

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Яндовский Павел Александрович

Магистерская диссертация

**Математическое моделирование распределения
потоков в электросетях**

Направление 01.04.02

«Прикладная математика и информатика»

Магистерская программа «Математическое и информационное обеспечение
экономической деятельности»

Научный руководитель,
кандидат физ.-мат. наук,
доцент
Крылатов А. Ю.

Санкт-Петербург

2018

Содержание

Введение	3
Обзор литературы	4
Глава 1. Особенности функционирования систем электроснабжения ...	7
1.1. Графики электрических нагрузок	7
1.2. Рынок электроэнергии	12
Глава 2. Математическое моделирование сетей электроснабжения	16
2.1. Математическое моделирование распределения энергии в электросетях	16
2.2. Оптимизация производства и распределения электроэнергии с множеством производителей и одним потребителем	19
2.3. Оптимизация производства и распределения электроэнергии с множеством производителей и потребителей	21
Глава 3. Организация работы умной сети электроснабжения с несколькими производителями и потребителями электроэнергии	24
3.1. Синхронизация генераторов при параллельной работе	24
3.2. Автоматизация работы умной сети электроснабжения	30
3.3. Перспективы внедрения	32
Заключение	34
Список литературы	35

Введение

В настоящее время в мировой энергетике прослеживается стойкая тенденция к увеличению производства и потребления энергии. Даже с учетом значительных структурных изменений в промышленности и перехода на энергосберегающие технологии, потребности в электроэнергии будут увеличиваться.

Задача распределения потоков электроэнергии в электрических сетях является сложной актуальной вычислительной задачей и крайне востребованной с практической точки зрения. Данной теме посвящено много научных статей и книг, разработано большое количество математических моделей и методов их решения, что свидетельствует о необходимости изучения задач по данной тематике. В то же время существуют определенные постановки задач, для которых недостаточно широко описаны математические модели или нет готовых и эффективных методов их решения. К таким постановкам можно отнести случай совместного одновременного использования электросети несколькими поставщиками и потребителями электроэнергии.

Настоящее исследование посвящено вопросам оптимизации производства и распределения электрической энергии в сетях с множеством поставщиков и потребителей, а также возможным проблемам при практической реализации данной концепции в контексте умной сети электроснабжения.

Обзор литературы

Бурное развитие энергетического рынка способствовало появлению большого количества производителей электроэнергии, и распределяющие сети столкнулись с большими требованиями по всему миру. Данные обстоятельства привели к стимуляции исследований для решения возникающих проблем. Первые модели оптимизации были направлены на проблему экономичного распределения нагрузки. Эта задача состоит в поиске оптимального потребления энергии от нескольких производителей и ассоциируется с оптимальным потокораспределением: впервые ее сформулировал Карпентир [1]. Затем, основы производства и управления были широко обсуждены в работе Вуда и Волленберга [2]. Однако, физические и технические свойства распределяющей сети могут внести значительный вклад в итоговую стоимость, в то время как топология сети влияет на оптимальное производство и использование энергии. Бон, Караманис и Швеппи [3] были первыми, кто исследовал модель ценообразования в зависимости от производства и распределения электроэнергии. В работе Крю и Кляйндофера [4] классическая модель «пиковой нагрузки» была расширена четырьмя способами для отражения передачи и затрат на передачу. Исследование предназначалось для содействия экономической эффективности использования всей энергосистемы.

Поскольку электрические сети не могут управляться через навязывание тока маршрута движения, исследователи сосредоточились на разработках оптимального управления выработкой электроэнергии, физических аспектах сети, генерацией и распределением, ценообразованием. Разработанные Боном [3] принципы краткосрочной цены на передачу получили дальнейшее углубленное изучение с учетом определенных свойств распределяющих систем [5]. В условиях ограничений на передачу, экономичное распределение нагрузки было определено, как максимизация выгод за вычетом затрат

электростанций и характеристик распределяющей сети [6]. Благодаря этому определению и соответствующей математической формулировке появились новые возможности для организации рынка электроэнергии. Исследователи также получили новые направления для дальнейшей работы.

Чао и Пек [7] обратили внимание на тот факт, что распределение тесно связано с рыночной конкуренцией в электроэнергетике. Владелец некоторой части распределяющей сети может предлагать цену за передачу мощности, что соединяет потребителей с производителем энергии. Таким образом, у потребителя есть набор альтернативных поставщиков и, следовательно, расширение передачи опирается на рыночные силы [8]. Действительно, рынок может решить, какая комбинация финансовых прав является наиболее выгодной для производства, потребления и передачи электроэнергии [9]. Ряд авторов [10] рассматривали передачу по правилам Региональной Транспортной Организации и предоставили общую формулировку соответствующей модели аукциона. Метод распределения нагрузки для рынков электроэнергии, делящихся на оптовые и розничные, был предложен Янгом, Чжаном и Ма [11]. Разумно разделить энергорынок на рынок электроэнергии и мощности: рынок электроэнергии имеет дело с переменными издержками производства, а рынок мощности привлекает капиталовложения [12].

Большая работа была проделана в области управления спросом и реагирования на спрос. Основные механизмы цены для систем с одним производителем и множеством потребителей описаны в [13, 14]. Распределенная генерация и хранение рассматриваются в работе [15]. Формирование коалиций для локальных сетей изучается в [16, 17] с использованием методов кооперативной теории игр. Обобщенное равновесие в динамических играх с несколькими лидерами-последователями исследуется в [18, 19, 20]. Однако, в данных работах не учитываются вопросы топологии и перегруженности энергосистемы в линиях электропередачи. Обслуживание распределительной сети имеет решающее значение для предотвращения

перегрузок и отключений в сети.

Важно отметить, что методы маршрутизации их транспортной теории не могут применяться непосредственно к электрическим сетям из-за физической специфики электричества [21]. Электрические потоки распределяются в соответствии с законами Кирхгофа и нельзя произвольно маршрутизировать их. Тем не менее, Патриксон [22] указал, что классическая модель энергосистемы может быть представлена в виде оптимизационной задачи распределения потоков. В нашем случае потребители имеют свои конкретные потребности в электроэнергии и преследуют цель минимизации затрат. Поэтому можно сформулировать конкурентную игру потребителей. Соответствующие модели были изучены в [23, 24, 25]; разработаны в [26, 27].

Глава 1. Особенности функционирования систем электроснабжения

1.1. Графики электрических нагрузок

Определение расчетных значений электрических нагрузок является начальной задачей проектирования электрической системы. Зачастую режим работы электроприемников не является постоянным: они могут работать неодновременно, с неполной нагрузкой, в аварийных режимах. Из-за этого нельзя для определения расчетных значений применить простое сложение установленных мощностей отдельных электроприемников. Поэтому на практике применяется понятие расчетного тока – это средний ток, приводящий к аналогичному износу изоляции кабелей и нагреву проводника, что и ток переменной нагрузки за то же самое время. По расчетному току проводится подбор электрооборудования сети, питающих кабелей и других устройств.

Основными видами нагрузок являются активная мощность P , реактивная мощность Q и ток I . Графиками электрических нагрузок называют кривые изменения соответствующих параметров - $P(t), Q(t), I(t)$. График может быть построен как для отдельного электроприемника, так и для группы. Последний строится как сумма отдельных графиков электроприемников.

На практике построение суточных графиков происходит по показаниям счетчиков электроэнергии, которые снимают не моментальные данные, а усредненные за некоторый промежуток времени, как правило, 30 минут. Поэтому графики нагрузок при эксплуатации получаются в виде ступенчатой кривой (рис. 1.1 [28]).

Расчетной нагрузкой $P_{\text{расч}}$ называется величина максимальной средней получасовой нагрузки за наиболее загруженную смену. По данной нагрузке производится расчет количества и мощности питающих кабелей, устанавливаемых трансформаторов и другого оборудования.

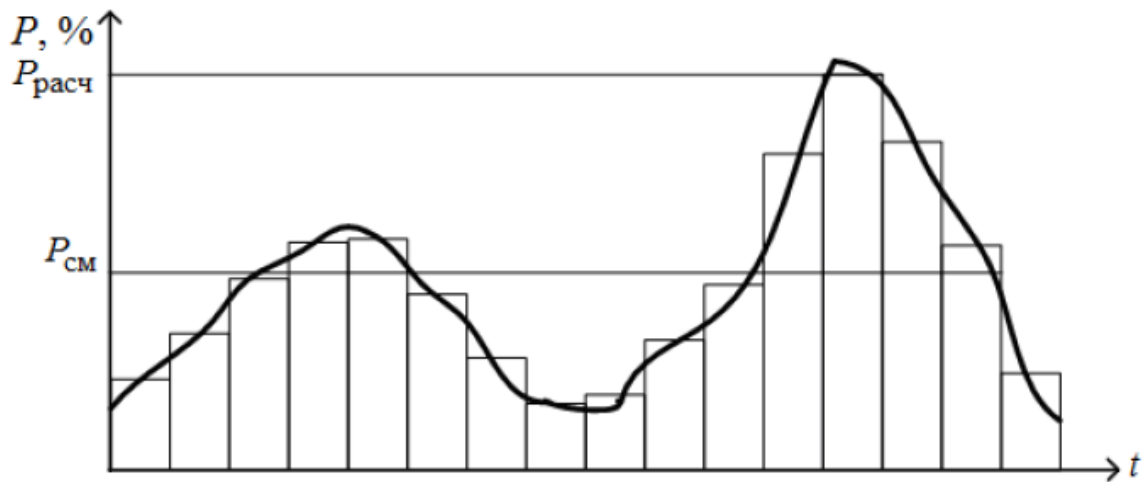


Рис. 1.1. График нагрузки максимально загруженной смены

Графики нагрузок можно построить по продолжительности, как суточные, так и годовые. В суточных по продолжительности по оси абсцисс откладываются продолжительности работы по каждой величине нагрузки, по оси ординат — соответствующие величины нагрузки.

