamma$, где β короткий и γ ультракороткий, тогда

$$\begin{aligned}{}^{U_\alpha(\widehat{L})U_{-\alpha}(\widehat{L})}U_{2\alpha}(L \cdot s^2) &\leqslant [{}^{U_\alpha(\widehat{L})U_{-\alpha}(\widehat{L})}U_\beta(L_0 \cdot s), {}^{U_\alpha(\widehat{L})U_{-\alpha}(\widehat{L})}U_{\alpha+\gamma}(L \cdot s)] \leqslant \\ &\leqslant [U_\beta(L_0)U_{-\alpha-\gamma}(L_0)U_{-\gamma}(L_0) \\ &\qquad U_\beta(L \cdot s)U_{-\alpha-\gamma}(L \cdot s)U_{-\gamma}(L \cdot s), \\ &\qquad U_{\alpha+\gamma}(L \cdot s)U_{-\beta}(L \cdot s)U_\gamma(L \cdot s)] \leqslant \mathrm{EU}'(L \cdot s)\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
{}^{U_\alpha(\widehat{L})U_{-\alpha}(\widehat{L})}U_\alpha(L\cdot s^2) = \langle \mathrm{EU}'(L\cdot s), [&{}^{U_\alpha(\widehat{L})U_{-\alpha}(\widehat{L})}U_\gamma(L\cdot s),\\
&{}^{U_\alpha(\widehat{L})U_{-\alpha}(\widehat{L})}U_\beta(L_0\cdot s)]\rangle \leqslant\\
\leqslant \langle \mathrm{EU}'(L\cdot s), [&U_{\alpha+\gamma}(L\cdot s)U_{-\beta}(L\cdot s)U_\gamma(L\cdot s),\\
&U_\beta(L_0)U_{-\alpha-\gamma}(L_0)U_{-\gamma}(L_0)\\
&U_\beta(L\cdot s)U_{-\alpha-\gamma}(L\cdot s)U_{-\gamma}(L\cdot s)\rangle \leqslant\\
\leqslant \mathrm{EU}'(L\cdot s).&
\end{aligned}$$

Так же доказывается, что ${}^x(-)\colon \mathrm{EU}(S^{-1}P, S^{-1}L) \to \mathrm{EU}(S^{-1}P, S^{-1}L)$ непрерывно в 1 при $x \in \mathrm{EU}(S^{-1}P, S^{-1}\widehat{L})$ и что в $(1,1)$ непрерывны оба отображения вида $(g,x) \mapsto [g,x]$. Осталось проверить непрерывность отображения $x \mapsto [g,x]$, где $g \in \mathrm{EU}(P,L)$ (для $\mathrm{EU}(S^{-1}P, S^{-1}L)$ рассуждения аналогичны). Не умаляя общности, $g \in U_\alpha(L)$, тогда $[U_\delta(\widehat{L}\cdot s), U_\alpha(L)] \leqslant \prod_{\substack{i\alpha+j\delta\in\Phi\\ i,j>0}} U_{i\alpha+j\delta}(L\cdot s)$, если α и δ линейно независимы или сонаправлены. Если $\alpha = -\beta$ короткий и $\alpha = \beta+\gamma$, где β и γ короткие, то

$$[U_{-\alpha}(\widehat{L}\cdot s^2), U_\alpha(L)] = [\langle U_{-\beta}(\widehat{L}\cdot s)U_{-\gamma}(\widehat{L}\cdot s)\rangle, U_\alpha(L)] \leqslant \mathrm{EU}'(L\cdot s),$$

и аналогично, если $\alpha = -\beta$ ультракороткий. □

Также можно заметить, что канонические вложения $\mathrm{EU}(P,L) \to \mathrm{EU}(P,L')$ и $\mathrm{EU}(S^{-1}P, S^{-1}L) \to \mathrm{EU}(S^{-1}P, S^{-1}L')$ непрерывны, если уровень L содержится в L' (то есть $\lfloor I\rfloor \leqslant \lfloor I'\rfloor$ и $\lfloor \Gamma\rfloor \leqslant \lfloor \Gamma'\rfloor$).

***Лемма* 12.** *Пусть $l \geqslant 3$ и L — уровень. Тогда группа $\mathrm{EU}(P,L)$ порождается подгруппами $U_{\pm \mathrm{e}_l \pm \mathrm{e}_i}(L)$ при $1-l \leqslant i \leqslant l-1$ как подгруппа $C^* = \mathrm{GL}(P)$, нормализуемая $\mathrm{EU}(P,\widehat{L})$ (и сама $\mathrm{EU}(P,\widehat{L})$ порождается аналогичными подгруппами как абстрактная группа).*

Доказательство. Это тривиально следует из леммы 5. □

8. Полные уровневые группы

Напомним, что квазиконечная K-алгебра — это K-алгебра, являющаяся индуктивным пределом конечных K-алгебр (по сути, это некоммутативный аналог целости). У этого условия есть равносильные переформулировки (подробно написанные в [3]), из которых следует, в частности, что подалгебра B квазиконечной алгебры A сама является квазиконечной (при этом верно равенство $B^* = A^* \cap B$, которым мы будем пользоваться). Также будет полезно иметь в виду, что квазиконечность над K и $\mathrm{H}(K)$ равносильны, так как K цело над $\mathrm{H}(K)$ (уравнение целой зависимости для $k \in K$ — это $k^2 - k(k + \bar{k}) + (k\bar{k}) = 0$). Ещё мы будем использовать, что в квазиконечной алгебре односторонняя обратимость влечёт двустороннюю.

Наша цель — доказать включение $[\mathrm{GU}(P, L), \mathrm{EU}(P, \widetilde{L})] \subseteq \mathrm{EU}(P, L)$ для всех расширенных уровней L, когда C квазиконечно над K и выполнено некоторое дополнительное предположение. Для начала мы докажем вспомогательное утверждение в случае, когда K локально.

Напомним, что $\mathrm{GU}'(P, L) = \{g \in \mathrm{GL}(P) \mid [\{g, g^{-1}\}, \mathrm{EU}(P, \widehat{L})] \subseteq \mathrm{U}(P, L)\}$ для расширенного уровня L. Ясно, что это множество, замкнутое относительно сопряжения с помощью $\mathrm{EU}(P, \widehat{L})$ и умножения с обеих сторон на $\mathrm{EU}(P, L)$. Положим $\mathrm{GU}'_{\widehat{k}}(P, L) = \{g \in \mathrm{GU}'(P, L) \mid e_k\alpha(g) = e_k\alpha(g)e_k = \alpha(g)e_k\}$ при $k \neq 0$. Очевидно, что $[\mathrm{GU}'_{\widehat{k}}(P, L), \mathrm{EU}(P, \widehat{L})] \subseteq \mathrm{EU}(P, L)$ по лемме 12.

