САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Фундаментальная математика и механика

Функциональный анализ

Горшанова Анастасия

Экстремальные задачи для весов Макенхаупта из класса A_1

Дипломная работа

Научный руководитель:
д. ф.-м. н., профессор Васюнин В. И.

Рецензент:
к. ф.-м. н. Затицкий П. Б.

Санкт-Петербург
2018

SAINT PETERSBURG STATE UNIVERSITY

Fundamental Mathematics and Mechanics

Functional Analysis

Anastassia Gorsanova

Extremal problems for the Muckenhoupt A_1-weights

Graduation Thesis

Scientific supervisor:
Professor V. I. Vasyunin

Reviewer:
P. B. Zatitskiy

Saint Petersburg
2018

Содержание

1. Введение 2
1.1. История вопроса 2
1.2. Обозначения и постановка задачи 2
1.3. Описание полученных результатов 3
2. Предварительные сведения 3
2.1. Свойства функции Беллмана 3
2.2. Основное неравенство и основная лемма 5
3. Прямолинейные экстремали 6
3.1. Вид экстремалей 6
3.2. Кандидат на роль функции Беллмана 7
3.3. Знак функции f'' 11
4. Лунка 13
4.1. Основные рассуждения 13
4.2. Переход от горизонтальных экстремалей к вертикальным 17
4.3. Пример 21
5. Заключение 22
Список литературы 23

1. Введение

1.1. **История вопроса.** Относительно недавно возник метод функции Беллмана для решения экстремальных задач в анализе. Действенность этого метода в приложении к некоторым задачам гармонического анализа продемонстрировали Назаров и Трейль в работе [3], а в работе [4] был описан метод функции Беллмана в контексте стохастического процесса и его применение в диадических задачах гармонического анализа. Позже с помощью функции Беллмана были найдены точные константы в неравенстве Джона–Ниренберга для функций из класса BMO (см., например, [5]) и в обратном неравенстве Гёльдера для весов Макенхаупта (в статье [2]).

В частности, для функций из класса BMO, существует подробно описанная теория построения соответствующей функции Беллмана и выведен ряд условий, позволяющих определить конструкцию экстремалей для конкретных случаев, что в свою очередь позволяет решить экстремальные задачи на данных функциях. Возникает желание создать подобную теорию для функций из других классов. Например, для весов Макенхаупта из класса A_p на отрезке. Для весов класса A_p при $1 < p \le \infty$ основная теория на данный момент практически полностью разработана, в то время как предельный случай $p = 1$ пока остаётся без должного внимания.

В данной работе будет представлен элемент общей теории для предельного случая весов Макенхаупта класса A_1.

1.2. **Обозначения и постановка задачи.** В данной работе экстремальные задачи будут рассмотрены на весах Макенхаупта класса A_1.

Далее будем обозначать через I и J отрезки вещественной прямой, а символом $\langle\omega\rangle_I$ будем обозначать среднее функции ω по отрезку I:

$$\langle\omega\rangle_I \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|I|}\int\limits_I \omega.$$

Так же будем считать, что все рассматриваемые веса вещественны.

В общем случае весом Макенхаупта класса A_p называется любая неотрицательная вещественная функция ω, которая удовлетворяет условию A_p:

$$\sup_{I\subset\mathbb{R}}\bigl\{\langle\omega\rangle_I\langle\omega^{\frac{1}{1-p}}\rangle_I^{p-1}\bigr\} < \infty, \text{ где } \quad 1 < p < \infty.$$

В данной работе будет изучаться экстремальная задача для произвольного интегрального функционала в предельном случае $p = 1$. Класс Макенхаупта A_1 задаётся следующим условием:

$$\sup_{J\subset I}\Bigl\{\langle\omega\rangle_J\frac{1}{\inf\limits_{t\in J}\omega(t)}\Bigr\} < \infty.$$

Обозначим множество весов, заданных на интервале I и таких, что указанный выше супремум не превосходит $\delta{>}1$, символом $A_1^\delta(I)$, то есть

$$A_1^\delta(I) \stackrel{\text{def}}{=} \Bigl\{\omega\in L^1(I) \bigm| \inf_{t\in I}\omega(t) > 0,\quad \sup_{J\subset I}\bigl\{\langle\omega\rangle_J\frac{1}{\inf\limits_{t\in J}\omega(t)}\bigr\} \le \delta < \infty\Bigr\}.$$

В общем случае при $1 < p < \infty$

$$A_p^\delta(I) \stackrel{\text{def}}{=} \Bigl\{\omega\in L^1(I) \bigm| \omega > 0,\quad \sup_{J\subset I}\bigl\{\langle\omega\rangle_J\langle\omega^{\frac{1}{1-p}}\rangle_J^{p-1}\bigr\} \le \delta < \infty\Bigr\}.$$

В данной работе будет рассматриваться следующая функция, называемая функцией Беллмана:

$$\mathbb{B}_\delta(x_1, x_2; f) \overset{\mathrm{def}}{=} \sup_{\omega \in A_1^\delta(I)} \Big\{ \langle f \circ \omega \rangle_I \;\Big|\; \langle \omega \rangle_I = x_1,\ \inf_{t \in I} \omega = x_2 \Big\}. \tag{1.1}$$

В дальнейшем обозначение рассматриваемой нами функции Беллмана будет часто сокращаться до $\mathbb{B}_\delta(x_1, x_2)$ или $\mathbb{B}(x)$, где $x = (x_1, x_2)$.

Наша цель заключается в нахождении формулы для вычисления функции Беллмана в зависимости от некоторых свойств функции f. Для простоты изложения функцию f будем считать достаточно гладкой. Например, условие $f \in C^2$ гарантирует возможность всех нижеследующих вычислений.

1.3. **Описание полученных результатов.** В дальнейшем придётся не раз столкнуться с интегралом от выражения вида

$$f''(t)t^{-q},$$

где q — некоторое положительное число. В связи с этим будем рассматривать лишь те дважды непрерывно дифференцируемые функции f, которые вместе с первыми двумя производными суммируемы с весом t^{-q}, $q > 0$, на соответствующем интервале.

Далее окажется, что поведение функции Беллмана зависит от знака функции f''. Исходя из этого функция Беллмана будет иметь тот или иной вид, который представляет собой некоторое выражение, зависящее от функции f и её производных. Будет показано, что при изучении функция Беллмана в области, в которой супремум в определении 1.1 берётся по непустому множеству, имеются следующие решения поставленной задачи.

- При условии $f'' \le 0$ функция Беллмана тождественно равна $f(x_1)$, а её область определения покрывается экстремалями, которые имеют вид вертикальных прямых (см. раздел 3).
- При $f'' \ge 0$ соответствующие экстремали имеют вид горизонтальных прямых, а функция Беллмана представляет собой функцию линейную по x_1 и убывающую по x_2 (см. раздел 3).
- Если имеется точка перегиба функции f, в которой f'' меняет знак с плюса на минус, то в некоторой окрестности этой точки возникает конструкция из переходящих друг в друга горизонтальных и вертикальных экстремалей, называемая лункой. Здесь функция Беллмана представляет собой склейку функций, определённых на горизонтальной и вертикальной частях экстремалей (см. раздел 4). Если такая точка перегиба одна, то есть $f''(t) > 0$ при $t < c$ и $f''(t) < 0$ при $t > c$, то фолиация области определения функции Беллмана следующая: около точки c строится лунка, подобласть ниже лунки заметается горизонтальными экстремалями, а подобласть правее её — вертикальными.

2. Предварительные сведения

2.1. **Свойства функции Беллмана.** Сделаем сразу несколько замечаний по поводу свойств функции $\mathbb{B}_\delta(x)$, определённой формулой (1.1).

Замечание 1. *$\mathbb{B}_\delta$ не зависит от интервала I из определения функции Беллмана.*

Это следует из того, что один интервал можно получить из любого другого интервала по средствам линейной замены переменных, что не влияет на среднее веса и его инфимум.

Замечание 2. *Функция* $-\mathbb{B}_\delta(x_1, x_2; -f)$ *является решением задачи*

$$\mathbb{B}_\delta^{min}(x_1, x_2; f) = \inf_{\omega \in A_1^\delta(I)} \big\{ \langle f \circ \omega \rangle_I \bigm| \langle \omega \rangle_I = x_1,\ \inf_{t \in I} \omega = x_2 \big\}.$$

Это замечание так же очевидно, хотя и позволяет свести задачу на инфимум к задаче на супремум. Далее мы будем решать задачу лишь для супремума.

Теперь перейдём к более существенным особенностям функции Беллмана, таким как её область определения и граничные условия. Сформулируем утверждения, схожие с таковыми для задач, рассматриваемых на BMO, которые можно найти в работе [1].

Нас интересует нетривиальный случай, когда супремум в определении функции Беллмана берётся по непустому множеству. Рассмотрим область

$$\Omega_\delta = \big\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \bigm| x_2 \le x_1 \le \delta x_2 \big\}.$$

Утверждение 2.1. *Супремум в определении функции Беллмана* (1.1) *берётся по не пустому множеству для тех и только тех точек* $x = (x_1, x_2)$, *которые лежат в области* Ω_δ.

Доказательство. Пусть $x = (x_1, x_2)$ — произвольная точка области определения функции Беллмана, а ω — вес, порождающий эту точку. По определению весов из множества $A_1^\delta(I)$ они удовлетворяют неравенству

$$\sup_{J \subset I} \Big\{ \langle \omega \rangle_J \frac{1}{\inf\limits_{t \in J} \omega(t)} \Big\} \le \delta.$$

В частности, при $J = I$ имеем

$$x_1 \cdot \frac{1}{x_2} = \langle \omega \rangle_I \frac{1}{\inf\limits_{t \in I} \omega(t)}.$$

Следовательно, $x_1 \le \delta x_2$. И ясно, что

$$x_2 = \inf_{t \in I} \omega(t) \le \frac{1}{|I|} \int\limits_I \omega = \langle \omega \rangle_I = x_1.$$

Значит, если $\omega \in A_1^\delta(I)$, то $(x_1, x_2) = (\langle \omega \rangle_I, \inf\limits_{t \in I} \omega(t)) \in \Omega_\delta$. То есть, Ω_δ содержит область определения функции Беллмана.