Годовой график по продолжительности строится по характерным суточным графикам зимнего и летнего дней и представляет собой ступенчатую кривую убывания нагрузки в течение года — 8760 часов (рис. 1.2 [28]). Отметим, что площадь под графиками по продолжительности выражает потребление активной электроэнергии.

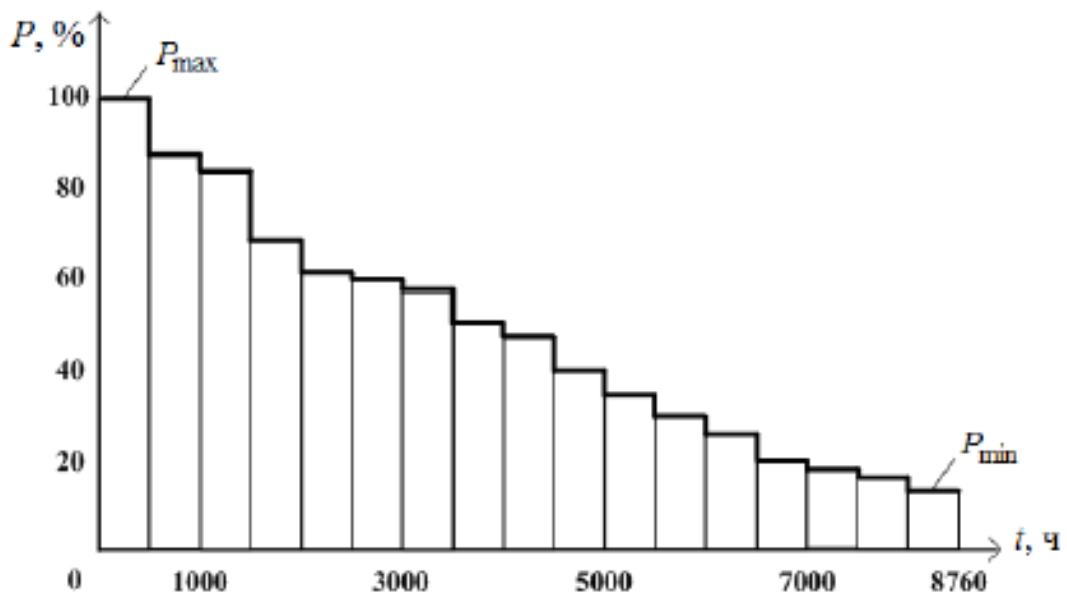


Рис. 1.2. Годовой график нагрузки по продолжительности

На каждом предприятии, в зависимости от его специфики и отрасли, характерный график нагрузок будет свой. На рис. 1.3 и рис. 1.4 [28] приведены графики нагрузок предприятия черной металлургии и ремонтно-механического завода соответственно.

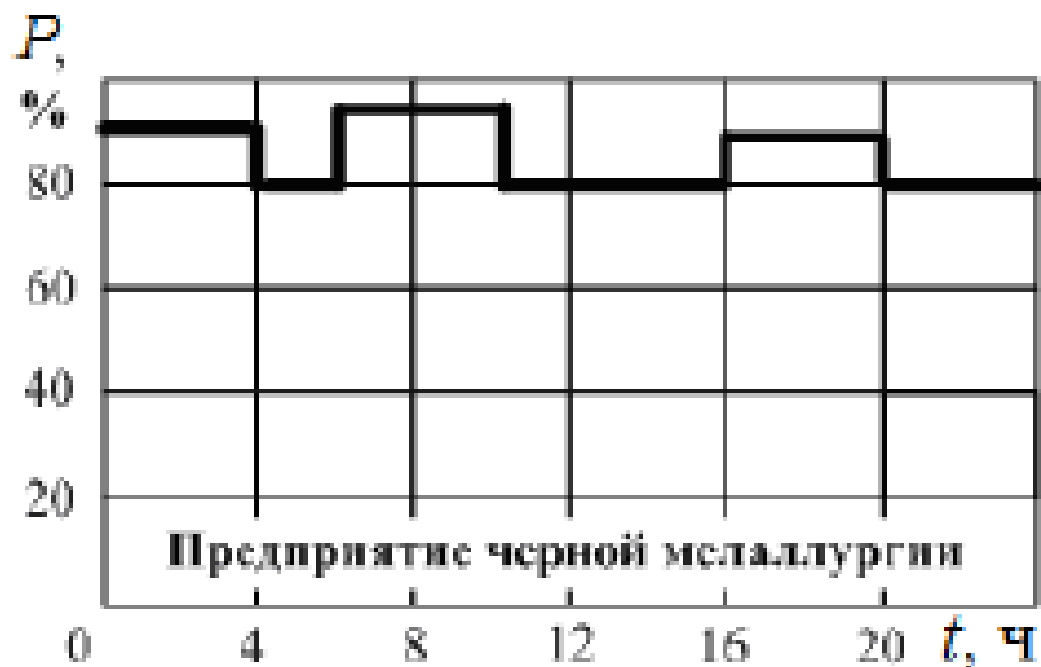


Рис. 1.3. Суточный график электрических нагрузок предприятия черной металлургии

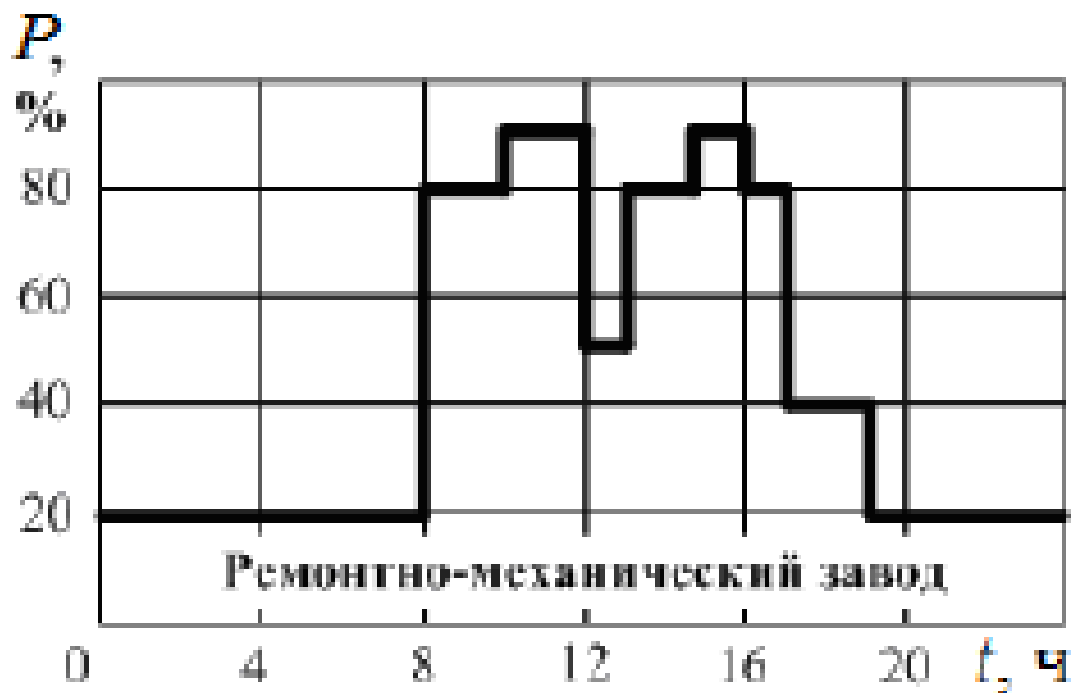


Рис. 1.4. Суточный график электрических нагрузок ремонтно-механического завода

На практике, суточные построение суточных графиков электрической нагрузки необходимо для закупки и получения электроэнергии. Каждый день формируется график потребителя на следующие сутки с последующей передачей в АО «СО ЕЭС». Системный оператор суммирует запрашиваемый объем электроэнергии на сутки и планирует генерацию имеющимися мощностями. Случай несоответствия плану, как занижение потребления, так и его превышение, является аварийным и влечет либо аварийный сброс теплоносителя на генерирующем оборудовании, либо ввод резервных мощностей. В любом случае, эта ситуация приводит к наложению штрафных санкций к потребителю, неправильно указавшему свой график на сутки.

