Отзыв на дипломную работу Горшановой Анастасии

“Экстремальные задачи для весов Макенхаупта из класса A_1”

Дипломная работа посвящена изучению оценок интегральных функционалов на классе Макенхаупта A_1 на отрезке $I \subset \mathbb{R}$. А именно, изучается вопрос оптимальной оценки среднего значения функции $f \circ \phi$ по отрезку I, где f — некоторая фиксированная функция, задающая интегральный функционал, а функция ϕ пробегает “шар” класса A_1 — множество функций с ограничением константы Макенхаупта. Ответ на этот вопрос дается с помощью метода функции Беллмана. Данный подход, берущий свои истоки в работах Буркхольдера и Назарова, Трейля и Вольберга, в последнее время набирает популярность, широко используется для решения большого класса задач гармонического анализа и теории вероятностей. В работах Васюнина, Вольберга и Славина данный метод был применен к оценке специальных интегральных функционалов на пространстве BMO, с помощью него получены точные константы в классических неравенствах для этого пространства. Позже была разработана теория, позволяющая находить функцию Беллмана для оценки интегрального функционала на BMO для достаточно общей функции f. Работа над обобщением этого результата на некоторые другие классы функций (так называемые классы функций малой средней осцилляции), включающие как пространство BMO, классы Макенхаупта A_p, $1 < p < \infty$, так и классы обратного неравенства Гельдера, в данный момент практически закончена. Вопрос же для класса A_1, изучаемый в обсуждаемой дипломной работе, не включается в этот общий случай, а получается из него в некотором смысле предельным переходом, когда показатель p стремится к 1.

Работа, проделанная дипломантом, является начальным этапом изучения функции Беллмана для интегральных функционалов на классе A_1. Метод позволяет свести изучаемую задачу на классе A_1 к поиску функции, определенной на специальной двумерной области, удовлетворяющей так называемому “основному неравенству”, граничным данным, и минимальной среди таковых. Собственно, эта функция и называется функцией Беллмана. Оказывается, что структура изучаемой функции Беллмана зависит от знака второй производной функции f. Автор разбирает три случая — когда эта производная всюду отрицательна, всюду положительна, или один раз меняет знак с плюса на минус. В каждом из этих случаев ей удается построить кандидата на роль функции Беллмана, и доказать, что он удовлетворяет необходимым свойствам.

В работе мною были замечены некоторые математические и языковые ошибки:

- Функция ω, которая строится в утверждении 2.1, на самом деле не принадлежит классу $A_1^\delta(I)$, нужно определять ее несколько иным способом.
- Некоторая путаница с так называемым уравнением лунки, описывающем переключение одного вида экстремалей на другой. Так, в формуле (4.1) написано $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(b)$, а в определении 4.1 в правой части стоит другое выражение: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(a)$.
- Слово “непустому” в том же утверждении 2.1 должно быть написано слитно.
- Автор попыталась выпрямить знаки препинания в курсивном тексте, однако сделала это не везде (см., например, определение 2.3).

Считаю, что проделанна дипломантом работа является важной начальной частью построения теории функции Беллмана для оценки интегральных функционалов на классе A_1. Наличие несложно устраняемых фактических ошибок, на мой взгляд, не умаляет содержания работы, однако не позволяет рекомендовать оценить ее оценкой “отлично”, поэтому рекомендую поставить оценку “хорошо”.

Кандидат физико-математических наук

П. Б. Затицкий