***Лемма* 13.** *Пусть $l \geqslant 3$, K локальное с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$, C конечная K-алгебра, ${}^{\alpha(g^{\pm 1})}a \equiv a \mod I$ и $\varepsilon \cdot {}^{\alpha(g^{\pm 1})}a \in \Gamma$ при всех $a \in e_{\pm k}\widehat{I}e_{\mp k}$, а также $e_k\alpha(g)e_k$ обратимо в $e_k\mathcal{A}e_k$. Тогда существуют $h, h' \in \mathrm{EU}(P, L)$ такие, что $e_k\alpha(hgh') = e_k\alpha(hgh')e_k = \alpha(hgh')e_k$.*

Доказательство. Заметим, что $e_i\alpha(g)e_k\widehat{I}e_{-k}\alpha(g^{-1})e_{-k}\widehat{I}e_k \leqslant I$ и $e_k \in e_k\widehat{I}e_{-k}\alpha(g^{-1})e_{-k}\widehat{I}e_k\alpha(g)e_k$ при $0 \neq i \neq \pm k$ (потому что $e_{-k}\alpha(g^{-1})e_{-k}$ обратим в $e_{-k}\mathcal{A}e_{-k}$). Если $e_k = x\alpha(g)e_k$ при $x \in e_k\widehat{I}e_{-k}\alpha(g^{-1})e_{-k}\widehat{I}e_k$, то $e_i\alpha(\tau_{i,k}(-e_i\alpha(g)x)g)e_k = 0$. Так как умножение на такую трансвекцию сохраняет условие, то можно считать, что $e_i\alpha(g)e_k = 0$. Теперь пусть

$h = \varepsilon \cdot \alpha(g)x \in \Gamma$, и тогда $(1 - e_k)\alpha(\tau_k(\dot{-}h^*)g)e_k = 0$, умножение на эту трансвекцию тоже сохраняет условие на g.

Точно такими же преобразованиями, только произведёнными с g^{-1} вместо g (и с $-k$ вместо k) можно добиться равенства $e_k\alpha(g) = e_k\alpha(g)e_k$. $\square$

Предложение 2. *Пусть $l \geqslant 3$, K локальное с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$, C конечная K-алгебра и e_0Ce_0 имеет менее, чем $4l^2$ образующих как K-модуль. Тогда $\mathrm{GU}'(P, L) = \mathrm{EU}(P, L)\,\mathrm{GU}'_{\widehat{k}}(P, L)$ для всех $k \neq 0$.*

Доказательство. Не умаляя общности, $k = l$. Будем доказывать, что любое $g \in \mathrm{GU}'(P, L)$ принадлежит множеству $\mathrm{EU}(P, L)\,\mathrm{GU}'_{\widehat{l}}(P, L)$. Мы будем сопрягать его с помощью элементов из $\mathrm{EU}(P, \widehat{L})$ и умножать с разных сторон на элементы из $\mathrm{EU}(P, L)$, пока не получим элемент из $\mathrm{GU}'_{\widehat{l}}(P, L)$. Для удобства мы будем работать в $\mathcal{A}$, сопрягая и умножая сразу $\alpha(g)$.

Сначала докажем, что существуют такие $p \in e_l\widehat{I}$ и $q \in \widehat{I}e_l$, что $p\,{}^{\alpha(g)}e_l\,q$ обратимо в $e_l\widehat{I}e_l$. Для этого вспомним, что ${}^{\alpha(g)}((1 - e_0)\widehat{I}(1 - e_0))$ содержится в $(1 - e_0)\widehat{I}(1 - e_0) + I$. Не умаляя общности, K является полем и $\mathcal{A}$ полупростая (так как можно профакторизовать по её радикалу Джекобсона $\mathrm{J}(\mathcal{A})$), тогда $\mathcal{A}$ будет конечномерной K-алгеброй. Пусть $A = \widehat{I}(1 - e_0)\widehat{I} + K$ и $f_0, f_1, \ldots, f_m$ — поднятия в A примитивных центральных идемпотентов $A/\mathrm{J}(A)$ (так что f_i — это полная система ортогональных идемпотентов), причём $f_i \in \widehat{I}(1 - e_0)\widehat{I}$ при $i \neq 0$, $f_0\widehat{I}(1-e_0)\widehat{I} \leqslant \mathrm{J}(A)$ и $f_0 = e_0f_0e_0$ (если $A = \widehat{I}(1-e_0)\widehat{I}$, то положим $f_0 = 0$). Пусть также $B = I + \widehat{I}(1-e_0)\widehat{I} + K$. Несложно доказать, что классы f_i в $B/\mathrm{J}(B)$ будут примитивными центральными идемпотентами при $i \neq 0$. Кроме того, $(1 - e_0)A(1 - e_0) = (1 - e_0)B(1 - e_0)$ полупростая.

Зафиксируем $1 \leqslant i \leqslant m$. Ясно, что $X = {}^{\alpha(g)}((1 - e_0)f_iA(1 - e_0)) \subseteq B$ полупростая подалгебра (их единицы, вообще говоря, не совпадают), причём $f_jX \subseteq f_jA[\zeta]f_i\mathcal{A} = 0$ при $1 \leqslant j \leqslant m$ и $j \neq i$ (так как $f_j\mathcal{A}(1 - e_0)f_i \subseteq A[\zeta]$). Кроме того, $f_0X \subseteq \mathrm{J}(B)$, так как образ f_0X в $B/\mathrm{J}(B)$ будет полупростой подалгеброй, содержащейся в $e_0Be_0/\mathrm{J}(e_0Be_0)$, при этом все простые сомножители X имеют размерность хотя бы $4l^2$, но

$e_0Be_0/\mathrm{J}(e_0Be_0)$ вкладывается в произведение алгебр $e_0B\zeta e_0/\mathrm{J}(e_0B\zeta e_0)\times e_0B(1-\zeta)e_0/\mathrm{J}(e_0B(1-\zeta)e_0)$, где каждый сомножитель имеет размерность строго меньше $4l^2$. Следовательно, $X\subseteq f_iX+\mathrm{J}(B)\subseteq \widehat{I}f_i\widehat{I}+\mathrm{J}(B)$, поэтому найдутся $p\in e_l\widehat{I}$ и $q\in\widehat{I}e_l$ такие, что $p^{\,\alpha(g)}e_l\,q$ обратимо в $e_l\widehat{I}e_l$.

Теперь покажем, что p можно взять в виде $e_l\alpha(h)$, где $h\in\mathrm{EU}(P,\widehat{L})$ и $e_{-l}\alpha(h)=e_{-l}$. Мы будем работать в алгебре $T=B/\mathrm{J}(B)$. Пусть $p'=e_l\alpha(h)$ такое, где $h\in\mathrm{EU}(P,\widehat{L})$, $e_{-l}\alpha(h)=e_{-l}$ и ранг $p'^{\,\alpha(g)}e_l\,q$ наибольший возможный (в каждом простом сомножителе $B/\mathrm{J}(B)$). Обозначим для краткости $\alpha(hg)e_l\alpha(g^{-1})q$ через f. Легко видеть, что $e_ife_l\in Te_lfe_l$ при $0\neq i\neq\pm l$, иначе можно умножить f на элемент вида $\tau_{l,i}(a)$ слева, увеличив ранг e_lf. Далее, $e_{-l}fe_l\in Te_lfe_l$, потому что иначе можно умножить f на $\tau_{l,2-l}(a)\tau_{l-1,l-2}(b)\tau_{l,l-2}(c)$ слева, увеличив ранг e_+fe_l. Наконец, $e_0fe_l\in Te_lfe_l$, потому что иначе можно умножить f на элемент вида $\tau_{-l}(h)$ слева, увеличив ранг $(1-e_0)fe_l$. Следовательно, $fe_l\in Te_lfe_l$, поэтому e_lfe_l имеет полный ранг (тот же, что и e_l), то есть этот элемент обратим в e_lTe_l.

