

Санкт-Петербургский государственный университет
Факультет прикладной математики - процессов управления
Кафедра математической теории игр и статистических
решений

Кондратова Мария Александровна

Выпускная квалификационная работа магистра

**Анализ денежных потоков в сети
банкоматов**

Направление 010402

Прикладная математика и информатика

Исследование операций и системный анализ

Заведующий кафедрой,
доктор физ.-мат. наук,
профессор

Петросян Л. А.

Научный руководитель,
кандидат физ.-мат. наук,
доцент

Губар Е. А.

Санкт-Петербург

2018

Содержание

Введение	3
Обзор литературы	6
Глава 1. Прогнозирование денежного потока	10
1.1. Анализ временного ряда	10
1.2. Локальная полиномиальная регрессия.	15
1.3. Модель ARMA	16
1.4. Прогнозирование экспоненциальным сглаживанием	22
1.5. Выводы по первой главе	24
Глава 2. Моделирование движения денежных потоков в банкомате	27
2.1. Процесс снятия наличных денежных средств	27
2.2. Процесс внесения наличных денежных средств	33
2.3. Банкомат с системой замкнутого обращения наличности	36
2.4. Выводы по второй главе	45
Заключение	47
Список литературы	49
Приложение А	52
Приложение Б	55
Приложение В	59

Введение

Наличные деньги играют ключевую роль в повседневной жизни человека и могут считаться основой экономики. Правительственные учреждения обязаны обеспечивать достаточный запас банкнот и монет для населения. Денежные средства достигают потребителей через различные каналы распространения, такие как филиалы банка, банкоматы и розничная торговля. На сегодняшний день использование наличных средств значительно сокращается, что частично можно объяснить растущим распространением цифровых платежей, в том числе бесконтактными и мобильными платежами. Однако в краткосрочной и среднесрочной перспективе использование наличных денежных средств не прекратится.

Данная работа посвящена анализу данных по исследованию денежных потоков в банкомате. На сегодняшний день наиболее перспективными представляются многофункциональные банкоматы, выполняющие наряду с операциями выдачи наличных средств, отображения остатков и выписки, а также платежей еще и прием наличных денег в пополнение счета или погашения кредита. Такие банкоматы с функцией *cash-recycling* (от англ. *рециркуляция*), их еще называют полнофункциональные киоски самообслуживания, пока не очень распространены, но все большее количество банков заявляет о дальнейшем развитии своих банкоматных сетей на основании аналогичных устройств. Уже установленные устройства в будущем планируется заменить или, если возможно, произвести их модернизацию путем установки модулей приема наличных.

Объект исследования:

Банкоматы с различным функционалом.

Предмет исследования:

Построение имитационной модели денежного потока в банкомате и методы оптимизации затрат на обслуживание устройств.

Для анализа денежных средств нужно знать об их количественных характеристиках. Обработка временных рядов необходима для определения природы наличности в банкомате. Так как каждый банкомат обладает своими статистическими характеристиками, построить одну общую для всех прогнозную модель невозможно. Но на основании такого исследования можно строить более реалистичные имитационные модели работы банкомата.

Планирование поставок и контроль денежных запасов связаны с уникальными задачами в первую очередь из-за жестких требований безопасности. Подходы к решению данных задач могут осуществляться с применением различных методов в зависимости от конкретных целей. Количество банкнот, которое будет храниться в банкоматах, зависит от доступности банкоматов, транспортных тарифов инкассации и процентной ставки. Процентная ставка определяет потенциальную потерю процентного дохода от наличных денежных средств, находящихся в кассетах и в пути.

Вовремя и точно инкассированный банкомат, который имеет достаточно наличных денег для обеспечения потребностей клиентов, — это минимизация простоев АТМ (от англ. *Automated teller machine*) по причине отсутствия денег, а также, повышение имиджа банка и лояльности клиентов.

Особенность банкомата-ресайклинга в том, что к обычному банкомату на выдачу денежных средств был добавлен механизм, позволяющий

управлять процессом приема банкнот и обеспечивать их обработку в соответствии с номиналом по правилам, установленными банком, которые могут быть заданы на уровне конкретного устройства. В соответствии с этими правилами купюры, помещенные в устройство и прошедшие соответствующую проверку в модуле детектирования, могут быть либо размещены на барабанах накопителя, либо отправлены в депозитную кассету, либо же возвращены клиенту (примером может служить конфигурация, когда банкноты номиналом *10 руб.* не принимаются устройством, 50-рублевые банкноты поступают в cash-in кассеты, а банкноты номиналом *100 руб.* и выше помещаются на барабаны накопителя и доступны для последующей выдачи клиентам). При замкнутом обороте денежных средств купюры проходят двойную проверку: при приеме и перед выдачей клиенту. Вероятность, при которой попавшая в ресайклер подделка будет выдана клиенту, составляет менее 0,001% [1].

Актуальность данной работы обусловлена ростом в России количества банкоматов с рециркуляцией денежных средств и низкой проработанностью данной тематики. Одна из важнейших задач анализа и прогнозирования движения денег в банкоматных системах состоит в определении резерва наличности, необходимого для подкрепления банкоматов в течение определенного календарного времени.

Прикладное исследование заключалась в разработке специального комплекса процедур, которые имитируют движение денежных потоков в банкомате. Данное приложение позволяет производить расчет денежных средств, которые участвуют в обороте, и планировать дни инкассации для различных видов банкоматов.

Обзор литературы

Прогнозирование денежных средств банкомата с замкнутым циклом обращения средств подразделяется на два этапа:

1. прогнозирование внесения наличных средств (*cash-in*);
2. прогнозирование снятия наличности (*cash-out*).

Первой задаче практически не посвящено научных работ. До 2012 года денежные средства загружались в специальный банкомат, предназначенный исключительно для внесения наличности. Проблем с такими банкоматами практически не возникало. Достаточно большой объем кассет позволял на протяжении долгого времени использовать банкомат по назначению. В 2012 году руководство Центрального банка (ЦБ) России утвердило использование систем *cash-recycling*. С данными системами вступало в силу требование Банка России, по которому банкам придется считывать четыре машинопечатных признака подлинности банкнот [6]. Во-первых, это наличие магнитотвердых свойств у серии и номера, напечатанные зеленой краской. Во-вторых, соответствие люминесценции элементов изображения банкноты под воздействием ультрафиолетового излучения с длиной волны *360-380* нанометров по официальному описанию ЦБ Российской Федерации. В-третьих, отсутствие фонового свечения бумаги под воздействием ультрафиолетового излучения. И в-четвертых, наличие зеленой люминесценции элемента изображения серого цвета под воздействием инфракрасного облучения. Также банкомат оценивает купюры по признаку ветхости и новизны. Банкомат отбраковывает подделки и при внесении, и при выдаче. Таким образом, вариант выдачи клиенту неплатежеспособной купюры практически отсутствует. После утверждения требований банкоматы американских, немецких и

южно-корейских компаний стали проходить необходимую сертификацию Центрального Банка России.

На российском банкоматном рынке в течение последних лет сформировался устойчивый тренд увеличения и развития парка устройств с функцией замкнутого оборота наличных. Банки широко тестируют банкоматы с технологией рециркуляции денежных средств, а многие уже внедряют такие банкоматы массово. Данная тематика еще недостаточно хорошо изучена, так как данный вид банкоматов получил распространение на территории России относительно недавно.

Второй задаче посвящено множество работ, ввиду обширности распространения данного типа банкомата. Прогнозирование же внесения наличности практически не рассматривается, причина тому достаточно большая емкость кассет. Проблемы превышения объема на практике не наблюдалось. Но в данной работе важно проанализировать движение денежных средств как в банкомат, так и из банкомата, поэтому анализируем денежные остатки при внесении наличных средств. Остатки в банкоматах могут и должны лимитироваться. В процессе лимитирования входящей информацией являются:

- среднедневной клиентский расход;
- условные расходы на инкассацию банкомата;
- номинальная ставка работающих активов.

Необходимо принимать во внимание факторы, обуславливающие всплеск расхода (например, перечисление заработной платы на банковские карты или фактор "предпраздничного дня").

Важно, чтобы число отказов устройств было минимально. К ошибкам устройства можно отнести ситуацию, когда банкомат больше не работает. В случае с банкоматами cash-in, кассеты на внесение денежных средств

могут теоретически превышать максимальный объем. Также нельзя давать денежным средствам "простаивать".

Данная работа базируется на исследовании денежных потоков в банке. Для понимания основы вопроса рассматривалась литература, отражающая статистический подход к анализу временных рядов [2] и задачи классического управления запасами [3].

В первой главе проведем анализ временных рядов снятия и пополнения наличных денежных средств. Модели декомпозиции и методы скользящего среднего являются одними из самых ранних подходов к анализу временных рядов. Экспоненциальное сглаживание *Брауна (1956)* было предложено несколько лет спустя, чтобы дать больший вес недавним наблюдениям. В дополнение к предыдущей модели *Хольт* и *Винтерс* добавили возможность выделения сезонной компоненты и тренда. Статистически обоснованные модели *ARIMA* (англ. *Auto Regressive Integrated Moving Average* — интегрированная модель авторегрессии — скользящего среднего) *Бокса и Дженкинса (1970)* стали прорывными в области анализа временных рядов. После 1970 было предложено множество вариаций модели *ARIMA*, например для сезонных данных *SARIMA*.

Данные для проведения анализа входящих и исходящих потоков возьмем из статьи [4]. Данные представляют собой выборку за три месяца. Проверим наличие тренда (методом *Фостера-Стюарта*) и сезонность и стационарность исходных данных (тест *Дики-Фуллера*). Построим различные прогнозные модели. Для этого будут использоваться программа *Microsoft Office Excel* и статистический пакет *RStudio* (код программы приведен в Приложении А).

Применяются методы решения классической задачи управления за-

пасами для определения суммы загрузки банкомата и цикла инкассации. Построение данной модели основывалось на теоретическом материале, представленном в книге *Taha X. A.* [7]. Модель внесения наличных средств базировалась на теории массового обслуживания. Моделирование проводилось с помощью пакета Matlab.

Глава 1. Прогнозирование денежного потока

1.1. Анализ временного ряда

Для анализа движения денежных средств необходимо строить прогноз на некоторый период, на основании которого следует принимать решение об инкассации. Построение краткосрочного прогноза может быть основано на построении прогнозных моделей временного ряда либо на основании моделей управления запасами.

Изначально рассмотрим временные ряды по снятию и внесению денежных средств. При изучении временного ряда банкомата с замкнутой системой обращения денежных средств возникает вопрос, какие именно временные ряды следует анализировать: отдельно *cash-in* и *cash-out* или их сумму.

