

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

КАФЕДРА МЕХАНИКИ УПРАВЛЯЕМОГО ДВИЖЕНИЯ

Горбачев Николай Иванович

Магистерская диссертация

**Построение области безопасного маневрирования
в окрестности L_1**

Направление 010402 – Прикладная математика и информатика

Магистерская программа – Математическое моделирование

в задачах естествознания

Научный руководитель:

доктор физ.-мат. наук,

профессор

Шмыров А.С.

Санкт-Петербург

2018

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
1 УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКА.....	6
1.1 Уравнения движения.....	6
1.2 Устойчивость точки L_1	7
1.3 Постановка задачи.....	9
2 МОДИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ	11
2.1 Численное моделирование плоского движения.....	11
2.2 Регуляризация уравнений движения.....	14
3 ПОСТРОЕНИЕ ОБЛАСТИ БЕЗОПАСНОГО МАНЕВРИРОВАНИЯ	16
3.1 Построение траекторий, близких к соударению.....	16
3.2 Численное моделирование движения на инвариантном множестве	17
3.3 Численное моделирование на длительном промежутке времени.....	21
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	24
ЛИТЕРАТУРА	26

ВВЕДЕНИЕ

Идея освоения точек либрации системы Солнце-Земля не нова. Первые проекты полетов были разработаны еще на заре космонавтики, и уже в 1978 году в рамках проекта ISEE-3 в окрестность L_1 был выведен космический аппарат (далее КА) для наблюдения за солнечной активностью, тем самым доказывая возможность практической реализации подобных проектов и накапливая научный потенциал на основе полученных аппаратом данных. Далее последовал целый ряд проектов [1], часть которых была направлена на освоение точки L_2 системы Солнце-Земля.

Одним из проектов являлся Реликт-2, целью которого было изучение реликтового излучения. В работе Лидова М.Л. и его учеников [2], связанной с данным проектом, подробно рассмотрена методика построения траектории прямого одноимпульсного полета на гало-орбиты точки L_2 (L_1), а также размещение КА на траектории, принадлежащей инвариантному множеству на удалении порядка 300 тыс. км от соответствующей точки либрации.

В настоящее время группы ученых по всему миру продолжают активную разработку программ по использованию точек либрации. Среди них особого внимания заслуживает проект компании Planetary Resources, который предполагает размещение в точке либрации астероида с целью его технологической разработки по добыче полезных ископаемых, а именно воды и металлов, в частности драгоценных, тем самым рассчитывая поддержать развитие и снизить стоимость будущих экспедиций по освоению космоса [3].

В данной работе рассматривается по сути обратная в отношении к описанной в [2] задача, а именно исследование таких начальных положений в окрестности L_1 , при которых КА переходит на околоземную орбиту. В случае потери контроля над КА переход может происходить по траектории, близкой к траектории соударения с Землей. Актуальность поставленной задачи возрастает при реализации проекта размещения в точке либрации астероида, ко-

торый имеет значительно большие размеры и, как следствие, массу, что увеличивает угрозу и масштабы последствий его падения на Землю.

Особенностью работы является рассмотрение классической, но в общем случае неинтегрируемой задачи небесной механики. При этом в ходе работы получены приближенные численные решения, позволяющие сделать качественные выводы о движении малых небесных тел искусственного и естественного происхождения (далее МНТ) в окрестности L_1 . Отдельный интерес представляет нахождение инвариантных множеств в окрестности указанной точки. МНТ, размещенное на одном из них, сможет оставаться в окрестности L_1 значительный промежуток времени, но практически данная задача трудновыполнима.

Гамильтонова механика является одной из формулировок классической механики Ньютона, записанной в терминах обобщенных координат и импульсов.

Гамильтонова механическая система с n степенями свободы задается фазовым пространством размерности $2n$, системой $2n$ дифференциальных уравнений (уравнений Гамильтона) вида

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases},$$

и функцией Гамильтона, также именуемой гамильтонианом

$$H(q, p, t),$$

где q – набор обобщенных координат, p – набор обобщенных импульсов, t – время. Для консервативных систем функция Гамильтона представляет полную энергию, то есть сумму кинетической и потенциальной энергий системы.