Теперь к ${}^hg$ можно применить лемму 13. $\square$

***Теорема* 1.** *Пусть $l\geqslant 3$, C квазиконечная K-алгебра и e_0Ce_0 порождена менее, чем $4l^2$ элементами как K-модуль. Тогда для всех расширенных уровней L верно включение $[\mathrm{GU}'(P,L),\mathrm{EU}(P,\widehat{L})]\subseteq\mathrm{EU}(P,L)$.*

Доказательство. Зафиксируем $g\in\mathrm{GU}'(P,L)$, тогда не умаляя общности $\mathrm{H}(K)$ нётерово (например, конечно порождено над $\mathbb{Z}$), а K и C — конечные $\mathrm{H}(K)$-алгебры. Рассмотрим идеал

$$\mathfrak{a}=\{k\in\mathrm{H}(K)\mid[g,\mathrm{EU}(P,\widetilde{L}\cdot k)]\subseteq\mathrm{EU}(P,L)\}\trianglelefteqslant K.$$

Проверка того, что это действительно идеал, тривиальна. Пусть $\mathfrak{m}\trianglelefteqslant\mathrm{H}(K)$ максимальный идеал, тогда $K_\mathfrak{m}$ локальное и к $C_\mathfrak{m}$ как $K_\mathfrak{m}$-алгебре применимо предложение 2. Элемент $\Psi_\mathfrak{m}(g)$ раскладывается в произведение элементов из $\mathrm{EU}(P_\mathfrak{m},L_\mathfrak{m})$ и $\mathrm{D}(P_\mathfrak{m},L_\mathfrak{m})$, поэтому при всех $H\in\Omega_\mathfrak{m}(P,L)$ существует $H'\in\Omega_\mathfrak{m}(P,\widehat{L})$ такое, что $\Psi_\mathfrak{m}([g,H'])\subseteq\Psi_\mathfrak{m}(H)$. Мы можем положить $H=\mathrm{EU}(P,L\cdot s)$ и $H'=\mathrm{EU}(P,\widehat{L}\cdot ss')$ для такого s, чтобы $\Psi_{\mathfrak{m}}|_{Cs}$ было инъективным, тогда $[g, H'] \subseteq H$ и $ss' \in \mathfrak{a} \nleqslant \mathfrak{m}$. Следовательно, $\mathfrak{a} = (1)$. $\square$

Таким образом, в предположениях теоремы $\mathrm{GU}(P, L) \leqslant \mathrm{GU}'(P, L) = \{g \in \mathrm{GL}(P) \mid [\{g, g^{-1}\}, \mathrm{EU}(P, \widehat{I})] \subseteq \mathrm{EU}(P, L)\} = \mathrm{GU}(P, \lfloor L \rfloor)$.

Приведём пример, из которого станет понятна необходимость ограничения на $e_0 C e_0$. Пусть $S = R = K$ с тривиальной инволюцией, $2 \in K^*$, $\lambda_S = \lambda_R = 0$ и P_i свободные K-модули (можно считать, что P_i имеют ранг 1 при $i \neq 0$). Пусть также $A_S = A_K = \mathrm{Heis}(K)$ и $A_R = \mathrm{Heis}(B) / \dot{\sum}_{i \neq 0} q(P_i)$ (в этом случае обе группы Гейзенберга абелевы). Тогда $\mathrm{U}(P) = \{g \in \mathrm{GL}(P) \mid g^{\mathrm{T}} = g^{-1}, g_{0,i} = 0 \text{ при } i \neq 0\}$, где g^{T} — транспонирование, а $g_{0,i}$ — это то, что в наших предыдущих обозначениях записывалось как $e_0 g e_i$. Из того, что $g \in \mathrm{U}(P)$ является ортогональным оператором, следует, что и $g_{i,0} = 0$. Другими словами, $\mathrm{U}(P) = \mathrm{O}(2l, K) \times \mathrm{O}(P_0)$, где первый сомножитель обозначает расщепимую ортогональную группу, и $\mathrm{EU}(P) = \mathrm{EO}(2l, K)$. Далее, $\mathrm{U}(P, \lceil L_0 \rceil) = \mathrm{O}(2l, K) \times \mathrm{GL}(P_0)$. Также для некоторого расширенного уровня L_0', соответствующего уровню L_0, будет верно $\mathrm{U}(P, L_0') = \mathrm{U}(P)$ и $\mathrm{GU}(P, L_0') = (\mathrm{GO}(2l, K) \times \mathrm{GO}(P_0)) \rtimes \langle \sigma \rangle$, где σ изометрично переставляет P_0 и $\bigoplus_{i \neq 0} P_i$, $\sigma^2 = \mathrm{id}$. Ясно, что $[\mathrm{GU}(P, L_0'), \mathrm{EU}(P)] \nleqslant \mathrm{EU}(P)$. Что ещё хуже, не существует наибольшей группы уровня L_0, так как $\langle \mathrm{GU}(P, L_0'), \mathrm{U}(P, \lceil L_0 \rceil) \rangle = (\mathrm{GL}(2l, P) \times \mathrm{GL}(P_0)) \rtimes \langle \sigma \rangle$ имеет строго больший уровень.

9. Глобальное извлечение трансвекций

Перейдём к доказательству основной теоремы. Пусть $G \leqslant \mathrm{GL}(P)$ группа, нормализуемая $\mathrm{EU}(P)$. Мы докажем, что если $\mathrm{EU}(P, L) \leqslant G$, то либо $G \leqslant \mathrm{GU}(P, \lfloor L \rfloor)$, или G содержит элементарную трансвекцию не из $\mathrm{EU}(P, L)$.

Доказательство этого утверждения будет сначала проведено для локального случая, поэтому сначала мы докажем вспомогательный результат, позволяющий от локального случая перейти к глобальному. Пусть $S \leqslant \mathrm{H}(K)^\bullet$ мультипликативное подмножество, $H \in \Psi_S(\Omega_S(P, \widehat{L}))$, $H' \in \Psi_S(\Omega_S(P, L))$ (причём $H' \leqslant H$), $g \in G$ и в $\mathrm{GL}(S^{-1}P) = (S^{-1}C)^*$ мы нашли последовательность элементов $g_0 = \Psi_S(g), g_1, \ldots, g_N$, где $g_N \notin \mathrm{EU}(S^{-1}P, S^{-1}L)$ элементарная трансвекция (такую трансвекцию мы будем называть нетривиальной) и g_{i+1} выражается через g_i по одному из правил

EX1. $g_{i+1} = {f_{i,0}}^{h_i} g_i\, f_{i,1}$, где $h_i \in \mathrm{EU}(S^{-1}P, S^{-1}\widehat{L})$ и $f_{i,k} \in \mathrm{EU}(S^{-1}P, S^{-1}L)$;

EX2. $g_{i+1} = f_{i,0} \prod_{k=1}^{n_i} ([g_i, t_{i,k}]^{\pm 1} f_{i,k})$, где $t_{i,k} \in \mathrm{EU}(S^{-1}P, S^{-1}\widehat{L}))$, $f_{i,k} \in \mathrm{EU}(S^{-1}P, S^{-1}L))$, $t_{i,k}^{h'_{i-1} \ldots h'_0} \in H$ и $[t_{i,k}, b_i]^{h'_{i-1} \ldots h'_0}, f_{i,k}^{h'_{i-1} \ldots h'_0} \in H'$ (элементы $h'_j \in \mathrm{EU}(S^{-1}P, S^{-1}\widehat{L})$ и $b_i \in \mathrm{GU}(S^{-1}P, \lfloor S^{-1}L \rfloor)$ будут определены потом, но в их определении будут использоваться только предыдущие g_j);

EX3. $g_{i+1} = g_i x_i$, где $x_i \in \mathrm{GU}(S^{-1}P, \lfloor S^{-1}L \rfloor)$;

EX4. $g_{i+1} = g_i^{-1}$, причём если раньше были применения третьего правила, то после них всех должно было быть применено второе.