На графике (см. рис. 1) синим цветом изображены входящие денежные средства, зеленым исходящие. При моделировании потоков снятая наличность будет представлена в формулах со знаком минус, а внесенная — со знаком плюс. Черным цветом показаны суммарные потоки.

Кумулятивные обороты денежных средств не обладают сезонностью, и по данному временному ряду нет очевидной модели. Сконцентрируем внимание на анализе входящих и исходящих денежных потоков.

Временным рядом называется упорядоченная во времени совокупность измерений одной из характеристик исследуемого объекта x_t , t — порядковый номер анализируемого периода. Последовательные наблюдения временного ряда обладают признаком взаимозависимости, особенно к близко расположенным показателям. Информативность показателей ряда различна и зависит от удаленности от текущего момента (по ме-

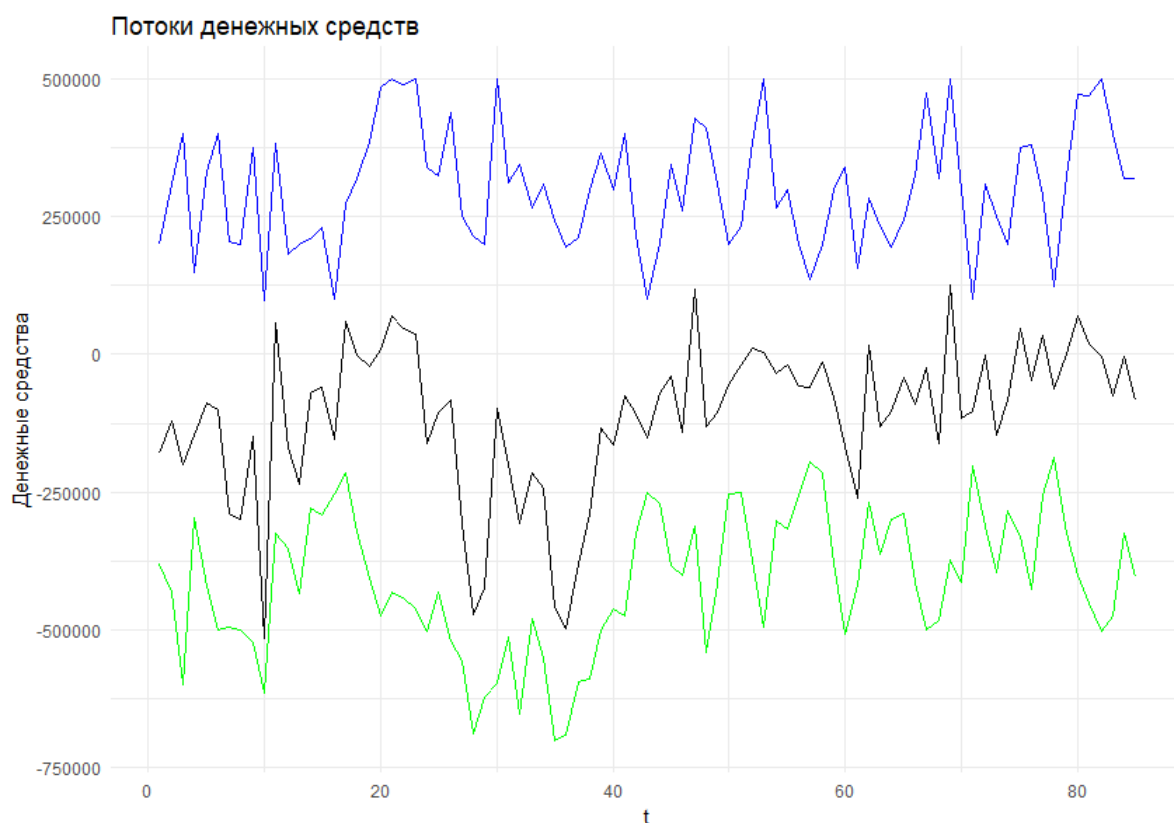


Рис. 1: Потоки денежных средств в банкомате

ре удаления от текущего момента времени информационная ценность снижается). Точность статистических характеристик не будет увеличиваться пропорционально росту числу наблюдений.

До построения математических моделей проанализируем имеющийся временной ряд.

Исследование временного ряда предполагает, что в данных содержатся две основные составляющие:

- систематическая составляющая (регулярная);
- случайный шум (ошибка), который может затруднять обнаружение регулярных компонент.

К регулярным составляющим временных рядов относятся два класса компонент: они являются либо трендом, либо сезонной составляющей.

Тренд представляет собой общую систематическую линейную или нелинейную компоненту, которая может изменяться во времени.

Сезонная составляющая — это периодически повторяющаяся компонента. Обе эти компоненты могут присутствовать в ряде одновременно.

Рассмотрим график прихода денежных средств (см. рис. 2). Тенденция повышения уровня денежных средств затемнена большим количеством колебаний. Таким образом, визуальный анализ графика не позволяет утверждать, что данные имеют тренд. Можно лишь предположить, что прослеживается восходящая тенденция и некоторая сезонность данных.

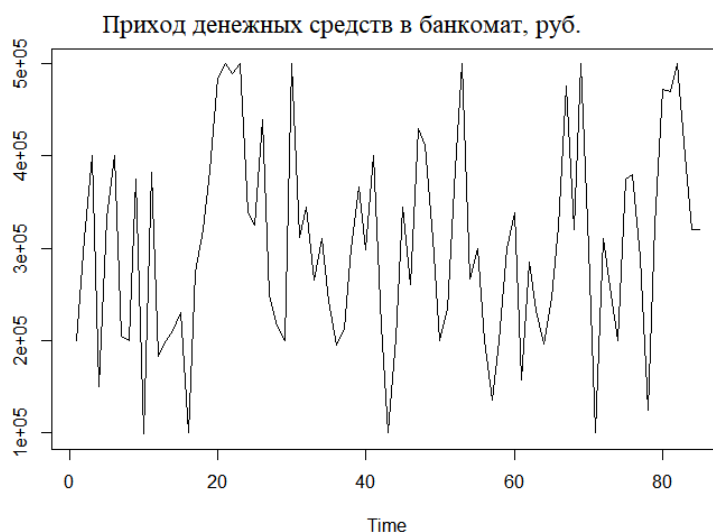


Рис. 2: Денежные средства, внесенные в банкомат

Для проверки наличия или отсутствия тренда воспользуемся методом *Фостера-Стюарта*.

Данный метод может быть реализован в виде следующих шагов:

- 1) Каждый уровень ряда сравнивается со всеми предшествующими, при этом определяются значения вспомогательных характеристик U_t и L_t :

$$U_t = \begin{cases} 1, & \text{если } y_t > y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_1, \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases} \quad t = 2, 3, \dots, n \quad (1)$$

$$L_t = \begin{cases} 1, & \text{если } y_t < y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_1, \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases} \quad t = 2, 3, \dots, n \quad (2)$$

2) На втором шаге вычисляются величины d и s :

$$s = \sum_{t=2}^n (U_t + L_t) \quad (3)$$

$$d = \sum_{t=2}^n (U_t - L_t) \quad (4)$$

Величина s характеризует изменение дисперсий временного ряда и может принимать значение от 0 (когда все уровни ряда равны) до $n - 1$ (ряд монотонный). Величина d характеризует изменение средних временного ряда и изменяется от $(1 - n)$ (когда ряд монотонно убывает) до $(n - 1)$ (когда ряд монотонно возрастает). Эти величины являются случайными с математическим ожиданием μ для значения s и 0 для значения d .

3) Проверяются гипотезы о случайности отклонения величины s от ее математического ожидания μ и о случайности отклонения величины d от нуля с помощью критерия *Стьюдента* для среднего значения и для дисперсии:

$$t_s = \frac{|s - \mu|}{\sigma_1}, \quad \sigma_1 = \sqrt{\sum_{t=2}^n \frac{1}{t}} \quad (5)$$

$$t_d = \frac{|d - 0|}{\sigma_2}, \quad \sigma_2 = \sqrt{\sum_{t=2}^n \frac{1}{t^2}} \quad (6)$$

где μ — математическое ожидание величины s для случайного временного ряда (для $n = 85, \mu \approx 8,05$); σ_1 — среднее квадратичное отклонение s для случайного временного ряда; σ_2 — среднее квадратичное отклонение d для случайного временного ряда. Полученные значения t_s, t_d необходимо сравнить с табличными значениями критерия *Стьюдента* t_{kr} . Если t_{kr} больше расчетного значения, то соответствующий тренд отсутствует. Для $n = 85$ и $\alpha = 0,05$ критерий *Стьюдента* $t_{kr} = 1,98$.

Так как полученные значения $t_s = 2,55$ и $t_d = 2,11$ превосходят $t_{kr} = 1,98$, взятое из таблицы t -распределения *Стьюдента* для уровня значимости $0,05$ и числа степеней свободы $v = n - 1$, то можно говорить о том, что тренд отсутствует.

Таким образом, можно сделать вывод об отсутствии компоненты, определяющей тренд во временном ряду.

Далее рассмотрим сезонную компоненту. Во временном ряду нет четкого представления о периодичности колебаний. По предположению данные должны обладать недельной или месячной сезонностью. Определить визуально точные периоды не представляется возможным. Попробуем проверить данные на сезонность в пакете Rstudio (см. рис 3).

```
> x.dec <- decompose(x)
Error in decompose(x) :
  временной ряд не имеет или имеет меньше 2 периодов
```

Рис. 3: Фрагмент кода процедуры, которая проверяет наличие декомпозиции во временном ряду

Таким образом, можно исключить тренд-сезонные модели из рассмотрения.

1.2. Локальная полиномиальная регрессия.

Наиболее простыми моделями для построения прогноза являются модели сглаживания данных. При краткосрочном прогнозировании данный метод может дать адекватные прогнозные значения. Наиболее простым и эффективным рецептом сглаживания можно считать регрессию различного вида. Исходные данные имеют много пиковых значений, которые попробуем описать полиномом k -ой степени. В пакете RStudio прописаны методы, позволяющие сглаживать ряды по отдельным частям. Следует отметить, что построение полиномиальной регрессии, как правило, не дает хороших результатов при выборе степени полинома больше трех.

Метод локальных полиномиальных регрессий (от англ. *Local regressions* — "*LOESS*" или *Locally Weighted Scatterplot Smoother* — "*LOWESS*") разработал *Кливленд В. С.* в 1979 г. Суть метода состоит в сглаживании ряда значений, с использованием простой линейной или полиномиальной зависимости y от x . Однако при этом предлагается строить модель не по всему ряду данных, а по его отдельным частям. Такой подход фактически позволяет построить простые регрессии для эволюционных рядов данных, так как при расчете коэффициентов используются лишь наиболее актуальные данные. Взвешенная локальная полиномиальная регрессия, реализованная в пакете RStudio, позволяет сглаживать временной ряд, не указывая специфический вид регрессии.