В отдельных случаях у потребителей имеются собственные генерирующие мощности для покрытия или всей, или части потребности в электрической энергии. В первом случае режим работы электроустановок называют автономным или островным. Такой режим выбирают, когда подключение к существующим сетям электроснабжения или технологически невозможно, или экономически нецелесообразно (например, удаленность от действующих ЛЭП). В таком режиме генерирующие установки подбирают так, чтобы целиком покрыть все необходимые нагрузки потребителя на любом суточном графике, учитывая при этом технологические особенности оборудования. Пример годового графика электрической нагрузки, построенного для типового предприятия, приведен на рис. 1.5.

Следующим вариантом является так называемый параллельный режим работы с электросетью. Его особенностью можно назвать частичное покрытие нагрузки (до некоего оптимального уровня) собственными генерирующими мощностями, а пиковые нагрузки – с помощью электрической сети. Пример годового графика нагрузки при таком режиме работы для того же типового предприятия приведен на рис. 1.6. Пиковые нагрузки показаны выше горизонтального отрезка.

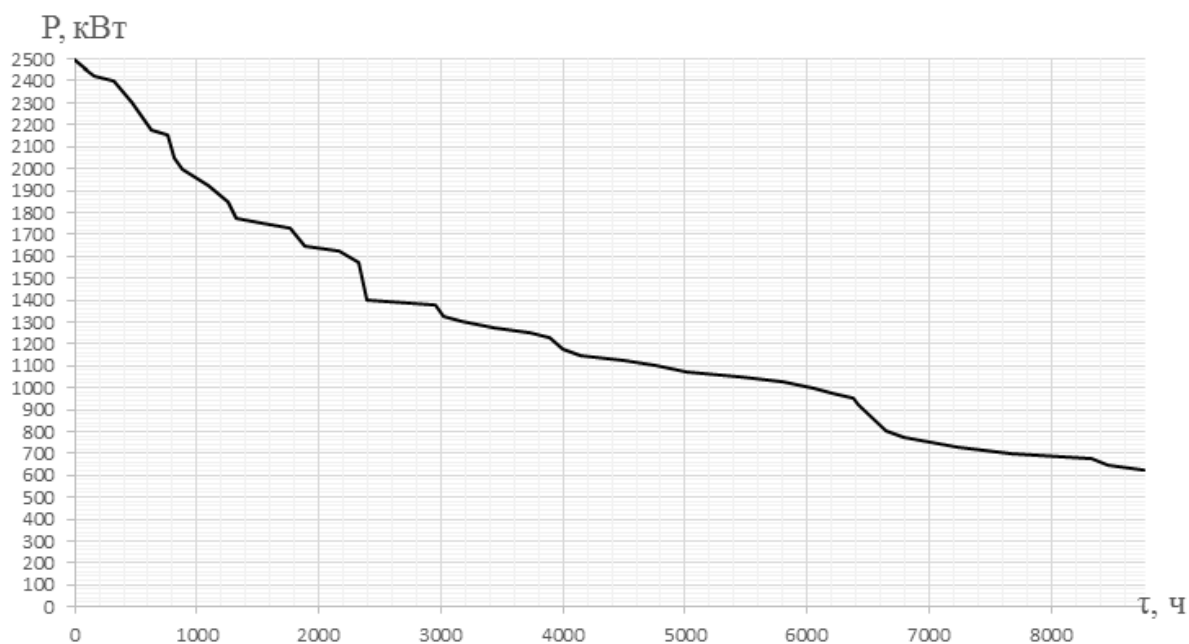


Рис. 1.5. Годовой график электрической нагрузки в автономном режиме работы

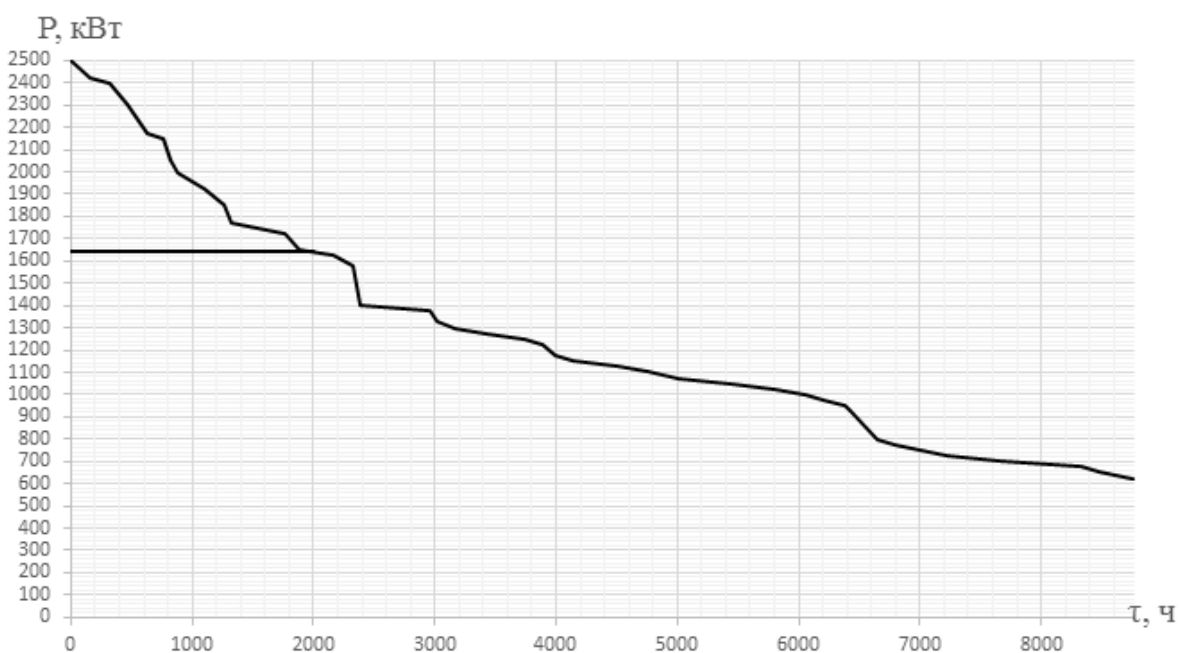


Рис. 1.6. Годовой график электрической нагрузки в параллельном режиме работы

Отдельным подвидом вышеописанного режима является случай параллельной работы с выдачей электроэнергии в сеть (рис. 1.7). Его особенностью является постоянная мощность генерирующего оборудования, покрытие пиковых нагрузок с помощью электросети и продажа в сеть излишков. Пиковые нагрузки показаны выше горизонтального отрезка, излишки – между горизонтальным отрезком и графиком.



Рис. 1.7. Годовой график электрической нагрузки в параллельном режиме работы с выдачей

1.2. Рынок электроэнергии

Электроэнергетика возникла в конце XIX века, когда были введены в строй первые электростанции для снабжения отдельных предприятий. То время характеризовалось изолированной работой работающих станций с собственными распределяющими сетями, проложенными до конкретных потребителей. В итоге, электроэнергетические компании изначально были представлены вертикально-интегрированными структурами, осуществляющими производство и распределение электроэнергии [28].

Теоретические основы электроэнергетики на данном этапе еще не достигли понимания оптимальной работы сети, не были созданы многие электротехнические устройства, обеспечивающие современный уровень электроснабжения. В частности, электроэнергия передавалась на низком напряжении, без трансформации, что приводило к высоким удельным потерям при распределении и, как следствие, к небольшой дальности передачи. Из-за такой ситуации строительство электростанций велось, как правило, в крупных городах с высокой концентрацией потребителей и

сопровождалось большой конкуренцией. Кроме того, кабельные трассы выполнялись воздушным путем (ЛЭП), что в прямом значении опутывали города.

При дальнейшей работе исследователей и ученых (начало XX века) были изобретены трансформаторы и различные трехфазные электрические машины. Благодаря им появилась возможность выносить электростанции от потребителей к источникам энергии (реки, места добычи угля). Применение повышающих трансформаторов позволило распределять электроэнергию на большие расстояния с последующим понижением на низкое напряжение, требуемое потребителю. Это способствовало электрификации малых городов и небольших поселений и заложило основы создания крупных энергосистем.

В это же время ввиду жесткой конкуренции происходит процесс объединения небольших энергетических компаний в крупных поставщиков энергоресурсов. Помимо прочего, появилась возможность снижения затрат на производство и распределение энергии из-за отказа от параллельной прокладки ЛЭП.

В итоге, в начале XX века в США, а затем и в других странах по всему миру, начали принимать законы, которые фиксировали государственное регулирование электроснабжением регионов и населенных пунктов. Энергоснабжающие компании получили снижение издержек из-за отсутствия конкуренции, исчезновения необходимости прокладывать дублирующие линии электросети. В то же время, государственное регулирование не позволяло монополистам получать слишком высокую прибыль, что положительным образом сказывалось на общественных издержках уже для потребителей.

Дальнейшее развитие электроэнергетики (до последней трети XX века) сопровождалось дальнейшим слиянием и укрупнением энергоснабжающих компаний, совершенствованием технологий производства, передачи и распределения электричества, повышением единичной мощности генераторов и напряжения, снижением удельных издержек.

