Санкт-Петербургский государственный университет

Математико-механический факультет
Фундаментальная математика и механика
Кафедра теории вероятностей и математической статистики

Крюков Николай Алексеевич

Различные задачи случайного размещения интервалов на отрезке

Дипломная работа

Научный руководитель:
к. ф.-м. н., доцент Ананьевский С. М.

Рецензент:
д. ф.-м. н., профессор Сипин А. С.

Санкт-Петербург
2018

SAINT-PETERSBURG STATE UNIVERSITY

Mathematics and mechanics faculty
Fundamental mathematic and mechanics
Theory of probability and mathematical statistics

Nikolai Kriukov

Various problems of random placement of intervals on a segment

Graduation Thesis

Scientific supervisor:
assistant professor Sergei Ananjevskii

Reviewer:
professor Alexander Sipin

Saint-Petersburg
2018

Оглавление

Введение

Задача о случайной парковке впервые упоминается в работе Реньи [1], опубликованной в 1958 году. В ней он исследовал асимптотику математического ожидания количества интервалов единичной длины, размещённых на отрезке, длина которого стремится к бесконечности. Позднее исследование этой задачи продолжилось, и в работе [3] за авторством Дворецкого и Роббинса была доказана асимптотическая нормальность этих случайных величин.

Изначальная постановка задачи следующая. Пусть у нас есть отрезок $[0, x]$. На этот отрезок случайным образом размещается отрезок единичной длины. То есть, вводится случайная величина η, равномерно распределённая на отрезке $[0, x-1]$, и размещённый отрезок имеет концы $[\eta, \eta+1]$. Размещённый отрезок разбивает изначальный на два :$[0, \eta]$ и $[\eta+1, x]$. Затем эти отрезки рассматриваются независимо друг от друга, и на них также случайным образом размещаются отрезки длины 1. Процесс завершается, когда длины незаполненных отрезков становятся меньше единицы. В конце за N_x обозначается количество размещённых отрезков.

Эта задача приобрела следующую интерпретацию. Пусть у нас есть улица длины x, на которой паркуются машины длины 1. Причём каждая следующая машина случайно выбирает для себя место так, чтобы не пересекаться с уже припаркованными. Тогда N_x — количество припаркованных машин. Из-за этой интерпретации задача и получила название "задача о парковке".

В работе Реньи [1] было установлено, что для любого $n \geqslant 1$ верно равенство

$$EN_x = \lambda x + \lambda - 1 + O(x^{-n}) \qquad (x \to \infty).$$

Также в данной работе было дано интегральное выражение для константы λ:

$$\lambda = \int_0^\infty e^{-2\int_0^t \frac{1-e^{-u}}{u}du} dt \approx 0.748.$$

Позже, в работе Дворецкого и Роббинса [3] получено уточнение выражения для математического ожидания

$$EN_x = \lambda x + \lambda - 1 + o\left(\left(\frac{2e}{x}\right)^{\left(x-\frac{3}{2}\right)}\right) \qquad (x \to \infty).$$

Также в этой работе было доказано, что для дисперсии существует константа λ_2, такая что

$$DN_x = \lambda_2 x + \lambda_2 + O\left(\left(\frac{4e}{x}\right)^{(x-4)}\right) \qquad (x \to \infty).$$

Содержание

В данной работе рассматриваются некоторые обобщения задачи Реньи о парковке, а так же некоторые другие модели парковки. Сама задача, поставленная в 1958 году,состояла в следующем: на отрезок длины x распологают отрезок $[\nu,\ \nu+1]$, где ν — случайная величина, равномерно распределённая на отрезке $[0,\ x-1]$. Этот отрезок разбивает изначальный на два: $[0,\nu]$ и $[\nu+1,x]$, которые заполняются далее независимо, по тому же правилу. Процесс заканчивается, когда длина отрезка становится меньше единицы. Количество размещённых машин обозначается за ξ_x. Нас будут интересовать свойства распределения этой случайной величины. В частности, поведение её моментов при $x \to \infty$.

Первым обобщением, рассмотренным в данной работе, является задача о неравномерной парковке. Она отличается от задачи Реньи тем, что случайная величина ν имеет распределение F_x, которое вообще говоря может отличаться от равномерного. Для этого обобщения в случае, если F_x имеет плотность p_x, удовлетворяющую условию

$$p_x(u) + p_x(x-u-1) = \frac{2}{x-1} \qquad \forall u \in [0,\ x-1],$$

процесс ξ_x асимптотически нормален при $x \to \infty$.

Ещё одной моделью парковки является задача об эгоистичной парковке. В ней $x \in \mathbb{N}_0$, и случайная величина ν равновероятно принимает все натуральные значения от нуля до $x-1$. Процесс заканчивается, если $x \leqslant 2$. Для этой задачи были найдены асимптотики центральных моментов последовательности случайных величин ξ_x :

$$E\left(\xi_x - E\xi_x\right)^k \sim c_k x^{\left[\frac{k}{2}\right]},$$

и рекуррентное соотношение на константы c_k.

Последней моделью, рассмотренной в данной работе, является задача о дискретной парковке машин длины 2. В этой задаче также $x \in \mathbb{N}_0$, но располагаются отрезки длины 2, то есть, отрезки $[\nu, \nu+2]$. Случайная величина ν равномерно распределена на целых числах $0, \ldots, x-2$.

Процесс заканчивается, если $x \leqslant 1$. Для этой задачи были вычислены математические ожидания случайных величин ξ_x:

$$2E\xi_x = x - \frac{x}{e^2}\frac{\Gamma(x+1,-2)}{x!} - \frac{(-2)^{x+1}}{x^2} - \frac{2}{e^2}\frac{\Gamma(x+1,-2)}{x!}.$$

1. Общая постановка задачи

1.1. Постановка задачи о парковке

В работах [1], [5], [4], [2] приводятся различные модели задач о парковке. Ниже будет дана общая постановка, частными случаями которой являются формулировки в приведённых ранее работах.
Зафиксируем длину интервала $X > 0$ и длину машины $l > 0$. Для определённости будем считать машины открытыми справа интервалами. Теперь определим все возможные расположения машин. Каждое такое расположение может быть задано множеством левых концов всех машин. Очевидно, что такое множество должно быть подмножеством отрезка $[0, X - l]$, но дополнительно потребуем, чтобы эти точки лежали в неком множестве $\mathfrak{A} \subset [0, X - l]$, которое будет зависить от конкретной задачи. Таким образом, расположение машин характеризуется множеством $T = \{x_1, \ldots, x_k\}$, таким что

$$x_{(i)} + l \leqslant x_{(i+1)}, \quad 1 \leqslant i < k;$$
$$x_i \in \mathfrak{A}, \quad 1 \leqslant i \leqslant k.$$

Все множества, удовлетворяющие этому условию, будем называть расстановками. Теперь для каждой расстановки определим множество левых концов возможных расположений следующей машины:

$$Q_T = \{x \in \mathfrak{A} | \ \forall y \in T \ |x - y| \geqslant l\}$$

Теперь для каждой расстановки T введём случайную величину η_T:

$$\eta_T : \quad (\Omega, B, P) \to Q_T.$$

При различных расстановках T_1 и T_2 случайные величины η_{T_1} и η_{T_2} независимы. Сами эти величины также зависят от конкретной задачи. Однако заметим, что такую случайную величину можно задать только в том случае, когда $Q_T \neq \varnothing$ Поэтому определим множество Fin финальных расстановок, для которых мы будем считать наш процесс завершённым, и соответственно, величины η_T будут определены только для $T \notin Fin$. Очевидно, что расстановки, для которых $Q_T = \varnothing$, заведомо должны находится в множестве Fin. Однако, для некоторых задач это множество может быть шире.

Теперь определим функцию $\varphi : Fin \to \mathbb{R}$. Это будет интересующая нас функция. Чаще всего, это — количество поместившихся машин. Но можно рассматривать и другие функции. Теперь распространим эту функцию на остальные расстановки. Для этого определим функцию $F(T)$:

$$F(T) = \begin{cases} \varphi(T), & T \in Fin \\ F(T \cup \{\eta_T\}), & T \notin Fin \end{cases}$$

Наконец, определим случайную величину $\xi_n = F(\varnothing)$. Эту случайную величину обычно и изучают.

Таким образом, чтобы поставить задачу о парковке, необходимо указать X, l, множества $\mathfrak{A}$ и Fin, функцию $\varphi(T)$ и случайные величины η_T.

Теперь в описанных ранее обозначениях поставим несколько задач:

1) *Задача о парковке Реньи:*
$X \in \mathbb{R}^0_+$;
$l = 1$;
$\mathfrak{A} = [0, X - 1]$;
$T \in Fin$ только если $Q_T = \varnothing$;
$\varphi(T) = \#T$;
η_T — равномерно распределённая на Q_T случайная величина.