На данном графике (см. рис. 4) синей пунктирной линией *lowess* обозначен автоматически сглаженный ряд. Красным цветом показана прямая с заданным коэффициентом сглаживания, который задает пропорцию точкам сглаживания 1 к 8 (чем больше значение, тем больше сглаживание). Данная прямая показывает наличие колебаний, но законо-

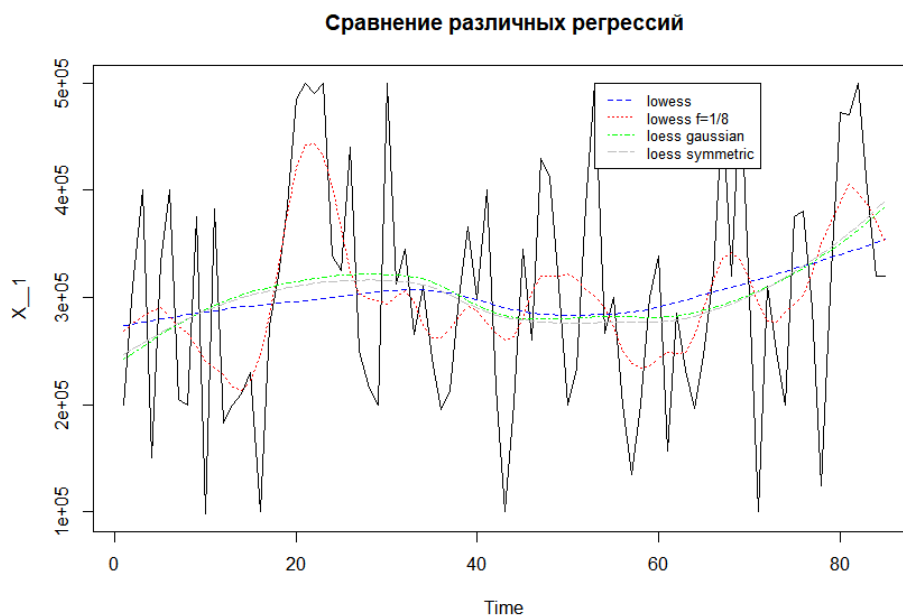


Рис. 4: Сравнительный график сглаживания с различными параметрами LOESS и LOWESS

мерности в данных колебаниях не прослеживается. Прямые *loess* заданы полиномами второй степени, с различным поиском коэффициентов: *gaussian* вычисляется методом наименьших квадратов, *symmetric* с помощью функции *Tukey's biweight function*. Для обеих линий пики в данных оказались несущественными, как и в целом любые возмущения, что обусловлено высокой степенью сглаживания.

1.3. Модель ARMA

Другой достаточно известной моделью для прогнозирования данных является ARIMA (или ARMA для стационарных рядов). Преимуществом модели является формализованная и наиболее подробно разработанная методика, следуя которой можно подобрать параметры, наиболее подходящие к каждому конкретному временному ряду. К классической модели можно добавить поиск сезонных параметров ряда. Найдем модель,

описывающую исходные данные.

Общий вид модели ARMA:

$$x_t = c + \sum_{i=1}^p \phi_i x_{t-i} + \epsilon_t + \sum_{j=1}^q \theta_j \epsilon_{t-j} \quad (7)$$

где θ_j — параметр скользящего среднего, ϵ_t — белый шум, ϕ_i — параметр авторегрессии, c — константа.

Для подбора подходящей к данным модели ARIMA воспользуемся статистическим пакетом RStudio.

Выбор параметров является основной задачей в модели ARIMA (p, d, q) , где

p — порядок авторегрессионной части;

d — порядок разности ряда;

q — порядок скользящей средней.

Перед построением авторегрессионных моделей проведем тест *Дики-Фуллера* на стационарность ряда. Ряд x_t , $t = 1, \dots, n$, называется строго стационарным (или стационарным в узком смысле), если для любого $m (m < n)$ совместное распределение вероятностей случайных величин X_{t_1}, \dots, X_{t_m} такое же, как и для $X_{t_1+\tau}, \dots, X_{t_m+\tau}$, при любых t_1, \dots, t_m и τ , таких, что $1 \leq t_1, \dots, t_m \leq n$ и $1 \leq t_1 + \tau, \dots, t_m + \tau \leq n$. Другими словами, свойства строго стационарного временного ряда не изменяются при изменении начала отсчета времени. В частности, при $m = 1$ из предположения о строгой стационарности временного ряда x_t следует, что закон распределения вероятностей случайной величины X_t не зависит от t , а значит, не зависят от t и все его основные числовые характеристики

(если, конечно, они существуют), в том числе: математическое ожидание $E(X_t) = \mu$ и дисперсия $D(X_t) = \sigma^2$.

Augmented Dickey-Fuller Test

```
data: ci
Dickey-Fuller = -4.2954, Lag order = 4, p-value = 0.01
alternative hypothesis: stationary
```

Рис. 5: Код для работы теста Дики-Фуллера в пакете RStudio

Ряд можно считать стационарным, так как уровень значимости (*p-value*) меньше 0,05 (см. рис. 5). Значит, можно пробовать строить модель на исходном временном ряду. Параметр d (порядок разностей) в нашей модели равен 0. Ввиду отсутствия параметра разности ряда от модели $ARIMA(p, d, q)$, можем перейти к модели $ARMA(p, q)$. Чаще всего невозможно выделить из временного ряда, какие значения p и q подходят для данных. Однако для определения соответствующих значений параметров можно использовать график автокорреляционной функции (ACF) и частной автокорреляционной функции (PACF).

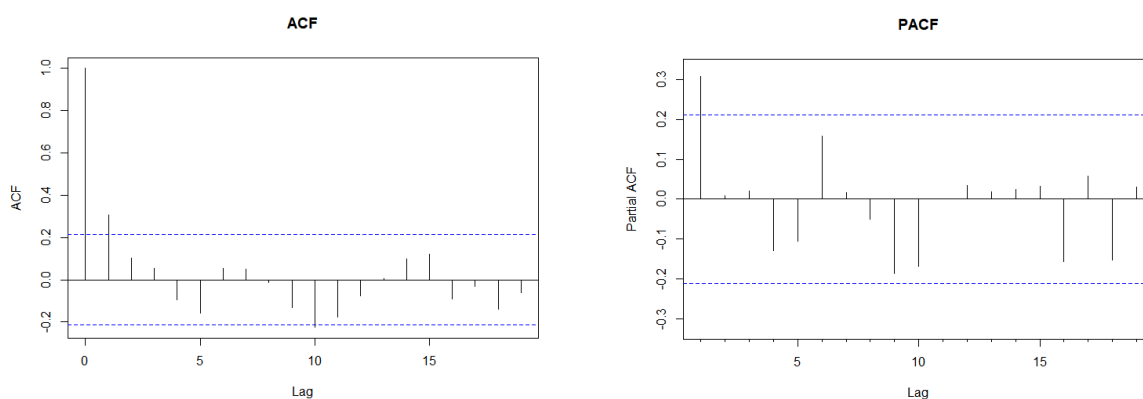


Рис. 6: Графики ACF и PACF для временного ряда прихода денежных средств.

На графике (см. рис. 6) наблюдаем, что в ACF есть один пик на первом лаге, а затем нет значительных всплесков (кроме одного за пределами границ с запаздыванием 10). Мы можем игнорировать один зна-

Таблица 1: Значимость коэффициентов модели

Коэффициент	Значение	P-value
<i>ar1</i>	0.33	0.0344
<i>ma1</i>	-0.028	0.9671
<i>intercept</i>	301357	0.0245

чительный всплеск, если он находится за пределами первых нескольких лагов. В PACF есть также пик на первом лаге, а затем после этого никаких значительных всплесков. Таким образом, можно выбрать параметры следующим образом: ARIMA (1,0,1).

Рассчитаем коэффициенты данной модели с помощью пакет RStudio (см. таб. 1). Полученная модель выглядит следующим образом:

$$y_t = 301357 + 0.33y_{t-1} + e_t - 0.028e_{t-1} \quad (8)$$

Рассмотрим значимость полученных коэффициентов. Коэффициент, полученный при $q = 1(ma1)$, имеет очень высокое значение $p - value$, что говорит о незначимости этого коэффициента и необходимости включать его в модель нет. Можно предположить, что модель ARMA(1,0) лучше будет описывать имеющиеся данные. Проверим автоматическим подбором моделей, какая является оптимальной на основании критерия AIC.

Информационный критерий *AIC* (*An Information Criterion*, позднее именуется как *Akiake Information Creterion*), предназначенный для выбора лучшей модели, был предложен японским ученым в 1973г. Проверим автоматическим подбором моделей, какая является оптимальной на основании минимизации критерия AIC.

$$AIC = -2 \log(L) + 2(p + q + k + 1) \quad (9)$$

Таблица 2: Подбор модели на основании критерия AIC

Модель	AIC
ARMA(2,2)	Inf
ARMA(0,0)	2216.257
ARMA(1,0)	2209.809
ARMA(0,1)	2210.473
ARMA(0,0)	2398.515
ARMA(2,0)	2211.803
ARMA(1,1)	2211.803
ARMA(2,1)	2213.807
ARMA(1,0)	2242.398

Таблица 3: Значимость коэффициентов оптимальной модели

Коэффициент	Значение	P-value
<i>ar1</i>	0.3077	0.0027
<i>intercept</i>	210200	$1.7e^{-10}$

где L — функция правдоподобия, $k = 1$ при наличии константы и $k = 0$ при ее отсутствии.

ARMA (1,0) — оптимальная модель на основании критерия AIC (автоматически не были подобраны сезонные модели)(см. таб. 2).

$$y_t = 210200 + 0.3077y_{t-1} + e_t \quad (10)$$

Оба коэффициента оказались значимыми (см. таб. 3). Построим прогнозные значения по данной модели.