В западных странах межрегиональные связи были развиты не очень сильно, в то время как в СССР энергосистема развивалась в сторону интеграции: отдельные региональные системы укрупнялись до нескольких регионов, затем и до единой энергосистемы, охватывающей всю страну. Это позволило передавать большие объемы электроэнергии между регионами.

К концу XX века сложилась следующая ситуация. Из-за введения энергосберегающих технологий рост потребления электроэнергии значительно замедлился. Одновременно с этим из-за инвестиционной привлекательности наметился переизбыток генерирующих мощностей, который напрямую сказывался на тарифах для потребителей. Ряд крупных технологических аварий вынудил строить межрегиональные связи, объединяя таким образом энергосистемы в одну для повышения надежности электроснабжения. Все это создало предпосылки для перехода к рыночным отношениям в сфере электроэнергетики. Естественно, полностью отказаться от регулирования было нельзя, однако было выдвинуто предложение о целесообразности конкуренции отдельных областях: производстве и поставке электрической энергии. Распределение осталось естественной монополией. Также следует отметить достижения информационных технологий, позволившие обрабатывать и передавать большой объем информации, связанной с взаимоотношением участников рынка. В итоге, на данный момент многие страны, включая Россию, перешли к конкуренции на рынке электроэнергии. В России рынок электроэнергии является двухуровневым и делится на оптовый и розничный.

На оптовом рынке продавцами электрической энергии являются генерирующие компании (электростанции). В роли покупателей выступают: потребители, закупающие электроэнергию для собственных нужд; сбытовые и сетевые компании, получающие энергию для дальнейшей перепродажи от себя; экспортные агенты, приобретающие электричество для реализации в зарубежные энергосистемы. На розничном рынке сбытовые компании могут являться уже и продавцами электроэнергии.

Следует отметить особенность функционирования оптового рынка: он работает в двух ценовых зонах. Первая предназначена для Урала и Европейской части России, вторая – для Сибири. Существуют, однако, регионы, где по технологическим особенностям сети (Дальний Восток, Калининградская и Архангельская области) нет возможности введения рыночных механизмов. В этих регионах действуют отдельные правила торговли.

Товарами на оптовом рынке являются электроэнергия и мощность. Электрическая энергия в пределах ценовых зон продается по секторам, отличающимся сроками поставки и условиями сделок. Существует сектор регулируемых договоров, сектор свободных договоров, рынок на сутки вперед и балансирующий рынок. Мощность – отдельный товар, покупка которого позволяет покупателю право требовать от продавцов мощности поддерживать генерирующее оборудование в состоянии готовности к выработке электроэнергии [29]. Рынок мощности позволяет избежать ее дефицита в средне- и долгосрочной перспективе, сформировать обязательства по поддержанию мощностей в состоянии готовности, возместить часть издержек при эксплуатации генерирующего оборудования [29]. Этот механизм введен для повышения инвестиционной привлекательности электроэнергетики и страхует работу энергосистемы.

Глава 2. Математическое моделирование сетей электроснабжения

2.1. Математическое моделирование распределения энергии в электросетях

Сеть представлена ориентированным графом (V, A) , где V – множество узлов и A – множество дуг. Перечислим узлы в V следующим образом: $V_Q = \{1, \dots, m\}$ – множество m потребителей энергии, $V_P = \{m + 1, \dots, m + n\}$ – множество n производителей энергии, $V_O = \{m + n + 1, \dots, |V|\}$ – множество всех других узлов.

Одно существенное различие между электрическими и транспортными сетями – невозможность маршрутизации потока в первом случае. Как только установятся входные и выходные токи в узлах производителей и потребителей и определятся сопротивления дуг, распределение потока тока однозначно определяется законами Кирхгофа.

Через f_{ij} обозначим поток тока, или просто поток, в направлении дуги $(i, j) \in A$. Согласно определению множества A , существует две версии каждой дуги с разными направлениями, и мы можем определить f_{ij} неотрицательно. Действительно, если энергия течет от j до i , то можно присвоить положительное значение f_{ji} и нулевое значение f_{ij} . Определим профиль потока $\bar{f} = \{f_{ij}, (i, j) \in A\}$ как вектор всех потоков в дугах.

Через $W_i = \{j \mid (i, j) \in A\}$ обозначим множество всех узлов, смежных узлу i . Тогда первый закон Кирхгофа принимает следующую форму:

$$\sum_{j \in W_i} f_{ij} - \sum_{j \in W_i} f_{ji} = d_i, \forall i \in V \quad (1)$$

где d_i – вход энергии в узле i .

Предположим, что каждая дуга $(i, j) \in A$ имеет функцию изменения напряжения $\Theta_{ij}(f_{ij})$ в зависимости от потока f_{ij} в этой дуге и сопротивления

(например, если электрическое устройство в дуге (i, j) является линейным резистором, тогда $\Theta_{ij}(f_{ij}) = R_{ij}f_{ij}$, что соответствует закону Ома для участка цепи). В соответствии со вторым законом Кирхгофа, следующее условие должно быть выполнено для любой дуги $(i, j) \in A$:

$$\pi_i - \pi_j = \Theta_{ij}(f_{ij}), \quad (2)$$

где π_i – потенциал в узле $i \in V$.

Можно утверждать, что законы Кирхгофа в установке соответствуют условиям равновесия пользователя в транспортной задаче:

$$\min_{\bar{f}} \sum_{(i,j) \in A} \int_0^{f_{ij}} \Theta_{ij}(s) ds \quad (3)$$

при условии

$$\sum_{j \in W_i} f_{ij} - \sum_{j \in W_i} f_{ji} = d_i, \forall i \in V, \quad (4)$$

$$f_{ij} \geq 0, \forall (i, j) \in A. \quad (5)$$

Дадим явное доказательство вышеприведенного утверждения для установления четкой связи между законами Кирхгофа (1), (2) и задачей нелинейной оптимизации (3) – (5).

Теорема ([30]). Законы цепи Кирхгофа (1), (2) могут быть получены через решение задачи нелинейного сетевого потока (3) – (5).

Доказательство. Рассмотрим ограниченную задачу нелинейной оптимизации (3) – (5). Лагранжиан данной задачи:

$$\begin{aligned} L(f, \pi, \eta) = & \sum_{(i,j) \in A} \int_0^{f_{ij}} \Theta_{ij}(s) ds + \sum_{i \in V} \pi_i \left(d_i - \sum_{j \in W_i} f_{ij} + \sum_{j \in W_i} f_{ji} \right) \\ & + \sum_{(i,j) \in A} (-f_{ij}) \eta_{ij}, \end{aligned}$$

где $\{\pi_i, i \in V\}$ и $\{\eta_{ij} \geq 0, (i, j) \in A\}$ являются множителями Лагранжа.

Дифференцирование Лагранжиана по f_{ij} дает:

$$\frac{\partial L}{\partial f_{ij}} = \Theta_{ij}(f_{ij}) - \pi_i + \pi_j - \eta_{ij} = 0,$$

поэтому

$$\Theta_{ij}(f_{ij}) = \pi_i - \pi_j + \eta_{ij}. \quad (6)$$

Множители Лагранжа $\{\eta_{ij}, (i, j) \in A\}$ являются неотрицательными, выполняется дополнительное условие: $(-f_{ij})\eta_{ij} = 0$. Следовательно, если $f_{ij} > 0$, то $\eta_{ij} = 0$, но, если $f_{ij} = 0$, то $\eta_{ij} \geq 0$, и из (6) получим:

$$\Theta_{ij}(f_{ij}) = \begin{cases} = \pi_i - \pi_j, & \text{если } f_{ij} > 0, \\ \geq \pi_i - \pi_j, & \text{если } f_{ij} = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Можно заключить, что решение задачи оптимизации (3) – (5), в первую очередь, удовлетворяет первому закону Кирхгофа, поскольку (1) совпадает с множеством ограничений (4) и, во-вторых, оно удовлетворяет второму закону Кирхгофа согласно (7). ■

В соответствии с формой задачи (3) – (5), Θ_{ij} для любой дуги $(i, j) \in A$ математически равна функции задержки в транспортной сети. Таким образом, нелинейную оптимизацию (3) – (5) можно интерпретировать как модель равновесия напряжения и потоков тока в электрической сети, когда потери энергии минимальны. Тем не менее, нет энергетической интерпретации целевой функции (3), которая получается как сумма интегралов вольт-амперных характеристик $\{\Theta_{ij}, (i, j) \in A\}$.

Определим путь r между двумя узлами $i, j \in V$ как упорядоченную последовательность дуг $\{(i, k_1), (k_1, k_2), \dots, (k_w, j)\}$, которая не содержит циклов. Обозначим через R множество всех возможных путей $\{r\}$ в сети.