2) *Задача о неравномерной парковке:*
$X \in \mathbb{R}^0_+$;
$l = 1$;
$\mathfrak{A} = [0, X - 1]$;
$T \in Fin$ только если $Q_T = \varnothing$;

$\varphi(T) = \#T$;
$\eta_T = \nu_\theta$, где ν_i и θ — случайные величины, заданные следующим образом. Пусть $T = \{x_1, \ldots, x_k\}$, и множество Q_T допускает следующее дизъюнктное разбиение:

$$Q_T = Q_0 \cup Q_1 \cup \ldots \cup Q_k,$$

где

$$\begin{aligned} &Q_0 = [0,\ x_1), \\ &Q_i = [x_i,\ x_{i+1}), \quad 1 \leqslant i \leqslant k-1, \\ &Q_k = [x_k,\ X). \end{aligned}$$

Теперь определим множество допустимых индексов i:

$$I = \{i \in \{0, \ldots, k\} | Q_i| \geqslant l\}.$$

Тогда θ — равномерно распределённая на I случайная величина. Величины ν_i задаются следующим образом:

$$\nu_i = x_i + \psi_{|Q_i|},$$

а случайные величины ψ_n имеют заданное изначально распределение.

3) *Задача о дискретной парковке машин длины l:*
$X = n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$;
l — фиксированное натуральное число;
$\mathfrak{A} = \mathbb{Z} \cap [0, n-l]$;
$T \in Fin$ только если $Q_T = \varnothing$;
$\varphi(T) = \#T$;
η_T — равномерно распределённая на Q_T случайная величина.

4) *Задача об эгоистичной парковке:*

$X = n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$;
$l = 1$;
$\mathfrak{A} = \mathbb{Z} \cap [0, n-l]$;
$T \in Fin$, если $Q_T = \varnothing$, или $\forall x \in Q_T\ \{x-1, x+1\} \subset T \cup \{n\} \cup \{-1\}$;
$\varphi(T) = \#T$
η_T — равномерно распределённая на множестве Q':

$$Q' = \{x|\ x \in Q_T, (x-1 \notin T \cup \{n\} \cup \{-1\}) \cup (x+1 \notin T \cup \{n\} \cup \{-1\})\}$$

1.2. Регулярность

Заметим, что в работах [5], [4], [2] задача ставится не совсем так, как описано в предыдущем пункте. А именно, во всех этих постановках на отрезок большой длины в соответствии с некоторой случайной величиной располагается отрезок фиксированной маленькой длины, и разбивает большой отрезок на два. И далее эти два отрезка рассматриваются отдельно. Чтобы свести такую задачу к задаче, поставленной в предыдущем пункте введём следующее определение:

***Определение* 1.1.** *Задача является регулярной, если для любой допустимой пары n, T верно равенство*

$$F(T) \stackrel{\mathrm{d}}{=} \xi_{x_{(1)}} + \xi_{\left(n - x_{(\#T)} - l\right)} + \sum_{i=2}^{\#T} \xi_{\left(x_{(i)} - x_{(i-1)} - l\right)} + \rho(T), \qquad (1)$$

где $\rho(T)$ — некоторая неслучайная функция.

И докажем теорему о регулярности.

***Теорема* 1.1.** *Задача о дискретной парковке, поставленная выше, является регулярной с функцией $\rho(T) = \#T$.*

Доказательство. Будем доказывать формулу (1) по индукции по n и $\#T$ (будем считать, что $(n_1, \#T_1) < (n_2, \#T_2)$, если либо $n_1 < n_2$, либо $n_1 = n_2$, и $\#T_1 > \#T_2$). Рассмотрим $T = \{x_1, \ldots, x_k\}$. Не умаляя общности будем считать, что $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$, и $\#T > 0$. Рассмотрим Q_T. В случае, если $Q_T = \varnothing$ получаем $\rho(T) = \varphi(T)$, и регулярность очевидна, так как $x_1 < l$, $n - x_k < l$, $x_i - x_{i-1} < l$. Это будет являться базой индукции. Теперь рассмотрим случай, когда $Q_T \neq \varnothing$. Заметим, что имеет место дизъюнктное разбиение этого множества

$$Q_T = Q_0 \cup Q_1 \cup \ldots \cup Q_k, \tag{2}$$

где

$$\begin{aligned}
&Q_0 = \{x | x \in Q_T,\ x \in (0,\ x_1)\},\\
&Q_i = \{x | x \in Q_T,\ x \in (x_i,\ x_{i+1})\}, \quad 1 \leqslant i \leqslant k-1,\\
&Q_k = \{x | x \in Q_T,\ x \in (x_k,\ n)\}.
\end{aligned}$$

Заметим, что в таком случае свойство регулярности (1) в силу разбиения (2) можно переписать следующим образом:

$$F(T) \stackrel{\mathrm{d}}{=} \sum_{i=1}^{k} \xi_{\# Q_i} + \rho(T) \tag{3}$$

Обозначим для удобства множество индексов $I = \{1, \ldots, k\}$. По определению случайной величины $F(T)$,

$$F(T) = F(T \cup \{\eta_T\})$$

Где η_T — равномерно распределённая на Q_T случайная величина. Введём ещё несколько случайных величин. Пусть величины ν_i равномерно распределены на Q_i соответственно, а величина θ распределена на I следующем образом:

$$P\{\theta = i\} = \frac{\# Q_i}{\# Q_T}.$$

В таком случае заметим, что справедливо равенство по распределению следующих двух случайных величин:

$$\eta_T \stackrel{\mathrm{d}}{=} \nu_\theta. \tag{4}$$

А равенство (4) влечёт за собой равенство

$$F(T) \overset{\mathrm{d}}{=} F(T \cup \{\nu_\theta\}). \tag{5}$$

Зафиксируем случайную величину $\theta = i$, и рассмотрим случайную величину $F(T \cup \{\nu_i\})$. Заметим, что $\#(T \cup \{\nu_i\}) > \#T$. Значит, для $T \cup \{\nu_i\}$ мы знаем формулу (1) по индукционному предположению. То есть,

$$F(T \cup \{\nu_i\}) \overset{\mathrm{d}}{=} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} \xi_{\#Q_j} + \xi_{\nu_i - \min\{Q_i\}} + \xi_{\max\{Q_i\} - (\nu_i + l - 1)} + \#T + 1 \tag{6}$$

Заметим, что так как $\#T > 0$, то $\#Q_i < n$. Значит, мы знаем формулу (1) для $n = \#Q_i$ и $T = \varnothing$:

$$\xi_{\#Q_i} \overset{\mathrm{d}}{=} 1 + \xi_{\eta_\varnothing} + \xi_{\#Q_i - (\eta_\varnothing + l)}. \tag{7}$$

Заметим, что случайная величина $\eta_\varnothing$ — это сдвинутая случайная величина ν_i:

$$\begin{aligned} \eta_\varnothing &= \nu_i - \min\{Q_i\}, \\ \max\{Q_i\} - (\nu_i + l) &= \#Q_i - (\eta_\varnothing + l). \end{aligned}$$

Таким образом, подставив (7) в (6), получим

$$F(T \cup \{\nu_i\}) \overset{\mathrm{d}}{=} \sum_{j=1}^{k} \xi_{\#Q_j} + \#T. \tag{8}$$

Осталось заметить, что правая часть (8) не зависит от i. Значит, вместо i можно подставить случайную величину θ

$$F(T) \overset{\mathrm{d}}{=} F(T \cup \{\nu_\theta\}) \overset{\mathrm{d}}{=} \sum_{j=1}^{k} \xi_{\#Q_j} + \#T.$$

Таким образом, мы получили формулу (1) для расстановки T. То есть, доказали индукционный переход. □

Заметим, что аналогичным образом доказывается регулярность трёх других поставленных задач. Теперь докажем лемму, которая упростит постановку регулярной задачи.

Лемма 1.1. *Если задача регулярна с функцией $\rho(T) = \#T$, то верно равенство*

$$\xi_n = 1 + \xi_{\eta_\varnothing} + \xi_{n-(\eta_\varnothing+l)}. \tag{9}$$

Доказательство. По определеню случайной величины ξ_n:

$$\xi_n = F(\varnothing) = F(\{\eta_\varnothing\}).$$

Теперь напишем равенство (1) для расстановки $T = \{\eta_\varnothing\}$:

$$F(\{\eta_\varnothing\}) = \#\{\eta_\varnothing\} + \xi_{\eta_\varnothing} + \xi_{n-(\eta_\varnothing+l)}.$$

Так как $\#\{\eta_\varnothing\} = 1$, то подставив второе равенство в первое, получим равенство (9) $\square$

Из этой леммы следует, что любые две регулярные задачи, у которых совпадают случайные величины $\eta_\varnothing$ для всех n, тоже совпадают. Также эта лемма связывает постановку задачи о парковке из предыдущего пункта и из работ [1], [5], [4] и [2].