В основном мы просто будем стараться до какого-то момента не использовать третье правило вообще, а после этого момента — не использовать четвёртое. Во всех леммах про извлечение трансвекций в локальном случае будет считаться, что g уже получено в результате такой последовательности преобразований и что в этой последовательности после каждого применения третьего правила было применено и второе. Во втором правиле мы обычно будем использовать только один сомножитель с $f_{i,0} = f_{i,1} = 1$, причём $t_{i,1}$ мы будем обычно брать в виде трансвекции из достаточно маленького элемента $\Psi_S(\Omega_S(P, \widehat{L}))$ (зависящего от предыдущих g_j, чтобы выполнились нужные условия), то есть трансвекции вида $\tau_{p,q}(as)$ или $\tau_p(h \cdot s)$ для достаточно большого $s \in S$.

Легко доказать по индукции, что $g_i = a_i b_i$ для некоторых a_i и $b_i \in \mathrm{GU}(S^{-1}P, \lfloor S^{-1}L \rfloor)$, причём $a_0 = \Psi_S(g)$ и либо $a_{i+1} = {}^{h'_i}a_i^{\pm 1}$, либо $a_{i+1} = f'_{i,0} \prod_{k=1}^{n'_i}([a_i, t'_{i,k}]\, f'_{i,k})$ (и тогда $h'_i = 1$ и $b_i = 1$), где $h'_i \in \mathrm{EU}(S^{-1}P, S^{-1}\widehat{L})$, $t'_{i,k} \in \mathrm{EU}(S^{-1}P, S^{-1}\widehat{L})$, $f'_{i,k} \in \mathrm{EU}(S^{-1}P, S^{-1}L)$, ${f'_{i,k}}^{h'_{i-1}, \ldots, h'_0} \in H'$ и ${t'_{i,k}}^{h'_{i-1} \ldots h'_0} \in H$: в единственном нетривиальном случае, когда было применено второе правило, надо воспользоваться групповыми тождествами $[a_i b_i, t_{i,k}] = [b_i, t_{i,k}]\, [[t_{i,k}, b_i], a_i]\, [a_i, t_{i,k}]$ и $[t_{i,k}, a_i b_i] = [t_{i,k}, a_i]\, [a_i, [t_{i,k}, b_i]]\, [t_{i,k}, b_i]$. Легко видеть, что эти a_i сами получаются друг из друга с помощью тех же правил (если добавить промежуточные шаги), причём для них в первом правиле всегда $f_{i,0} = f_{i,1} = 1$ и все b_i будут равны 1 (если $f_{i,0} = f_{i,1} = 1$ во всех использованиях первого правила, то можно взять $h'_i = h_i$).

Пусть g_N является нетривиальной трансвекцией с корнем α. Ясно, что существуют такой короткий корень $\beta \in \Phi$ под тупым углом к α и такое $a \in \widehat{I} \cdot s$ при достаточно большом $s \in S$, что $g_{N+1} = [g_N, \tau_\beta(\frac{a}{1})]$ всё ещё не принадлежит $\mathrm{EU}(S^{-1}P, S^{-1}L)$, и при этом $\tau_\beta(\frac{a}{1})^{h'_N \ldots h'_0} \in H$, $[b_N, \tau_\beta(\frac{a}{1})]^{h'_N \ldots h'_0} \in H'$. Ясно, что $g_{N+1}^{h'_N \ldots h'_0} \in \langle [\Psi_S(g), H], H' \rangle$ (коммутант возникает из-за того, что мы взяли коммутатор хотя бы один раз, на последнем $(N+1)$-м шаге).

В следующей лемме нетривиальной трансвекцией называется произведение не более двух элементарных трансвекций, чьи корни находятся под углом $\frac{\pi}{4}$, если оно не принадлежит $\mathrm{EU}(S^{-1}P, S^{-1}L)$.

Лемма 14. *Пусть $l \geqslant 3$, $\mathrm{H}(K)$ нётерово, K и C — конечные $\mathrm{H}(K)$-алгебры, L — уровень и $\Omega_S^L(P) = \{\mathrm{EU}(P, \langle a \rangle) \mid a \in (1 - e_0)\mathcal{A}(1 - e_0); \forall s \in S\ as \notin I\} \cup \{\mathrm{EU}(P, \langle h \rangle) \mid h \in \mathcal{H} \cdot (1 - e_0); \forall s \in S\ h \cdot s \notin \Gamma\}$, где $\langle a \rangle$ и $\langle h \rangle$ — наименьшие уровни, содержащие a или h соответственно. Тогда:*

- *Для всех $H \in \Psi_S(\Omega_S(P, \widehat{L}))$ и всех нетривиальных трансвекций $g \notin \mathrm{EU}(S^{-1}P, S^{-1}L)$ существует $H' \in \Psi_S(\Omega_S^L(P))$ такая, что $H' \leqslant {}^H\langle g \rangle$.*

- *Для всех* $H \in \Psi_S(\Omega_S^L(P))$ *и всех элементарных трансвекций* $f \in \mathrm{EU}(S^{-1}P, S^{-1}\widehat{L})$ *в* ${}^f H$ *существует нетривиальная трансвекция.*

- *Для всех* $H \in \Psi_S(\Omega_S(P, \widehat{L}))$, $f \in \mathrm{EU}(S^{-1}P, S^{-1}\widehat{L})$ *и нетривиальных трансвекций* $g \notin \mathrm{EU}(S^{-1}P, S^{-1}L)$ *существует* $H' \in \Psi_S(\Omega_S^L(P))$ *такая, что* $H' \leqslant {}^H\langle {}^f g\rangle$.