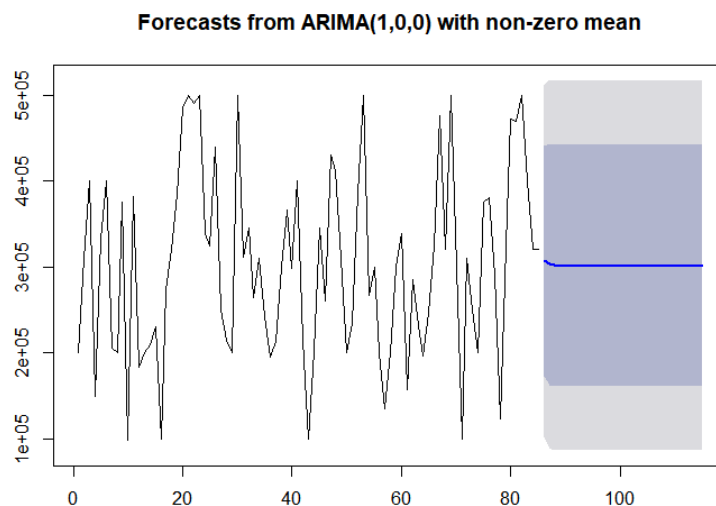


Рис. 7: Прогнозные значения с использованием модели ARMA(1,0)

Прогнозные значения остаются на уровне среднего значения для временного ряда. Проверим остатки данной модели с помощью теста *Льюнг—Бокса*:

```
Box-Ljung test
data: arima1$residuals
X-squared = 16.985, df = 20, p-value = 0.654
```

Рис. 8: Проверка остатков с помощью теста Льюнг—Бокса

Тест *Льюнг—Бокса* может быть определен следующим образом. Выдвигаются две конкурирующие гипотезы:

H_0 : данные являются случайными (то есть представляют собой белый шум);

H_a : данные не являются случайными.

Тест показал значение $p > 0.05$, следовательно, нет оснований отклонить гипотезу H_0 . Остатки представляют собой белый шум — значит, модель адекватна.

На графике ACF и PACF нет близких к границе значимости коэффициентов, в целом остатки выглядят независимыми.

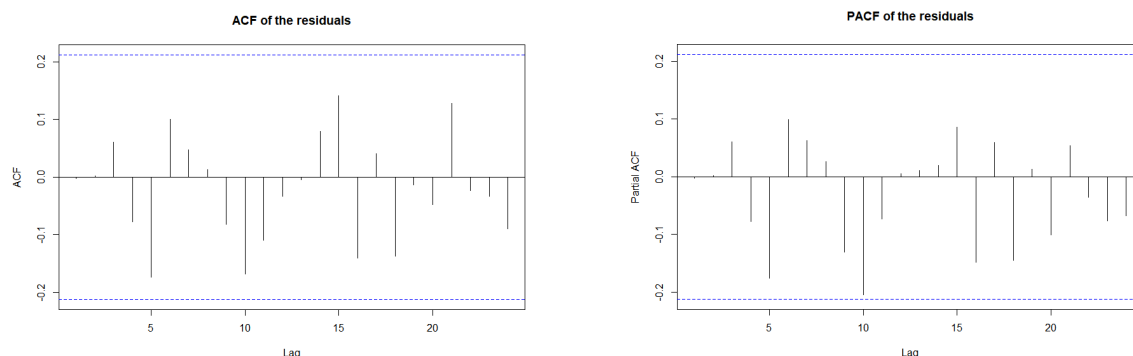


Рис. 9: Графики ACF и PACF для остатков модели ARMA(1,0).

Таким образом, можно сделать вывод о том, что полученная модель может использоваться для краткосрочного планирования оборота наличности.

1.4. Прогнозирование экспоненциальным сглаживанием

Экспоненциальные методы сглаживания временного ряда представлены в пакете RStudio функцией *HoltWinters()*. Она осуществляет вычисление сглаженного ряда методом *Хольта-Винтерса* на основе параметров α , β , γ . Если параметры не заданы, то функция пытается подобрать их методом минимизации суммы квадратов ошибок предсказания. Так как тренда и очевидной сезонности в данных нет, параметры β , γ окажутся нулевыми.

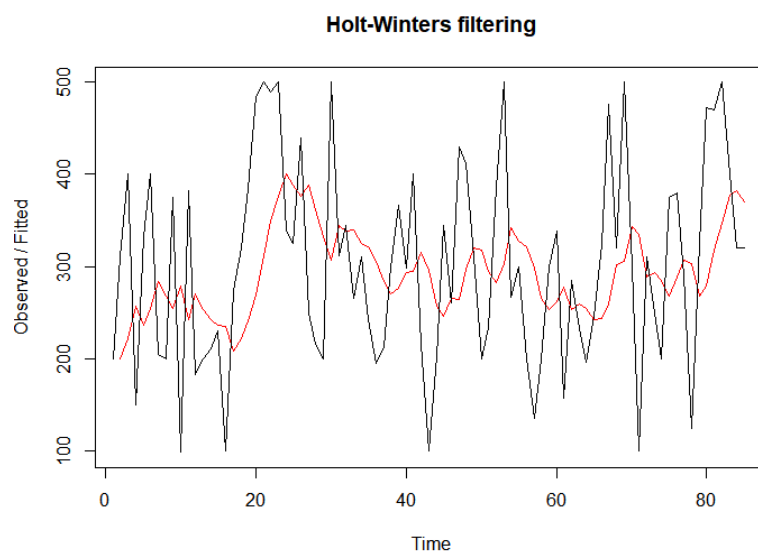


Рис. 10: Моделирование данных методом Хольта-Винтерса

Метод подобрал параметр $\alpha = 0.2$, такой параметр описывает сильное сглаживание (при параметре, равном единице, мы получим исходный ряд). Полученная модель (выделенная на рис. 10 красным цветом) не очень хорошо интерпретирует имеющиеся данные.

Значения, полученные с помощью данной модели, (см. рис. 11) аналогично значениям модели $ARMA(1;0)$ постепенно приближаются к среднему значению. Долгосрочный прогноз по такой модели сделать невозможно, но при краткосрочном планировании денежных средств можно выделить нисходящую тенденцию.

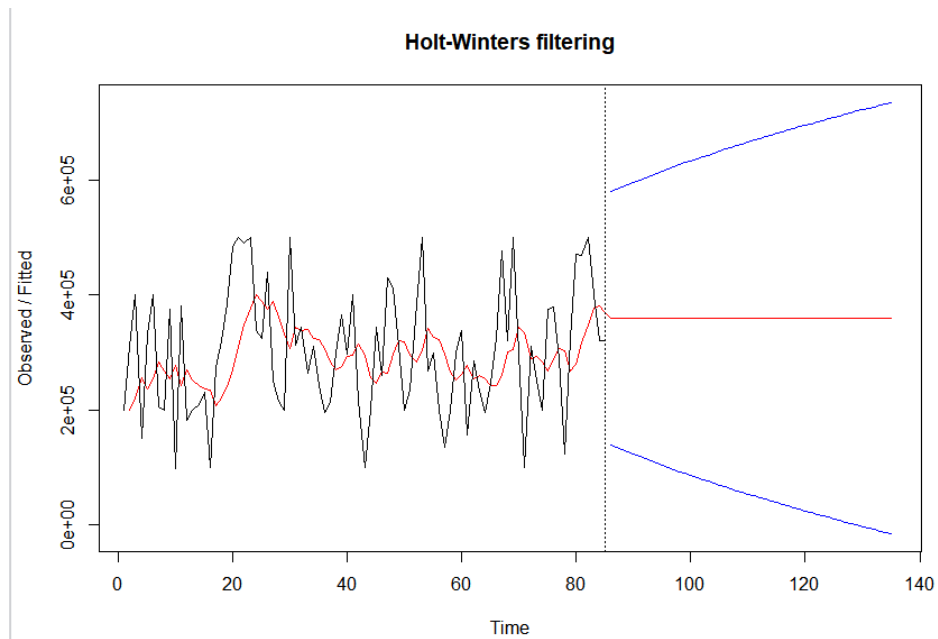


Рис. 11: Моделирование данных методом Хольта-Винтерса с прогнозными значениями

1.5. Выводы по первой главе

В первой главе были рассмотрены различные модели, построенные на основании исходного ряда входящих денежных средств. Первой была построена модель полиномиальной регрессии второй степени. В ходе анализа построенной модели были сделаны выводы, что она не описывает данные корректно. При увеличении степени можно добиться более точных результатов построения ряда, но в таком случае прогнозные значения никак не согласуются с его поведением. Построение линейной регрессии подразумевало сглаживание ряда, при этом полученная кривая очень слабо отражала исходные данные. Однако у данной модели был плюс — она отражает нисходящую тенденцию денежного потока, что может быть использовано для краткосрочного планирования. Далее была построена модель $ARIMA(1,0,1)$ с целью проверить, подходит ли модель данного типа для описания исходного ряда. Один из пара-

метров модели оказался незначимым, следовательно нет необходимости включать его в модель. Для проверки правильности построенной модели была использована функция пакета *RStudio*, которая позволяет определить оптимальную модель на основании критерия *AIC*. В ходе данной проверки была подобрана модель $ARIMA(1,0,0)$ (или $ARMA(1,0)$). Была проведена проверка остатков модели при помощи теста *Льюнг–Бокса*. Принята гипотеза о случайности остатков (то есть остатки представляют собой белый шум). При построении прогнозных значений видим нисходящую тенденцию, которая впоследствии стремится к среднему значению.

Также была построена модель экспоненциального сглаживания. При подборе параметров (α, β, γ) модели в *RStudio* результатом было отсутствие какого-либо тренда ($\beta = 0$) и сезонности ($\gamma = 0$). По итогу был получен аналог сглаженной прямой. Поведение прогнозных значений аналогично предыдущей модели.

Можно сделать вывод о том, что прогнозные значения при долгосрочном планировании стремятся к некоторому среднему значению.

Попытки описать данный временной ряд с помощью аддитивной модели (визуально наиболее подходящая модель) не удались, потому что после выделения недельной и месячной компоненты в ряду оставалась цикличность данных.

При анализе исходящего потока наличности сталкиваемся с теми же проблемами. Отсутствие тренда и очевидной сезонности не дают возможности построения адекватных моделей и прогнозных значений.

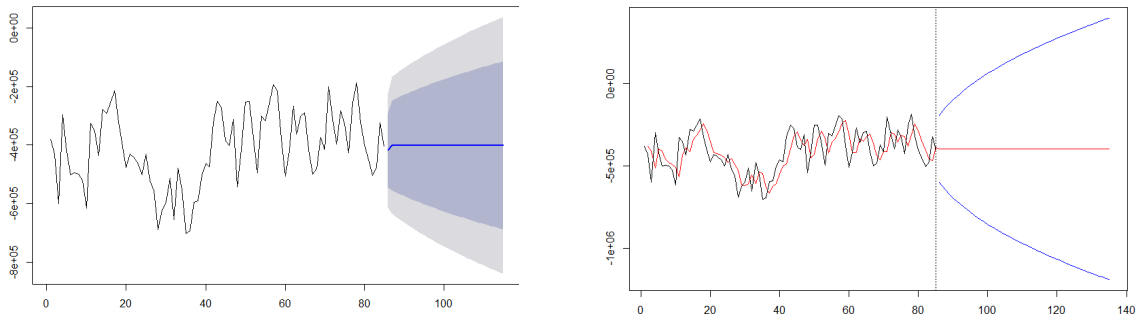


Рис. 12: Прогнозные значения, построенные для исходящего денежного потока.