2. Задача о неравномерной парковке

2.1. Постановка задачи

Как мы уже знаем, изучение задачи о неравномерной парковке сводится к изучению следующего потока случайных величин:

$$\begin{aligned}
&\xi_x = 0, \quad x < 1,\\
&\xi_1 = 1\\
&\xi_{x+1} = 1 + \xi_{\nu_x} + \xi_{x-\nu_x}, \quad x \geqslant 1,
\end{aligned}$$

где случайная величина ν_x распределена на отрезке $[0, x]$ в соответствии с мерой $P(t)$. Также дополнительно положим, что мера $P(t)$ имеет плотность $p(u)$, которая удовлетворяет соотношению

$$p(u) + p(x-u) = \frac{2}{x} \quad \forall u \in [0, x]. \tag{10}$$

2.2. Полученные результаты

В работе [5] уже рассматривалась аналогичная задача, и была доказана следующая теорема:

Теорема *([5], Теорема 2)**.** Для описанного выше потока случайных величин*

$$E\xi_x = \lambda x + \lambda + 1 + o\left(\left(\frac{c}{x}\right)^{x-\frac{3}{2}}\right) \qquad (x \to \infty),$$

где константа λ совпадает с константой Реньи.

В данной работе мы продолжим изучение данной задачи. Заметим, что в нашем случае мера удовлетворяет следующему условию: для любой функции $\phi(t)$

$$\int_0^x (\phi(t) + \phi(x-t))\, dP(t) = \frac{2}{x}\int_0^x \phi(t)dt. \tag{11}$$

Теперь докажем ещё одно свойство такой меры

Лемма 2.1. *Для любых функций ϕ и ψ:*

$$\int_0^x (\phi(t)\psi(x-t) + \psi(t)\phi(x-t))\, dP(t) = \\ = \frac{1}{x}\int_0^x (\phi(t)\psi(x-t) + \psi(t)\phi(x-t))\, dt. \qquad (12)$$

Доказательство. Введём вспомогательную функцию

$$f(t) = \phi(t)\psi(x-t). \qquad (13)$$

Тогда левая часть равенства (12) принимает вид

$$\int_0^x (\phi(t)\psi(x-t) + \psi(t)\phi(x-t))dP(t) = \int_0^x (f(t) + f(x-t))dP(t). \qquad (14)$$

В силу описанного перед леммой свойства получаем, что

$$\int_0^x (f(t) + f(x-t))dP(t) = \frac{2}{x}\int_0^x f(t)dt. \qquad (15)$$

Подставляя (13) и (14) в (15), получим

$$\int_0^x (\phi(t)\psi(x-t) + \psi(t)\phi(x-t))dP(t) = \frac{2}{x}\int_0^x \phi(t)\psi(x-t)dt. \qquad (16)$$

Теперь осталось заметить, что

$$\int_0^x \phi(t)\psi(x-t)dt = \int_0^x \phi(x-t)\psi(t)dt.$$

Значит, правая часть (12) совпадает с правой частью (16). Таким образом, мы доказали равенство (12). $\square$

Введём следующий набор функций:

$$\varphi_k(x) = E((N_x - L(x))^k).$$

Заметим, что для этого набора верно следующее рекуррентное соотношение:

$$\varphi_k(x+1) = \int_0^x \sum_{i=0}^{k} C_i^k \varphi_i(t)\varphi_{k-i}(x-t)dP(t) =$$
$$= \sum_{i=0}^{k} C_i^k \int_0^x \varphi_i(t)\varphi_{k-i}(x-t)dP(t) =$$
$$= \sum_{i=0}^{k} C_i^k \frac{1}{x} \int_0^x \varphi_i(t)\varphi_{k-i}(x-t)dt. \quad (17)$$

Последнее равенство следует из леммы 2, так как

$$C_i^k = C_{k-i}^k.$$

Заметим, что последовательность, удовлетворяющая такому рекуррентному соотношению уже изучалась в статье [3]. Чтобы использовать результаты, полученные в этой статье, докажем ещё одну лемму

Лемма 2.2. *Рекуррента (*17*), вместе с начальными условиями для всех φ_k на отрезке [0,1], однозначно задаёт набор функций φ_k.*

Доказательство. Докажем эту лемму от противного. Пусть есть два набора функций φ_k и ψ_k, удовлетворяющие рекуррентному соотношению (17) соответственно равные на отрезке $[0,1]$, но при этом не совпадающие. Тогда найдём номер первой отличающейся функции. Пусть это будет номер n (То есть, $\varphi_n \neq \psi_n$, но для $i < n$ $\varphi_i = \psi_i$). Но при этом мы знаем, что на отрезке [0,1] функции φ_n и ψ_n совпадают, так как они задаются одинаковыми начальными условиями. Теперь посмотрим на интервалы типа $(k, k+1]$ для натуральных k, и найдём первый такой интервал, на котором функции φ_n и ψ_n не совпадают. Пусть это будет интервал $(c, c+1]$. Это означает, что на отрезке $[0, c]$ функции φ_n и ψ_n совпадают, но есть точка $x+1$ на интервале $(c, c+1]$ в которой функции φ_n и ψ_n отличаются. В частности, так как $c \geqslant 1$, и $x+1 > c$, то $x > 0$. Тогда посмотрим на рекуррентные соотношения для $\varphi_n(x+1)$ и

$\psi_n(x+1)$:

$$\varphi_k(x+1) = \sum_{i=0}^{k} C_i^k \frac{1}{x} \int_0^x \varphi_i(t)\varphi_{k-i}(x-t)dt,$$
$$\psi_k(x+1) = \sum_{i=0}^{k} C_i^k \frac{1}{x} \int_0^x \psi_i(t)\psi_{k-i}(x-t)dt.$$

Посмотрим на правые части. Заметим, что $x \leqslant c$, а значит, на отрезке $[0, x]$ функции φ_i и ψ_i совпадают для всех $i \leqslant n$. А значит, обе правые части совпадают. Но левые части по предположению отличаются. Противоречие. Значит, набор функций φ_k однозначно определяется такой рекуррентой и начальными условиями на все функции φ_k на отрезке $[0, 1]$. □

Таким образом, если мы покажем, что на этом отрезке $[0, 1]$ функции φ_k не зависят от распределения $P(t)$, то эти функции на всей положительной полуоси не зависят от $P(t)$.

При $x \in [0, 1)$ $\xi_x = 0$. Значит

$$\varphi_k(x) = E((\xi_x - L(x))^k) = (-L(x))^k = (1 - \lambda_1 - \lambda_1 x)^k.$$

А при $x = 1$ $\xi_1 = 1$:

$$\varphi_k(1) = E((\xi_1 - L(1))^k) = (1 - L(1))^k = (2 - 2\lambda_1)^k.$$

Обе правые части не зависят от $P(t)$. Значит, для наших функций $\varphi_k(x)$ применимы результаты из статьи [3]. Также заметим, что

$$E((\xi_x - E\xi_x)^k) = E(((\xi_x - L(x)) - \varphi_1)^k) = \sum_{i=0}^{k} C_i^k \varphi_i(x)(-\varphi_1(x))^{k-i}$$

Значит, моменты случайных величин ξ_x однозначно выражаются через функции $\varphi_k(x)$. Тогда для этих моментов также выполняются все теоремы из статьи [3]:

Теорема ([*3*], *Theorem 4*)**.** *Существует положительная константа*

λ_2, такая что

$$E(\xi_x - E(\xi_x))^2 = \lambda_2 x + \lambda_2 + o\left(\left(\frac{4e}{x}\right)^{x-4}\right)$$

Теорема ([*3*], *Theorem 5*)**.** *Для любого натурального k и положительного ε верно равенство*

$$E(\xi_x - E(\xi_x)^k) = c_k x^{[\frac{k}{2}]} + o\left(x^{[\frac{k}{2}]-1+\varepsilon}\right),$$

где c_k — некоторые константы, и

$$c_{2k} = \frac{(2k)!}{2^k k!}\lambda_2^k.$$

Теорема ([*3*], *Theorem 6*)**.** *Случайные величины*

$$Z_x = \frac{\xi_x - E\xi_x}{\sqrt{E(\xi_x - E\xi_x)^2}}$$

асимптотически нормальны при $x \to \infty$.

3. Задача об эгоистичной парковке

3.1. Постановка задачи

Как мы знаем, данная задача сводится к исследованию последовательности случайных величин ξ_n:

$$\xi_0 = \xi_1 = 0,$$
$$\xi_n = 1 + \xi_{\nu_n} + \xi_{n-\nu_n-1},$$

где ν_n — равномерно распределённая на множестве $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ случайная величина.