Доказательство. Первые два утверждения легко получаются из леммы 5. В третьем утверждении пусть $f = f_n \dots f_1$, где все f_i являются элементарными трансвекциями. Будем доказывать утверждение индукцией по n: случай $n = 0$ является в точности первым утверждением, а если утверждение верно для $n - 1$, то

$$\begin{aligned}
{}^H\langle {}^f g\rangle &\geqslant {}^H({}^{f_n}\langle {}^{H''}({}^{f_{n-1}\dots f_1} g)\rangle) \geqslant && \text{для } H'' \in \Psi_S(\Omega_S(P, \widehat{L})), \text{ если } {}^f H'' \leqslant H \\
&\geqslant {}^H({}^{f_n} H''') \geqslant && \text{для некоторой } H''' \in \Psi_S(\Omega_S^L(P)) \\
&\geqslant {}^H g' \geqslant && \text{для нетривиальной трансвекции } g' \\
&\geqslant H^{\mathrm{IV}} && \text{для некоторой } H^{\mathrm{IV}} \in \Psi_S(\Omega_S^L(P)). \qquad \square
\end{aligned}$$

Перейдём к доказательству основной теоремы. Пусть $G \leqslant C^*$ группа, нормализуемая $\mathrm{EU}(P)$, и L — её уровень. Мы хотим доказать, что $G \leqslant \mathrm{GU}(P, \lfloor L \rfloor)$, от противного: предположим, что это не так, и найдём в G нетривиальную трансвекцию, то есть трансвекцию не из $\mathrm{EU}(P, L)$. В предложении 3 (которому посвящён следующий раздел) это будет доказано в случае, когда K локальное и C конечная K-алгебра, причём полученная трансвекция будет выражаться через некоторый $g \in G \setminus \mathrm{GU}(P, \lfloor L \rceil)$ через правила EX1 – EX4.

Теорема 2. *Пусть* $l \geqslant 4$, C *квазиконечная* K*-алгебра и* $e_0 C e_0$ *порождается менее, чем* $4l^2$ *элементами как* K*-модуль. Если* $G \leqslant \mathrm{GL}(P)$ *нормализуется группой* $\mathrm{EU}(P)$ *и имеет уровень* L, *то* $\mathrm{EU}(P, L) \leqslant G \leqslant \mathrm{GU}(P, \lfloor L \rfloor)$. *Наоборот, все группы, удовлетворяющие этим неравенствам, нормализуются* $\mathrm{EU}(P)$.

Доказательство. Предположим, что $g \in G \setminus \mathrm{GU}'(P, \lceil L \rceil)$ (напомним, что $\mathrm{GU}'(P, \lceil L \rceil) = \mathrm{GU}(P, \lfloor L \rfloor)$ по теореме 1). Не умаляя общности, $\mathrm{H}(K)$

нётерово (например, конечно порождено над $\mathbb{Z}$), а K и C — конечные K-алгебра. Легко видеть, что $\Psi_{\mathfrak{m}}(g) \notin \mathrm{GU}'(P_{\mathfrak{m}}, \lceil L_{\mathfrak{m}} \rceil)$ для некоторого максимального идеала $\mathfrak{m} \trianglelefteq \mathrm{H}(K)$ (здесь $\lceil L_{\mathfrak{m}} \rceil = \lceil L \rceil_{\mathfrak{m}}$ из-за нётеровости). Применим предложение 3, тогда найдётся последовательность элементов $g_0 = \Psi_{\mathfrak{m}}(g), \ldots, g_{N+1}$ такая, что g_{N+1} является нетривиальной трансвекцией (возможно, он является произведением двух трансвекций, чьи корни находятся под углом $\frac{\pi}{4}$) и $g_{N+1}^h \in \langle [\Psi_S(g), H], H' \rangle$ при некотором $h \in \mathrm{EU}(S^{-1}P, S^{-1}\widehat{L})$ для заранее заданных $H \in \Psi_{\mathfrak{m}}(\Omega_{\mathfrak{m}}(P, \widehat{L}))$ и $H' \in \Psi_{\mathfrak{m}}(\Omega_{\mathfrak{m}}(P, L))$, если $H' \leqslant H$. Мы возьмём $H = \Psi_{\mathfrak{m}}(\mathrm{EU}(P, \widehat{L} \cdot s))$ и $H' = \Psi_{\mathfrak{m}}(\mathrm{EU}(P, L \cdot s))$ для такого s, что $\Psi_{\mathfrak{m}}|_{sC}$ инъективно (достаточно взять такое s, чтобы $\mathrm{Ann}(s) = \mathrm{Ker}(\Psi_{\mathfrak{m}})$). По лемме 14 найдётся $H'' \in \Psi_{\mathfrak{m}}(\Omega^L_{\mathfrak{m}}(P))$ такая, что $H'' \leqslant {}^H\langle g^f_{N+1} \rangle$. Но тогда в самой G будет нетривиальная трансвекция (она получится как некоторое выражение от g по модулю $\mathrm{Ker}(\Psi_{\mathfrak{m}})$, а благодаря выбору s_0 — и просто как некоторое выражение от g), противоречие.

Второе утверждение следует из теоремы 1. $\square$

10. Локальное извлечение трансвекций

Пусть K локальное с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$, C — конечная K-алгебра, L — уровень и $g \in C^*$. Мы хотим доказать, что или $g \in \mathrm{GU}(P, \lfloor L \rfloor)$, или через g можно получить нетривиальную трансвекцию с помощью правил EX1 – EX4.

Идея извелечения трансвекций в локальном случае такая: сначала мы это сделаем по модулю радикала Джекобсона $\mathrm{J}(C)$ алгебры C (так как C полулокальная, то $C/\mathrm{J}(C)$ является полупростой $(K/\mathfrak{m})$-алгеброй). После чего, если там найдётся нетривиальная трансвекция, то по ней можно будет построить нетривиальную трансвекцию и в C^*. В противном случае нам придётся извлекать трансвекцию прямо в C^*, но мы сможем пользоваться тем, что $[g] \in \mathrm{GU}(P/\mathrm{J}(C), \lfloor L/\mathrm{J}(C) \rfloor)$ (где правая часть обозначает соответствующую подгруппу $(C/\mathrm{J}(C))^*$). Для удобства положим $E = e_l + e_{l-1}$.

***Лемма* 15.** *Пусть $l \geqslant 4$ и $\overline{E}\alpha(g) = \overline{E}$. Тогда или $g \in \mathrm{U}(P, \lceil L \rceil)$, или можно извлечь нетривиальную трансвекцию.*

Доказательство. Пусть нельзя извлечь нетривиальную трансвекцию. Предположим сначала, что $(1 - E)(\alpha(g) - 1)(1 - \overline{E}) = 1 - \overline{E} - E$. В этом случае $g = \prod_{\substack{\alpha \in \Phi, \\ (\alpha, E) < 1, \\ |\alpha| < 2}} \tau_\alpha(u_\alpha)$ для однозначно определённых u_α. Но тогда все сомножители выражаются как произведения трансвекций, полученных из g последовательным взятием коммутаторов и умножения на трансвекции, поэтому они все лежат в $\mathrm{EU}(P, L)$.