Модель ARMA для исходящих денежных потоков изображена слева (см. рис. 12). Справа моделирование с помощью модель *Хольта-Винтерса*. Обе модели не дают адекватного прогноза данных, так как не могут выделить тренд-сезонные составляющие, оставляя прогноз на уровне среднего значения.

Глава 2. Моделирование движения денежных потоков в банкомате

2.1. Процесс снятия наличных денежных средств

Процесс движения денежных средств можно интерпретировать как оборот товара, который следует периодически пополнять. Для моделирования подобного рода задач удобно использовать модели управления запасом.

Для программирования процесса снятия денежных средств рассмотрим классическую модель управления запасами. Классические модели управления запасами характеризуются постоянным во времени спросом, пополнением запаса по надобности и отсутствием дефицита. Введем следующие обозначения:

Y — объем заказа (количество единиц продукции);

D — интенсивность спроса (измеряется в единицах продукции на единицу времени);

t_0 — продолжительность цикла заказа (измеряется во временных единицах)

Заказ размещается после получения информации о снижении денежных средств до минимального уровня. При рассмотрении банкоматов с функцией снятия денежных средств критическим будет являться их отсутствие. Для банков целесообразно пополнять кассеты, когда уровень денежных средств опускается до 20%. Допустим, 4,5 млн. рублей нормальный объем запаса (например, реально возможный объем 4000 банк-

нот $100 \cdot 1000 + 500 \cdot 1000 + 1000 \cdot 1000 + 5000 \cdot 1000 = 6,6$ млн.руб.). Для построения функции затрат требуется три стоимостных параметра:

K — затраты на оформление, связанные с размещением заказа;

h — затраты на хранение (затраты на единицу складированной продукции в единицу времени);

l — затраты на загрузку купюр в кассеты и пересчет возвращенных купюр.

Затраты на размещение — это затраты на услуги инкассации. Инкассация — сложный и дорогостоящий процесс, ведь в него вовлечены сразу несколько структурных подразделений, и включает в себя различные статьи расхода (зарплата сотрудников, амортизация транспортного средства, обслуживание транспортного средства, топливо, форменная одежда инкассаторов, связь, индивидуальные средства защиты и пр.). Стоимость инкассации определяется по ставке процента от объема инкассации наличных денежных средств от 0,5 до 0,55%. Затраты на хранение в данном случае сопоставляются сумме денег, которую банк мог бы потратить, если бы держал ее в обороте, а не в устройствах, и находится по формуле

$$h = ry, \quad (11)$$

где r — ставка банковского кредитования, пересчитанная в проценты за день. Ключевая ставка рефинансирования 7,5%.

Затраты на непосредственную работу с банкнотами занимают отдельную статью расхода денежных средств, включающую стоимость устройств сортировки банкнот, заработную плату сотрудников, аренду

жилых помещений и прочее. Суммарные затраты в единицу времени (обозначаются TCU —сокращение от Total Cost per Unit time) можно представить как функцию в виде суммы затрат на оформление заказа в единицу времени и затрат на хранение запаса в единицу времени, т.е. отношение суммы затрат на оформление и хранение ко времени.

$$TCU = \frac{y(K + l) + ry/2}{t_0} \quad (12)$$

Основной задачей является минимизация потерь TCU при естественных ограничениях числа купюр в кассетах $b_i \leq 2000, i = \overline{1, 4}$.

Планируемый объем расходных операций y_p рассчитывается на основании данных о суточном расходе по банкомату за предыдущие периоды следующим образом:

$$y_p = t_0 R + 2\sqrt{t_0} s, \quad (13)$$

где R — средний суточный расход по банкомату (при условии отсутствия массовых выплат и простоев банкомата), s — среднее квадратическое отклонение по выборке суточных объемов расхода по этому банкомату.

$$s = \sqrt{\frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^n (R_i - R)^2}, \quad (14)$$

где R_i — расход по банкомату в i -й рабочий день рассматриваемого периода. Планируемый объем скорректируем с помощью правила двух сигм. Почти достоверно (с доверительной вероятностью 0,954) можно утверждать, что все значения случайной величины X с нормальным законом распределения отклоняются от ее математического ожидания на величину не большую $2s$ (двух средних квадратических отклонений). При рассмотрении критических ситуаций (праздничные дни), планируемый

объем корректируется с помощью правила трех сигм ($3s$), увеличивая доверительную вероятность до 99,7%.

Исследования показали, что величина прихода и расхода наличных денежных средств за месяц в каждом дополнительном офисе и банкомате имеет нормальное распределение, а величина суммарного прихода и расхода наличных денежных средств в филиале за месяц, как композиция нормальных распределений, также подчиняется нормальному закону [8].

Рассмотрим однопериодную модель управления запасами. Предположим, что необходимо определить сумму загрузки банкомата за некоторый будущий промежуток времени, если известно, что спрос D — случайная величина с нормальным законом распределения (среднее значение равно R , среднее квадратическое отклонение — s). Запланированный объем денежных средств скорректируем с учетом ограничений: размера установленного лимита по выдаче денежных средств, суммы максимальной загрузки имеющегося комплекта кассет (2000 банкнот).

В среде Matlab была разработана процедура для вычисления суммы загрузки банкомата и дня, когда необходимо совершить инкассацию. Для этого формируется дневной расход по банкомату на несколько недель. На его основании рассчитываются суммарные затраты на каждый день. Если в банкомате на текущий день достаточно средств, то затраты приравниваются к нулю. Когда запас начинает сокращаться до минимально допустимых размеров, производится расчет затрат, которые будут расти с каждым днем. При отсутствии в банкомате средств спрос приравнивается к нулю.

Входными аргументами выступают:

- ставка рефинансирования (предотвращает простаивание денежных средств), необходимая для расчета стоимости хранения денежных средств;
- процентная ставка на инкассируемую наличность, для определения затрат на услуги инкассации;
- затраты на обслуживание банкнот;
- максимальный объем заказа, допустимый для пополнения банкомата;
- среднее значение расходуемых в течение дня средств и их среднее квадратическое отклонение.

Исходные данные

Стоимость хранения	<input type="text" value="0.0775"/>				
Затраты на транспортировку	<input type="text" value="0.005"/>				
Затраты на обработку купюр	<input type="text" value="0.001"/>				
Объем заказа	<input type="text" value="3500000"/>				
Среднее значение	<input type="text" value="356000"/>				
СКО	<input type="text" value="100000"/>				

Период между перезагрузками (дн.)	<input type="text"/>				
Сумма к отгрузке	<input type="text"/>				

Количество банкнот к загрузке (по номиналам)

	1	2			
1					↕

Рис. 13: Ввод данных в программу

Исходные данные заполняются пользователем, с учетом статистических данных по интересующему банкомату. Данные значения необходимо получить из суточного расхода наличности за 3 – 4 месяца, напри-

мер. Для иллюстрации работы процедуры введем исходные данные (см. рис. 13).

Нажатием кнопки формируются две таблицы (см. рис. 14). Первая представляет собой посуточный расход денежных средств. Размер спроса генерируется согласно способу моделирования случайной величины с нормальным законом распределения (полученное значение округляется). Рассчитываем затраты на тот момент, когда уровень запаса денежных средств исчерпан на 80 процентов. Во второй таблице получаем возможный комплект загрузки данного банкомата по номиналам (см. рис. 14). Отдельно выводятся окончательная сумма отгрузки и период между двумя инкассациями.

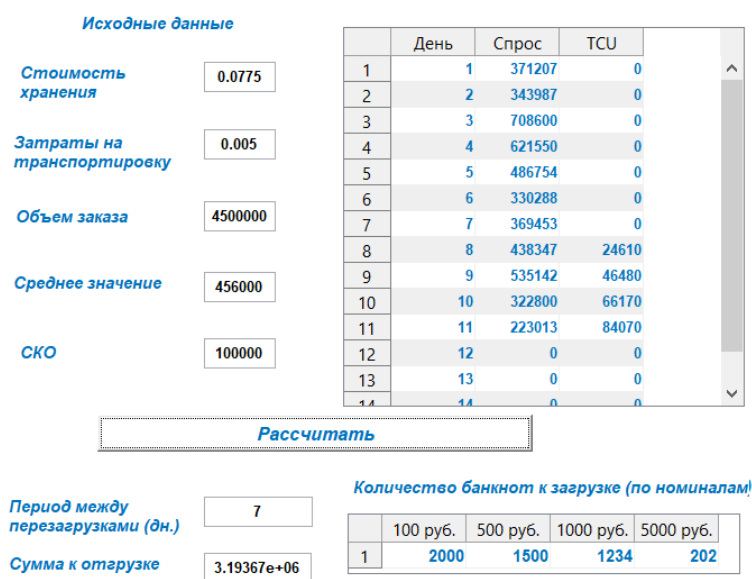


Рис. 14: Выполнение расчетов программой

При моделировании данных на основе классической задачи запаса на 7 день в кассетах банкомата будет находиться минимальная сумма наличности, и необходимо провести инкассацию. В течение следующих четырех дней следует провести инкассацию, иначе на 11 день денежных

средств в банкомате не останется. Таким образом, можно моделировать недельный спрос, выбирая нужные параметры.

2.2. Процесс внесения наличных денежных средств

Рассмотрим банкомат с возможностью внесения денежных средств (*cash-in*). Данный тип банкоматов используется гораздо реже. Фактической перегрузки банкомата в таком случае не происходило, основной задачей было опустошение кассет, для вовлечения денежных средств в оборот (избегание простаивания активов) [3]. Клиенты вносят наличные денежные средства гораздо реже. Средняя сумма вносимых наличных варьируется в зависимости от банка: как правило, средний чек порядка 15 тысяч рублей один раз месяц для погашения кредитов [11].

Рассмотрим процесс обслуживания клиентов как систему массового обслуживания (СМО).

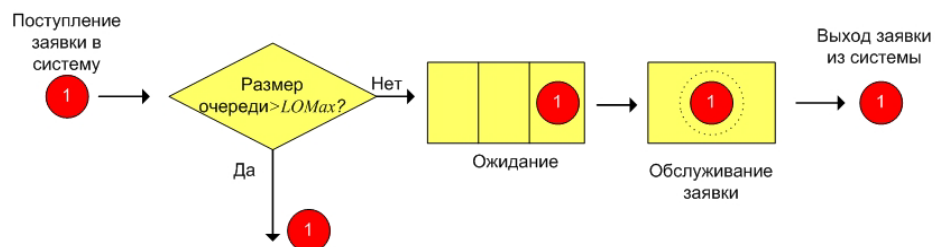


Рис. 15: Одноканальная система массового обслуживания с очередью

Система массового обслуживания представляет собой систему, которая производит обслуживание поступающих в нее требований. Обслуживание требований в СМО в банковской сфере производится обслуживающими приборами, наиболее востребованными из которых являются банкоматы. Банкоматы на внесение денежных средств встречаются намного реже банкоматов на получение, поэтому данная система характе-

ризуется очередью. Рассмотрим банкомат как систему массового обслуживания с очередью (см. рис. 15). В этом случае клиент покидает систему необслуженным, если длина очереди превышает некоторое число. Рассмотрим время между появлением клиентов и время на обслуживание как случайные величины с показательным законом распределения. Введем обозначения:

t_z — среднее время между появлением клиентов в течение дня;

t_o — среднее время на обслуживание клиента;

L_q — максимальная длина очереди.