С другой стороны, если $x_2 \le x_1 \le \delta x_2$, то можно подобрать такую функцию $\omega \in A_1^\delta(I)$, что её среднее по отрезку I и инфимум на том же отрезке будут равны соответственно x_1 и x_2. Например, в качестве такой функции можно взять

$$\omega_{c,a,\nu}(t) = \begin{cases} c a^\nu t^{-\nu} & \text{при } 0 \le t \le a, \\ c & \text{при } a \le t \le 1, \end{cases}$$

где $\nu = \frac{\delta - 1}{\delta}$, $a = \frac{x_1 - x_2}{(\delta - 1) x_2}$, $c = x_2$. Причём ясно, что $a \in [0, 1]$.

Подробное доказательство того, что этот вес действительно принадлежит классу $A_1^\delta([0,1])$, то что он отвечает точке x и как его найти, описано в статье [2].

Тогда, получаем, что Ω_δ содержится в области определения функции Беллмана. □

Таким образом, "область определения" функции $\mathbb{B}$ представляет собой угол в первой четверти координатной плоскости.

Утверждение 2.2. *Для функции Беллмана выполнено следующее граничное условие*:

$$\mathbb{B}_\delta(x_1, x_1) = f(x_1).$$

Доказательство. Очевидно. Если $x_1 = x_2$, то есть $\inf\limits_{t\in I} \omega(t) = \langle \omega \rangle_I$ — среднее по отрезку совпадает с инфимумом на том же отрезке, то $\omega \equiv x_1$. И следовательно, $\mathbb{B}_\delta(x_1, x_1) = \frac{1}{|I|}\int\limits_I f(x_1)\,dt = f(x_1)$. □

2.2. **Основное неравенство и основная лемма.** Перейдём к обсуждению локальной вогнутости функции Беллмана.

Определение 2.1. *Пусть функция F задана на множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Говорят, что F локально вогнута в Ω, если для всякого прямолинейного отрезка с концами x^- и x^+, целиком лежащего в Ω, и всякой пары неотрицательных чисел α^- и α^+ таких, что $\alpha^- + \alpha^+ = 1$, выполнено неравенство*

$$F(\alpha^- x^- + \alpha^+ x^+) \geq \alpha^- F(x^-) + \alpha^+ F(x^+). \tag{2.1}$$

Однако, в отличие от аналогичных задач в классе A_p при $p > 1$ наша функция Беллмана не обладает свойством локальной выпуклости. Тем не менее аналогичное неравенство выполняется и в нашем случае. Но для этого нужно правильно определить те точки, значения в которых связаны подобным неравенством. В связи с этим рассмотрим разбиение интервала I на две части I_- и I_+, то есть $|I_\pm| = \alpha^\pm |I|$, где $\alpha^- + \alpha^+ = 1$. Эти отрезки порождают две точки в Ω:

$$x^\pm = (\langle \omega \rangle_{I_\pm},\ \inf_{t\in I_\pm} \omega(t)).$$

Ясно, что

$$\langle \omega \rangle_I = \alpha^- \langle \omega \rangle_{I_-} + \alpha^+ \langle \omega \rangle_{I_+} \qquad \text{и} \qquad \inf_{t\in I} \omega(t) = \min\bigl\{\inf_{t\in I_-} \omega(t),\ \inf_{t\in I_+} \omega(t)\bigr\}.$$

Но точка $x^0 = (\langle \omega \rangle_I, \inf\limits_{t\in I} \omega(t)) = (\alpha^- x_1^- + \alpha^+ x_1^+, \min\{x_2^-, x_2^+\})$ не является, вообще говоря, выпуклой комбинацией точек x^- и x^+. Аналогом локальной вогнутости в нашей ситуации будет требование, чтобы неравенство

$$F(x^0) \geq \alpha^- F(x^-) + \alpha^+ F(x^+)$$

выполнялось, при условии, что при любых $\alpha^\pm$ точка x^0 лежит в области.

Таким образом, в нашем случае имеем следующее определение.

Определение 2.2. *Пусть функция F задана на множестве Ω_δ. Будем говорить, что F удовлетворяет основному неравенству в Ω_δ, если для всяких точек x^- и x^+, лежащих в Ω_δ, и таких, что $\max\{x_1^+, x_1^-\} \leq \delta \min\{x_2^+, x_2^-\}$, и всякой пары неотрицательных чисел α^- и α^+ таких, что $\alpha^- + \alpha^+ = 1$ выполнено неравенство*

$$F(x^0) \geq \alpha^- F(x^-) + \alpha^+ F(x^+), \tag{2.2}$$

где $x^0 = (\alpha^- x_1^- + \alpha^+ x_1^+, \min\{x_2^-, x_2^+\})$.

Само неравенство (2.2) будем называть основным неравенством.

Так же, как это делалось при решении аналогичных задач с условием локальной вогнутости, мы не будем проверять необходимость выполнения его аналога (2.2) в нашем случае, но искать кандидата на роль функции Беллмана будем среди функций, удовлетворяющих этому условию. После того, как будет доказано, что найденный кандидат действительно является функцией Беллмана, мы убедимся в том, что функция Беллмана удовлетворяет неравенству (2.2).

Опираясь на эти рассуждения, дадим определение кандидата на роль функции Беллмана и сформулируем основную лемму.

Определение 2.3. *Кандидатом на роль функции Беллмана будем называть функцию F, заданную в области Ω_δ, которая удовлетворяет основному неравенству (2.2) и граничному условию: $F(x_1, x_1) = f(x_1)$.*

Лемма 2.1. *Пусть $f \in C^2(\mathbb{R})$ и функция F удовлетворяет основному неравенству (2.2) и граничному условию $F(x_1, x_1) = f(x_1)$ (то есть F является кандидатом на роль функции Беллмана). Тогда на Ω_δ $\mathbb{B}_\delta(x; f) \le F(x)$.*

Доказательство аналогичной леммы и вспомогательных утверждений к ней для пространства BMO подробно описаны в работе [1]. В случае класса A_1^δ основное вспомогательное утверждение принимает следующий вид.

Лемма 2.2. *Для заданного параметра $\delta > 1$, произвольного $\varepsilon > \delta$ и любого веса $\omega \in A_1^\delta(I)$ найдётся такое разбиение интервала $I = I_+ \cup I_-$, $|I_\pm| = \alpha^\pm |I|$, что $x_1^\pm \le \varepsilon x_2^0$, где $x^\pm = (\langle\omega\rangle_{I_\pm}, \inf\limits_{t\in I_\pm} \omega(t))$, $x^0 = (\langle\omega\rangle_I, \inf\limits_{t\in I} \omega(t))$. При этом параметры разбиения α^+ и α^- можно выбрать равномерно отделёнными от нуля и от единицы относительно веса ω и интервала I.*

Доказательство этой леммы подробно описано в работе [2]. Доказательство леммы 2.1 можно найти в работе [1], которое в нашем случае будет даже несколько проще. В ходе данного доказательства используется так называемая беллмановская индукция. Она заключается в следующем. Пусть фиксирована точка $x \in \Omega_{\delta\tau}$, где $0 < \tau < 1$. По лемме 2.2, найдётся такое разбиение интервала $I = I_+ \cup I_-$, что $\langle\omega\rangle_{I_\pm} \le \delta \inf\limits_{t\in I} \omega(t)$, то есть точки

$$x^+ = (\langle\omega\rangle_{I_+}, \inf_{t\in I_+} \omega(t)), \quad x^- = (\langle\omega\rangle_{I_-}, \inf_{t\in I_-} \omega(t)) \quad \text{и} \quad x^0 = (\langle\omega\rangle_I, \inf_{t\in I} \omega(t))$$

лежат в Ω_δ, а $\alpha^\pm = \frac{|I_\pm|}{|I|}$ можно выбрать равномерно отделёнными от 0 и 1. Тогда $x_1 = \alpha^+ x_1^+ + \alpha^- x_1^-$, $x_2^0 = \min(x_2^-, x_2^+)$ и, значит,

$$|I|F(x) \ge |I_-|F(x^-) + |I_+|F(x^+).$$

Повторив данное рассуждение для интервалов $I_\pm$, а затем для следующих интервалов в разбиении и так далее, спустя k шагов получим неравенство

$$|I|F(x) \ge \sum_J |J|F(x^J), \tag{2.3}$$

где $x^J = (\langle\omega\rangle_J, \inf\limits_{t\in J} \omega(t))$, а сумма берётся по всем интервалам J, получившимся описанным выше разбиением. После нескольких усилий отсюда и будет следовать искомое неравенство $\mathbb{B}_\delta(x; f) \le F(x)$. Важно отметить, что для получения равенства функции Беллмана и функции $F(x)$ необходимо и достаточно, чтобы в выражении (2.3) все неравенства обратились в равенства.

3. Прямолинейные экстремали

3.1. **Вид экстремалей.** Изучим некоторые семейства экстремалей в области Ω_δ. При $1 < p < \infty$ экстремали имеют вид непересекающихся прямых, которые либо касаются верхней границы, либо соединяют две точки на нижней границе. При этом, исходя из того, что в общем случае область Ω_δ в качестве верхней и нижней границы имеет соответственно кривые $x_1 = \delta \cdot x_2^{1-p}$ и $x_1 = x_2^{1-p}$, можно выписать уравнения экстремалей в явном виде. Таким образом, касательная к верхней границе в точке $(a, \left(\frac{a}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-p}})$ есть прямая

$$x_2 = \frac{1}{a(1-p)} \cdot \left(\frac{a}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-p}} (x_1 - ap),$$

а экстремали, соединяющей две точки $(a, a^{\frac{1}{1-p}})$ и $(b, b^{\frac{1}{1-p}})$ нижней границы $(a < b)$, соответствует уравнение $\dfrac{x_2 - a^{\frac{1}{1-p}}}{b^{\frac{1}{1-p}} - a^{\frac{1}{1-p}}} = \dfrac{x_1 - a}{b - a}$.

Перейти к случаю $p = 1$ можно сделав замену переменных $x_2 \to x_2^{\frac{1}{1-p}}$ и после устремив p к единице. Запишем уравнение касательной после произведения замены:

$$x_2 = \Big(\frac{1}{a(p-1)}\Big)^{1-p} \cdot \Big(\frac{a}{\delta}\Big)^{\frac{1-p}{1-p}}(ap - x_1)^{1-p} = \frac{a}{\delta}\Big(p - \frac{x_1}{a}\Big)^{p-1}\Big(\frac{1}{p-1}\Big)^{p-1}.$$

В случае экстремалей, образованных касательными, лежащими слева от точки касания, правая часть этого равенства стремится к константе $\frac{a}{\delta}$ при $p \to 1+$.