В общем случае $\overline{E}\alpha(g) = \overline{E}$ и $\alpha(g)E = E$. Мы хотим доказать, что $x = \overline{E} + (1 - E)g(1 - \overline{E}) + E \in \mathrm{U}(P, \lceil L \rceil)$, тогда gx^{-1} будет иметь вид как в частном случае. Пусть $h = [g, \tau_{i,-l}(a)]$ (или $h = [g, \tau_{i,1-l}(a)]$ при $a \in \widehat{L}$ и $2 - l \leqslant i \leqslant l - 2$, $i \neq 0$, тогда $(1 - E)\alpha(h)(1 - \overline{E}) = 1 - \overline{E} - E$. Следовательно, $h \in \mathrm{U}(P, \lceil L \rceil)$ при всех таких i и a, то есть $(\alpha(x) - 1)e_i \in \lceil I \rceil$. Из рассмотрения $[g, \tau_{l,l-1}(a)]$ и $[g, \tau_{l-1,l}(a)]$ также следует, что $e_i\alpha(g)\overline{E} \in I$. Возвращаясь к h, легко понять, что из $\varepsilon \cdot h \dot{-} \varepsilon \in \lceil \Gamma \rceil$ тогда следует $\varepsilon \cdot \alpha(x)e_i \dot{-} \varepsilon \cdot e_i \in \lceil \Gamma \rceil$, то есть все столбцы x, кроме 0-го, удовлетворяют требуемым равенствам. Для нулевого столбца это получается аналогичными рассуждениями, если рассмотреть ${}^{\tau_i(h)}g$ вместо g для произвольного $2-l \leqslant i \leqslant l-2$, $i \neq 0$ и $h \in \widehat{\Gamma}$ ($(1-e_0)\alpha(x)e_0 \in \lceil I \rceil$, потому что $e_0\alpha(x^{-1})(1-e_0) \in \lceil I \rceil$). □

Лемма 16. *Пусть* $l \geqslant 4$ *и* $\overline{E}\,\alpha(g)(\overline{E}+e_{-1}+e_{-2}) = \overline{E}$. *Тогда или* $g \in \mathrm{U}(P, \lceil L \rceil)$, *или можно извлечь нетривиальную трансвекцию.*

Доказательство. Пусть нельзя извлечь нетривиальную трансвекцию. Положим $y = [\tau_{l-1,-l}(a), x^{-1}]$. Ясно, что $\alpha(y)(e_{-1}+e_{-2}) = e_{-1}+e_{-2}$, поэтому по лемме 15 $y \in \mathrm{U}(P, \lceil L \rceil)$. Так как $(1-E)\alpha(y)\,\overline{E} = \overline{E} + (1-E)\alpha(x)^{-1}(\bar{a}-a)$, то $\overline{E}\alpha(x)(1-\overline{E}) \in I$. Следовательно, домножая x на элемент из $\mathrm{EU}(P,L)$ справа, можно считать, что $\overline{E}\,\alpha(x)(1-E) = \overline{E}$. Далее, $\varepsilon \cdot \alpha(y)\,\overline{E} \in \Gamma$ и $\overline{E}\,xE + \overline{E}\,x^{-1}E = 0$, откуда легко следует, что $(0, \overline{E}\,xE, 0) \in \Gamma$. Следовательно, домножив x на ещё один элемент из $\mathrm{EU}(P,L)$ справа, можно считать, что $\overline{E}\,x = \overline{E}$, и поэтому применима лемма 15. □

Лемма 17. *Если* $l \geqslant 4$, $(1-E)gE = 0$ *или* $\overline{E}g(1-\overline{E}) = 0$, *а также* $\overline{E}\,g\,\overline{E}$ *и* EgE *обратимы в* $\overline{E}\,C\,\overline{E}$ *и* ECE, *то или* $g \in \mathrm{GU}(P, \lfloor L \rfloor)$, *или можно извлечь нетривиальную трансвекцию.*

Доказательство. Предположим, что нетривиальную трансвекцию извлечь нельзя. Если $(1-E)gE = 0$, то, рассматривая коммутаторы вида $x = [g^{-1}, \tau_{l,1-l}(a,b)]$, легко убедиться, что g можно домножить на такой элемент $f \in \mathrm{EU}(P,L)$ слева, что произведение $g' = gf$ удовлетворяет равенствами $(1-E)g'E = 0 = \overline{E}g'(1-\overline{E})$. Если же $\overline{E}g(1-\overline{E}) = 0$, то всё аналогично, только надо брать коммутаторы вида $x = [g, \tau_{l,1-l}(a,b)]$ и в определении g' умножать на f слева. Если теперь доказать, что $d = \overline{E}g'\overline{E} + (1-E-\overline{E})g'(1-E-\overline{E}) + Eg'E$ лежит в $\mathrm{GU}(P, \lfloor L \rfloor)$, то для $g'd^{-1}$ всё будет очевидно.

Мы докажем, что $d \in \mathrm{GU}'(P, \lceil L \rceil)$, с помощью явных уравнений из леммы 9. Так как $[d^{\pm 1}, \tau_{i,j}(a)] \in \mathrm{U}(P, \lceil L \rceil)$ при $a \in \widehat{I}$, $0 \neq i \neq \pm j \neq 0$ и $i, -j \neq l, l-1$ (по лемме 15) и $[d^{\pm 1}, \tau_{l,l-1}(a)], [d^{\pm 1}, \tau_{l-1,l}(a)] \in \mathrm{U}(P, \lceil L \rceil)$ при $a \in \widehat{I}$ (по лемме 16), то ${}^{\alpha(d)^{\pm 1}}a \equiv a \mod \lceil I \rceil$ при $a \in \widehat{I}\,\overline{E} + (1-\overline{E})\lfloor \widehat{I} \rfloor (1-E) + E\widehat{I}$. Для $a \in (1-E)\widehat{I}E$ это следует из того, что для всех $b \in E\widehat{I}(1-E)$ верны сравнения $ba \equiv \alpha(d^{-1})b\alpha(d)a \equiv b\alpha(d)a\alpha(d^{-1}) \mod \lceil I \rceil$. Все остальные равенства получаются отсюда легко. $\square$

Лемма 18. *Пусть $l \geqslant 4$, e_0Ce_0 порождено менее, чем $4l^2$ элементами как K-модуль, $e_{-1}\alpha(g)e_{-1}$ и $e_{-2}\alpha(g)e_{-2}$ обратимы в $e_{-1}\mathcal{A}e_{-1}$ и $e_{-2}\mathcal{A}e_{-2}$, и ещё $e_{-1}\alpha(g)(1-e_{-1}), (1-e_{-1})\alpha(g)e_{-1}, e_{-2}\alpha(g)(1-e_{-2}), (1-e_{-2})\alpha(g)e_{-2} \in$* $\mathrm{J}(\mathcal{A})$*. Тогда или $g \in$* $\mathrm{GU}(P, \lfloor L \rfloor)$*, или можно извлечь нетривиальную трансвекцию.*

Доказательство. Пусть нельзя извлечь нетривиальную трансвекцию. Заметим, что мы можем поменять местами индексы 1 и -1, а также 2 и -2, при этом условие на g сохранится. Докажем, что $[g, \tau_{-1,2}(a)] \in \mathrm{U}(P, \lceil L \rceil)$ для всех $a \in \widehat{I}$.