Рассмотрим произвольный путь $r \in R$ между двумя узлами $p, q \in V$ с потенциалами π_p и π_q соответственно, состоящий из последовательно соединенных резисторов. Суммируя уравнение (7) по всем связям, определяющим путь r , получим:

$$\sum_{(i,j) \in r} \Theta_{ij}(f_{ij}) = \begin{cases} = \sum_{(i,j) \in r} (\pi_i - \pi_j) = \pi_p - \pi_q, & \text{если } \forall (i,j) \in r: f_{ij} > 0, \\ \geq \sum_{(i,j) \in r} (\pi_i - \pi_j) = \pi_p - \pi_q, & \text{если } \exists (i,j) \in r: f_{ij} = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Если целевая функция (3) выпукла, то условия Куна-Таккера являются необходимыми и достаточными. В этом случае (8) имеет четкую интерпретацию: между двумя узлами $p, q \in V$ электрической сети ток использует пути с полными разностями потенциалов, равными разности потенциалов узлов p и q и не использует пути с полными разностями потенциалов, большими, чем разность потенциалов между узлами p и q . В большой сети это может быть полезно для оценки потоков циклов.

2.2. Оптимизация производства и распределения электроэнергии с множеством производителей и одним потребителем

Рассмотрим простейшую конфигурацию (рис. 2.1). Эта система состоит из N производителей электроэнергии, подключенных к одной шине, служащей для обслуживания электрической нагрузки $P_{\text{нагр}}$. Выход каждого производителя, обозначенный через F_i , представляет собой затраты производителя. Выход каждого производителя, обозначенный через P_i , является электрической мощностью, генерируемой конкретным генератором. Общими затратами системы является сумма затрат по каждому производителю. Основное ограничение на работу данной системы заключается в том, что сумма выходных мощностей всех производителей должна равняться электрической нагрузке.

Математически задачу можно сформулировать следующим образом. Целевая функция F_T равна сумме затрат для покрытия указанной нагрузки. Задача состоит в минимизации F_T при ограничении, что сумма генерируемых мощностей должна равняться полученной нагрузке.

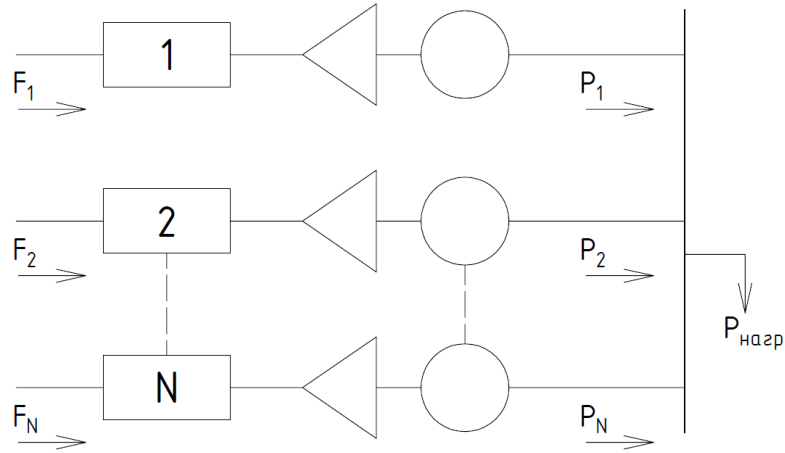


Рис. 2.1. Схема N производителей для покрытия нагрузки $P_{\text{нагр}}$

Следует отметить, что при такой постановке задачи игнорируются потери электроэнергии и другие ограничения сети. Таким образом, получаем:

$$F_T = F_1 + F_2 + \dots + F_N = \sum_{i=1}^N F_i(P_i),$$

$$\phi = P_{\text{нагр}} - \sum_{i=1}^N P_i = 0.$$

Это задача оптимизации с ограничениями, которая может быть решена формально с использованием расширенных методов исчисления, включая функцию Лагранжа.

$$L = F_T + \lambda \phi.$$

Для нахождения необходимых условий экстремума целевой функции возьмем первую производную функции Лагранжа по каждой из независимых переменных и положим их нулю. В данном случае имеем $N + 1$ переменную, N значений выходной мощности P_i и неопределенный множитель Лагранжа λ . Производная функции Лагранжа по неопределенному множителю возвращает ограничение равенства. С другой стороны, N производных по выходной мощности лают набор уравнений:

$$\frac{\partial L}{\partial P_i} = \frac{dF_i(P_i)}{dP_i} - \lambda = 0.$$

Таким образом, необходимым условием существования минимума целевой функции является равенство скоростей изменения затрат всех производителей некоторой неопределенной величине λ . Помимо этого, для каждого производителя должно выполняться два неравенства: выходная мощность должна быть не менее минимальной разрешенной мощности и не должна превышать максимальную разрешенную для конкретного генератора.

Запишем полученные условия:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dF_i}{dP_i} = \lambda, \\ P_{i.min} \leq P_i \leq P_{i.max}, \\ \sum_{i=1}^N P_i = P_{нагр}. \end{array} \right.$$

Необходимые условия можно расширить:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dF_i}{dP_i} = \lambda, \text{ если } P_{i.min} < P_i < P_{i.max}, \\ \frac{dF_i}{dP_i} \leq \lambda, \text{ если } P_i = P_{i.max}, \\ \frac{dF_i}{dP_i} \geq \lambda, \text{ если } P_i = P_{i.min}. \end{array} \right.$$

2.3. Оптимизация производства и распределения электроэнергии с множеством производителей и потребителей

Рассмотрим период планирования на следующий день, разделенный на H интервалов. Каждый потребитель электроэнергии заключает двусторонние контракты на покупку энергии с несколькими производителями для каждого интервала времени. За e_{ij}^h обозначим количество энергии, которое должно быть поставлено от производителя $j \in V_P$ потребителю $i \in V_Q$ в течение временного интервала $h \in H = \{1, 2, \dots, H\}$. Также будем использовать следующие обозначения:

$$e_i^h = (e_{i(m+1)}^h, \dots, e_{i(m+n)}^h)^T$$

для вектора контрактов i на временном интервале h , и

$$E_i = (e_i^1, \dots, e_i^H)$$

для матрицы всех контрактов i .

Потребители должны удовлетворять свои потребности в электроэнергии и как сумму для целого дня, и как минимум для каждого из интервалов времени $h \in H$. Обозначим общую потребность потребителя i через $D_i \geq 0$, а минимальную потребность того же потребителя для интервала времени h через $d_i^{min}(h) \geq 0$. Поэтому можно записать ограничение спроса для E_i :

$$1_n^T \cdot e_i^h \geq d_i^{min}(h),$$

$$1_n^T \cdot E_i \cdot 1_H = D_i,$$

где $1_k = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^k$.

Определим энергетический баланс b_k^h в каждом узле $k \in V$ для интервала времени $h \in H$:

$$b_k^h = -1_n^T \cdot e_k^h, k \in V_Q,$$

$$b_k^h = \sum_{i=1}^m e_{ik}^h, k \in V_P,$$

$$b_k^h = 0, k \in V_O.$$

Это значение отражает количество энергии, входящей или выходящей в узле в течение определенного интервала времени. Оно отрицательно для потребителей и неотрицательно для производителей, в то время как мы предполагаем нулевой энергетический баланс во всех остальных промежуточных узлах.

Потоки энергии в энергосистеме распределяются согласно законам Кирхгофа, поэтому можно найти это распределение для заданного множества энергетических балансов и известных параметров связей в сети [31]. Через $f_{kl}^h \geq 0$ обозначим поток в дуге $(k, l) \in A$ в момент времени h , а через

множество $f_h = \{f_{kl}^h, (k, l) \in A\}$ – профиль потока всех связей в момент времени h . Также обозначим через $f_h(E^h)$ зависимость потока тока от договора. Это отображение, как правило, является нелинейным, а изменение контракта одного потребителя влияет на распределение потока во всей сети.

Решение задачи распределения потоков:

$$\min_f \left(\sum_{(i,j) \in A} \int_0^{f_{ij}} \Theta_{ij}(s) ds \right)$$

при

$$\begin{aligned} \sum_{j \in W_i} f_{ij} - \sum_{j \in W_i} f_{ji} &= d_i, \\ f_{ij} &\geq 0 \end{aligned}$$

удовлетворяет первому и второму закону Кирхгофа.

Получаем игру:

$$C_i(E^*) = \min_{E_i} \sum_{h=1}^H \left(G_i^h(E^h) + T_i^h(f^h(E^h)) \right), \forall i \in V_Q$$

при ограничениях

$$D_i = \sum_{h=1}^H b_i^h, b_i^h = - \sum_{j \in V_P} e_{ij}^h, i \in V_Q,$$

где $b_i^h, i \in V_Q$ определяют энергопотоки в сетях в течение периода h . $C_i(E^*)$ – сумма затрат на производство (G_i) и на передачу (T_i) электроэнергии.

Ищем равновесие по Нэшу:

$$\min_{f^h} \left(\sum_{(i,j) \in A} \int_0^{f_{ij}} \Theta_{ij}(s) ds \right)$$

при

$$\sum_{j \in W_i} f_{ij}^h - \sum_{j \in W_i} f_{ji}^h = b_i^h, f_{ij}^h \geq 0.$$

Глава 3. Организация работы умной сети электроснабжения с несколькими производителями и потребителями электроэнергии

3.1. Синхронизация генераторов при параллельной работе

Задача оптимального распределения мощности в электрической сети получила в контексте умных сетей электроснабжения. Предполагается, что умная сеть электроснабжения отличается от обычной тем, что к ней могут быть одновременно подключены несколько производителей и потребителей электроэнергии, а установление двусторонних контрактов может производиться автоматически.