Данную задачу можно интерпретировать следующим образом. Пусть у нас есть отрезок $[0, n]$. Ячейкой назовём интервал $[i, i+1)$ для любого натурального или нулевого i, не превышающего $n-1$. В начале каждого шага некоторые ячейки считаются занятыми, а остальные — свободными. В самом начале все ячейки являются свободными. Назовём ячейку незаблокированной, если она свободна, и хотя бы одна из соседних ячеек также свободна. Обозначим количество таких ячеек за v. В случае, если $v = 0$, процесс прекращается. Иначе, незаблокированные ячейки нумеруются числами от 1 до v, и на этих числах задаётся равномерно распределённая случайная величина. Далее ячейка с номером, равным значению этой случайной величины, считается занятой, и поиск незаблокированных ячеек начинается заново. В тот момент, когда процесс прекратился, посчитаем количество занятых ячеек. Это и будет наша случайная величина ξ_n.

3.2. Полученные результаты

В статье [2] уже рассматривалась эта задача, и в ней была доказана следующая теорема

Теорема ([2])***.*** *Для описанной выше модели*

$$E\xi_n = \frac{2n-1}{3}, \qquad n \geqslant 2$$
$$D\xi_n = \frac{n+1}{45}, \qquad n \geqslant 4$$
$$E\left(\xi_n - E\xi_n\right)^3 = -\frac{n+11}{135}, \quad n \geqslant 4$$

Мы же рассмотрим более старшие моменты данной последовательности случайных величин, и докажем следующую теорему:

Теорема* 3.1*. *Для описанной выше модели*

$$E\left(\xi_n - E\xi_n\right)^k = n^{\left[\frac{k}{2}\right]}\left(c_k + f_k(n)\right), \ k \neq 1, \tag{18}$$

где

$$f_k(n) = o(1), \qquad n \to \infty.$$

Доказательство. Введём следующее обозначение:

$$S_{n,k} = E\left(\xi_n - E\xi_n\right)^k.$$

Будем доказывать соотношение (18) по индукции по k. Из представленной выше теоремы следует база этой индукции, а именно

$$S_{n,0} = 1,$$
$$S_{n,1} = 0,$$
$$S_{n,2} = n\left(\frac{1}{45} + f_2(n)\right),$$
$$S_{n,3} = n\left(-\frac{1}{135} + f_3(n)\right).$$

Теперь докажем индукционный переход. Пусть для $k = 1, \ldots, m-1$ мы это уже доказали. Докажем для $k = m$. Заметим, что

$$\begin{aligned}
S_{n,k} = E\left(\xi_n - E\xi_n\right)^k = E\left((\xi_{\nu_n} + \xi_{n-\nu_n-1}) - E\left(\xi_{\nu_n} + \xi_{n-\nu_n-1}\right)\right)^k = \\
= E\left((\xi_{\nu_n} - E(\xi_{\nu_n})) + (\xi_{n-\nu_n-1} - E(\xi_{n-\nu_n-1}))\right)^k = \\
= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} E\left((\xi_i - E(\xi_i)) + (\xi_{n-i-1} - E(\xi_{n-i-1}))\right)^k = \\
= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{m} C_k^j E(\xi_{i-1} - E(\xi_{i-1}))^j E(\xi_{n-i} - E(\xi_{n-i}))^{m-j}
\end{aligned}$$

Таким образом мы доказали, что

$$S_{n,k} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{m} C_k^j S_{i-1,j} S_{n-i,m-j}. \tag{19}$$

Перепишем соотношение (19) в более удобном для нас виде:

$$\begin{aligned}
S_{n,m} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{m} C_m^j S_{i-1,j} S_{n-i,m-j} = \\
= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m-1} C_m^j S_{i-1,j} S_{n-i,m-j} + \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1} S_{i,m}.
\end{aligned} \tag{20}$$

Заметим, что первая двойная сумма на зависит от моментов порядка m. Обозначим её отдельно:

$$r_{n,m} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m-1} C_m^j S_{i-1,j} S_{n-i,m-j} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=2}^{m-2} C_m^j S_{i-1,j} S_{n-i,m-j}. \tag{21}$$

Подставим (21) в (20):

$$S_{n,m} = \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1} S_{i,m} + r_{n,m}. \tag{22}$$

Опустим в равенстве (22) индекс m, и получим рекуррентное соотношение на последовательность S_n:

$$S_n = \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1} S_i + r_n. \tag{23}$$

Для решения этого соотношения введём ещё одно обозначение:

$$Q_n = \sum_{i=0}^{n} S_i. \tag{24}$$

При помощи обозначения (24) соотношение (23) принимает вид:

$$Q_n - Q_{n-1} = \frac{2}{n} Q_{n-1} + r_n. \tag{25}$$

Перенесём Q_{n-1} в правую часть, и получим выражение Q_n через Q_{n-1}

$$Q_n = \frac{n+2}{n} Q_{n-1} + r_n. \tag{26}$$

Заметим, что Q_n при $n \geqslant 3$ можно выразить через Q_3 по формуле:

$$Q_n = \frac{(n+2)(n+1)}{20} Q_3 + \sum_{i=4}^{n} \frac{(n+2)(n+1)}{(i+2)(i+1)} r_i. \tag{27}$$

Теперь найдём сами S_n. Мы знаем, что $S_n = Q_n - Q_{n-1}$. Значит

$$\begin{aligned} S_n = Q_n - Q_{n-1} = &\frac{(n+2)(n+1) - (n+1)n}{20} Q_3 + r_n + \\ &+ \sum_{i=4}^{n-1} \frac{(n+2)(n+1) - (n+1)n}{(i+2)(i+1)} r_i \end{aligned} \tag{28}$$

Упростим выражение (28). Получим выражение для S_n.

$$S_n = \frac{n+1}{10} Q_3 + r_n + \sum_{i=4}^{n-1} \frac{2(n+1)}{(i+2)(i+1)} r_i. \tag{29}$$

Вернём в соотношение (20) индекс m:

$$S_{n,m} = \frac{n+1}{10} Q_{3,m} + r_{n,m} + \sum_{i=4}^{n-1} \frac{2(n+1)}{(i+2)(i+1)} r_{i,m} \tag{30}$$

Вычислим $r_{n,m}$. Заметим, что в сумму (21) входят только слагаемые $S_{n,k}$, где $k < m$. Значит, к этой сумме можно применить индукционное предположение. Значит, для каждого отдельного слагаемого верно равенство:

$$S_{i-1,j}S_{n-i,m-j} = \\ = (i-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-i)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}(c_j + f_j(i-1))(c_{m-j} + f_{m-j}(n-i)). \quad (31)$$

Рассмотрим произведение первых двух скобок в правой части соотношения (31). Для этого введем следующие обозначения:

$$a = \left[\frac{j}{2}\right], \quad (32)$$

$$b = \left[\frac{m-j}{2}\right], \quad (33)$$

и разложим обе скобки по биному Ньютона:

$$(i-1)^a = \sum_{k=0}^{a} C_a^k (-1)^{a-k} i^k,$$

$$(n-i)^b = \sum_{t=0}^{b} C_b^t n^{b-t} (-i)^t.$$

Перемножив эти две суммы, получим:

$$(i-1)^a(n-i)^b = \sum_{k=0}^{a}\sum_{t=0}^{b}(-1)^{a-k+t}C_a^k C_b^t n^{b-t} i^{t+k} = \\ = \sum_{t=0}^{b} C_b^t n^{b-t} \sum_{x=t}^{a+t}(-1)^{a-x+2t}C_a^{x-t} i^x = \\ = \sum_{k=0}^{b} C_b^{b-k} n^k \sum_{x=b-k}^{a+b-k}(-1)^{a-x+2b-2k}C_a^{x-b+k} i^x = \\ = \sum_{k=0}^{b} C_b^k n^k \sum_{x=b-k}^{a+b-k}(-1)^{a+2b-x-2k}C_a^{x+k-b} i^x. \quad (34)$$

Теперь просуммируем равенство (34) по всем i от одного до n:

$$\sum_{i=1}^{n}(i-1)^a(n-i)^b = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{b} C_b^k n^k \sum_{x=b-k}^{a+b-k}(-1)^{a+2b-x-2k}C_a^{x+k-b}i^x = \sum_{k=0}^{b} C_b^k n^k \sum_{x=b-k}^{a+b-k}(-1)^{a+2b-x-2k}C_a^{x+k-b}\left(\sum_{i=1}^{n} i^x\right). \qquad (35)$$

Рассмотрим отдельно сумму $\sum\limits_{i=1}^{n} i^x$. Заметим, что

$$n^{-x-1}\sum_{i=1}^{n} i^x = \sum_{i=1}^{n}\frac{i^x}{n^{x+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{x+1}. \qquad (36)$$

Из предельного соотношения (36) следует, что сумму $\sum_{i=1}^{n} i^x$ можно записать в виде:

$$\sum_{i=1}^{n} i^x = n^{x+1}\left(\frac{1}{x+1} + f_{m,1,x}(n)\right), \qquad (37)$$

где

$$f_{m,1,x}(n) = \overline{o}(1).$$

Подставим 37 в 35 получим

$$\sum_{i=1}^{n}(i-1)^a(n-i)^b = \\ = \sum_{k=0}^{b} C_b^k n^k \sum_{x=b-k}^{a+b-k}(-1)^{a+2b-x-2k}C_a^{x+k-b}n^{x+1}\left(\frac{1}{x+1} + f_{m,1,x}(n)\right).$$