В данной задаче поступление заявки в систему — это приход клиента. Если очередь небольшая, то клиент ожидает, когда устройство освободится, затем обслуживается и покидает систему. Если очередь слишком большая, клиент покидает систему (см. рис. 16). В Приложение В вынесен расширенный вариант модели массового обслуживания с очередью.

Среднее время между заявк	25					
Среднее время обслуживани	5					
Максимальная длина очеред	2					
Среднее число ДС	15000					
Заявка	Время прибытия заявки(ч:мин)	Поступление на обслуживание	Обслуживание		Ожидание	ДС
			Начало	Конец		
	9:00					
1	9:30	Да	9:30	9:38	0:00	18 300,00
2	9:46	Да	9:46	9:52	0:00	31 800,00
3	9:47	Да	9:52	10:10	0:05	8 400,00
4	9:49	Да	10:10	10:17	0:20	15 700,00
5	10:12	Да	10:17	10:18	0:05	13 500,00
6	10:46	Да	10:46	10:46	0:00	31 600,00
7	11:29	Да	11:29	11:31	0:00	33 700,00
8	12:00	Да	12:00	12:02	0:00	16 200,00

Рис. 16: Моделирование работы банкомата

Время начала обслуживания первой поступившей заявки равно времени ее поступления. Начиная со второй заявки, эта величина будет определяться как максимальное значение из момента окончания обслуживания предыдущей заявки и времени поступления текущей.

Период ожидания равен разности времени начала обслуживания и времени поступления.

Значения столбца *Длина очереди* характеризуют число заявок, ожидающих обслуживания к моменту поступления текущей. Оно рассчитывается путем подсчета тех значений в столбце *Начало обслуживания*, которые превышают время поступления текущей заявки. В зависимости от полученного значения определяется, поступит ли заявка на обслуживание. Если значение больше максимально допустимой очереди, то заявка покидает систему.

Таким образом можно сформировать имитационную модель работы банкомата на сутки и оценить его наполняемость на конец суток. При анализе движения денежных средств большой интерес представляют точные данные.

На основе имеющейся задачи массового обслуживания построим ежедневный расход на *25 дней*. Деньги, хранящиеся в банкомате, можно называть неработающими активами. Предположим, что максимальная неактивная сумма составляет *1,5 млн.руб.* Введем входные данные в программу для получения таблицы с рассчитанными средствами, внесенными в банкомат(см. рис. 17).

При моделировании такого вида банкомата проведение инкассации назначается на 14 день. Данные банкоматы редко инкассируются в связи с переполняемостью кассет. Важно отслеживать в них простаивание денежных средств и стараться его избегать. Код программы представлен в Приложении Б.

Время между	20		День	Внесенная наличность	Ден. средства
Среднее время на обслуживание	5	1	1	82795	82795
Максимальная длина очереди	2	2	2	91918	174713
Среднее число денежных средств	40000	3	3	65083	239796
СКО	7500	4	4	107552	347348
Рассчитать		5	5	65501	412849
		6	6	66466	479315
		7	7	77618	556933
		8	8	64532	621465
		9	9	130845	752310
		10	10	74622	826932
		11	11	117321	944253
		12	12	72507	1016760
		13	13	72108	1088868
		14	14	132919	0

Рис. 17: Моделирование работы банкомата на внесение наличности

2.3. Банкомат с системой замкнутого обращения наличности

Банкоматы с замкнутым циклом обращения денежных средств способны принимать, возвращать (при наличии бракованных купюр или при отмене транзакции клиентом) и выдавать наличные деньги.

Технология работы ресайклингового банкомата (на примере устройства *ProCash 3100*) реализована следующим образом (см. рис. 18):

- 1) При приеме наличных банкноты, предварительно помещенные в приемный лоток (*Input tray*) пачкой, на первом этапе операции депонирования проходят покупюрную проверку в многопроцессорном модуле детектирования.
- 2) При обнаружении отбракованные банкноты (т.е. фальшивые купюры и купюры, имеющие существенные повреждения, отклонения от существующих стандартов и дефекты) изымаются и возвращаются в лоток выдачи (*Output tray*).
- 3) Банкноты, прошедшие проверку, сразу же размещаются в барабане промежуточного/временного хранения (*Escrow*).
- 4) После получения от клиента подтверждения на проведение опера-

ции депонирования банкноты равномерно размещаются на поверхности барабанов накопителя наличных (*Drum 1–4*) или в депозитных кассетах (*Box 1–3*). Логика поступления купюр в барабаны и депозитные кассеты зависит от индивидуальных настроек банка.

- 5) В случае если клиент не подтвердил операцию депонирования, банкноты возвращаются в лоток выдачи. Если клиент не изъяс банкноты из лотка выдачи, они сбрасываются в отдельную Retract-кассету (*Retract Box*).
- 6) При проведении операций по выдаче наличных банкноты могут набираться в пачку как из барабанов, так и из кассет выдачи.
- 7) Если модуль выдачи определяет наличие сдвоенных банкнот в набранной пачке, то транзакция немедленно прекращается, и вся пачка целиком сбрасывается в кассету отбраковки (*Box 1/ Reject Box*).
- 8) Если клиент не изъяс банкноты из лотка выдачи, они сбрасываются в отдельную Retract-кассету (*Retract Box*).

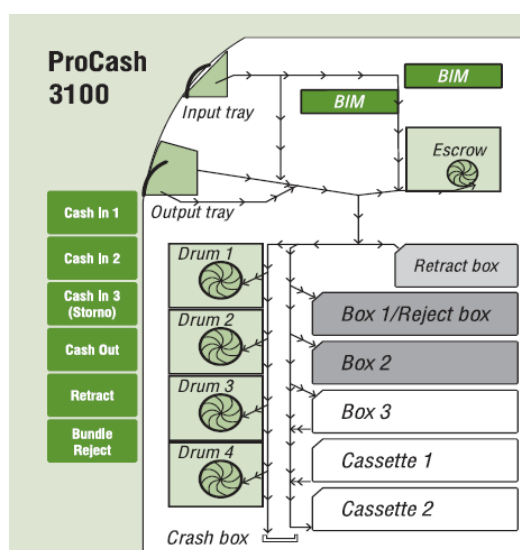


Рис. 18: Схема реализации технологии ресайклинга в банкомате

На практике стандартные банкоматы заменяются ресайклинговыми быстро растущими темпами из-за их возможности значительно снизить стоимость логистики. Данные банкоматы показывают высокий потенциал для повышения эффективности путем снижения количества необходимых инкассаций.

Объединяя функции *cash-in* и *cash-out* в одном устройстве, получим банкомат с функцией ресайклинг. Особенностью является наличие дополнительных модулей (барабанов), на которых хранятся внесенные наличные, которые впоследствии могут выдаваться клиентам, что делает устройство в некоторой степени самодостаточным. В данном банкомате может возникнуть два критических состояния:

- 1) недостаток денежных средств на выдачу клиентам;
- 2) избыток денежных средств, то есть отсутствие возможности на внесение наличности.

Очевидно два этих состояния не могут возникнуть в один момент, поэтому задачей инкассации будет либо только пополнение кассет, либо извлечение переполненных отсеков, служащих на прием денежных средств.

Введем необходимые переменные:

c — ограниченная емкость банкомата;

S^0 — уровень запаса на момент принятия решения об инкассации;

r, k, l — затраты на обслуживание банкомата;

Y^t — сумма исходящих денежных средств;

Y_p^t — сумма денежных средств на пополнение банкомата;

H^t — сумма входящих денежных средств (также сумма, которую необходимо вернуть в депо;

$z^t \in \{0, 1\}$ — значение равно 1, если в банкомат нужно привести заполненные кассеты, в противном случае 0;

$x^t \in \{0, 1\}$ — значение равно 1, если осуществляется возврат наличности в банк, в противном случае 0.

В момент принятия решения об инкассации (момент времени t) в АТМ находится некоторый уровень запаса S^0 . Затраты на хранение этих денежных средств в банкомате h включают в себя обслуживание работы самого банкомата и оценку денежных средств, которые банк мог бы держать в обороте. Аналогично задаче управления запасами k — затраты на размещение заказа и l — затраты на формирование кассет к отгрузке. Целью инкассации является доставка наличности (Y_p^t) при недостатке денежных средств или извлечение средств из банкомата H^t за период времени t .

Рассматривается целевая функция потерь:

$$L = rS^t + (k + l)(z^t Y_p^t + x^t H^t) \quad (15)$$

при условии соблюдения следующих ограничений:

$$S^t = S^{t-1} - z^t Y^t + x^t H^t + D \quad (16)$$

$$0 \leq S^t \leq c \quad (17)$$

$$Y^t \leq z^t (c - S^t) \quad (18)$$

$$H^t \leq x^t S^t \quad (19)$$

$$z^t + x^t \leq 1 \quad (20)$$

$$z^t, x^t \in \{0, 1\} \quad (21)$$

$$S^t, Y^t, H^t, c \geq 0 \quad (22)$$

Ограничение (16) определяет состояние запасов в текущем периоде: уровень запаса в прошлом периоде минус сумма исходящих наличных, плюс сумма входящих денежных средств, плюс спрос денежных средств в данном банкомате. Ограничение (17) определяет границы наличности, хранящейся в каждом банкомате. Ограничения (18) и (19) разрешает доставку или возврат денежных средств в банкомат только в том случае, если соответствующая двоичная переменная принимает значение 1. Ограничение (20) гарантирует, что в данный банкомат будет производиться либо доставка наличности, либо ее вывоз, в зависимости от состояния банкомата на текущий момент. Ограничения (21) и (22) определяют бинарные переменные и неотрицательность переменных соответственно.

Требуется минимизировать потери L при естественных ограничениях числа купюр в кассетах $b_i \leq 2000, i = \overline{1, 4}$. Данные естественные ограничения лимитируют емкости, предназначенные для хранения денежных средств для снятия и внесения. Снижение объема банкнот в первом случае и повышение во втором могут привести банкомат к критическому состоянию, которое повлечет за собой сбой в работе АТМ.