Гамильтонова точка зрения позволяет исследовать ряд задач механики, не поддающихся решению. Но еще большее значение имеет для приближенных методов теории возмущений в небесной механике и понимания общего характера движения в сложных механических системах [4, 5].

В частности, данная точка зрения применима для рассмотрения задачи трех тел – одной из основных задач небесной механики, состоящей в описании относительного движения трех тел.

1 УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКА

1.1 Уравнения движения

В абсолютных координатах задача трех тел задается следующей системой уравнений [6]:

$$\begin{cases} m_0 \ddot{x}_0 = \gamma \frac{m_0 m_1 (x_1 - x_0)}{\|x_1 - x_0\|^3} + \gamma \frac{m_0 m_2 (x_2 - x_0)}{\|x_2 - x_0\|^3} \\ m_1 \ddot{x}_1 = \gamma \frac{m_1 m_2 (x_2 - x_1)}{\|x_2 - x_1\|^3} + \gamma \frac{m_1 m_0 (x_0 - x_1)}{\|x_0 - x_1\|^3}, \\ m_2 \ddot{x}_2 = \gamma \frac{m_2 m_1 (x_1 - x_2)}{\|x_1 - x_2\|^3} + \gamma \frac{m_2 m_0 (x_0 - x_2)}{\|x_0 - x_2\|^3} \end{cases}, \quad (1)$$

где m_0 – масса малого тела, m_1 – масса Земли, m_2 – масса Солнца. В первом уравнении сокращаются m_0 , а вторые слагаемые 2 и 3 уравнения стремятся к нулю в силу малости m_0 по отношению к m_1 и m_2 . Выполняется замена переменных

$$x \stackrel{\text{def}}{=} x_0 - x_1,$$

$$\Delta x(t) = x_2(t) - x_1(t),$$

и система (1) преобразуется в уравнение

$$\ddot{x} = -\gamma \frac{m_1 x}{\|x\|^3} + \gamma \frac{m_2 (\Delta x(t) - x)}{\|\Delta x(t) - x\|^3} - \gamma \frac{m_2 \Delta x(t)}{\|\Delta x(t)\|^3}. \quad (2)$$

Далее для уравнения (2) выполняется переход во вращающуюся систему координат, центром которой является Земля, ось X_1 всегда направлена на Солнце, плоскость $X_1 O X_2$ совпадает с плоскостью эклиптики [7]. Вводится важное допущение – тела движутся по круговым орбитам, что преобразует исходную задачу в круговую задачу трех тел, а ряд замен переменных в (2) позволяет записать уравнения Гамильтона и гамильтониан новой задачи:

$$\Delta x(t) = Rl,$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\gamma \frac{m_1 x}{\|x\|^3} + \gamma m_2 \frac{Rl - x}{\|x - Rc\|^3} - \gamma m_2 \frac{l}{R^2}, \\ \dot{x} = y \end{cases} \quad (3)$$

$$H(x, y, t) = \frac{1}{2} [y y] - \gamma \frac{m_1}{\|x\|} - \gamma \frac{m_2}{\|x - Rl\|} + \gamma \frac{m_2 l x}{R^2}, \quad (4)$$

где $R = 1 \text{ a.e.}$; $l = [\cos(\omega t), \sin(\omega t), 0]$; $c = 0, 01$; $[y y]$ – векторное произведение.