Обозначим отдельно слагаемые, стремящиеся к нулю:

$$f_{m,2,a,b,k}(n) = \\ = n^{-a-b+k-1}\sum_{x=b-k}^{a+b-k-1}(-1)^{a+2b-k-2x}C_a^{x+k-b}n^{x+1}\left(\frac{1}{x+1} + f_{m,1,x}(n)\right) = \\ = \overline{o}(1).$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{n}(i-1)^a(n-i)^b =$$

$$= \sum_{k=0}^{b} C_b^k n^k \left((-1)^0 C_a^a n^{a+b-k+1} \left(\frac{(-1)^{b-k}}{a+b-k+1} + f_{m,1,a+b-k} \right) \right) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{b} C_b^k n^k \left(n^{a+b-k+1} f_{m,2,a,b,k}(n) \right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{b} C_k^b n^{a+b+1} \left(\frac{(-1)^{b-k}}{a+b-k+1} + f_{m,1,a+b-k}(n) + f_{m,2,a,b,k}(n) \right) =$$

$$= n^{a+b+1} \left(\sum_{k=0}^{b} \frac{(-1)^{b-k} C_b^k}{a+b-k+1} + f_{m,3,a,b}(n) \right),$$

где

$$f_{m,3,a,b}(n) = \sum_{k=0}^{b} C_b^k \left(f_{m,1,a+b-k} + f_{m,2,a,b,k} \right) = \overline{o}(1).$$

Вспомнив определения a и b из (32) и (33), получим

$$\sum_{i=1}^{n}(i-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-i)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]} =$$

$$= n^{\left[\frac{j}{2}\right]+\left[\frac{m-j}{2}\right]+1} \left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{m-j}{2}\right]} \frac{(-1)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]-k} C^k_{\left[\frac{m-j}{2}\right]}}{\left[\frac{j}{2}\right]+\left[\frac{m-j}{2}\right]-k+1} + f_{m,3,\left[\frac{j}{2}\right],\left[\frac{m-j}{2}\right]}(n) \right). \qquad (38)$$

Заметим, что в случае $m \,\vdots\, 2$,

$$\left[\frac{j}{2}\right] + \left[\frac{m-j}{2}\right] = \left[\frac{m}{2}\right], \qquad j \,\vdots\, 2,$$

$$\left[\frac{j}{2}\right] + \left[\frac{m-j}{2}\right] = \left[\frac{m}{2}\right] - 1, \qquad j \not\vdots\, 2.$$

А если $m \not\vdots\, 2$, то

$$\left[\frac{j}{2}\right] + \left[\frac{m-j}{2}\right] = \left[\frac{m}{2}\right].$$

Поэтому, в случае $m \,\vdots\, 2$, соотношение (38) можно переписать в следующем виде. При чётном j:

$$\sum_{i=1}^{n}(i-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-i)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]} = n^{\left[\frac{m}{2}\right]+1}\left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}\frac{(-1)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]-k}C^k_{\left[\frac{m-j}{2}\right]}}{\left[\frac{m}{2}\right]-k+1} + f_{m,3,\left[\frac{j}{2}\right],\left[\frac{m-j}{2}\right]}(n)\right),$$

а при нечётном j:

$$\sum_{i=1}^{n}(i-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-i)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]} = n^{\left[\frac{m}{2}\right]}\left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}\frac{(-1)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]-k}C^k_{\left[\frac{m-j}{2}\right]}}{\left[\frac{m}{2}\right]-k} + f_{m,3,\left[\frac{j}{2}\right],\left[\frac{m-j}{2}\right]}(n)\right).$$

В случае $m \not\vdots\, 2$, независимо от чётности j:

$$\sum_{i=1}^{n}(i-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-i)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]} = n^{\left[\frac{m}{2}\right]+1}\left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}\frac{(-1)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]-k}C^k_{\left[\frac{m-j}{2}\right]}}{\left[\frac{m}{2}\right]-k+1} + f_{m,3,\left[\frac{j}{2}\right],\left[\frac{m-j}{2}\right]}(n)\right).$$

Теперь для изучения поведения $r_{n,m}$ докажем следующую лемму:

***Лемма* 3.1.** *В приведённых выше обозначениях*

$$\sum_{i=1}^{n}(i-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-i)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}(c_j + f_j(i-1))(c_{m-j} + f_{m-j}(n-i)) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}(i-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-i)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}c_j c_{m-j} + \overline{o}\left(n^{\left[\frac{m}{2}\right]+1}\right). \quad (39)$$

Доказательство. Разложим сумму в левой части (39):

$$\sum_{i=1}^{n} S_{i-1,j} S_{n-i,m-j} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (i-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]} (n-i)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]} (c_j + f_j(i-1))(c_{m-j} + f_{m-j}(n-i)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (i-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]} (n-i)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]} c_j c_{m-j} + \sum_{i=1}^{n} (i-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]} (n-i)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]} c_j f_{m-j}(n-i) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} (i-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]} (n-i)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]} f_j(i-1) c_{m-j} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} (i-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]} (n-i)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]} f_j(i-1) f_{m-j}(n-i).$$

Необходимо доказать, что последние три слагаемых стремятся к нулю. Мы знаем, что все $f_k(n) = o(1)$. В частности, все f_k при $1 \leqslant k \leqslant m$ ограничены по модулю некоторой константой C_1. Также все c_k при $1 \leqslant k \leqslant m$ ограничены по модулю общей константой C_2. Таким образом,

$$\left| \sum_{i=1}^{n} (i-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]} (n-i)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]} f_j(i-1) f_{m-j}(n-i) \right| \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \sum_{i=1}^{n} (i-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]} (n-i)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]} |f_j(i-1)|,$$

$$\left| \sum_{i=1}^{n} (i-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]} (n-i)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]} f_j(i-1) c_{m-j} \right| \leqslant$$

$$\leqslant C_2 \sum_{i=1}^{n} (i-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]} (n-i)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]} |f_j(i-1)|,$$

$$\left| \sum_{i=1}^{n} (i-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]} (n-i)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]} c_j f_{m-j}(n-i) \right| \leqslant$$

$$\leqslant C_2 \sum_{i=1}^{n} (i-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]} (n-i)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]} |f_{m-j}(n-i)|.$$

Покажем, что верны следующие два соотношения:

$$\frac{1}{n^{\left[\frac{m}{2}\right]+1}}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-i)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}|f_j(i-1)| \xrightarrow{n\to\infty} 0, \tag{40}$$

$$\frac{1}{n^{\left[\frac{m}{2}\right]+1}}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-i)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}|f_{m-j}(n-i)| \xrightarrow{n\to\infty} 0. \tag{41}$$

Из них будет следовать, что

$$\left|\sum_{i=1}^{n} S_{i-1,j}S_{n-i,m-j} - \sum_{i=1}^{n}(i-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-i)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}c_j c_{m-j}\right| = o\left(n^{\left[\frac{m}{2}\right]+1}\right) \tag{42}$$

Докажем соотношение (40), а (41) будет аналогично. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Так как $f_j(n) \to 0$, то существует N_0, такое что для всех $n > N_0$ $|f_j(n)| < \varepsilon$. Распишем сумму в левой части (40) следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{n}(i-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-i)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}|f_j(i-1)| =$$
$$= \sum_{i=\ln(n)+1}^{n}(i-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-i)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}|f_j(i-1)| +$$
$$+ \sum_{i=1}^{\ln(n)}(i-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-i)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}|f_j(i-1)|. \tag{43}$$

Проверим, что каждая из сумм в правой части (43) есть $o\left(n^{\left[\frac{m}{2}\right]+1}\right)$. Посмотрим на первую сумму. При достаточно больших n верно неравенство $\ln(n) > N_0$. Значит,

$$\sum_{i=\ln(n)+1}^{n}(i-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-i)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}|f_j(i-1)| \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon \sum_{i=\ln(n)}^{n}(i-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-i)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]} \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon \sum_{i=1}^{n}(i-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-i)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}. \tag{44}$$

Мы уже вычисляли асимптотику этой суммы в (38):

$$\sum_{i=1}^{n}(i-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-i)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]} = n^{\left[\frac{j}{2}\right]+\left[\frac{m-j}{2}\right]+1}\left(A_{m,j}+o(1)\right)$$

Подставив это равенство в (44) и поделив на $n^{\left[\frac{m}{2}\right]+1}$, получим

$$\frac{1}{n^{\left[\frac{m}{2}\right]+1}}\sum_{i=\ln(n)+1}^{n}(i-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-i)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}|f_j(i-1)| \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon\frac{n^{\left[\frac{j}{2}\right]+\left[\frac{m-j}{2}\right]+1}}{n^{\left[\frac{m}{2}\right]+1}}\left(A_{m,j}+o(1)\right) \leqslant \varepsilon\left(A_{m,j}+o(1)\right). \qquad (45)$$