Для определения вида критического состояния АТМ будем сравнивать суммы внесенных и снятых наличных некоторыми H_{max} и Y_{min} . Предположим, банкомат использовал все имеющиеся барабаны для хранения денежных средств. Емкость барабанов значительно уступает объему кассеты и составляет около 250 банкнот. Следовательно максимальная сумма внесенных средств будет сравниваться с полной загруженностью 4 барабанов ($\approx 1,6$ млн.). В данном случае можно опираться на 100% наполняемость барабанов, так как банкомат сможет принимать средства в банкомат без разбивки по банкнотам в специальную кассету (*reject*). Минимальный уровень снимаемых средств будет составлять 20% от общей суммы находящихся в банкомате средств (внесенные денежные в данном случае также необходимо учесть). Для получения начальных данных будем использовать рассмотренные ранее модели. Снимаемая наличность за сутки формируется как нормальнораспределенная величина с заданными математическим ожиданием и дисперсией. Внесенные деньги в банкомат получаем суммированием заявок в СМО в течение одного рабочего дня. Код программы в пакете Matlab представлен В Приложении Б.

Остановка работы банкомата на прием денежных средств крайне редко возникает на практике, но важно отметить следующие преимущества. Во-первых, дополнительные емкости для хранения наличности увеличивают цикл инкассации, причем в несколько раз. В приведенном примере (см. рис. 19) необходимость совершить инкассацию возникает на 16 день функционирования, в то время как стандартные банкоматы *cash-in* требуют перезагрузки кассет каждые 5–8 дней [8]. Во-вторых, сокращаются расходы банка за счет экономии на количестве выездов инкассаторов и

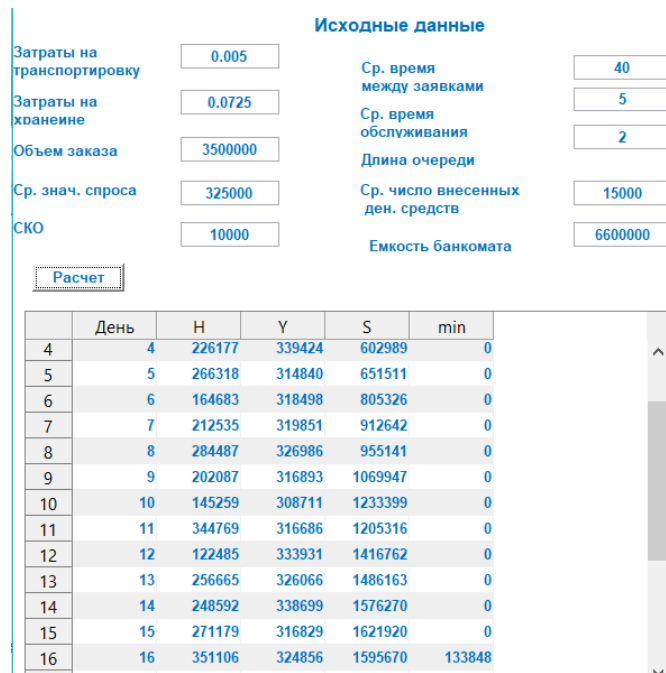


Рис. 19: Работа банкомата с замкнутой системой обращения денежных средств

количестве пересчета инкассированных средств. В-третьих, банк выигрывает на определении суммы загрузки в АТМ — нужно значительно меньше наличности, чтобы изначально загрузить банкомат, вплоть до того, что изначально банкомат может стоять пустым, а выдача будет производиться из тех средств, которые внесли клиенты.

Условие имеющейся задачи похоже на задачу транспортной логистики, в частности задачу типа *PDTSP* (*Pickup and Delivery Traveling Salesman Problem* — задача коммивояжера с загрузкой и доставкой), основной целью которой является снижение длины пути [18]. В задачах этого класса груз надо доставить конкретному потребителю. В данной задаче грузом, который следует транспортировать, выступают кассеты с банкнотами. Используя бинарные переменные, можно определить тип инкассации: на возврат денежных средств в депо или доставку наполненных кассет в банкомат. При решении такой задачи предполагается добавление ограничений на вместимость транспортных средств, огра-

ничение количества посещаемых точек. Надо найти цикл минимальной длины, начинающийся и заканчивающийся в базе (пункт 0), который обеспечивает посещение всех требуемых банкоматов. Естественно, при прохождении цикла i -й пункт должен предшествовать $(n+i)$ -му. Пусть $P = 1, \dots, n$ — пункты вывоза кассет с объемом $x_i^t H^t$ — для i -го пункта, $D = n+1, \dots, 2n$ — пункты доставки кассет объемом $z_i^t Y_p^t$. Полагаем, что в $(n+i)$ -м пункте кассеты вынимаются из транспортного средства, поэтому объем доставленного груза будет носить отрицательный характер. Множество пунктов есть $V = P \cup D \cup \{0\}$, где нулевым пунктом является депо. Вместимость транспортного средства равна Q . Известны расстояния между пунктами $c_{ij}(i, j = 0, 1, \dots, n, \dots, 2n)$, которые определены для всех пар пунктов.

В качестве переменных примем булеву величину $b_{ij}(i, j = 0, 1, \dots, 2n)$, равную 1, если транспортное средство движется от банкомата i к банкомату j , $b_{ij} = 0$ в противном случае.

Ограничения:

$$b_{ij} \in \{0, 1\}, (i, j = 0, 1, \dots, 2n) \quad (23)$$

$$\sum_{i=0}^{2n} b_{ij} = 1, (j = 0, 1, \dots, 2n) \quad (24)$$

$$\sum_{j=0}^{2n} b_{ij} = 1, (i = 0, 1, \dots, 2n) \quad (25)$$

$$b_{00} = 1 \quad (26)$$

$$\sum_{i=0}^{2n} i(b_{i(j+n)} - b_{ij}) \geq 1, (j = 0, 1, \dots, 2n) \quad (27)$$

$$\sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^{2n} (x_j^t H^t - z_j^t Y_p^t) b_{ij} \leq Q, (r = 0, 1, \dots, 2n - 1) \quad (28)$$

Целевая функция имеет вид:

$$\sum_{i=1}^{2n-1} \sum_{j=1}^{2n} \sum_{r=0}^{2n} (b_{ij} b_{i+1,r} c_{jr}) + \sum_{r=n+1}^{2n} b_{(2n)r} c_{r0} \rightarrow \min \quad (29)$$

Ограничение (27) задает правильность последовательности прохождения пунктов. Действительно, из условия (25) следует, что при некоторых однозначно определенных i', i'' справедливы равенства $b_{i''(n+j)} = b_{ij} = 1$. Тогда из условия (27) следует, что $i'' - i' \geq 1$. Поскольку i', i'' это номера пунктов $j, (n + j)$ в порядке прохождения в цикле, то нужное свойство выполняется. Условие (28) определяет вместимость транспортного средства.

Целевая функция (29) предполагает нахождение цикла минимальной длины, начинающегося и заканчивающегося в депо. Второе слагаемое в целевой функции это длина дуги, замыкающей цикл.

Таким образом, добавляя имеющиеся ограничения к задаче моделирования банкомата с замкнутой системой обращения средств, можно сформулировать логистическую задачу непосредственно для бригад инкассации. Задача коммивояжера с загрузкой и доставкой расширяет область использования полученной модели для ресайклингового банкомата и может быть применима для дальнейшего исследования. Однако в данной работе основной упор направлен на анализ движения денежных средств в банкомате.

2.4. Выводы по второй главе

Во второй главе были разработаны прикладные решения для имитации движения исходящего потока в банкомате типа *cash-out*, входящего потока в банкомате типа *cash-in*, и оборота денежных средств в банкомате с ресайклингом в среде *Matlab*.

Процесс снятия наличных денежных средств рассматривался на основе классической задачи управления запасами, где исходными данными выступали коэффициенты затрат, среднедневной расход по банкомату. С их помощью составлялся нормальнораспределенный денежный спрос, и рассчитывались суммарные затраты. Вычисляется период плановой инкассации и объем денежных средств, который необходимо загрузить в банкомат.

Процесс внесения наличных денежных средств был рассмотрен как система массового обслуживания с очередью. На основании среднего времени обслуживания заявки и среднего времени между обслуживаниями была построена имитационная модель прихода клиента в течение рабочего дня (с 9:00 до 20:00). Далее формируется среднедневной приход по банкомату, и вычисляется день, когда следует опустошить банкомат.

Банкомат с системой замкнутого обращения в некоторой мере включал в себя две предыдущие задачи. Принятие решения об инкассации могло обуславливаться необходимостью пополнения кассет или необходимостью вывоза кассет. Возможность оборота входящего денежного потока значительно увеличивает периоды между инкассациями. Однако емкости, предназначенные на внесение денежных средств, значительно меньше емкостей банкоматов *cash-in*. На практике это приводит к частой наполняемости барабанов, но тем не менее при последующих снятиях де-

нежных средств другими клиентами, проблема может быть не так критична. Критично состояние, когда наряду с барабанами заполнена депозитная кассета, предназначенная для внесения денежных средств.

Заключение

Целью данной работы являлось рассмотрение возможности спрогнозировать движение денежных потоков в различных видах банкоматов с помощью математических моделей.

Актуальность данной работы определялась низкой проработанностью данной тематики в условиях широко распространения ресайклинговых банкоматов в сетях АТМ различных банков.

В ходе выполнения работы были решены следующие задачи:

- изучены теоретические аспекты процессов внесения и снятия наличности;
- проведен анализ временного ряда снятия денежных средств;
- построены прогнозные модели на основе имеющихся данных при помощи пакета *RStudio*;
- сформулирована задача на снятие денежных средств на основе задачи запасов;
- рассмотрена модель внесения наличности на основе теории СМО с очередью;
- разработана задача для банкомата с замкнутой системой обращения средств, сконструирована целевая функция потерь;
- получены процедуры для расчета длительности между инкассациями и инкассируемой наличности в среде *Matlab*;
- сформулирована транспортная задача *PDTSP*, сконструирована целевая функция нахождения цикла минимальной длины.

При построении прогнозных моделей определить наилучшую не вышло. Ни одна модель не смогла адекватно описать имеющиеся исходные данные, поэтому полученные модели следует считать удовлетворительными. Таким образом, рассмотрение моделей на основе задачи запасов и теории СМО оказались более применимыми к текущему прикладному исследованию.

Таким образом, задачи данной работы полностью выполнены, цель достигнута.