В случае экстремалей, образованных касательными, лежащими справа от точки касания, данное равенство можно переписать в виде

$$x_1 = ap + a(1-p)\Big(\frac{a}{\delta x_2}\Big)^{\frac{1}{p-1}},$$

где для $x_2 \ge \frac{a}{\delta}$ из области Ω_δ правая часть равенства стремится к константе a. Таким образом получаем экстремали в виде вертикальных и горизонтальных прямых.

Уравнение экстремали $\dfrac{x_2 - a^{\frac{1}{1-p}}}{b^{\frac{1}{1-p}} - a^{\frac{1}{1-p}}} = \dfrac{x_1 - a}{b - a}$ перепишем в виде

$$x_1 = a + (b-a)\Big(\Big(\frac{a}{x_2}\Big)^{\frac{1}{p-1}} - 1\Big)\Big(\Big(\frac{a}{b}\Big)^{\frac{1}{p-1}} - 1\Big)^{-1}.$$

Так как $a \le x_2 \le b$, то в пределе получаем $x_1 = b$.

Таким образом, в случае $p = 1$ экстремали имеют вид горизонтальных прямых, параллельных оси Ox_1, и вертикальных прямых, параллельных оси Ox_2. Будем обозначать семейство горизонтальных экстремалей буквой H (Horizontal), а семейство вертикальных прямых — буквой V (Vertical).

Далее символами H_{ab} и V_{ab} будем обозначать семейство горизонтальных и соответственно вертикальных прямых, для которых первые координаты точек их пересечения с верхней границей области Ω_δ лежат в интервале $[a, b]$. Через $\Omega_V(a, b)$ и $\Omega_H(a, b)$ будем обозначать те подобласти в Ω_δ, которые полностью заметаются экстремалями семейства V_{ab} или H_{ab} соответственно. А конкретные прямые из этих семейств будем обозначать символами $V(c)$ и $H(d)$, где (c, c) и (d, d) — точки верхней границы области Ω_δ, принадлежащие рассматриваемым прямым. Ясно, что параметры c и d однозначно определяют прямые из рассматриваемых семейств.

3.2. **Кандидат на роль функции Беллмана.** Поймём, как будет выглядеть кандидат на роль функции Беллмана $B(x)$ на описанных семействах экстремалей.

При $p = 1$ разложим кандидата на роль функции Беллмана $B(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x^0 = (\alpha^- x_1^- + \alpha^+ x_1^+,\ \min\{x_2^-,\ x_2^+\}) \in \Omega_\delta$, где $x^-,\ x^+ \in \Omega_\delta$:

$$B(x^\pm) \approx B(x^0) + \sum_{i=1}^{2} B_{x_i}(x^0)(x_i^\pm - x_i^0) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2} B_{x_i x_j}(x^0)(x_i^\pm - x_i^0)(x_j^\pm - x_j^0)$$

Для определённости будем считать, что $x_2^0 = x_2^+$. Положим $\Delta_1 = x_1^- - x_1^+$ и $\Delta_2 = x_2^- - x_2^0 \ge 0$. Рассмотрим линейную комбинацию значений функции $B(x)$

в точках x^0, x^- и x^+ с коэффициентами α^- и α^+:

$$\alpha^- B(x^-) + \alpha^+ B(x^+) - B(x^0) \approx$$

$$\approx \alpha^- B_{x_2}(x^0)\Delta_2 + \frac{\alpha^-\alpha^+}{2} B_{x_1x_1}(x^0)\Delta_1^2 + \alpha^+\alpha^- B_{x_1x_2}(x^0)\Delta_1\Delta_2 + \frac{\alpha-}{2} B_{x_2x_2}(x^0)\Delta_2^2$$

Согласно основному неравенству (2.2) это выражение должно быть неположительно для всех достаточно малых Δ_1 и $\Delta_2 \geq 0$. Отсюда следуют неравенства

$$B_{x_2} \leq 0 \qquad \text{и} \qquad B_{x_1x_1} \leq 0.$$

Это условие можно переписать в виде требования неположительной определённости следующей матрицы:

$$\chi(B) = \begin{pmatrix} B_{x_1x_1} & 0 \\ 0 & B_{x_2} \end{pmatrix} \leq 0.$$

Эта же матрица получается из гессиана предельным переходом из случая $1 < p < \infty$, если при этом сделать соответствующую замену переменных (см. [2]).

При этом из условий вырожденности вдоль экстремалей получаем, что вдоль направлений $\theta_1 = (\theta, 0), \theta > 0$,

$$\left(\begin{pmatrix} B_{x_1x_1} & 0 \\ 0 & B_{x_2} \end{pmatrix} \theta_1,\ \theta_1 \right) = 0,$$

то есть на горизонтальных экстремалях $B_{x_1x_1} = 0$.

Аналогично, вдоль направления $\theta_2 = (0,\ \theta), \theta > 0$, выполняется равенство $B_{x_2} = 0$. При этом, в случае горизонтальных экстремалей должно выполняться условие $B_{x_2} \leq 0$, а в случае вертикальных экстремалей — условие $B_{x_1x_1} \leq 0$. Тогда в областях вида $\Omega_H(a,b)$ функция B линейна по переменной x_1 и убывает по x_2. А в областях вида $\Omega_V(a,b)$ функция B постоянна по x_2 и является вогнутой по x_1 функцией.

По сути можно было не определять вид экстремалей в предыдущем разделе, так как из неположительной определённости матрицы $\chi(B)$ сразу следует, что все возможные экстремали будут иметь вид горизонтальных и вертикальных прямых. Но чтобы не загружать текущий раздел введением многочисленных обозначений, было решено описать экстремали до начала работы над беллмановским кандидатом.

Теперь у нас имеются необходимые условия для кандидата на роль функции Беллмана. Докажем, что при выполнении граничного условия, полученные дифференциальные неравенства так же являются достаточными для выполнения основного неравенств (2.2).

Утверждение 3.1. *Пусть в области Ω_δ функция $B(x)$ удовлетворяет граничному условию $B(x_1,x_1) = f(x_1)$ и пусть во всех точках области выполняется одно из следующих условий*:

$$B_{x_1x_1}(x) \leq 0 \qquad \textit{и} \qquad B_{x_2} = 0, \tag{3.1}$$

$$B_{x_1x_1}(x) = 0 \qquad \textit{и} \qquad B_{x_2} \leq 0. \tag{3.2}$$

Тогда для всех точек x^- и x^+, лежащих в области Ω_δ, таких, что $\max\{x_1^+,\, x_1^-\} \leq \delta \min\{x_2^+,\, x_2^-\}$, и всякой пары неотрицательных чисел α^- и α^+ таких, что $\alpha^- + \alpha^+ = 1$, и $x^0 = (\alpha^- x_1^- + \alpha^+ x_1^+, \min\{x_2^-, x_2^+\})$ выполнено основное неравенство (2.2).

Доказательство. Для начала заметим, что условие $\max\{x_1^+,\, x_1^-\} \leq \delta \min\{x_2^+,\, x_2^-\}$ гарантирует, что точки (x_1^-, x_2^+) и (x_1^+, x_2^-) лежат в области Ω_δ.

Возьмём произвольные точки x^-, x^+ и числа α^-, α^+, как в условии утверждения. Так как $x_2^0 = \min\{x_2^-, x_2^+\}$, то в силу симметрии можем считать, что $x_2^0 = x_2^+$. Тогда $B(x_1^-, x_2^0) = B(x_1^-, x_2^+)$. А так как по условию функция $B(x)$ нестрого убывает по переменной x_2 и $x_2^+ = x_2^0 = \min\{x_2^-, x_2^+\} \le x_2^-$, то $B(x_1^-, x_2^-) \le B(x_1^-, x_2^+)$.

Поскольку $B_{x_1x_1}(x) \le 0$, то $B(x)$ вогнута по x_1 и, значит, для $B(x)$, как функции от переменной x_1, выполнено неравенство (2.1):

$$B(x_1^0, x_2^+) \ge \alpha^+ B(x_1^+, x_2^+) + \alpha^- B(x_1^-, x_2^+),$$

где $x_1^0 = \alpha^- x_1^- + \alpha^+ x_1^+$.

Тогда получаем, что

$$\begin{aligned} B(x^0) &= B(\alpha^- x_1^- + \alpha^+ x_1^+, x_2^+) \ge \alpha^+ B(x_1^+, x_2^+) + \alpha^- B(x_1^-, x_2^+) \ge \\ &\ge \alpha^+ B(x_1^+, x_2^+) + \alpha^- B(x_1^-, x_2^-). \end{aligned}$$

□

Теперь ясно, что для того чтобы функция являлась беллмановским кандидатом достаточно, чтобы она удовлетворяла по крайней мере одному из условий (3.2) или (3.1) на области Ω_δ.

Вернёмся к поиску кандидата на роль функции Беллмана. Исходя из граничного условия $B(x_1, x_1) = f(x_1)$ и условия (3.1) получаем, что для всякой точки (x_1, x_2), лежащей в области $\Omega_V(a,b)$, функция $B(x_1, x_2) = f(x_1)$. Таким образом, если на некотором промежутке $[a,b]$ выполнено неравенство $f''(t) \le 0$, то в соответствующей области $\Omega_V(a,b)$ функция $B^V(x_1, x_2)$, которая задаётся формулой

$$B^V(x_1, x_2) = f(x_1), \tag{3.3}$$

будет беллмановским кандидатом.

Утверждение 3.2. *Если $f'' \le 0$ на некотором отрезке $[a,b]$, то функция*

$$B^V(x_1, x_2) = f(x_1)$$

при $x_1 \in [a,b]$ будет кандидатом на роль функции Беллмана в соответствующей подобласти, которую будут заметать вертикальные экстремали.

Доказательство. Выполнение граничного условия очевидно. Так же ясно, что $B^V_{x_1x_1}(x_1, x_2) = f''(x_1) \le 0$ — по условию и $B^V_{x_2}(x_1, x_2) = 0$. То есть выполнено условие (3.1). Тогда из утверждения 3.1 следует, что B^V — кандидат на роль функции Беллмана.