Это верно для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно больших n. Значит,

$$\frac{1}{n^{\left[\frac{m}{2}\right]+1}}\sum_{i=\ln(n)+1}^{n}(i-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-i)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}|f_j(i-1)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Теперь рассмотрим вторую сумму в правой части (43). Заметим, что так как все $f_j(i)$ ограничены константой C_1, то

$$\sum_{i=1}^{\ln(n)}(i-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-i)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}|f_j(i-1)| \leqslant C_1\sum_{i=1}^{\ln(n)}(i-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-i)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}.$$

В (35) мы уже показывали, что

$$\sum_{i=1}^{\ln(n)}(i-1)^{a}(n-i)^{b} = \sum_{k=0}^{b}C_b^k n^k\sum_{x=b-k}^{a+b-k}(-1)^{a+2b-x-2k}C_a^{x+k-b}\left(\sum_{i=1}^{\ln(n)}i^x\right). \qquad (46)$$

Также известно следующее соотношение

$$\sum_{i=1}^{\ln(n)}i^x = (\ln(n))^{x+1}\left(\frac{1}{x+1}+o(1)\right). \qquad (47)$$

Подставив (47) в (46), получим

$$\sum_{i=1}^{\ln(n)}(i-1)^a(n-i)^b =$$
$$= \sum_{k=0}^{b} C_b^k n^k \sum_{x=b-k}^{a+b-k}(-1)^{a+2b-x-2k}C_a^{x+k-b}\ln(n)^{x+1}\left(\frac{1}{x+1}+o(1)\right) =$$
$$= o(n^b\ln(n)^{a+b+2}). \quad (48)$$

Последнее равенство верно, так как слагаемых в общей сумме лишь конечное число, и в каждом слагаемом степень n не превышает b, а степень $\ln n$ строго меньше $a+b+2$. Подставим в (48) определения a и b, и получим

$$\sum_{i=1}^{\ln(n)}(i-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-i)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]} = o\left(n^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}\ln(n)^{\left[\frac{j}{2}\right]+\left[\frac{m-j}{2}\right]+2}\right).$$

Так как в нашем случае $j \geqslant 2$,

$$\sum_{i=1}^{\ln(n)}(i-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-i)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]} = o\left(n^{\left[\frac{m}{2}-1\right]}\ln(n)^{\left[\frac{j}{2}\right]+\left[\frac{m-j}{2}\right]+2}\right) = o\left(n^{\left[\frac{m}{2}\right]}\right).$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{n^{\left[\frac{m}{2}\right]+1}}\sum_{i=1}^{\ln(n)}(i-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-i)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Таким образом, мы доказали соотношение (40). Аналогично доказывается (41). Значит, мы доказали (42), или, что то же самое

$$\sum_{i=1}^{n} S_{i-1,j}S_{n-i,m-j} = \sum_{i=1}^{n}(i-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-i)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}c_jc_{m-j} + o(n^{\left[\frac{m}{2}\right]+1}).$$

Из этого следует, что

$$\sum_{j=2}^{m-2}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}S_{i-1,j}S_{n-i,m-j} =$$
$$= \sum_{j=2}^{m-2}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-i)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}c_jc_{m-j}+o(n^{\left[\frac{m}{2}\right]}). \quad (49)$$

А так как из (38) следует, что

$$\sum_{j=2}^{m-2}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-i)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}c_jc_{m-j}=O(n^{\left[\frac{m}{2}\right]}),$$

получаем необходимое нам асимптотическое соотношение (39) □

Теперь при помощи этой леммы вычислим асимптотику $r_{n,m}$. Заметим, при $m \vdots 2$ нас интересуют только слагаемые с чётными j, так как они имеют большую скорость роста:

$$r_{n,m} = \sum_{j=2}^{m-2}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}C_m^jS_{i-1,j}S_{n-i,m-j} \sim$$
$$\sim \sum_{j=2}^{m-2}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}C_m^j(i-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-i)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}c_jc_{m-j} =$$
$$= \sum_{j=2}^{m-2}C_m^jc_jc_{m-j}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-i)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]} \sim$$
$$\sim n^{\left[\frac{m}{2}\right]}\sum_{\substack{j=2\\2|j}}^{m-2}C_m^jc_jc_{m-j}\left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}\frac{(-1)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]-k}C^k_{\left[\frac{m-j}{2}\right]}}{\left[\frac{m}{2}\right]-k+1}+f_{m,3,\left[\frac{j}{2}\right],\left[\frac{m-j}{2}\right]}(n)\right) =$$
$$= n^{\left[\frac{m}{2}\right]}\left(\sum_{\substack{j=2\\2|j}}^{m-2}\sum_{k=0}^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}\frac{(-1)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]-k}C^k_{\left[\frac{m-j}{2}\right]}C_m^jc_jc_{m-j}}{\left[\frac{m}{2}\right]-k+1}+f_{r,m,1}(n)\right),$$

где

$$f_{r,m,1}=\overline{o}(1).$$

При $m \not\vdots\, 2$ все слагаемые имеют одинаковую скорость роста. Поэтому

$$r_{n,m} \sim n^{\left[\frac{m}{2}\right]} \left(\sum_{j=2}^{m-2} \sum_{k=0}^{\left[\frac{m-j}{2}\right]} \frac{(-1)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]-k} C^k_{\left[\frac{m-j}{2}\right]} C^j_m c_j c_{m-j}}{\left[\frac{m}{2}\right] - k + 1} + f_{r,m,1}(n) \right),$$

Значит, существуют такие функции $f_{r,m}(n)$, что верны следующие равенства. При нечётном m:

$$r_{n,m} = n^{\left[\frac{m}{2}\right]} \left(\sum_{j=2}^{m-2} \sum_{k=0}^{\left[\frac{m-j}{2}\right]} \frac{(-1)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]-k} C^k_{\left[\frac{m-j}{2}\right]} C^j_m c_j c_{m-j}}{\left[\frac{m}{2}\right] - k + 1} + f_{r,m}(n) \right). \tag{50}$$

А при чётном m:

$$r_{n,m} = n^{\left[\frac{m}{2}\right]} \left(\sum_{\substack{j=2 \\ 2|j}}^{m-2} \sum_{k=0}^{\left[\frac{m-j}{2}\right]} \frac{(-1)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]-k} C^k_{\left[\frac{m-j}{2}\right]} C^j_m c_j c_{m-j}}{\left[\frac{m}{2}\right] - k + 1} + f_{r,m}(n) \right). \tag{51}$$

В обоих случаях

$$f_{r,m} = \overline{o}(1).$$

Определим константы, получившиеся в равенствах (50) и (51):

$$c_{r,m} = \begin{cases} \sum_{j=2}^{m-2} \sum_{k=0}^{\left[\frac{m-j}{2}\right]} \frac{(-1)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]-k} C^k_{\left[\frac{m-j}{2}\right]} C^j_m c_j c_{m-j}}{\left[\frac{m}{2}\right]-k+1}, & m \not\vdots\, 2, \\ \sum_{\substack{j=2 \\ 2|j}}^{m-2} \sum_{k=0}^{\left[\frac{m-j}{2}\right]} \frac{(-1)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]-k} C^k_{\left[\frac{m-j}{2}\right]} C^j_m c_j c_{m-j}}{\left[\frac{m}{2}\right]-k+1}, & m \vdots\, 2. \end{cases}$$

Тогда эти равенства можно записать более лаконично:

$$r_{n,m} = n^{\left[\frac{m}{2}\right]} \left(c_{r,m} + f_{r,m}(n) \right). \tag{52}$$

Теперь вспомним, как $S_{n,m}$ выражается через $r_{n,m}$. Согласно равенству

(30), нам необходимо исследовать следующую сумму:

$$\sum_{i=4}^{n-1}\frac{2(n+1)}{(i+2)(i+1)}r_{i,m}=\sum_{i=4}^{n-1}\frac{2(n+1)}{(i+2)(i+1)}i^{\left[\frac{m}{2}\right]}\left(c_{r,m}+f_{r,m}(n)\right)=$$
$$=\left(c_{r,m}+f_{r,m}(n)\right)\sum_{i=4}^{n-1}\frac{2(n+1)}{(i+2)(i+1)}i^{\left[\frac{m}{2}\right]}\sim\sum_{i=1}^{n}2ni^{\left[\frac{m}{2}\right]-2}c_{r,m}\sim\frac{2n^{\left[\frac{m}{2}\right]}c_{r,m}}{\left[\frac{m}{2}\right]-1}.$$

Наконец, также согласно (30), вычислим $S_{n,m}$:

$$S_{n,m}=\frac{n+1}{10}Q_{3,m}+r_{n,m}+\sum_{i=4}^{n-1}\frac{2(n+1)}{(i+2)(i+1)}r_{i,m}\sim$$
$$\sim n^{\left[\frac{m}{2}\right]}c_{r,m}+\frac{2n^{\left[\frac{m}{2}\right]}c_{r,m}}{\left[\frac{m}{2}\right]-1}=n^{\left[\frac{m}{2}\right]}\frac{(\left[\frac{m}{2}\right]+1)c_{r,m}}{\left[\frac{m}{2}\right]-1}.$$