Рассмотрим элемент $x = {}^f[g, \tau_{-1,2}(a,b)]$ при некотором $f \in \mathrm{EU}(P, \widehat{L})$. Мы будем считать, что $f = e_-fe_- + e_0 + e_+fe_+$ и $f \equiv 1 \mod \mathrm{J}(C)$. Если нам удастся подобрать такое f, чтобы $\overline{E}\alpha(x)(e_{-l} + \ldots + e_0) = e_{-l} + e_{1-l}$, то можно будет применить лемму 16. Начнём с того, что возьмём $f \in \mathrm{EU}(P)$ так, чтобы $(e_{-l} + e_{1-l})fg'(e_{-1} + e_{-2}) = 0$ (это возможно, потому что $e_{-1}ge_{-1}$ и $e_{-2}ge_{-2}$ обратимы). Легко видеть, что $\overline{E}x(e_{-l} + \ldots + e_0) = \overline{E}$, поэтому остаётся доказать, что $\bar{r} = \overline{E}\ \overline{(fg)^{-1}}\,(e_{-1} + e_{-2}) \in \widehat{I}^0 = \{x \in C \mid (x, 0) \in \widehat{I}\}$. Для этого можно считать, что $a = b$ (нам потом понадобится только тот факт, что все такие a вместе порождают $(1-e_0)C(1-e_0)$ как двусторонний идеал). Непосредственное вычисление показывает, что $\overline{E}\,x(e_1 + e_2) = w$ и $(e_{-1} + e_{-2})x^{-1}E = \bar{w} + pr$ для некоторого $p \in (e_{-1} + e_{-2})C(e_{-1} + e_{-2})$, который сравним с $-a + \bar{a}$ по модулю радикала Джекобсона, и для $w \in \mathrm{J}(C)$. Следовательно, если бы нам удалось доказать, что $x \in \mathrm{U}(P, \lceil L \rceil)$, мы бы сразу получили требуемое из рассмотрения $\overline{E}\alpha(x)(e_1 + e_2)$.

Пусть $y = [x^{-1}, \tau_{l,1-l}(u,u)]$, тогда $y(e_{-1} + e_{-2} + e_0) = e_{-1} + e_{-2} + e_0$ и по лемме 17 $y \in \mathrm{GU}(P, \lfloor L \rfloor)$. Легко видеть, что $(e_{-1} + e_{-2})y^{-1}\,\overline{E} = (e_{-1} + e_{-2})x^{-1}E(\bar{u} - u)\overline{E}$ и $Ey(e_1 + e_2) = Ex^{-1}E(u - \bar{u})\overline{E}x(e_1 + e_2)$, где $Ex^{-1}E \in E + \mathrm{J}(C)r$. Далее, $((e_{-1} + e_{-2})y^{-1}\,\overline{E}, \overline{Ey(e_1 + e_2)y^{-1}(e_1 + e_2)}) \in I$, то есть $(e_{-1} + e_{-2})y^{-1}\,\overline{E} - (e_{-1} + e_{-2})\,\overline{y^{-1}}\,(e_{-1} + e_{-2})\,\bar{y}\,\overline{E} \in \widehat{I}^0$. Так как $(e_1 + e_2)y^{-1}(e_1 + e_2) = e_1 + e_2 + r\mathrm{J}(C)$, то отсюда следует, что $r \in$

$C\,\bar{r}\,\mathrm{J}(C) + \mathrm{J}(C)\,\bar{r}\,C + \widehat{I}_0$. Мы хотим доказать, что $[r] = 0 \in A = (1 - e_0)C(1-r_0)/((1-e_0)\widehat{I}_0(1-e_0))$. При этом $[r] \in A[\,\bar{r}\,]\mathrm{J}(A) + \mathrm{J}(A)[\,\bar{r}\,]A$, откуда следует, что $[r] \in A[r]\mathrm{J}(A) + \mathrm{J}(A)[r]A$. Если применить теперь лемму Накаямы к $A/A[r]\mathrm{J}(A)$, то получим $[r] \in A[r]\mathrm{J}(A)$. Но тогда опять по лемме Накаямы $[r] = 0$.

Наконец, по лемме 13 существуют $f_1, f_2 \in \mathrm{EU}(P, L)$ такие, что выполнены равенства $e_{-1}f_1gf_2 = e_{-1}f_1gf_2e_{-1} = f_1gf_2e_{-1}$. Значит, по лемме 12 $g \in \mathrm{GU}(P, \lfloor L \rfloor)$. $\square$

Заметим, что в $C/\mathrm{J}(C)$ мы тоже можем применять правила EX1 – EX4 к $[g]$, чтобы получить нетривиальную трансвекцию. При этом можно считать, что $S = 1$, при подъёме в C^* трансвекции можно будет поднять в нужные открытые подгруппы.

***Лемма* 19.** *Если $l \geqslant 4$, K поле, C конечномерная полупростая K-алгебра и $\dim_K(e_0Ce_0) < 4l^2$, то или $g \in \mathrm{GU}(P, \lfloor L \rfloor)$, или можно извлечь нетривиальную трансвекцию.*

Доказательство. Предположим, что нетривиальную трансвекцию извлечь нельзя. Не умаляя общности, C является простой алгеброй (то есть или $C = \mathrm{M}(n, D)$, где D — тело с инволюцией, или $C = \mathrm{M}(n, D) \times \mathrm{M}(n, D^{\mathrm{op}})$ и инволюция переставляет сомножители). Если $C = e_0Ce_0$, то доказывать нечего — в этом случае можно просто сослаться на лемму 15. Мы будем доказывать, что $g \in \mathrm{GU}'(P, \lceil L \rceil)$, как в лемме 18. Сначала докажем, что $[g, \tau_{-1,2}(a)] \in \mathrm{U}(P, \lceil L \rceil)$ для всех $a \in \widehat{I}$.

Рассмотрим элемент $x = {}^f[g, \tau_{-1,2}(a, b)]$, где $f \in \mathrm{EU}(P, \widehat{L})$, $f = e_-fe_- + e_0 + e_+fe_+$ и $\overline{E}fg(e_{-1} + e_{-2}) = 0$. Если нам удастся подобрать такой f, чтобы $\overline{E}\,\alpha(fg)(e_{-1} + e_{-2}) = 0$, то к x можно будет применить лемму 16. В случае, когда $(1-e_0)\widehat{I}(1-e_0) = (1-e_0)\mathcal{A}(1-e_0)$ это очевидно, поэтому можно считать, что $(1-e_0)I(1-e_0) \leqslant (1-e_0)C(1-e_0)$, то есть или $(1-e_0)I(1-e_0) = 0$, или $(1-e_0)I(1-e_0) = (1-e_0)C(1-e_0)$.

В случае $(1-e_0)I(1-e_0) = 0$ рассмотрим элемент $y = [x^{-1}, \tau_{l,1-l}(u, u)]$, он принадлежит $\mathrm{GU}(P, \lfloor L \rfloor)$ по лемме 17. Из уравнений $\mathrm{GU}'(P, \lceil L \rceil)$ легко следует, что $(1-e_0)y(1-e_0) = 1 - e_0$. Другими словами, $E(u - \bar{u})\overline{E} = (1-e_0)x^{-1}E(u-\bar{u})\overline{E}x(1-e_0)\tau_{l,1-l}(u,u)^{-1}$ при всех $u \in e_lCe_{1-l}$. Значит,