Из равенства $B^V_{x_2}(x_1, x_2) = 0$ следует, что соответствующая матрица $\chi(B^V)$ обращается в ноль на векторах, параллельных оси Ox_2. А значит, подобласть в области Ω_δ, ограниченная прямыми $x_1 \equiv a$ и $x_1 \equiv b$, заметается вертикальными экстремалями. □

Для горизонтальных экстремалей из семейства H_{ab} кандидата на роль функции Беллмана будем обозначать через $B^H(x_1, x_2)$. Известно, что он линеен по переменной x_1. В таком случае, пусть

$$B^H(x_1, x_2) = r(x_2)x_1 + q(x_2).$$

Воспользуемся тем, что вдоль экстремалей семейства H_{ab} переменная x_2 не изменяется, тогда из граничного условия находим, что

$$B^H(x_1, x_2) = r(x_2)(x_1 - x_2) + f(x_2). \tag{3.4}$$

Так как функция $B(x)$ убывает по переменной x_2, то должно выполняться неравенство

$$B^H_{x_2}(x_1, x_2) = r'(x_2)(x_1 - x_2) - r(x_2) + f'(x_2) \le 0.$$

Линейная функция будет неположительна на отрезке, если она принимает неположительные значение на концах этого отрезка, то есть при $x_2 \le x_1 \le \delta x_2$ должны быть выполнены следующие неравенства:

$$f'(x_2) - r(x_2) \le 0, \tag{3.5}$$

$$r'(x_2)(\delta - 1)x_2 - r(x_2) + f'(x_2) \le 0. \tag{3.6}$$

Отсюда следует, что $f'(t) \le r(t)$ для всякого $t \in [a, b]$. Так как на всей области Ω_δ выполнено соотношение $0 \le x_1 - x_2 \le (\delta - 1)x_2$, то из соображений минимальности функции $B^H(x)$ хочется подобрать такую функцию $r(x_2)$, которая представляет собой убывающую функцию.

Предположим, что $r'(x_2) \le 0$. Тогда функция $B^H(x)$ будет принимать максимальное значение на левом конце отрезка, то есть можно рассмотреть

$$r(x_2) = f'(x_2) + \varphi(x_2), \tag{3.7}$$

где $\varphi(x_2)$ - некоторая неотрицательная функция, при этом из соображений минимальности она должна убывать. Из отрицательности производной $r'(x_2)$ имеем условие

$$r'(x_2) = f''(x_2) + \varphi'(x_2) \le 0.$$

То есть $f''(x_2) \le -\varphi'(x_2)$. Правая часть этого равенства должна быть неотрицательна. Этого можно достичь за счёт условия $f''(x_2) \ge 0$. Тогда условие (3.6) перепишется в виде

$$\begin{aligned} B_{x_2}(x) &= f''(x_2)(\delta - 1)x_2 + \varphi'(x_2)(\delta - 1)x_2 - f'(x_2) - \varphi(x_2) + f'(x_2) = \\ &= f''(x_2)(\delta - 1)x_2 + \varphi'(x_2)(\delta - 1)x_2 - \varphi(x_2) \le 0. \end{aligned}$$

Что можно записать следующим образом

$$(f''(x_2) + \varphi'(x_2))(\delta - 1)x_2 \le \varphi(x_2).$$

Так как нас интересует нахождение наименьшей функции r, то и функцию φ нужно искать наименьшую из возможных. Поэтому вместо дифференциального неравенства будем решать соответствующее дифференциальное уравнение:

$$(f''(x_2) + \varphi'(x_2))(\delta - 1)x_2 = \varphi(x_2).$$

Общим решением этого уравнения является функция

$$\varphi(x_2) = x_2^{\frac{1}{\delta-1}} \Big(C + \int\limits_{x_2}^{b} \frac{f''(t)}{t^{\frac{1}{\delta-1}}} dt \Big), \tag{3.8}$$

И значит,

$$r(x_2) = f'(x_2) + x_2^{\frac{1}{\delta-1}} \Big(C + \int\limits_{x_2}^{b} \frac{f''(t)}{t^{\frac{1}{\delta-1}}} dt \Big), \tag{3.9}$$

где C - константа интегрирования, при этом понятно, что

$$C = \frac{r(b) - f'(b)}{b^{\frac{1}{\delta-1}}}.$$

Таким образом, функция B определена с точностью до константы $r(b)$, на которую наложено условие $r(b) \ge f'(b)$.

Полученные результаты можно записать в виде следующего утверждения.

Утверждение 3.3. *Если $f'' \ge 0$ на некотором интервале $[a, b]$, то функция*

$$B^H(x_1, x_2) = r(x_2)(x_1 - x_2) + f(x_2),$$

где угловой коэффициент вычисляется по формуле (3.9) *при* $x_2 \in [a,b]$ *будет кандидатом на роль функции Беллмана в соответствующей подобласти, которую будут заметать горизонтальные экстремали.*

Доказательство. Ясно, что при $x_2 = x_1$ имеем $B^H(x_1,x_1) = f(x_1)$, то есть граничное условие выполнено.

Линейность по x_1 следует из формулы, поэтому $B^H_{x_1x_1}(x_1,x_2) = 0$. Проверим, что для произвольного x_2 производная

$$B^H_{x_2}(x_1,x_2) = r'(x_2)(x_1-x_2) - r(x_2) + f'(x_2)$$

не превосходит нуля при $x_1 = x_2$ и при $x_1 = \delta x_2$, тогда она не больше нуля и при всех промежуточных значениях x_1.

$$B^H_{x_2}(x_2,x_2) = -r(x_2) + f'(x_2) = -x_2^{\frac{1}{\delta-1}}\Big(\frac{r(b)-f'(b)}{b^{\frac{1}{\delta-1}}} + \int\limits_{x_2}^{b} \frac{f''(t)}{t^{\frac{1}{\delta-1}}}dt\Big).$$

Выражение в скобках неотрицательно, так как по условию $f'' \geq 0$ и на константу наложено условие $r(b) \geq f'(b)$. Так как функция $B^H_{x_2}$ найдена, как решение соответствующего дифференциального, то $B^H_{x_2}(\delta x_2, x_2) = 0$.

Таким образом, выполнено условие (3.2). Тогда из утверждения 3.1 следует, что B^H — кандидат на роль функции Беллмана.

Из равенства $B^H_{x_1x_1}(x_1,x_2) = 0$ следует, что соответствующая матрица $\chi(B^H)$ обращается в ноль на векторах, параллельных оси Ox_1. А значит, подобласть в области Ω_δ, ограниченная прямыми $x_2 \equiv a$ и $x_2 \equiv b$, заметается горизонтальными экстремалями. □

3.3. **Знак функции f''.** Для того, чтобы найденные в предыдущем разделе функции B^H и B^V совпали с функцией Беллмана необходимо предъявить так называемый подпирающий пример — такой вес $\omega(t) \in A_1^\delta$, который реализовывал бы супремум в определении функции Беллмана.

Запишем окончательный результат для случая, когда вся область Ω_δ заметается одним видом экстремалей.

Теорема 3.1. *Если для любого* $t \in (0,\infty)$ *выполнено неравенство* $f''(t) \geq 0$, *то функция Беллмана вычисляется по формуле*

$$\mathbb{B}(x_1,x_2) = f(x_2) + r(x_2)(x_1-x_2),$$

где $r(t) = f'(t) + t^{\frac{1}{\delta-1}} \int\limits_t^\infty f''(s)s^{-\frac{1}{\delta-1}}ds$, *если интеграл* $\int\limits_t^\infty f''(s)s^{-\frac{1}{\delta-1}}ds$ *сходится и* $\mathbb{B}(x_1,x_2) = +\infty$, *если соответствующий интеграл расходится.*

Доказательство. Из утверждения 3.3 имеем, что при $f''(t) \geq 0$ в области Ω_δ кандидат на роль функции Беллмана B^H вычисляется по формуле (3.4), в которой угловой коэффициент $r(t) = f'(t) + t^{\frac{1}{\delta-1}} \int\limits_t^\infty f''(s)s^{-\frac{1}{\delta-1}}ds$, а область Ω_δ заметается горизонтальными экстремалями. Тогда из основной леммы 2.1 имеем неравенство $\mathbb{B}(x) \leq B^H(x)$.

Осталось привести подпирающий пример. Для этого подойдёт вес из утверждения 2.1

$$\omega_{c,a,\nu}(t) = \begin{cases} ca^\nu t^{-\nu} & \text{при } 0 \leq t \leq a, \\ c & \text{при } a \leq t \leq 1, \end{cases}$$

где $\nu = \frac{\delta-1}{\delta}$, $a = \frac{x_1-x_2}{(\delta-1)x_2}$, $c = x_2$.

Убедимся в том, что такой вес подходит в качестве подпирающего примера для рассматриваемой функции f.

$$\langle f(\omega_{c,a,\nu})\rangle_{[0,1]} = \int\limits_0^a f(ca^\nu t^{-\nu})dt + f(c)(1-a) =$$

$$= f(c)(1-a) + \int\limits_c^{+\infty} \frac{ac^{\frac{1}{\nu}} s^{-\frac{1+\nu}{\nu}} f(s)}{\nu} ds =$$

$$= f(c)(1-a) + af(c) + \int\limits_c^{+\infty} ac^{\frac{1}{\nu}} s^{-\frac{1}{\nu}} f'(s) ds =$$

$$= f(c) + \frac{ac\nu f'(c)}{1-\nu} + \int\limits_c^{+\infty} \frac{a\nu f''(s)}{1-\nu} \cdot s^{\frac{\nu-1}{\nu}} c^{\frac{1}{\nu}} ds =$$

$$= f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2) + x_2^{\frac{1}{\delta-1}}(x_1 - x_2) \int\limits_{x_2}^{+\infty} f''(s) s^{-\frac{1}{\delta-1}} ds = B^H(x).$$

Так как функция Беллмана является супремумом всех средних вида $\langle f(\omega)\rangle_{[0,1]}$, где ω — вес Макенхаупта класса $A_1^\delta(I)$, то верно неравенство $B^H(x) \geq \mathbb{B}(x)$. Следовательно, неравенство обращается в равенство и данный вес является подпирающим примером на горизонтальных экстремалях.

В случае, когда интеграл в определении $r(t)$ расходится, этот же подпирающий пример показывает бесконечность функции Беллмана во всех внутренних точках области. □

Теорема 3.2. *Если для любого $t \in (0, \infty)$ выполнено неравенство $f''(t) \leq 0$, то функция Беллмана определяется соотношением*

$$\mathbb{B}(x_1, x_2) = f(x_1)$$

на всей области Ω_δ.