Получается, что

$$S_{n,m}=n^{\left[\frac{m}{2}\right]}\left(c_m+f_m(n)\right),$$

где

$$c_m=\frac{(\left[\frac{m}{2}\right]+1)c_{r,m}}{\left[\frac{m}{2}\right]-1},$$
$$c_{r,m}=\begin{cases}\sum_{j=2}^{m-2}\sum_{k=0}^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}\frac{(-1)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]-k}C^k_{\left[\frac{m-j}{2}\right]}C^j_m c_j c_{m-j}}{\left[\frac{m}{2}\right]-k+1}, & m\not\vdots\, 2,\\ \sum_{\substack{j=2\\2|j}}^{m-2}\sum_{k=0}^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}\frac{(-1)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]-k}C^k_{\left[\frac{m-j}{2}\right]}C^j_m c_j c_{m-j}}{\left[\frac{m}{2}\right]-k+1}, & m\,\vdots\, 2.\end{cases}.$$

Что соответствует выражению (18), которое нам и необходимо было доказать. □

4. Задача о дискретной парковке

4.1. Постановка задачи

Благодаря лемме 1, для задачи о дискретной парковке верно следующее соотношение

$$\xi_n = 1 + \xi_{\eta_\varnothing} + \xi_{n-(\eta_\varnothing+l)} \tag{53}$$

Рассмотрим случай машин длины 2, то есть $l = 2$. Тогда соотношение (53) принимает вид

$$\xi_n = 1 + \xi_{\eta_\varnothing} + \xi_{n-(\eta_\varnothing+2)} \tag{54}$$

Также в этой задаче удобно рассматривать случайную величину $\nu_n = \eta_\varnothing + 1$. Тогда она будет равномерно распределена на множестве натуральных чисел $1, \ldots, n-1$. Также, вместо ξ_n удобно брать не количество машин, а место, ими заполненное. Обозначим эту случайную величину $\widehat{\xi}_n$. Так как все машины имеют длину 2, то очевидно $\widehat{\xi}_n = 2\xi_n$. Также очевидно, что для маленьких n:

$$\begin{aligned} \widehat{\xi}_0 &= 0, \\ \widehat{\xi}_1 &= 0. \end{aligned}$$

Таким образом, наша задача имеет следующий вид. Имеется последовательность случайных величин $\widehat{\xi}_n$, удовлетворяющая следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} \widehat{\xi}_0 &= 0, \\ \widehat{\xi}_1 &= 0, \\ \widehat{\xi}_n &:= 2 + \widehat{\xi}_{\nu_n-1} + \widehat{\xi}_{n-\nu_n-1}, \end{aligned} \tag{55}$$

где ν_n — независимые случайные величины, не зависящие от $\widehat{\xi}_m$, равновероятно принимающие значения $1, \ldots, n-1$. В последнем равенстве $\widehat{\xi}_{\nu_n-1}$ и $\widehat{\xi}_{n-\nu_n}$ также независимы. Цель данного пункта — выяснить поведение математических ожиданий данной последовательности случайных величин.

Данную задачу можно трактовать следующим образом. Пусть у нас есть отрезок $[0, n]$. Ячейкой назовём интервал $[i, i+1)$ для любого целого неотрицательного i, не превышающего $n-1$. В начале каждого шага некоторые ячейки считаются занятыми, а остальные — свободными. В самом начале все ячейки являются свободными. Рассмотрим все пары подряд идущих свободных ячеек. Обозначим количество таких пар за v. В случае, если $v = 0$, процесс прекращается. Иначе, пары нумеруются числами от 1 до v, и на этих числах задаётся равномерно распределённая случайная величина. Далее обе ячейки из пары с номером, равным значению этой случайной величины, становятся занятыми, и начинается следующий шаг. В тот момент, когда процесс прекратился, посчитаем количество занятых ячеек. За ξ_n обозначим соответствующую случайную величину.

4.2. Полученные результаты

***Теорема* 4.1.** *Для описанного выше процесса*

$$E\widehat{\xi_n} = n - \frac{n}{e^2}\frac{\Gamma(n+1,-2)}{n!} - \frac{(-2)^{n+1}}{n^2} - \frac{2}{e^2}\frac{\Gamma(n+1,-2)}{n!}. \qquad (56)$$

В частности, из этой теоремы следует асимптотическое поведение математических ожиданий $E\widehat{\xi_n}$.

Следствие. *Для описанного выше процесса*

$$\frac{E\widehat{\xi_n}}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 - \frac{1}{e^2}.$$

Доказательство теоремы. Обозначим математическое ожидание $X_n = \mathbb{E}(\widehat{\xi_n})$. Тогда из определения $\widehat{\xi_n}$ для маленьких n очевидно, что

$$X_0 = 0,$$

$$X_1 = 0,$$

$$X_2 = 2.$$

Также, из рекуррентного соотношения (55) следует рекуррентное соотношение на X_n:

$$X_{n+1} = 2 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(X_{i-1} + X_{n-i} \right).$$

Так как в последней сумме каждое X_i повторяется ровно два раза, это равенство можно переписать в следующем виде:

$$X_{n+1} = 2 + \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} X_i \tag{57}$$

Упростим это соотношение. Для этого определим S_n:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} X_i$$

И перепишем соотношение (57) через S_n:

$$\begin{aligned} &S_1 = 0, \\ &S_2 = 2, \\ &S_{n+1} - S_n = \frac{2}{n} S_{n-1} + 2. \end{aligned} \tag{58}$$

Уравнение (58) перепишем в более удобном для нас виде:

$$(n-1)S_n = (n-1)S_{n-1} + 2S_{n-2} + 2(n-1). \tag{59}$$

Будем решать уравнение (59) при помощи производящей функции. Для этого напишем саму производящую функцию последовательности S_n:

$$G(z) = \sum_{i=1}^{\infty} S_i z^i, \tag{60}$$

и её производную:

$$G'(z) = \sum_{i=1}^{\infty} i S_i z^{i-1} = \sum_{i=1}^{\infty} (i+1) S_{i+1} z^i. \tag{61}$$

Домножим начальные значения и уравнение (59) на соответствующие степени z:

$$S_1 z = 0$$
$$S_2 z^2 = 2z^2$$
$$(n-1)S_n z^n = (n-1)S_{n-1}z^n + 2S_{n-2}z^n + 2(n-1)z^n,\ n > 2,$$

и сложим все полученные равенства:

$$\sum_{n=3}^{\infty}(n-1)S_n z^n = \sum_{n=3}^{\infty}(n-1)S_{n-1}z^n + 2\sum_{n=3}^{\infty}S_{n-2}z^n + 2\sum_{n=3}^{\infty}(n-1)z^n. \quad (62)$$

Преобразуем равенство (62) таким образом, чтобы увидеть там ряды $G(z)$ и $G'(z)$:

$$z\sum_{n=3}^{\infty}nS_n z^{n-1} - \sum_{n=3}^{\infty}S_n z^n = \\ = z^2\left(\sum_{n=2}^{\infty}nS_n z^{n-1} + 2\sum_{n=1}^{\infty}S_n z^n + 2\sum_{n=2}^{\infty}nz^{n-1}\right) \quad (63)$$

Заметим следующие соотношения:

$$zG'(z) = z\sum_{n=3}^{\infty}nS_n z^{n-1} + z\sum_{n=1}^{2}nS_n z^{n-1} = z\sum_{n=3}^{\infty}nS_n z^{n-1} + 4z^2,$$
$$G(z) = \sum_{n=3}^{\infty}S_n z^n + \sum_{n=1}^{2}S_n z^n = \sum_{n=3}^{\infty}S_n z^n + 2z^2,$$
$$\frac{1}{(1-z)^2} = \left(\frac{1}{1-z}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}nz^{n-1} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty}nz^{n-1},$$

из которых следует, что левая часть (63) равна

$$z\sum_{n=3}^{\infty}nS_n z^{n-1} - \sum_{n=3}^{\infty}S_n z^n = zG'(z) - G(z) - 2z^2,$$

а правая часть того же равенства равна

$$z^2\sum_{n=2}^{\infty} nS_n z^{n-1} + 2z^2\sum_{n=1}^{\infty} S_n z^n + 2z^2\sum_{n=2}^{\infty} nz^{n-1} =$$
$$= z^2G'(z) + 2z^2G(z) + \frac{2z^2}{(1-z)^2} - 2z^2.$$

Значит, мы получили дифференциальное уравнение на функцию $G(z)$:

$$zG'(z) - G(z) - 2z^2 = z^2G'(z) + 2z^2G(z) + \frac{2z^2}{(1-z)^2} - 2z^2. \tag{64}$$