$(1-e_0)x^{-1}E$ имеет полный ранг (в каждом матричном кольце, являющимся сомножителем C, он имеет тот же ранг, что и E) и поэтому $\overline{E}xe_+ = 0$. По лемме 17 имеем $x \in \mathrm{GU}(P, \lfloor L \rfloor)$: её надо применить к x^{-1}, так как $\overline{E}x^{-1}(1-\overline{E}) = 0$, тогда из начала доказательства этой леммы следует, что $(1-E-e_0)x^{-1}E = 0$ — и, значит, $Ex^{-1}E$ обратим, потому что $(1-e_0)x^{-1}E$ имеет полный ранг. По аналогичным соображениям $e_-\alpha(f)(e_{-1}+e_{-2})(a-\bar{b})(e_1+e_2)\alpha(f)e_+ = e_-\alpha(fg)(e_{-1}+e_{-2})(a-\bar{b})(e_1+e_2)\alpha(g^{-1})\tau_{-1,2}(a,b)^{-1}\alpha(f^{-1})(1-e_0)$. Сомножитель $e_-\alpha(fg)(e_{-1}+e_{-2})$ имеет максимальный ранг, поэтому $(e_1+e_2)\alpha(g^{-1})\tau_{-1,2}(a,b)^{-1}\alpha(f^{-1})e_- = 0$, откуда $(e_1+e_2)\alpha(g)(e_{-1}+e_{-2}) = 0$. Сокращая длинное выражение на $e_-\alpha(f)e_-$ слева и на $e_+\alpha(f)^{-1}e_+$ справа, мы получим $(e_{-1}+e_{-2})(a-\bar{b})(e_1+e_2) = e_-\alpha(g)(e_{-1}+e_{-2})(a-\bar{b})(e_1+e_2)\alpha(g)^{-1}e_+$. Следовательно, $\overline{E}\alpha(g)(e_{-1}+e_{-2}) = 0$.

В последнем случае, когда $(1-e_0)I(1-e_0) = (1-e_0)C(1-e_0)$, вместо x мы будем рассматривать $x' = [f'g, \tau_{-1,2}(a,a)]$, где $f' \in \mathrm{EU}(P, L)$, $f' = e_-f'e_- + e_-f'e_+ + e_+f'e_+ + e_0$ и $\overline{E}fg(e_{-1}+e_{-2}) = 0$ (понятно, что этого достаточно для того, чтобы $[g, \tau_{-1,2}(a,a)] \in \mathrm{U}(P, \lceil L \rceil)$). Кроме того, будем считать, что $e_{-1}fg(e_{-1}+e_{-2})\mathcal{E} \neq 0$ и $e_{-2}fg(e_{-1}+e_{-2})\mathcal{E} \neq 0$, если $(1-e_0)g(e_{-1}+e_{-2})\mathcal{E} \neq 0$, для всех примитивных центральных идемпотентов $\mathcal{E}$ в C (которых 1 или 2 штуки). Так как $\overline{E}\,x' = \overline{E}$, то $x' \in \mathrm{GU}(P, \lfloor L \rfloor)$ по началу доказательства леммы 17 (применённой к $\overline{x^{-1}}$) $\overline{E}\,\overline{(fg)^{-1}}(e_{-1}+e_{-2})(a-\bar{a})\overline{(fg)}(e_1+e_2) = 0$. В случае $(1-e_0)g(e_{-1}+e_{-2})\mathcal{E} \neq 0$ мы сразу получаем $\overline{E}\,\overline{(fg)^{-1}}(e_{-1}+e_{-2})\bar{\mathcal{E}} = 0$. Если же $(1-e_0)g(e_{-1}+e_{-2})\mathcal{E} = 0$, то мы просто могли выбрать f так, чтобы $\overline{E}\overline{(fg)^{-1}}(e_{-1}+e_{-2})\bar{\mathcal{E}} = 0$. Таким образом, всегда $x' \in \mathrm{U}(P, \lceil L \rceil)$ по лемме 15.

Теперь $[g^{\pm 1}, \tau_\alpha(a)] \in \mathrm{U}(P, \lceil L \rceil)$ для всех коротких α. Значит, существует такое $h \in \mathrm{EU}(P, \widehat{L})$, что $e_{-l}\alpha({}^hg)e_{-l}$ обратимо в $e_{-l}\mathcal{A}e_{-l}$ (если повторить доказательство предложения 2). Но $[({}^hg)^{\pm 1}, \tau_\alpha(a)]$ тоже принадлежат $\mathrm{U}(P, \lceil L \rceil)$ для всех коротких корней α, поэтому по лемме 13 существуют $f_1, f_2 \in \mathrm{EU}(P, L)$ такие, что $e_{-l}\alpha(f_1\,{}^hg\,f_2) = e_{-l}\alpha(f_1\,{}^hg\,f_2)e_{-l} = \alpha(f_1\,{}^hg\,f_2)e_{-l}$, и дальше очевидно по лемме 12. $\square$

Предложение 3. *Пусть $l \geqslant 4$, K локальное кольцо, C — конечная K-*

алгебра, e_0Ce_0 порождена менее, чем $4l^2$ элементами как K-модуль и $g \in C^*$. Тогда или $g \in \mathrm{GU}(P, \lfloor L \rfloor)$, или можно извлечь нетривиальную трансвекцию.

Доказательство. По лемме 19 можно извлечь нетривиальную трансвекцию по модулю $\mathrm{J}(C)$ (и тогда по лемме 18 в C тоже можно извлечь нетривиальную трансвекцию) или $[g] \in \mathrm{GU}(P/\mathrm{J}(C), \lfloor L/\mathrm{J}(C) \rfloor)$. Во втором случае можно дважды применить предложение 2, получив из g элемент $g' = f\, {}^h g$ при $f \in \mathrm{EU}(P, L)$ и $h \in \mathrm{EU}(P, \widehat{L})$ такой, что к g' применима лемма 18. $\square$

Заключение

Таким образом, в работе доказана классификация всех подгрупп $\mathrm{GL}(P)$, нормилизуемых элементарной унитарной группой $\mathrm{EU}(P)$ в терминах уровней (теорема 2). Если вместо всех подгрупп $\mathrm{GL}(P)$ ограничиваться только подгруппами $\mathrm{GU}(P)$, нормализуемыми $\mathrm{EU}(P)$, или промежуточными подгруппами вида $\mathrm{EU}(P) \leqslant G \leqslant \mathrm{GL}(P)$, то получаются классификации, частично обобщающие результаты из статей [5, 7].

Список литературы

[1] Петров В. А. Нечетные унитарные группы //Записки научных семинаров ПОМИ. — 2003. — Т. 305. — №. 0. — С. 195–225.

[2] Bak A. K-Theory of Forms.(AM-98). — Princeton University Press, 2016. — Т. 98.

[3] Bak A. Nonabelian K-theory: The nilpotent class of K 1 and general stability //K-theory. — 1991. — Т. 4. — №. 4. — С. 363–397.

[4] Bak A., Vavilov N. Structure of hyperbolic unitary groups I: elementary subgroups //Algebra Colloquium. — Springer-Verlag, 2000. — Т. 7. — №. 2. — С. 159–196.

[5] Bak A., Preusser R. The E-normal structure of odd dimensional unitary groups //Journal of Pure and Applied Algebra. — 2017.

[6] Knus M. A. Quadratic and Hermitian forms over rings. — Springer Science & Business Media, 2012. — Т. 294.

[7] Petrov V. Overgroups of unitary groups //K-theory. — 2003. — Т. 29. — №. 3. — С. 147–174.

[8] Preusser R. Sandwich classification for $O_{2n+1}(R)$ and $U_{2n+1}(R, \Delta)$ revisited //arXiv preprint arXiv:1801.00699. — 2018.

[9] Preusser R. Structure of hyperbolic unitary groups II: Classification of E-normal subgroups //Algebra colloquium. — World Scientific Publishing Company, 2017. — Т. 24. — №. 02. — С. 195–232.