Список литературы

1. Мицель А. А., Грибанова Е. Б.: Имитационное моделирование экономических процессов в Excel. Изд-во ЮТИ (филиал)ТПУ 2016.
2. Васин Н. С. Анализ и прогнозирование движения денег в банкоматных системах. Орел: Издательство РГБ ОД, 2007.
3. Дятлов С. А., Бывшев П. В., Порошина О. Ю.: Управление ликвидностью. Санкт-Петербург :Издательство Астерион,2009. Ц 212 с.
4. Сокольников П. Прогноз снятия наличных в банкомате при помощи простой нейронной сети.—Электронный ресурс, 2016.
URL : [https : //habrahabr.ru/post/265979/](https://habrahabr.ru/post/265979/).
5. Таха Х. А. Введение в исследование операций. Москва: Издательский дом Вильяме, 2007.
6. Положение о порядке ведения кассовых операций и правилах хранения, перевозки и инкассации банкнот и монеты Банка России в кредитных организациях на территории Российской Федерации (утв. Банком России 24.04.2008 N 318-П) (ред. от 16.02.2015) (Зарегистрировано в Минюсте России 26.05.2008N 11751)
URL : www.consultant.ru/document/consdocLAW49832/.
7. Таха Х. А. Введение в исследование операций. Москва: Издательский дом Вильяме, 2007.
8. Господинова Е. А. Статистический анализ движения наличных денежных средств в региональной сети коммерческого банка. Пенза: Издательство, 2009.

9. Grant V. Farnsworth: Econometrics in R [Electronic resource]. — Electronic data, 2008.
URL : [https : //cran.r — project.org/doc/contrib/Farnsworth — EconometricsInR.pdf](https://cran.r-project.org/doc/contrib/Farnsworth-EconometricsInR.pdf).
10. Roel G. van Anholt: Optimizing logistics processes in cash supply chains, 2014.
11. Мони́на Н. Ю.: Оптимизация затрат на инкассацию банкоматной сети на основе универсальной модели загрузки банкоматов. Проблемы экономики и менеджмента. Выпуск 7 (47), 2015.
12. Gunther U., Martin A., Ritter K., Wagner T.: Cash Recycling Systems: Prediction and Optimization, 2015.
13. Grozin V., Natekin A., Knoll A.: ATM Service Cost Optimization Using Predictive Encashment Strategy, 2015.
14. Darwish S. M.: A Methodology to Improve Cash Demand Forecasting for ATM Network. International Journal of Computer and Electrical Engineering, Vol. 5, No. 4, 2013.
15. Westland, C.J.: Preference ordering cash, near cash and electronic cash. J. Organ. Comput. Electron. Commer. 12(3), 223—242 (2012)
16. Gubar, E., Zubareva, M., Merzljakova, J.: Cash flow optimization in ATM network model. Contrib. Game Theory Manag. 4, 213—222, 2011.
17. Roel G. van Anholt, Coehlo L. C., Laporte G., Iris F. A.: An Inventory-Routing Problem with Pickups and Deliveries Arising in the Replenishment of Automated Teller Machines, 2013.

18. Бронштейн Е. М.: Оптимизационные задачи маршрутизации класса PDTSP с ограничениями на вместимость транспортного средства // XII Всероссийское совещание по проблемам управления, ВСПУ-2014.

Приложение А

```
library(knitr)
library(ggplot2)
library(forecast)
library(xts)
library(dplyr)
library(sarima)
library(quantmod)
library(rusquant)
library(TSA)
library(tseries)
library(forecast)
library(arfima)
library(tseries)
library(ltsa)
library(stats4)
library(fracdiff)
library(Hmisc)
xt <- ts(cashin)
x<-xt/1000
plot(x)

Тест Дики–Фуллера
adf.test(x)
adf.test(diff(x, differences = 2))
```

```
adf.test(diff(x, differences = 1))
```

Декомпозиция модели

```
x.dec <- decompose(x)
plot(x.dec)
```

Построение автокорреляционной и частной автокорреляционной ф.

```
acf(x, main="ACF")
Pacf(x, main="PACF")
```

Построение модели ARMA

```
summary(x.arma <- arma(x, order = c(1, 0)))
summaryx.arma <- arma(xt, order = c(1, 1))
arima1 = auto.arima(xt, trace = TRUE, test = "kpss", seasonal = TRUE)
summary(arima1)
```

Анализ остатков модели

```
confint(arima1)
plot.ts(arima1$residuals)
arima1$residuals
Box.test(arima1$residuals, lag = 20, type = "Ljung-Box")
acf(arima1$residuals, lag.max = 24, main = "ACF of the residuals")
pacf(arima1$residuals, lag.max = 24, main = "PACF of the residuals")
jarque.bera.test(arima1$residuals)
```

Построение модели Хольта-Винтерса

```

xh <- HoltWinters(x, beta=FALSE, gamma=FALSE)
plot(xh)
xh
p <- predict(xh, 50, prediction.interval = TRUE)
plot(xh, p)
Acf(residuals(xh), na.action = na.omit)

```

Полиномиальные модели

```

lines(lowess(x), col="blue", lty="dashed")
title(main="Сравнение различных параметров LOESS и LOWESS")
lines(lowess(x, f=1/8), col="red", lty="dotted")
p <- predict(x, 50, prediction.interval = TRUE)
plot(x, p)
latex(summary(lowess(x)))
summary(lowess(x, f=1/8))
lines(list(x=time(x), y=loess(formula, x~time(x), degree=2, fam
lines(list(x=time(x), y=loess(x~time(x), degree=2, family="symm
legend(2007.8, 600000, c("lowess", "lowess f=1/3", "loess gaussia

```

Приложение Б

```
function pushbutton1_Callback(hObject, eventdata, handles)
format bank ;
h= str2double(get(handles.edit1, 'String'));
m= str2double(get(handles.edit2, 'String'));
y= str2double(get(handles.edit3, 'String'));
sred1= str2double(get(handles.edit4, 'String'));
sko= str2double(get(handles.edit5, 'String'));
tz= str2double(get(handles.edit6, 'String'));
t0= str2double(get(handles.edit7, 'String'));
l= str2double(get(handles.edit8, 'String'));
sred= str2double(get(handles.edit9, 'String'));
b=str2double(get(handles.edit10, 'String'));

colnames = {'День', 'H', 'Y', 'S', 'min'};

fid = fopen('C:\Users\809700\Documents\матлаб\res.txt', 'w');
fid2 = fopen('C:\Users\809700\Documents\матлаб\smo1.txt', 'w');

g=0; a=0; t=0;r=0;s1=0;ds=0;O=sred1;
for w = 1 : 25
N = 30; n9 = 540; ts=0; tw=0;k=0; s=0;
for i = 1 : N
t01 = round(-t0*log(rand()));
tz1 = round(-tz*log(rand()));
```

```

n9 = n9+tz1;
ts= round(ts+ t01 - tz1);
tk=n9+t01;
tn=max(n9, tk);

if ts > 0;
    tw=ts;
else
    tw=0;
end;

if tn > n9;
    k=k+1;
end

if n9 > 1200;
    break;
end
ds= abs(round((normrnd(sred, 7500))));
s=s+ds;
formatSpec = '%2d %5d %5d %5d %8.5d %8.5d %8.5d %8.5d
%8.5d \r\n';
fprintf(fid2, formatSpec, i, t01, tz1, n9, ts, tw, tn, tk);
end;

```



```

d = round(normrnd(sred1 , sko));
g=g+d;
    if g >0.8*y
        r=r+((m*y+h*y/2)/w);
    else
        a=a+1;
        r=0;
    end
s1=s;
O=O-s1+d;

if (O >0.2*b)&(s1>d)
    r=round(r+(m*O+h*s1));
elseif (O >0.2*b)&(s1>d)
    r=round(r+(m*O+h*d));
else
    a=a+1;
    r=0;
end
formatSpec = '%2d %8.3d %8.3d %9.3d %9.3d\r\n';
    fprintf(fid , formatSpec ,w' ,s1' ,d' ,O' ,r');

end;
fclose(fid);
fclose(fid2);
fid = fopen('C:\Users\809700\Documents\матлаб\res.txt' , 'r')

```

```
Data=fscanf(fid,'%g ',[5,25]);  
set(handles.table1,'data',Data,'ColumnName',colnames);
```

Приложение В

Моделирование работы банкомата на внесение наличных денежных средств.

Заявка	Время прибытия заявки(ч:мин)	Время ожидания	Длина очереди	Поступление на обслуживание	Время на обслужи вание	Время на обслужи вание (ч:мин)	Время между заявками	Обслуживание		Ожидание	ДС
								Начало	Конец		
	9:00										
1	9:13	0	0	Да	1	0:01	13	9:13	9:14	0:00	25 700,00
2	9:35	0	0	Да	39	0:39	22	9:35	10:15	0:00	23 300,00
3	9:53	17	0	Да	12	0:12	17	10:15	10:27	0:22	11 700,00
4	9:55	12	1	Да	28	0:27	2	10:27	10:55	0:31	8 200,00
5	10:12	37	2	Да	6	0:05	17	10:55	11:01	0:42	1 300,00
6	10:28	26	1	Да	33	0:32	16	11:01	11:34	0:32	10 000,00
7	10:49	43	2	Да	30	0:29	21	11:34	12:03	0:44	21 300,00
8	11:21	52	1	Да	7	0:06	32	12:03	12:10	0:42	14 600,00
9	12:24	26	0	Да	8	0:08	63	12:24	12:32	0:00	23 900,00
10	12:30	0	0	Да	32	0:32	6	12:32	13:04	0:01	15 800,00
11	12:39	26	0	Да	2	0:02	9	13:04	13:07	0:25	12 800,00
12	12:42	20	1	Да	25	0:25	3	13:07	13:32	0:25	16 300,00
13	12:45	42	2	Да	3	0:02	3	13:32	13:35	0:47	18 900,00
14	12:52	42	3	Нет	16	0:15	8				-
15	12:54	50	3	Нет	20	0:20	2				-
16	13:08	68	1	Да	21	0:21	14	13:35	13:56	0:26	21 100,00
17	13:22	76	2	Да	15	0:14	14	13:56	14:11	0:34	29 400,00
18	14:05	77	0	Да	14	0:14	43	14:11	14:25	0:05	15 600,00
19	14:23	48	0	Да	63	1:02	18	14:25	15:28	0:01	24 800,00
20	14:30	93	0	Да	86	1:26	7	15:28	16:54	0:57	3 600,00
21	15:07	171	1	Да	4	0:04	37	16:54	16:58	1:46	22 200,00
22	15:10	139	2	Да	17	0:17	3	16:58	17:15	1:47	19 700,00
23	15:32	153	2	Да	25	0:24	22	17:15	17:40	1:43	4 100,00
24	15:51	156	3	Нет	10	0:09	19				-
25	16:03	147	3	Нет	2	0:01	12				-
26	16:09	137	3	Нет	22	0:21	6				-