Большим вопросом остается практическая реализация данной концепции. Запуск подобной системы возможен только при строгом соблюдении целого ряда физических условий.

Ключевой проблемой работы подобных систем является возможность синхронизации работы разных генераторов, включенных в общую сеть. Синхронизацией называется процесс включения генератора на параллельную работу с другими генераторами или сетью [32]. Синхронизация с сетью предполагает обязательное выполнение следующих условий:

- равенство частот сети и подключаемого к ней генератора ($f_c = f_r$);
- равенство напряжений подключаемого генератора и сети ($U_c = U_r$);
- совпадение фаз и порядка следования фаз ($\delta = 0$).

Для анализа процессов при включении генератора воспользуемся простейшей схемой замещения (рис. 3.1). Синхронный генератор представлен источником ЭДС \dot{E}_0 с внутренним сопротивлением jx_c , а сеть –

эквивалентным генератором бесконечной мощности с напряжением \dot{U}_c . За положительное направление напряжения \dot{U}_c и ЭДС \dot{E}_0 примем направление обхода контура «генератор-сеть» по часовой стрелке, тогда при разомкнутом выключателе K на его зажимах будет действовать ЭДС $\Delta\dot{E} = \dot{E}_0 + \dot{U}_c$, которая определяется взаимным положением векторов \dot{E}_0 и \dot{U}_c .

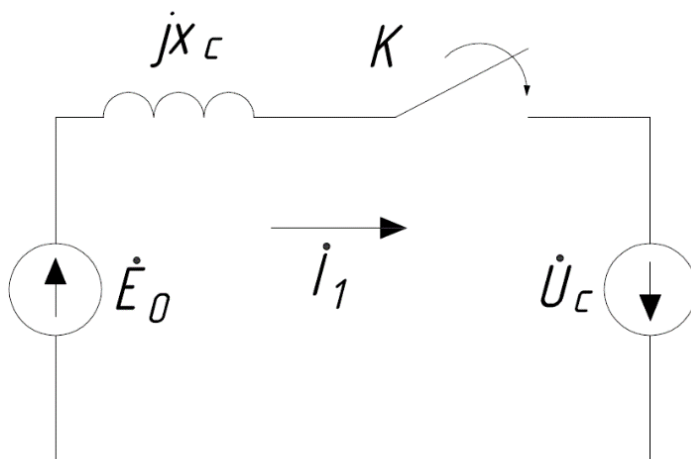


Рис. 3.1. Схема замещения при включении генератора

Если перед включением выключателя выполнить условия:

- чередования фаз генератора и сети одинаковые (векторы \dot{E}_0 и \dot{U}_c вращаются в одну сторону);
- частоты ЭДС генератора и напряжения сети равны (векторы \dot{E}_0 и \dot{U}_c неподвижны относительно друг друга);
- модули векторов \dot{E}_0 и \dot{U}_c равны, а по фазе они сдвинуты на 180° ,

то ЭДС $\Delta\dot{E}$ между контактами выключателя K будет равна нулю. Поэтому после включения генератора в сеть ток якоря останется равным нулю, $\dot{I}_1 = \frac{\Delta\dot{E}}{jx_c} = 0$, и генератор будет продолжать работать в режиме холостого хода.

Существует два способа синхронизации – точная синхронизация и самосинхронизация (грубая синхронизация). Термин точной синхронизации полнее отражает сущность метода, подчеркивая факт выполнения вышеперечисленных условий, в то время как при самосинхронизации не требуется столь точная подгонка указанных величин [32].

Процесс самосинхронизации генератора производится следующим образом (рис. 3.2). Не возбужденный генератор с обмоткой возбуждения, замкнутой на активное сопротивление, разгоняется первичным двигателем до подсинхронной частоты вращения и включается в сеть в произвольный момент времени. Затем подают возбуждение (ключ K_2 замыкают, а ключ K_1 размыкают). Возникающие в генераторе электрические моменты обеспечивают подтягивание ротора к синхронной частоте вращения и его втягивание в синхронизм.

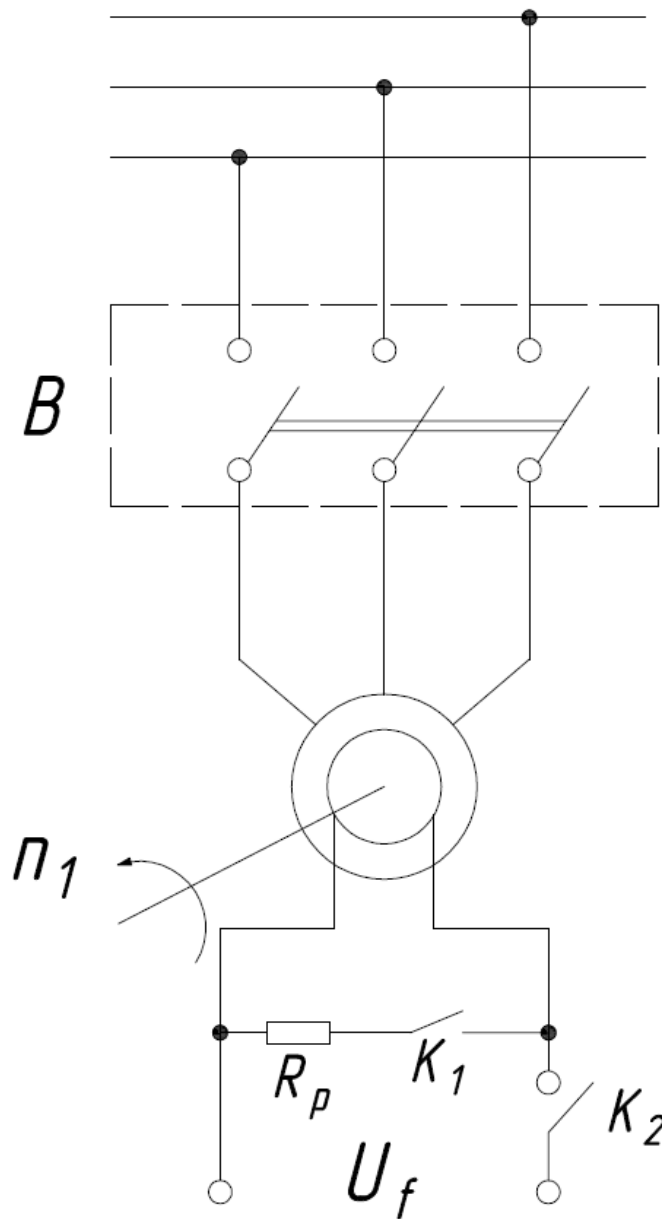


Рис. 3.2. Схема включения генератора при самосинхронизации

При самосинхронизации нет необходимости предварительного соблюдения условий синхронизации. Так как подключение генератора проходит без возбуждения, то его напряжение равно нулю, следовательно, подгонять величину этого напряжения, равно как и фазу, нет необходимости. Процесс самосинхронизации может быть произведен достаточно быстро (1-2 с), поскольку не требуется точная подгонка параметров. В этом заключается одно из главных преимуществ данного способа, особенно в аварийных режимах. Также отсутствие устройств точной синхронизации приводит к упрощению схемы и аппаратуры.

Однако при самосинхронизации возникает большой уравнивающий ток в момент включения генератора в сеть:

$$I_{\Gamma} = \frac{U_c}{x_c + x_{\Gamma}}, \quad (9)$$

где x_c и x_{Γ} – полное сопротивление сети и генератора соответственно.

Он по характеру является реактивным, вследствие чего не возникает больших толчков активной мощности и механических усилий на валу генератора. Тем не менее, каждое использование самосинхронизации является, по сути, фактом преднамеренного воздействия большого уравнивающего тока.

Также самосинхронизация сопровождается снижением напряжения на сборных шинах:

$$\Delta U = U_c - U_{\Gamma} = U_c - \left(U_c - x_c \frac{U_c}{x_c + x_{\Gamma}} \right) = U_c \frac{x_c}{x_c + x_{\Gamma}}.$$

Величина падения напряжения может достигать половины от номинального значения. Ввиду того, что на практике $x_c < x_{\Gamma}$, обычно падение напряжения составляет меньшую величину и уменьшается до нуля вследствие увеличения сопротивления генератора и работы регулятора напряжения.

Возможность использования самосинхронизации оценивается по действующему значению уравнивающего тока: если оно не превосходит 3,5 кратного значения номинального тока генератора, то допустима.

Точная синхронизация имеет другую последовательность действий (рис. 3.3). Ротор турбины разворачивается и возбуждается. Перед включением генератора в сеть выполняются действия:

- частота генератора выравняется с частотой сети ($f_c = f_r$);
- величина напряжения генератора подгоняется к напряжению сети ($U_c = U_r$);
- выбирается наиболее благоприятный момент включения, когда угол между векторами напряжения генератора и сети равен нулю ($\delta = 0$).