К гамильтониану (4) применяется метод Хилла, выполняется замена набора переменных (x^1, x^2, x^3) и (y^1, y^2, y^3) , и с помощью производящей функции Якоби в итоге получаем гамильтониан и систему уравнений

$$H(x, y, t) = \frac{1}{2}[yy] - \frac{3}{\|x\|} - \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}[xx] + y_1x_2 - y_2x_1, \quad (5)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = y_2 - x_1, \\ \dot{x}_3 = y_3 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{y}_1 = -\frac{3x_1}{\|x\|^3} + 2x_1 + y_2 \\ \dot{y}_2 = -\frac{3x_2}{\|x\|^3} + x_2 - y_1, \\ \dot{y}_3 = -\frac{3x_3}{\|x\|^3} + x_3 \end{cases}, \quad (6)$$

Одним из решений системы (6) является коллинеарная точка Лагранжа L_1 с координатами

$$\begin{cases} x_1(t) = 1 \\ x_2(t) = 0, \\ x_3(t) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1(t) = 0 \\ y_2(t) = 1. \\ y_3(t) = 0 \end{cases}$$

1.2 Устойчивость точки L_1

Выполним замену в (6) с учетом координат L_1 по соотношениям

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 + \Delta x_1, \quad x_2 = \Delta x_2, \quad x_3 = \Delta x_3; \\ y_1 &= \Delta y_1, \quad y_2 = 1 + \Delta y_2, \quad y_3 = \Delta y_3, \end{aligned}$$

и запишем линеаризованную систему (6.1) [8] (знаки Δ опущены):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = y_2 - x_1, \\ \dot{x}_3 = y_3 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{y}_1 = 8x_1 + y_2 \\ \dot{y}_2 = -4x_2 - y_1. \\ \dot{y}_3 = -4x_3 \end{cases}. \quad (6.1)$$

Рассмотрим случай плоского движения в координатах (x_1, x_2, y_1, y_2) для линеаризованной системы (6.1). Матрица системы имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 8 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

Одним из собственных чисел данной матрицы при решении характеристического полинома будет

$$\lambda = \sqrt{1 + 2\sqrt{7}} > 0.$$

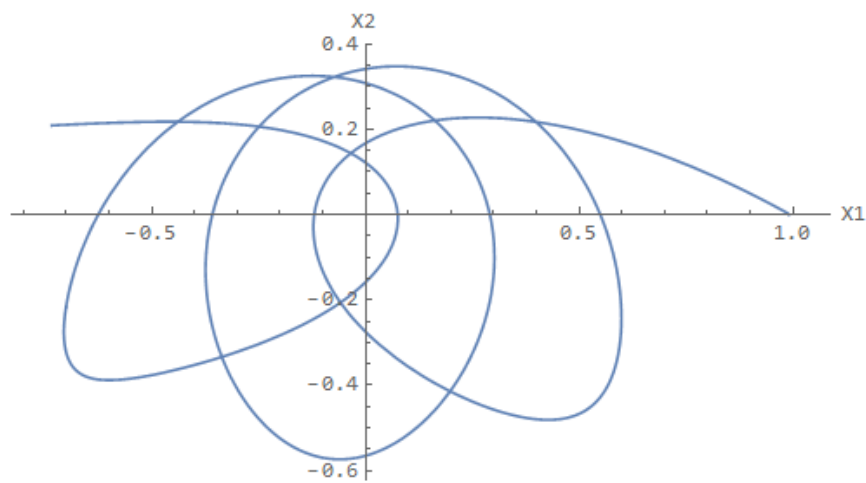
Таким образом, точка L_1 является неустойчивой и при малом отклонении в фазовом пространстве (координат или импульсов) будет наблюдаться уход тела из данной точки.

Выполним численное моделирование уравнений (5) и (6) при помощи метода Рунге-Кутты 5 порядка. В качестве начальных условий рассмотрим координаты из окрестности коллинеарной точки либрации L_1 :