Доказательство. Из утверждения 3.2 знаем, что при $f''(t) \leq 0$ кандидат на роль функции Беллмана вычисляется по формуле (3.3), а область Ω_δ заметается вертикальными экстремалями. И, следовательно, из основной леммы 2.1 имеем неравенство $\mathbb{B}(x) \leq f(x_1)$. Однако в данном случае супремум в определении функции Беллмана на конкретном весе не достигается. Построим семейство весов, которое в пределе даст подпирающий пример. Пусть дана точка (x_1, x_2). Для $n > 0$ положим

$$\omega_n(t) = \begin{cases} \langle \omega_{c,a,\nu}\rangle_{[0,\frac{n}{n+1}]} & \text{при} \quad 0 \leq t < \frac{n}{n+1} \\ \omega_{c,a,\nu}(t) & \text{при} \quad \frac{n}{n+1} \leq t \leq 1 \end{cases},$$

где $\omega_{c,a,\nu}(t)$ — вес из доказательства теоремы 3.1.

Ясно, что инфимум и среднее по отрезку веса $\omega_n(t)$ совпадают с инфимумом и средним веса $\omega_{c,a,\nu}(t)$. Значит, такие веса порождают нужную нам точку. Доказательство того, что эти веса лежат в классе Макенхаупта A_1^δ можно найти в статье [2].

Проверим, будут ли они приближать супремум при $n \to \infty$.

$$\langle f(\omega_n)\rangle_{[0,1]} = f(\langle \omega_{c,a,\nu}\rangle_{[0,\frac{n}{n+1}]})\frac{n}{n+1} + \int\limits_{\frac{n}{n+1}}^1 f(\omega_{c,a,\nu}(t))dt.$$

При n стремящемся к бесконечности первое слагаемое в правой части стремится к $f(\langle\omega_{c,a,\nu}\rangle_{[0,1]}) = f(x_1)$, а интеграл стремится к нулю. Таким образом, правая часть равенства стремится к $f(x_1)$.

Тогда, выполнено неравенство $f(x_1) \le \mathbb{B}(x)$. А значит, $\mathbb{B}(x) = f(x_1)$. $\square$

4. Лунка

4.1. **Основные рассуждения.** Рассмотрим случай, когда семейства горизонтальных и вертикальных экстремалей H и V пересекаются. Ясно, что в точке пересечения экстремали из H переходят в соответствующие экстремали из V. То есть для всякой прямой $H(a)$ из H существует единственная прямая $V(b)$ из V такая, что $H(a)$ и $V(b)$ пересекаются и в точке пересечения $H(a)$ переходит в $V(b)$.

Пусть $0 < a_0 < a_1 \le b_1 < b_0 \le \delta a_0$. Рассмотрим подобласть $\Omega(a_0, a_1, b_1, b_0)$ в Ω_δ, заключённую между переходящими друг в друга прямыми $H(a_0)$ и $V(b_0)$ и аналогичными прямыми $H(a_1)$ и $V(b_1)$. Предположим, что эта область полностью заметается отрезками экстремалей из семейств $H_{a_0a_1}$ и $V_{b_1b_0}$, которые имеют вид "ломаных"— горизонтальных прямых, переходящих в вертикальные прямые в единственной точке их пересечения. Для $a_0 \le a \le a_1$ и $b_1 \le b \le b_0$ будем обозначать "ломаную", состоящую из пересекающихся отрезков горизонтальной экстремали $H(a)$ и вертикальной экстремали $V(b)$, символом $HV(a,b)$. Таким образом, для всякой точки $x \in \Omega(a_0, a_1, b_1, b_0)$ найдутся такие числа a и b, что $x \in HV(a,b)$. Далее будет показано, что концы a и b такой "ломаной экстремали" связаны тождеством $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(b)$.

Рассмотрим подобласть, получающуюся в случае когда $a_1 = b_1$.

Определение 4.1. *Пусть $0 < a_0 \le b_0 \le \delta a_0$. $\Omega(a_0, b_0)$ — подобласть, заключённая между экстремалями $H(a_0)$, $V(b_0)$ и верхней границей области Ω_δ.*

Если имеется семейство, состоящее из непересекающихся "ломаных" $HV(a_0, b_0)$, полностью заметающее подобласть $\Omega(a_0, b_0)$, а каждая "ломаная" удовлетворяет уравнению $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(b)$, то тогда будем называть рассматриваемую подобласть $\Omega(a_0, b_0)$ лункой и обозначать её символом $\Omega_{cup}(a_0, b_0)$. Точки a_0 и b_0 будем называть концами лунки.

Если $b_0 = \delta a_0$, то точка пересечения прямых $H(a_0)$ и $V(b_0)$ лежит на нижней границе Ω_δ. В этом случае лунка $\Omega_{cup}(a_0, b_0)$ называется полной.

Корнем лунки будем называть единственную точку c, которая лежит в пересечении всех отрезков $[a, b] \subset [a_0, b_0]$, где a и b есть первые координаты пересекающихся экстремалей $H(a)$ и $V(b)$.

Найдём вид беллмановского кандидата в лунке, а так же условие на прямые, при котором такая конструкция вообще возможна. Искомую функцию на роль функции Беллмана в этой области обозначим $B^{cup}(x_1, x_2)$.

Если вдоль этих "ломаных" функция $B^{cup}(x_1, x_2)$ удовлетворяет условию вырожденности матрицы $\chi(B^{cup})$, то она однозначно определяется в рассматриваемой области. Действительно, в этом случае на вертикальной части экстремали $V(b)$ беллмановский кандидат является константой, при этом известно её значение на верхней границе: $B^{cup}(b, b) = f(b)$, а значит и на всём отрезке прямой. На горизонтальной же части экстремали функция B^{cup} линейна, причём известны её значения на верхней границе и в точке пересечения отрезка горизонтальной экстремали с соответствующим отрезком вертикальной экстремали, а именно на $H(a)$

$$B^{cup}(a, a) = f(a) \quad \text{и} \quad B^{cup}(a, b) = f(b).$$

То есть на “ломаной” $HV(a,b)$

$$B^{cup}(x_1,x_2)=\begin{cases} f(b), & \text{если } (x_1,x_2)\in V(b)\\ \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x_1-a)+f(a), & \text{если } (x_1,x_2)\in H(a). \end{cases}$$

Перейдём к выяснению условия на прямые, при котором возникает рассматриваемая конструкция. Воспользуемся предельным переходом от известной картины лунки для задачи в классе A_p при $1<p<\infty$. Аналогом является семейство непересекающихся хорд, соединяющих две точки нижней границы $x_1=x_2^{1-p}$. Рассмотрим одну из таких хорд. Пусть она соединяет точки нижней границы, первые координаты которых есть a и b. Из геометрических соображений оказывается, что для линейности беллмановского кандидата вдоль такой хорды необходимо, чтобы векторы, касательные к графику функции $B^{cup}(x_1,x_2)$ в точках a и b, и вектор, соединяющий эти точки касания, лежали в одной плоскости, то есть определитель матрицы этих векторов должен быть нулевым. Параметризуем график беллмановского кандидата на нижней границе следующим образом:

$$\begin{aligned} &x_1(t)=t\\ &x_2(t)=t^{\frac{1}{1-p}}\\ &B^{cup}(x_1,x_2)\big|_{x_1=x_2^{1-p}}=f(x_1)=f(t). \end{aligned}$$

Тогда соответствующие касательные векторы суть $(1,\ \frac{a^{\frac{p}{1-p}}}{1-p},\ f'(a))$ и $(1,\ \frac{b^{\frac{p}{1-p}}}{1-p},\ f'(b))$, а вектор, соединяющий точки касания, есть $(b-a,\ b^{\frac{1}{1-p}}-a^{\frac{1}{1-p}},\ f(b)-f(a))$. Отсюда получаем уравнение на точки a и b:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & b-a\\ \dfrac{a^{\frac{p}{1-p}}}{1-p} & \dfrac{b^{\frac{p}{1-p}}}{1-p} & b^{\frac{1}{1-p}}-a^{\frac{1}{1-p}}\\ f'(a) & f'(b) & f(b)-f(a) \end{vmatrix}=0.$$

Чтобы перейти к интересующему нас случаю $p=1$, разделим вторую строку на $\frac{a^{\frac{p}{1-p}}}{1-p}$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & b-a\\ 1 & \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{p}{p-1}} & a^{-p}(1-p)\left(\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{p-1}}-1\right)\\ f'(a) & f'(b) & f(b)-f(a) \end{vmatrix}=0.$$

и перейдём к пределу при $p\to 1+$, получим следующее уравнение:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(b). \tag{4.1}$$

Таким образом, лунка образуется там, где точки из некоторого интервала удовлетворяют уравнению (4.1). Из следующих, не претендующих на строгость, геометрических соображений вытекает, что данное уравнение однозначно разрешимо относительно b и найденное решение непрерывно по a.

Построим график функции $f'(t) \in C^1$, производная которой удовлетворяет следующим условиям:

$$
\begin{aligned}
&f''(c) = 0\\
&f''(t) \geq 0 \text{ при } t \leq c\\
&f''(t) \leq 0 \text{ при } t \geq c.
\end{aligned}
$$

Перепишем уравнение лунки (4.1) в виде $f'(b)(b-a) = f(b) - f(a)$. Тогда левая часть равенства есть площадь прямоугольника с длинами сторон $b-a$ и $f'(b)$, а правая часть равенства представляет собой площадь криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $t = a$, $t = b$, $y = 0$ и графиком функции $y = f'(t)$.

Будем обозначать символом $S_l(a,b)$ площадь фигуры, образованной прямой $t = a$, графиком функции $y = f'(t)$ и частью прямой $y = f'(b)$, которая лежит слева от точки пересечения этой прямой с графиком функции $y = f'(t)$. Символом $S_r(b)$ обозначим площадь фигуры, образованной графиком $y = f'(t)$ и отрезком прямой $y = f'(b)$, заключённым между точками пересечения этой прямой с графиком $y = f'(t)$.