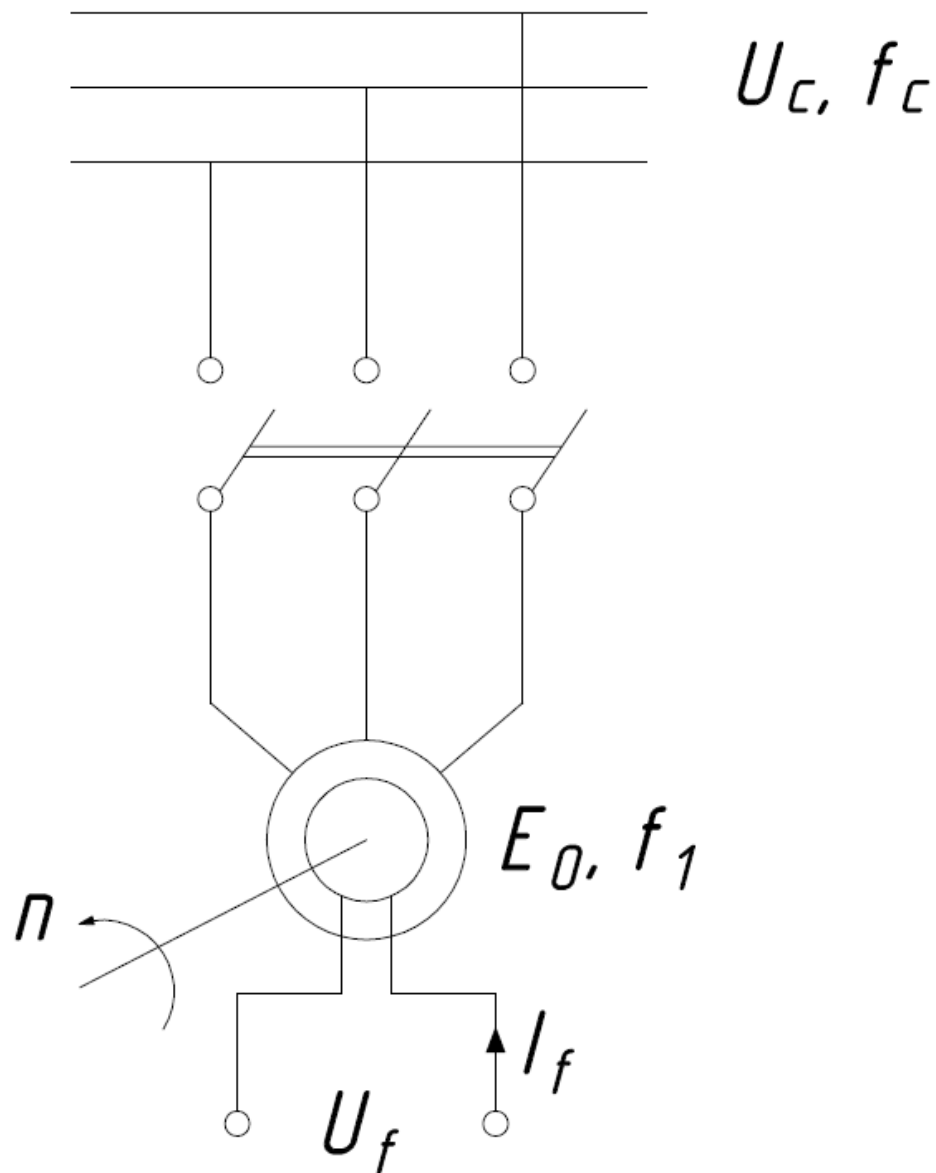


Рис. 3.3. Схема включения генератора при точной синхронизации

Ток возбуждения I_f устанавливается близким к I_{f0} , чтобы напряжение генератора и напряжение сети были равны.

Подгонка указанных величин осуществляется или вручную персоналом (ручная синхронизация), или с помощью автоматических устройств (автоматическая синхронизация). Следует отметить, что последний вариант предпочтительнее, поскольку ручная синхронизация требует наличия высококвалифицированного персонала. При точной синхронизации на практике не требуется абсолютно точного выравнивания частот.

Включение возбужденного генератора, как и в случае самосинхронизации, сопровождается уравнительным током (9). Его величина и характер зависит от того, насколько точно выполняются условия синхронизации. Уравнительный ток вызывает толчки мощности: активный передается на турбину, реактивный – на генератор. При точном выполнении третьего условия синхронизации ($\delta = 0$) уравнительный ток равен нулю, в чем и заключается главное преимущество и главная проблема точной синхронизации: есть возможность полностью исключить толчок уравнительного тока, однако выбор данного момента включения – довольно сложная практическая задача.

Рассмотрим подробнее проблему соблюдения этого условия при синхронизации. Для включения выключателя требуется время, это означает подачу импульса на включение с некоторым опережением по времени. Это время должно равняться собственному времени срабатывания выключателя и других реле, находящихся в схеме между синхронизатором и выключателем.

Если синхронизация происходит с расчетным скольжением, то опережения по углу и по времени равнозначны. Следовательно, для замыкания контактов в требуемый момент времени $\delta = 0$ синхронизатор может создавать опережение или по времени $t_{оп}$, или по углу $\delta_{оп}$. Отсюда происходит разделение автоматических синхронизаторов на два типа: с постоянным временем опережения и с постоянным углом опережения.

Однако на практике часто происходят колебания частоты и скольжение не является постоянным. Следовательно, синхронизатор с постоянным опережением по углу не всегда может правильно уловить момент подачи сигнала. Поэтому у синхронизаторов с постоянным опережением по времени в данном случае есть преимущество.

Недостатками точной синхронизации можно назвать меньшую надежность системы в целом – ввиду большего количества аппаратуры, реле и контактов; длительное время включения генератора в сеть – в ситуациях нестабильности частоты он может занимать несколько десятков минут.

3.2. Автоматизация работы умной сети электроснабжения

В параграфе 2.3 при описании модели использовались временные интервалы $h \in H = \{1, 2, \dots, H\}$. Период планирования рассматривается на следующий день, разделенный на H интервалов. Другой вопрос – как разбить сутки на интервалы $h \in H$? Можно разбить сутки на 24 часовых интервала, либо на 48 получасовых интервала. Деление на большее количество интервалов не имеет смысла, поскольку снятие показаний счетчиков, на основании которых происходит планирование потребления и финансовые взаиморасчеты, происходит каждые 30 минут. Чаше снимать показания нецелесообразно ввиду перегруженности памяти счетчиков в таком случае и наличия регламента оптового рынка электроэнергии, предписывающего данный интервал. Делить сутки на меньшее количество интервалов (укрупнять) также не следует, поскольку при тарификации электроэнергии оперируют часом и при построении суточных графиков используются часовые значения. При укрупнении можно просто потерять изменения в суточном потреблении электроэнергии.

При выборе между 24 или 48 интервалами оптимально выбрать первый вариант, так как это упростит дальнейшие расчеты и автоматизацию, а также обеспечит согласованность с действующими нормативными документами по регулированию рынка электроэнергии и мощности.

Как было рассмотрено в предыдущем параграфе, проблема синхронизации генераторов при включении в сеть может стоять довольно остро. В частности, случай автоматической синхронизации может занимать несколько минут, что является препятствием при разбиении суток на 48 получасовых интервалов. Поэтому при практической реализации необходимо учитывать данные особенности сети.

Зафиксируем интервал h . На интервале $h - 1$ предлагается следующий порядок действий:

1. В первую очередь решается задача двухуровневой оптимизации для выбранного интервала времени. Рассчитываются оптимальные варианты двусторонних контрактов между производителями и потребителями электроэнергии.
2. Дальнейшие расчеты должны обеспечить выполнение контрактов уже с практической стороны – синхронизация запускаемых в работу генераторов, наличие и мощность горячего резерва, возможные действия на случай аварийных ситуаций, порядок диспетчерских переключений.
3. Следующим моментом является уже непосредственно перераспределение мощностей и передача электроэнергии при начале нового часового интервала. По его завершению производятся расчеты по фактически потребленной электрической энергии, необходимые корректировки и дальнейшие взаиморасчеты между производителями и потребителями (они могут состояться и позднее, например, по результатам дня, недели, месяца или другого выбранного периода)

Очевидно, что в процессе выполнения контрактов в интервале $h \in H$ должна быть проведены все расчеты по работе в интервале $h + 1 \in H$. Первый и последний часы работы в сутках являются пограничными, но к ним применяются те же приемы и методики расчетов.

Одним из важнейших условий работы описанной выше системы является необходимость полной автоматизации и диспетчеризации как производителей, так и потребителей электроэнергии. В противном случае в исходные данные для расчета могут попасть ошибочные или несвоевременные показания, влекущие за собой аварийную ситуацию.

3.3. Перспективы внедрения

Существует несколько направлений для улучшения и обобщения вопросов, затронутых в данной работе. В первую очередь, реальные затраты на производство и распределение электроэнергии, а также функции изменения напряжения, необходимо дополнительно изучить для более реалистичного представления моделируемой сети. Во-вторых, требуется подробно рассмотреть динамическую настройку для того, чтобы потребители могли распределить свой спрос по некоторому горизонту планирования. В данный момент в реалиях функционирования Единой энергетической системы России (ЕЭС России) наиболее практичным представляется разделение дня на 24 часовых интервала. Можно исследовать настройку с помощью динамической топологии сети. Хотя структуры энергосетей относительно постоянные, можно подобрать разные варианты применения моделирования. Например, для планирования оптимальной модификации сети, или для поддержания стабильности в чрезвычайных ситуациях, таких как веерное отключение электроэнергии.