Перепишем уравнение 64 в более удобном виде:

$$(z-z^2)G'(z) = (2z^2+1)G(z) + \frac{2z^2}{(1-z)^2} \tag{65}$$

Покажем, что общее решение уравнения (65) имеет вид:

$$G(z) = \frac{ce^{-2z}z}{(1-z)^3} + \frac{z}{(1-z)^3}. \tag{66}$$

Для начала найдём производную (66)

$$G'(z) = \frac{ce^{-2z} - 2ce^{-2z}z}{(1-z)^3} + \frac{3ce^{-2z}z}{(1-z)^4} + \frac{1}{(1-z)^3} + \frac{3z}{(1-z)^4}. \tag{67}$$

И теперь подставим (66) и (67) в (65). В левой части получим:

$$(z-z^2)G'(z) = \frac{ce^{-2z}z - 2ce^{-2z}z^2 - ce^{-2z}z^2 + 2ce^{-2z}z^3}{(1-z)^3} + \frac{3ce^{-2z}z^2}{(1-z)^3} +$$
$$+ \frac{z-z^2}{(1-z)^3} + \frac{3z^2}{(1-z)^3} = \frac{ce^{-2z}z + 2ce^{-2z}z^3 + z + 2z^2}{(1-z)^3},$$

а в правой

$$(2z^2+1)G(z) + \frac{2z^2}{(1-z)^2} = \frac{2ce^{-2z}z^3 + ce^{-2z}z}{(1-z)^3} + \frac{2z^3+z}{(1-z)^3} + \frac{2z^2-2z^3}{(1-z)^3} =$$
$$= \frac{ce^{-2z}z + 2ce^{-2z}z^3 + z + 2z^2}{(1-z)^3}.$$

Мы получили, что левая и правая части (65) совпадают. Значит, мы доказали,что общим решением (65) является (66). Теперь из начальных данных найдём нужное нам частное решение. Мы знаем, что $G'(0) = 0$. То есть

$$c + 1 = 0,$$
$$c = -1.$$

Получаем, что нужное нам частное решение выглядит следующим образом:

$$G(z) = \frac{z - ze^{-2z}}{(1-z)^3}. \tag{68}$$

Теперь, чтобы найти саму последовательность S_n, необходимо разложить функцию (68) в ряд. Посмотрим на её знаменатель. Мы знаем, что

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{i=0}^{\infty} z^i.$$

Из этого равенства следует, что

$$\frac{1}{(1-z)^3} = \left(\sum_{i=0}^{\infty} z^i\right)^3 = \sum_{i=0}^{\infty} C_{i+2}^2 z^i, \tag{69}$$

Также из разложения экспоненциальной функции мы знаем, что

$$1 - e^{-2z} = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-2)^i}{i!} z^i. \tag{70}$$

Теперь подставим (69) и (70) в (68) получаем

$$G(z) = z\frac{1 - e^{-2z}}{(1-z)^3} = -z\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-2)^i}{i!} z^i \sum_{i=0}^{\infty} C_{i+2}^2 z^i = z\sum_{i=1}^{\infty} c_i z^i, \tag{71}$$

где константы c_n выражаются следующим образом:

$$c_n = -\sum_{i=1}^{n} \frac{(-2)^i C_{n-i+2}^2}{i!} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-2)^{i-1}(n-i+2)(n-i+1)}{i!}. \tag{72}$$

Подставив (72) в (71), получим разложение функции $G(z)$ в ряд:

$$G(z) = z\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{(-2)^{i-1}(n-i+2)(n-i+1)}{i!}\right)z^n = \\ = \sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{(-2)^{i-1}(n-i+1)(n-i)}{i!}\right)z^n. \quad (73)$$

Значит, мы получили значения нашей последовательности S_n:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n-1}\frac{(-2)^{i-1}(n-i+1)(n-i)}{i!}. \quad (74)$$

Однако нам нужно найти последовательность X_n. Мы знаем, что она выражается через S_n посредством формулы $X_n = S_n - S_{n-1}$. Подставив в неё (74), получим значения последовательности X_n:

$$X_n = \sum_{i=1}^{n-1}\frac{(-2)^{i-1}(n-i+1)(n-i)}{i!} - \sum_{i=1}^{n-2}\frac{(-2)^{i-1}(n-i)(n-i-1)}{i!} = \\ = -\frac{(-2)^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{i=1}^{n-2}\frac{2(-2)^{i-1}(n-i)}{i!} = \sum_{i=1}^{n-1}\frac{2(-2)^{i-1}(n-i)}{i!}.$$

То есть,

$$X_n = 2\sum_{i=1}^{n-1}\frac{(-2)^{i-1}(n-i)}{i!}. \quad (75)$$

Теперь необходимо свернуть эту сумму. Для этого докажем следующее равенство:

$$\sum_{i=1}^{n-1}\frac{c^{i-1}(n-i)}{i!} = \frac{c^n - e^c\Gamma(n+1,c)}{\Gamma(n+1)} + \frac{1}{c}\left(\frac{e^c\Gamma(n+1,c)}{\Gamma(n)} - n\right). \quad (76)$$

Распишем левую часть формулы (76):

$$\sum_{i=1}^{n-1}\frac{c^{i-1}(n-i)}{i!}=\frac{n}{c}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{c^i}{i!}-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{c^{i-1}}{(i-1)!}=\frac{n}{c}\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{c^i}{i!}-1-\frac{c^n}{n!}\right)-\sum_{i=0}^{n-2}\frac{c^i}{i!}=$$
$$=\frac{n}{c}\sum_{i=0}^{n}\frac{c^i}{i!}-\frac{n}{c}-\frac{c^{n-1}}{(n-1)!}-\sum_{i=0}^{n-2}\frac{c^i}{i!}=\frac{ne^c}{n!c}n!e^{-c}\sum_{i=0}^{n}\frac{c^i}{i!}-\frac{n}{c}-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{c^i}{i!}=^*$$
$$=^*\frac{e^c}{c\Gamma(n)}\Gamma(n+1,c)-\frac{n}{c}-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{c^i}{i!}=\frac{1}{c}\left(\frac{e^c\Gamma(n+1,c)}{\Gamma(n)}-n\right)-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{c^i}{i!}$$

В равенстве $(=^*)$ используется следующая формуля для усечённой гамма-функции:

$$\Gamma(n+1,c)=n!e^{-c}\sum_{i=0}^{n}\frac{c^i}{i!}$$

Подставим то, что мы получили в формулу (76), получим

$$\sum_{i=1}^{n-1}\frac{c^{i-1}(n-i)}{i!}=\frac{1}{c}\left(\frac{e^c\Gamma(n+1,c)}{\Gamma(n)}-n\right)-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{c^i}{i!}\tag{77}$$

Рассмотрим отдельно последнюю сумму в формуле (77):

$$-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{c^i}{i!}=\frac{c^n}{n!}-\sum_{i=0}^{n}\frac{c^i}{i!}=\frac{c^n}{\Gamma(n+1)}-\frac{e^c}{\Gamma(n+1)}n!e^{-c}\sum_{i=0}^{n}\frac{c^i}{i!}=\frac{c^n-e^c\Gamma(n+1,c)}{\Gamma(n+1)}$$

Подставив этот результат в формулу (77), получим равенство (76).
Теперь в формулу (76) подставим $c=-2$. Слева получим (75), а справа:

$$X_n=n-\frac{n}{e^2}\frac{\Gamma(n+1,-2)}{n!}-\frac{(-2)^{n+1}}{n^2}-\frac{2}{e^2}\frac{\Gamma(n+1,-2)}{n!}.$$

Таким образом, мы доказали нужную нам теорему. □

Заключение

В данной работе были рассмотрены некоторые модели задачи о парковке. В дальнейшем планируется продолжить изучение этих задач. В частности, интересен вопрос об асимптотической нормальности задачи о дискретной парковке машин длины 2. Также представляет интерес вопрос об асимптотическом поведении математических ожиданий в задаче о дискретной парковке машин большей длины.

Список литературы

[1] A. Renji. On the one-dimensional concerning space-filling. — Publ. of Math. Inst. of Hungarian Acad. Of Science. Vol. 3. 1958.P 109-127.

[2] Ananjevskii S.M. Kryukov N.A. The Problem Of Selfish Parking. — Vestnik SPbSU. Mathematics. Mechanics. Astronomy. (принято к печати).

[3] Dvoretzky A. Robbins H. On the 'parking' problem. — Publ. of the Math. Inst. of Hungarian Acad. Of Sciense. Vol. 9. 1964. P. 209-226.

[4] Mattew P.C. Nandor J.S. Renyi's Parking Problem Revisited. — arXiv:1406.1781v1 [math.PR] 6 Jun 2014.

[5] S.M. Ananjevskii. Some Generalizations of 'Parking' Problem. — Vestnik St.Petersburg University. Ser. 1, issue 4, 525-532 (2016).