Ясно, что площади рассматриваемых прямоугольника и криволинейной трапеции равны между собой, если площади $S_l(a,b)$ и $S_r(b)$ совпадают. То есть уравнение (4.1) имеет решение относительно b и при том единственное, если $S_l(a,b) = S_r(b)$. Заметим так же, что если равенство $S_l(a,b) = S_r(b)$ выполнено для некоторых a и b, то и для всех $\widetilde{b} \in [c,b]$ найдётся такое $\widetilde{a} \in [a,c]$, что пара $(\widetilde{a},\widetilde{b})$ есть решение уравнения (4.1). И наоборот, для всякого $\widetilde{a} \in [a,c]$ найдётся подходящее $\widetilde{b} \in [c,b]$. Это ясно из геометрических соображений. Пусть нам дано некоторое число $b \geq c$. Если имеет место неравенство $S_r(b) < S_l(0,b)$, то, сдвигая точку a направо, площадь $S_l(a,b)$ будет принимать значения от $S_l(0,b)$ до нуля и, значит, в какой-то момент совпадёт с площадью $S_r(b)$. Таким образом, найдётся единственное нужное значение a. Если выполнено обратное неравенство $S_r(b) \geq S_l(0,b)$, то для данной точки b уравнение не разрешимо. Но, при движении b в сторону точки максимума c, площадь $S_r(b)$ будет монотонно убывать до нуля, а площадь $S_l(0,b)$ будет монотонно возрастать. Значит, в какой-то точке $b = b_0$ площадь $S_r(b_0)$ совпадёт с площадью $S_l(0,b_0)$. Это будет означать, что для всякого $b \in [c,b_0)$ найдётся свое единственное a.

Обозначим через γ кривую, соединяющую точки пересечения соответствующих прямых $H(a)$ и $V(b)$, то есть

$$
\gamma = \{(b,a)\colon \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(b),\ f' < c \text{ при } a <,\ b > c\}.
$$

Теперь с помощью равенства (4.1) можно также упростить выражение для функции B^{cup} на горизонтальных отрезках экстремалей $H(a)$, $a \in [a_0,a_1]$:

$$
B^{cup}(x_1,a) = f'(b)(x_1 - a) + f(a).
$$

Учитывая, что на горизонтальной экстремали $H(a)$, $a \in [a_0,a_1]$ $x_2 \equiv a$, получаем, что беллмановский кандидат вычисляется по формуле

$$
B^{cup}(x_1,x_2) = \begin{cases} f(x_1), & \text{если } (x_1,x_2) \in V(x_1)\\ f'(b)(x_1 - x_2) + f(x_2), & \text{если } (x_1,x_2) \in H(x_2), \end{cases}
$$

где b — решение уравнения $\frac{f(b)-f(x_2)}{b-x_2} = f'(b)$.

Теперь поймём, когда построенная функция B^{cup} будет удовлетворять условиям $B^{cup}_{x_2} \leq 0$ и $B^{cup}_{x_1x_1} \leq 0$.

На семействе вертикальных прямых $B^{cup}(x_1,x_2)=f(x_1)$ — константа по x_2. Осталось проверить, что выполнено неравенство $B^{cup}_{x_1x_1}\le 0$, то есть

$$0\ge B^{cup}_{x_1x_1}(x_1,x_2)=f''(x_1).$$

Получается, что для вогнутости функции B^{cup} на вертикальных экстремалях в рассматриваемой конструкции необходима и достаточна вогнутость функции f. То есть $f''(t)\le 0$ при $t\in[c,b_0]$.

На семействе горизонтальных экстремалей функция $B^{cup}(x_1,x_2)$ — линейна по переменной x_1. Осталось убедиться, что $B^{cup}_{x_2}\le 0$.

$$0\ge B^{cup}_{x_2}(x_1,x_2)=\big(f'(b)(x_1-x_2)+f(x_2)\big)'_{x_2}=f''(b)b'(x_2)(x_1-x_2)-f'(b)+f'(x_2),$$

где $b\in[c,b_0]$ и $x_2\in[a_0,c]$. Найдём выражение для $f''(b)b'$, продифференцировав формулу (4.1) по x_2:

$$\begin{gathered}f'(b)(b-x_2)=f(b)-f(x_2)\\ f''(b)(b-x_2)b'+f'(b)(b'-1)=f'(b)b'-f'(x_2)\\ f''(b)(b-x_2)b'=f'(b)-f'(x_2)\end{gathered}$$

То есть

$$B^{cup}_{x_2}(x_1,x_2)=f''(b)b'(x_1-x_2)-f''(b)(b-x_2)b'=f''(b)(x_1-b)b'.$$

Поскольку $b\in[c,b_0]$, то $f''(b)\le 0$ из условия, выведенного выше на вертикальных отрезках экстремалей. Второй множитель будет меньше нуля, так как b — решение уравнения (4.1) для x_2, и значит, $x_1\in[x_2,b]$. Из расположения "ломаных" в области $\Omega_{cup}(a_0,b_0)$ следует, что при увеличении x_2 значение соответствующего параметра b уменьшается. Это означает, что $b'(x_2)\le 0$. Таким образом,

$$B^{cup}_{x_2}(x_1,x_2)=f''(b)(x_1-b)b'\le 0,$$

что и требовалось.

Можно так же заметить, что в равенстве (4.1) левая часть больше нуля, следовательно $0\le f'(b)-f'(x_2)$. В точке c это неравенство обращается в равенство. Значит, для того, чтобы эта разность была больше нуля нужно, чтобы она убывала по x_2, то есть

$$\big(f'(b)-f'(x_2)\big)'=f''(b)b'-f''(x_2)\le 0,$$

что равносильно неравенству $f''(b)b'\le f''(x_2)$. Уже выяснено, что $f''(b)b'\ge 0$, поэтому получаем условие $f''(x_2)\ge 0$ при $x_2\in[a_0,c]$.

Заметим так же, что $f''(c)\ge 0$ и $f''(c)\le 0$, следовательно, $f''(c)=0$. Таким образом получается, что корнем лунки является точка перегиба функции f.

Опираясь на изложенные выше рассуждения, можно сформулировать следующее утверждение.

Утверждение 4.1. *Пусть $0\le a_0<b_0\le\delta a_0$ такие, что a_0 и b_0 удовлетворяет уравнению лунки $\frac{f(b_0)-f(a_0)}{b_0-a_0}=f'(b_0)$, и существует единственная точка $c\in[a_0,b_0]$, для которой верно, что $f''(t)\ge 0$ при $t\in[a_0,c]$ и $f''(t)\le 0$ при $t\in[c,b_0]$.*

Тогда в область, ограниченная "ломаной" $HV(a_0,b_0)$ и верхней границей области Ω_δ, является лункой $\Omega_{cup}(a_0,b_0)$, то есть для всякой точки (x_1,x_2) этой области найдётся такая пара точек $a=a(x_1,x_2)$ и $b=b(x_1,x_2)$, что точка (x_1,x_2) лежит на "ломаной" $HV(a,b)$.

Тогда в области $\Omega_{cup}(a_0,b_0)$ функция $B^{cup}(x)$, которая вычисляется по формуле

$$B^{cup}(x_1,x_2)=\begin{cases}f(x_1), & \text{если } (x_1,x_2)\in V(x_1)\\ f'(b)(x_1-x_2)+f(x_2), & \text{если } (x_1,x_2)\in H(x_2).\end{cases},$$

где b — решение уравнения $\frac{f(b)-f(x_2)}{b-x_2} = f'(b)$*, является кандидатом на роль функции Беллмана.*

Доказательство. То, что построенная таким образом подобласть будет лункой ясно, из описанных выше геометрических соображений, ведь в этом случае для всякого $b \in [c, b_0]$ найдётся единственное $a \in [a_0, c]$, которое удовлетворяет уравнению лунки (4.1). Проверим выполнение условий (3.2) и (3.1). Ясно, что для точек, лежащих на над кривой $\gamma(a_0, b_0)$, то есть для точек на вертикальных отрезках экстремалей выполнено условие (3.1). Для точек, лежащих под кривой $\gamma(a_0, b_0)$, то есть для точек на горизонтальных отрезках экстремалей линейность по x_1 очевидна, и из формулы (4.1) (полученной дифференцированием формулы (4.1))

$$B^{cup}_{x_2}(x_1, x_2) = f''(b)b'(x_1 - x_2) - f''(b)b'(b - x_2) = f''(b)b'(x_1 - b) \leq 0$$

в силу отрицательности всех трёх множителей. То есть, на горизонтальной части экстремалей выполнено условие (3.2). Тогда, из утверждения 3.1 следует, что $B^{cup}(x)$ удовлетворяет основному неравенству (2.2). Выполнение граничных условий — очевидно. Значит, $B^{cup}(x)$ является кандидатом на роль функции Беллмана в данной подобласти. □

4.2. **Переход от горизонтальных экстремалей к вертикальным.** Пусть $h \leq a_0$ и $b_0 \leq v$. Рассмотрим теперь полную лунку $\Omega_{cup}(a_0, b_0)$ с примыкающими областями $\Omega_H(h, a_0)$ и $\Omega_V(b_0, v)$. Поймём, как происходит переход от примыкающей области $\Omega_H(h, a_0)$ к лунке $\Omega_{cup}(a_0, b_0)$ и от этой же лунки к примыкающей области $\Omega_V(b_0, v)$, которые полностью заметаются экстремалями из семейств H_{ha_0} и V_{b_0v} соответственно.

Найдём в получившейся области

$$\Omega_{HV}(h, a_0, b_0, v) = \Omega_H(h, a_0) \cup \Omega_{cup}(a_0, b_0) \cup \Omega_V(b_0, v)$$

кандидата на роль функции Беллмана, который будет представлять собой непрерывную функцию. Будем обозначать его символом $B^{HV}(x)$.