На данный момент в России вариант параллельной работы установки потребителя с выдачей электроэнергии в сеть встречается редко из-за отсутствия нормативной базы, сложности с контролем качества энергии у конкретного генератора и расчетами баланса системы, отсутствия разрешений на передачу в сеть. Однако данная возможность является достойной подробного рассмотрения при внедрении умных сетей электроснабжения. Действительно, при расширении использования возобновляемых источников энергии такие генераторы могут стать хорошей

альтернативой для потребителей, позволяющей снизить срок окупаемости устанавливаемого генерирующего оборудования. Отметим, что ведутся работы по расширению нормативной базы генерации и в ближайшее время возможно внедрение новых элементов сети и последующее использование опыта для применения в умных системах электроснабжения.

Внедрение оптимизации производства и распределения электроэнергии в перспективе позволит повысить надежность и безопасность эксплуатации оборудования, снизить энергоемкость экономики, потери электроэнергии во всех элементах сети, увеличив таким образом эффективность использования энергоресурсов. Также есть предпосылки для увеличения энергетической безопасности в целом ввиду повышения надежности электроснабжения и снижения влияния аварийных ситуаций. Повышающийся уровень возобновляемой генерации способствует развитию описываемой концепции и качественным преобразованиям в электроэнергетике.

Концепция прорабатывается во многих странах мира и, безусловно, нужно перенимать опыт и результаты зарубежных исследований. Однако, учитывая особенности энергетического комплекса России, возможно лишь частичное заимствование. Это приводит к необходимости принимать во внимание множественные специфичные аспекты и проводить свои, уникальные разработки.

Конечно, многие вопросы остаются дискуссионными и требуют глубокого и разнопланового рассмотрения в разных отраслях экономики. Необходимо помимо всего прочего решить множество сопутствующих проблем: автоматизацию диспетчерского управления, построение независимого коммерческого учета электроэнергии, оптимизацию существующих подходов к структуре сети. Помимо этого, предстоит работа по созданию или модификации подходящего информационного комплекса, отвечающего всем требованиям по скорости обмена данными, производительности, гибкости, масштабируемости и надежности.

Заключение

Поставленные задачи исследования были выполнены в полном объеме. Был проведен обзор существующей литературы по тематике исследования. В работе рассмотрены существующие особенности функционирования систем электроснабжения – графики электрической нагрузки, история и современное состояние рынка электроэнергии и мощности. Описаны вопросы оптимизации производства и распределения электроэнергии при работе с множеством производителей и одним потребителем, при работе с множеством производителей и множеством потребителей.

Отдельно выделена синхронизация генераторов при параллельной работе как одна из проблем практической реализации описываемой концепции. На основании всего вышеперечисленного были сформулированы возможные пути автоматизации работы умной сети электроснабжения и представлены перспективы внедрения.

Также намечены варианты дальнейшей работы по расширению полученных результатов с учетом рассмотренных и описанных эффектов.

Список литературы

1. Carpentier J. Optimal power flows // International Journal of Electrical Power and Energy Systems, 1979. Vol. 1, No 1. P. 3–15.
2. Wood A. J., Wollenberg B. F. Power generation, control, and operation. New York, NY: John Wiley and Sons, 1984.
3. Bohn R. E., Caramanis M. C., Schweppe F. C. Optimal pricing in electrical networks over space and time // The Rand Journal of Economics, 1984. Vol. 15, No 3. P. 360–376.
4. Crew M. A., Kleindofer P. R. Public utility economics. New York, NY: St. Martin's Press, 1979.
5. Schweppe F. C., Caramanis M. C., Tabors R. D., Bohn R. E. Spot pricing of electricity. Norwell: Kluwer Academic Publishers, 1988.
6. Chowdhury B. H., Rahman S. A review of recent advances in economic dispatch // IEEE Transactions on Power Systems, 1990. Vol. 5, No 4. P. 1248–1259.
7. Chao H. P., Peck S. A market mechanism for electric power transmission // Journal of Regulatory Economics, 1996. Vol. 10, No 1. P. 25–59.
8. Hogan W. W. Market-based transmission investments and competitive electricity markets. Technical Report. John F. Kennedy School of Government, Harvard University, Cambridge, MA, 1999.
9. O'Neil R. P., Helman U., Hobbs B. F., Stewart W. R., Rothkopf M. H. A joint energy and transmission rights auction: Proposal and properties // IEEE Transactions on Power Systems, 2002. Vol. 17, No 4. P. 1058–1067.
10. O'Neil R. P., Baldick R., Helman U., Rothkopf M. H., Stewart W. R. Dispatchable transmission in RTO markets // IEEE Transactions on Power Systems, 2005. Vol. 20, No 1. P. 171–179.
11. Yang J., Zhang G., Ma K. Hierarchical dispatch using two-stage optimisation for electricity markets in smart grid // International Journal of Systems Science, 2015. Vol. 47, No 15. P. 1–8.

12. Dolmatova M. Optimal nodal capacity procurement // *Advances in Intelligent Systems and Computing*, 2015. Vol. 360. P. 415–423.
13. Mohsenian-Rad A. H., Wong V. W., Jatskevich J., Schober R., Leon-Garcia A. Autonomous demand-side management based on game-theoretic energy consumption scheduling for the future smart grid // *Smart Grid, IEEE Transactions on*, 2010. Vol. 1, No 3. P. 320–331.
14. Veit A., Xu Y., Zheng R., Chakraborty N., Sycara K. P. Multiagent coordination for energy consumption scheduling in consumer cooperatives // *Proceedings of the 27th AAAI Conference on Artificial Intelligence*, 2013. P. 1362–1368.
15. Atzeni I., Ordonez L. G., Scutari G., Palomar D. P., Fonollosa J. R. Demand-side management via distributed energy generation and storage optimization // *Smart Grid, IEEE Transactions on*, 2013. Vol. 4, No 2. P. 866–876.
16. Alam M., Ramchurn S. D., Rogers A. Cooperative energy exchange for the efficient use of energy and resources in remote communities // *Proceedings of the 2013 International Conference on Autonomous Agent and Multi-agent Systems*, 2013. P. 731–738.
17. Mihailescu R. C., Vasirani M., Ossowski S. Dynamic coalition adaptation for efficient agent-based virtual power plants // *Multiagent System Technologies*, 2011. P. 101–112.
18. Pang J. S., Fukushima M. Quasi-variational inequalities, generalized Nash equilibria, and multi-leader-follower games // *Computational Management Science*, 2005. Vol. 2, No 1. P. 21–56.
19. Nie P.y. Discrete time dynamic multi-leader-follower games with feedback perfect information // *International Journal of System Science*, 2007. Vol. 38, No 3. P. 247–255.
20. Nie P.y. Dynamic discrete-time multi-leader-follower games with leaders in turn // *Computers and Mathematics with Applications*, 2011. Vol. 61, No 8. P. 2039–2043.
21. Kok J. The powermatcher: Smart coordination for the smart electricity grid.

- Amsterdam: Vrije Universiteit, 2013.
22. Patriksson M. The traffic assignment problem: Models and methods. Utrecht: VSP, 1994.
 23. Altman E., Basar T., Jimenez T., Shimkin N. Competitive routing in networks with polynomial costs // IEEE Transactions on Automatic Control, 2002. Vol. 47, No 1. P. 92–96.
 24. Altman E., Kameda H. Equilibria for multiclass routing problems in multi-agent networks // Advances in Dynamic Games, 2005. Vol. 7. P. 343–367.
 25. Altman E., Combes R., Altman Z., Sorin S. Routing games in the many players regime // Proceedings of the 5th International ICST Conference on Performance Evaluation Methodologies and Tools, 2011. P. 525–527.
 26. Zakharov V. V., Krylatov A. Y. Competitive routing of traffic flows by navigation providers // Automation and Remote Control, 2016. Vol. 77, No 1. P. 179–189.
 27. Zakharov V. V., Krylatov A. Y., Ivanov D. A. Equilibrium traffic flow assignment in case of two navigation providers // IFIP Advances in Information and Communication Technology, 2013. Vol. 408. P. 156–163.
 28. Сивков А. А., Сайгаш А. С., Герасимов Д. Ю. Основы электроснабжения: учебное пособие. Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2014. 184 с.
 29. Оптовый рынок электрической энергии и мощности. <https://www.np-sr.ru/ru/market/wholesale/index.htm>
 30. Popov I., Krylatov A., Zakharov V., Ivanov D. Competitive energy consumption under transmission constraints in a multi-supplier power grid system // International Journal of Systems Science, 2017. Vol. 48, No 5. P. 994–1001.
 31. Duffin R. Nonlinear networks // Bulletin of the American Mathematical Society, 1947. Vol. 53. P. 963–971.
 32. Павлов Г. М., Меркурьев Г. В. Автоматика энергосистем. СПб.: Центр подготовки кадров РАО «ЕЭС России», 2001. 388 с.