Ясно, что в областях $\Omega_{cup}(a_0, b_0)$, $\Omega_H(v, a_0)$ и $\Omega_V(b_0, h)$ функция $B^{HV}(x)$ должна совпасть с соответствующими беллмановскими кандидатами $B^{cup}(x)$, $B^H(x)$ и $B^V(x)$. Очевидно, что при переходе от лунки к области, заметаемой вертикальными экстремалями, построенная таким образом функция $B^{HV}(x)$ будет непрерывна. Действительно, на экстремали $V(b_0)$

$$B^{cup}(b_0, x_2) = f(b_0) = B^V(b_0, x_2).$$

Теперь рассмотрим переход от области горизонтальных экстремалей к лунке. Кандидат на роль функции Беллмана $B^H(x) = r(x_2)(x_1 - x_2) + f(x_2)$ в области $\Omega_H(h, a_0)$ вообще говоря задан неоднозначно, однако в данном случае значение коэффициента $r(x_2)$ задаётся единственным образом исходя из требования непрерывности беллмановского кандидата $B^{HV}(x)$. Действительно, на прямой $H(a_0)$ функция $B^{cup}(x_1, a_0) = f'(b_0)(x_1 - a_0) + f(a_0)$ и $B^H(x_1, a_0) = r(a_0)(x_1 - a_0) + f(a_0)$. Следовательно, $r(a_0) = f'(b_0) = f'(\delta a_0)$, так как рассматривается полная лунка. Это равенство есть необходимое и достаточное условие непрерывной склейки двух кандидатов на границе рассматриваемых областей. Символом $r_{a_0}(t)$ обозначим коэффициент, удовлетворяющий только что выведенному условию непрерывной склейки. Тогда из определения коэффициента r линейной функции B^H, описанном в теореме 3.1, имеем соотношение

$$r_{a_0}(t) = f'(t) + t^{\frac{1}{\delta-1}}\Big(\frac{f'(\delta a_0) - f'(a_0)}{a_0^{\frac{1}{\delta-1}}} + \int\limits_t^{a_0} f''(s)s^{-\frac{1}{\delta-1}}ds\Big).$$

Заметим, что $f'(\delta a_0) - f'(a_0) \geq 0$, так как из формулы лунки (4.1) $f'(\delta a_0) - f'(a_0) = f''(\delta a_0)(\delta - 1)a_0 b'(a_0) \geq 0$ в силу отрицательности множителей $b'(a_0)$ и $f''(t)$, при $t \in [c, \delta a_0]$.

Таким образом, в подобласти $\Omega_H(h, a_0)$ функция $B^{HV}(x)$ совпадает с функцией

$$B^H(x) = r_{a_0}(x_2)(x_1 - x_2) + f(x_2). \tag{4.2}$$

Ясно, что построенная таким образом функция на области $\Omega_{HV}(h, a_0, b_0, v)$ будет непрерывна и более того, непрерывно дифференцируема.

Проверим выполнение условий локальной выпуклости по x_1 и неубывания по x_2.

Первое условие очевидно выполнено, так как на вертикальных экстремалях $B^{HV}_{x_1x_1}(x) = f''(x_1) \leq 0$ из условия на вторую производную функции f, а на горизонтальных экстремалях $B^{HV}(x)$ представляет собой функцию линейную по x_1.

Второе условие очевидным образом выполняется на вертикальных экстремалях, где $B^{HV}(x)$ представляет собой константу относительно переменной x_2. На горизонтальных частях экстремалей лунки условие $B^{HV}_{x_2}(x) \leq 0$ уже проверено в утверждении 4.1. На экстремалях семейства $\Omega_H(h, a_0)$ имеем выполнение требуемого неравенства в силу утверждения 3.3 и того факта, что $f'(\delta a_0) - f'(a_0) \geq 0$, который, как мы ранее заметили, верен в лунке при условии $f'' \geq 0$ на $[a_0, c]$.

Выполнение граничного условия $B^{HV}(x_1, x_1) = f(x_1)$ — очевидно. Сформулируем итог этих рассуждений в виде утверждения.

Утверждение 4.2. *Пусть $+\infty \geq v > b_0 = \delta a_0 > a_0 > h \geq 0$. При этом существует единственная такая точка $c \in (a_0, \ \delta a_0)$, что $f''(t) \geq 0$ при $h \leq t \leq c$ и $f''(t) \leq 0$ при $c \leq t \leq v$, а для точек a_0 и b_0 выполнено равенство $\frac{f(b_0) - f(a_0)}{b_0 - a_0} = f'(b_0)$. Тогда функция*

$$B^{HV}(x_1, x_2) = \begin{cases} B^H(x), & x_2 \in [h, a_0] \\ B^{cup}(x), & (x_1, x_2) \in \Omega_{cup}(a_0, b_0) \\ B^V(x), & x_1 \in [b_0, v] \end{cases},$$

где $B^{cup}(x)$ вычисляется по формуле из утверждения 4.1, а функции $B^H(x)$ и $B^V(x)$ — по формулам (4.2) *и* (3.3) *соответственно, будет являться кандидатом на роль функции Беллмана в области, ограниченной прямыми $H(h)$, $V(v)$ и границей области Ω_δ.*

Теперь можно явно сформулировать теорему о виде функции Беллмана при переходе от горизонтальных экстремалей к вертикальным.

Теорема 4.1. *Пусть $f \in C^2$. Пусть существует единственная точка c, для которой $f''(t) \geq 0$ при $0 < t \leq c$ и $f''(t) \leq 0$ при $c \leq t < \infty$. Тогда в области Ω_δ функция Беллмана будет вычисляться по формуле*

$$\mathbb{B}(x) = B^{HV}(x),$$

где $B^{HV}(x)$ находится по формуле из утверждения 4.2, при $h = 0$ и $v = \infty$.

Доказательство. То, что функция B^{HV} является беллмановским кандидатам гарантируется утверждением 4.2. Значит, по лемме 2.1 выполнено неравенство $\mathbb{B}(x) \leq B^{HV}(x)$.

Подпирающий пример для точек на вертикальных экстремалях находится так же, как в доказательстве теоремы 3.2.

Пусть (x_1, x_2) лежит на горизонтальной части экстремали в лунке. Тогда существуют такие числа $a = x_2$ и $b = b(a)$, которые удовлетворяют равенству (4.1). Рассмотрим вес

$$\omega_{cup}(t) = \begin{cases} a, & 0 \le t < \frac{b-x_1}{b-a} \\ b, & \frac{b-x_1}{b-a} \le t \le 1 \end{cases}.$$

Этот вес порождает данную точку, так как

$$\inf_{t\in[0,1]} \omega_{cup}(t) = \min\{a,\, b\} = a$$

и

$$\langle \omega_{cup} \rangle_{[0,1]} = a \cdot \frac{b-x_1}{b-a} + b \cdot \frac{x_1-a}{b-a} = \frac{ab - ax_1 + bx_1 - ab}{b-a} = x_1.$$

Проверим, принадлежит ли этот вес множеству весов A_1^δ. Очевидно, что для интервалов $J^- \subset [0,\, \frac{b-x_1}{b-a}]$ и $J^+ \subset [\frac{b-x_1}{b-a},\, 1]$ отношение

$$\frac{\langle \omega_{cup} \rangle_{J^-}}{\inf\limits_{t\in J^-} \omega_{cup}(t)} = \frac{\langle \omega_{cup} \rangle_{J^+}}{\inf\limits_{t\in J^+} \omega_{cup}(t)} = 1 < \delta.$$

Рассмотрим интервал $[\mu, \lambda]$, где $0 \le \mu < \frac{b-x_1}{b-a} \le \lambda \le 1$.

$$\inf_{t\in[\mu,\lambda]} \omega_{cup}(t) = a,$$

$$\langle \omega_{cup} \rangle_{[\mu,\lambda]} = \frac{1}{\lambda-\mu}\Big[a\Big(\frac{b-x_1}{b-a} - \mu\Big) + b\Big(\lambda - \frac{b-x_1}{b-a}\Big)\Big] = \frac{x_1 - b - a\mu + b\lambda}{\lambda-\mu}.$$

Тогда разность

$$\langle \omega_{cup} \rangle_{[\mu,\lambda]} - \delta \cdot \inf_{t\in[\mu,\lambda]} \omega_{cup}(t) = \frac{x_1 - b - a\mu + b\lambda}{\lambda-\mu} - a\delta = \frac{x_1 - b + \lambda(b - a\delta) + a\mu(\delta-1)}{\lambda-\mu}.$$

Слагаемое $\lambda(b - a\delta)$ неположительно, так как $b = b(a) \le a\delta$. Значит, это слагаемое не превосходит $\frac{b-x_1}{b-a} \cdot (b - a\delta)$. Слагаемое $a\mu(\delta-1)$ неотрицательно, следовательно $a\mu(\delta-1) \le a(\delta-1)\frac{b-x_1}{b-a}$. Тогда

$$\langle \omega_{cup} \rangle_{[\mu,\lambda]} - \delta \cdot \inf_{t\in[\mu,\lambda]} \omega_{cup}(t) \le \frac{(x_1-b)(b-a) + (b-a\delta)(b-x_1) + a(\delta-1)(b-x_1)}{(\lambda-\mu)(b-a)} = 0.$$

Тогда $\frac{\langle \omega_{cup} \rangle_{[\mu,\lambda]}}{\inf\limits_{t\in[\mu,\lambda]} \omega_{cup}(t)} \le \delta$. Отсюда следует, что

$$\sup_{J\subset I}\Big\{\langle \omega \rangle_J \frac{1}{\inf\limits_{t\in J} \omega(t)}\Big\} \le \delta,$$

то есть $\omega_{cup} \in A_1^\delta$.

Проверим, что это подпирающий пример:

$$\langle f(\omega_{cup}) \rangle_{[0,1]} = f(a) \cdot \frac{b-x_1}{b-a} + f(b) \cdot \frac{x_1-a}{b-a} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} x_1 + \frac{f(a)b - af(b)}{b-a} =$$

$$= f'(b)x_1 + \frac{f(a)b - f(a)a - f(b)a + f(a)a}{b-a} = f'(b)(x_1 - a) + f(a) = B^{HV}(x_1, x_2)$$

Пусть (x_1, x_2) лежит на горизонтальных экстремалях вне лунки. Подпирающим примером является вес

$$\omega_h(t) = \begin{cases} \delta a_0 & 0 \le t < 1 \\ a_0 t^{-\nu} & 1 \le t \le s \\ x_2 & s < t \le l \end{cases},$$

где a_0 и δa_0 — концы лунки, $s = \Big(\frac{a_0}{x_2}\Big)^{\frac{\delta}{\delta-1}}$, $l = \frac{a_0(\delta-1)}{x_1-x_2}\Big(\frac{a_0}{x_2}\Big)^{\frac{1}{\delta-1}}$ и $\nu = \frac{\delta-1}{\delta}$.

Ясно, что $\inf\limits_{t\in[0,1]}\omega_h(t)=x_2$ и

$$
\begin{aligned}
&l\langle\omega_h\rangle_{[0,1]}=\delta a_0+x_2(l-s)+\int\limits_1^s a_0t^{-\nu}dt=\delta a_0+x_2(l-s)+a_0\frac{s^{1-\nu}-1}{1-\nu}=\\
&=\delta a_0+x_2\Big(\frac{a_0(\delta-1)}{x_1-x_2}\Big(\frac{a_0}{x_2}\Big)^{\frac{1}{\delta-1}}-\Big(\frac{a_0}{x_2}\Big)^{\frac{\delta}{\delta-1}}\Big)+a_0\delta\Big(\Big(\frac{a_0}{x_2}\Big)^{\frac{1}{\delta-1}}-1\Big)=\\
&=x_2\Big(\frac{a_0}{x_2}\Big)^{\frac{1}{\delta-1}}\Big(\frac{(\delta-1)a_0}{x_1-x_2}-\frac{a_0}{x_2}\Big)+a_0\delta\Big(\frac{a_0}{x_2}\Big)^{\frac{1}{\delta-1}}=\\
&=\Big(\frac{a_0}{x_2}\Big)^{\frac{1}{\delta-1}}\frac{a_0\delta x_2-a_0x_2-a_0x_1+a_0x_2+a_0\delta x_1-a_0\delta x_2}{x_1-x_2}=\\
&=\frac{a_0(\delta-1)}{x_1-x_2}\Big(\frac{a_0}{x_2}\Big)^{\frac{1}{\delta-1}}x_1=lx_1.
\end{aligned}
$$

Прямыми вычислениями проверяется, что этот вес подходит в нашем случае. Сделаем замену переменной в интеграле и несколько раз воспользуемся интегрированием по частям:

$$
\begin{aligned}
&l\langle f(\omega_h)\rangle_{[0,1]}=f(\delta a_0)+f(x_2)(l-s)+\int\limits_1^s f(a_0t^{-\nu})dt=\\
&=f(\delta a_0)+f(x_2)(l-s)+\int\limits_{a_0}^{a_0s^{-\nu}}a_0^{\frac{1}{\nu}}f(t)\frac{-t^{-\frac{\nu+1}{\nu}}}{\nu}dt=\\
&=f(\delta a_0)+f(x_2)(l-s)+a_0^{\frac{1}{\nu}}f(t)t^{-\frac{1}{\nu}}\Big|_{t=a_0}^{a_0s^{-\nu}}-\\
&-a_0^{\frac{1}{\nu}}f'(t)\frac{\nu}{\nu-1}t^{\frac{\nu-1}{\nu}}\Big|_{t=a_0}^{a_0s^{-\nu}}+\int\limits_{a_0}^{a_0s^{-\nu}}a_0^{\frac{1}{\nu}}f''(t)\frac{\nu}{\nu-1}t^{\frac{\nu-1}{\nu}}dt
\end{aligned}
$$

Заметим, что $\frac{\nu}{\nu-1}=1-\delta$ и $a_0s^{-\nu}=x_2$. Рассмотрим отдельно слагаемые.

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{a_0}^{a_0s^{-\nu}}a_0^{\frac{1}{\nu}}f''(t)\frac{\nu}{\nu-1}t^{\frac{\nu-1}{\nu}}dt=a_0^{\frac{\delta}{\delta-1}}(\delta-1)\int\limits_{x_2}^{a_0}f''(t)t^{-\frac{1}{\delta-1}}dt,\\
&a_0^{\frac{1}{\nu}}f(t)t^{-\frac{1}{\nu}}\Big|_{t=a_0}^{a_0s^{-\nu}}=a_0^{\frac{1}{\nu}}f(a_0s^{-\nu})a_0^{-\frac{1}{\nu}}s-a_0^{\frac{1}{\nu}}f(a_0)a_0^{-\frac{1}{\nu}}=f(x_2)s-f(a_0),\\
&-a_0^{\frac{1}{\nu}}f'(t)\frac{\nu}{\nu-1}t^{\frac{\nu-1}{\nu}}\Big|_{t=a_0}^{a_0s^{-\nu}}=a_0^{\frac{1}{\nu}}(\delta-1)\big(f'(a_0s^{-\nu})a_0^{1-\frac{1}{\nu}}s^{1-\nu}-f'(a_0)a_0^{1-\frac{1}{\nu}}\big)=\\
&=a_0(\delta-1)(f'(x_2)s^{\frac{1}{\delta}}-f'(a_0)).
\end{aligned}
$$

Теперь

$$l\langle f(\omega_h)\rangle_{[0,1]} = f(\delta a_0) + f(x_2)(l-s) + f(x_2)s - f(a_0) + a_0(\delta-1)(f'(x_2)s^{\frac{1}{\delta}} - f'(a_0)) +$$

$$+ a_0^{\frac{\delta}{\delta-1}}(\delta-1)\int\limits_{x_2}^{a_0} f''(t)t^{-\frac{1}{\delta-1}}\,dt = f(x_2)l + a_0(\delta-1)f'(\delta a_0) - a_0(\delta-1)f'(a_0) +$$

$$+ a_0(\delta-1)f'(x_2)\Big(\frac{a_0}{x_2}\Big)^{\frac{1}{\delta-1}} + a_0^{\frac{\delta}{\delta-1}}(\delta-1)\int\limits_{x_2}^{a_0} f''(t)t^{-\frac{1}{\delta-1}}\,dt =$$

$$= lf(x_2) + a_0(\delta-1)(f'(\delta a_0) - f'(a_0)) + l(x_1-x_2)f'(x_2) + l(x_1-x_2)x_2^{\frac{1}{\delta-1}}\int\limits_{x_2}^{a_0} f''(t)t^{-\frac{1}{\delta-1}}\,dt =$$

$$= l\Big[f(x_2) + (x_1-x_2)\Big(f'(x_2) + x^{\frac{1}{\delta-1}}\frac{f'(\delta a_0) - f'(a_0)}{a_0^{\frac{1}{\delta-1}}} + x^{\frac{1}{\delta-1}}\int\limits_{x_2}^{a_0} f''(t)t^{-\frac{1}{\delta-1}}\,dt\Big)\Big] =$$

$$= lB^{HV}(x).$$

Используя рассуждения, аналогичные приведённым в статье [2], можно убедиться, что данный вес принадлежит множеству весов A_1^δ. Значит этот вес является подпирающим примером и следовательно для функции Беллмана, как для супремума средних вида $\langle f(\omega)\rangle_{[0,1]}$, где ω — вес Макенхаупта класса A_1, выполнено неравенство $\mathbb{B}(x) \ge \langle f(\omega_h)\rangle_{[0,1]} = B^{HV}(x)$.

Таким образом из неравенств $\mathbb{B}(x) \le B^{HV}(x)$ и $\mathbb{B}(x) \ge B^{HV}(x)$ приходим к тому, что $\mathbb{B}(x) = B^{HV}(x)$. □

4.3. **Пример.** Приведём в качестве примера полином третьей степени.

Пусть $f(t) = -t^3 + 3qt^2$, $q > 0$.

Точка перегиба данного полинома есть $t_0 = q$. Пусть a и b — первые координаты концов "ломаных" из лунки ($a < q < b$), а a_0 и b_0 — концы лунки ($a < q < b$). Запишем соответствующее уравнение на лунку (4.1):

$$\frac{-b^3 + 3qb^2 + a^3 - 3qa^2}{b-a} = -3b^2 + 6qb.$$

Оно упрощается до вида

$$2b^2 - (3q+a)b + 3qa - a^2 = 0.$$

Решения этого уравнения: $b_1 = a$ и $b_2 = \frac{3q-a}{2}$. Рассмотрим невырожденный случай и будем считать, что $b = b_2$.

Значит, кривая γ состоит из точек вида $(\frac{3q-a}{2},\ a)$, то есть точки пересечения экстремалей в лунке лежат на прямой $x_2 = 3q - 2x_1$.

Рассматриваемая лунка будет полной, если $b_0 = \delta a_0$, то есть

$$\frac{3q - a_0}{2} = \delta a_0,$$

что означает $a_0 = \frac{3q}{2\delta+1}$ и $b_0 = \frac{3q\delta}{2\delta+1}$.

Функция Беллмана будет вычисляться по формуле

$$\mathbb{B}(x_1,x_2) = \begin{cases} -x_1^3 + 3qx_1^2, & \text{при } \ x_2 \ge 3q - 2x_1 \\ \frac{3}{4}(q+x_2)(3q-x_2)(x_1-x_2) - x_2^3 + 3qx_2^2, & \text{при } \ \frac{3q}{2\delta+1} \le x_2 \le 3q - 2x_1 \\ r_{a_0}(x_2)(x_1-x_2) - x_2^3 + 3qx_2^2, & \text{при } \ x_2 \le \frac{3q}{2\delta+1} \end{cases},$$

где $r_{a_0}(t) = 3t\Big(1 - t^{\frac{1}{\delta-1}}\Big)(2q-t) - 9q^2 t^{\frac{1}{\delta-1}}\frac{4\delta-1}{(2\delta+1)^2} + 9q^2\Big(\frac{(2\delta+1)t}{3q}\Big)^{\frac{1}{\delta-1}}\Big(\frac{\delta-1}{2\delta+1}\Big)^2.$

5. Заключение

В теоремах 3.1 и 3.2 описан вид функции Беллмана при постоянном знаке функции f'', а в теореме 4.1 выведена формула для вида функции Беллмана в случае, когда у f всего одна точка перегиба, в которой вторая производная f меняет знак с плюса на минус. Возникает вопрос, как будет выглядеть функция Беллмана, когда в некоторой точке функция f'' меняет знак с минуса на плюс, или когда точек перегиба несколько. Ответы на аналогичные вопросы для весов из класс BMO имеются в работе [1], где описаны такие конструкции экстремалей, как уголок и троллейбус. Для весов Макенхаупта класса A_1 данную часть теории ещё предстоит исследовать.

Список литературы

[1] P.Ivanishvili, N.Osipov, D.Stolyarov, V.Vasyunin, P.Zatitskiy. Bellman function for extremal problems in BMO, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 368 (2016), no. 5, 3415–3468.

[2] Васюнин В.И., Точная константа в обратном неравенстве Гёльдера для макенхауптовских весов, Алгебра и анализ, т. 15 (2003), вып. 1, 73–117.

[3] Назаров Ф.Л., Трейль С.Р., Охота на функцю Беллмана: приложения к оценкам сингулярных интегральных операторов и к другим классическим задачам гармонического анализа, Алгебра и анализ, т. 8 (1996), вып. 5, 32–162.

[4] F. Nazarov, S. Treil and A. Volberg, Bellman function in stochastic control and harmonic analysis, Oper. Theory: Advances and Appl. vol. 129 (2001), 393–424, Birkhauser Verlag.

[5] L. Slavin, V. Vasyunin, Sharp results in the integral-form John–Nirenberg inequality, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 363, no. 8 (2011), 4135–4169; preprint, 2007.