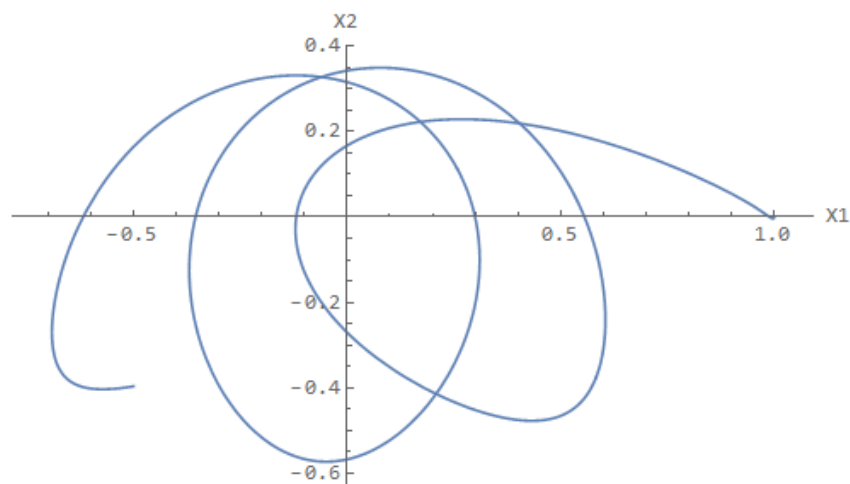
а) $(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3) = (0.99, 0, 0; 0, 1, 0)$;

б) $(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3) = (1, 0, 0; 0, 0.99, 0)$.

Решение для данных начальных условий представлено на рисунке 1.1.



а)



б)

Рисунок 1.1 – Траектория движения тела при малых отклонениях в точке L_1

Полученные результаты численного моделирования подтверждают предположение о неустойчивом движении тела в окрестности точки L_1 при малых отклонениях в фазовом пространстве (координат или импульсов).

1.3 Постановка задачи

По результатам численного моделирования, полученным в п. 1.2, видно, что МНТ, незначительно отклонившееся от координат L_1 , пролетает на значительном удалении от Земли, не представляя собой серьезной опасности. Но указанные результаты также позволяют сделать предположение, что при определенных условиях МНТ может пролететь в непосредственной близости или столкнуться с Землей. Поэтому **важной** и **актуальной** является задача определения условий, при которых в результате ухода из окрестности L_1 движение МНТ несет потенциальную угрозу падения на поверхность Земли. Особый интерес представляет задача определения траекторий соударения с Землей, имеющих начало вблизи инвариантного множества окрестности L_1 .

Средний радиус Земли равен 6371 км. Хотя на высоте 50 км от поверхности атмосфера уже достаточно разреженная, прогнозирование длительного движения спутников рассчитывают вплоть до высоты 500 км. В рамках рассматриваемой задачи сближение на расстояние 80 км от поверхности Земли будем считать потенциально опасным, поскольку на данной высоте наблюдается существенное влияние атмосферы на МНТ, что влечет его сход с орбиты и падение. Число ε :

$$\varepsilon = \frac{(6371 + 80) \text{ км}}{1.5 \text{ млн. км}} \approx 0.0043,$$

соответствует указанному расстоянию от поверхности Земли в рамках рассматриваемой модели во вращающейся системе координат, где единица расстояния равна 1.5 млн. км. Расстояние в 630 км от поверхности Земли будем считать безопасным.

Точку окрестности L_1 будем называть точкой опасного маневрирования, если тело малой массы, в начальный момент времени находящееся в данной точке с заданным вектором импульса, за время $t \leq 10$ сблизится с

Землей на потенциально опасное расстояние меньше ε , а множество таких точек будем называть областью опасного маневрирования. В противном случае точку будем называть точкой безопасного маневрирования, а их множество – областью безопасного маневрирования.

Поскольку движение МНТ носит характер близкий к хаотическому, что может привести ухудшению результатов моделирования, вводится ограничение на рассматриваемое время движения. Единица времени равна 58.0916 суток (год, деленный на 2π).

Таким образом, **целью** работы является описание области безопасного маневрирования. Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

- определить условия безопасного маневрирования в окрестности L_1 ;
- выполнить численное моделирование и анализ плоского движения тела малой массы в окрестности L_1 ;
- определить область опасного маневрирования для плоского движения;
- определить координаты некоторых точек, принадлежащих инвариантному множеству окрестности L_1 ;
- выполнить анализ движения тела малой массы на инвариантном множестве в окрестности L_1 .

2 МОДИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

2.1 Численное моделирование плоского движения

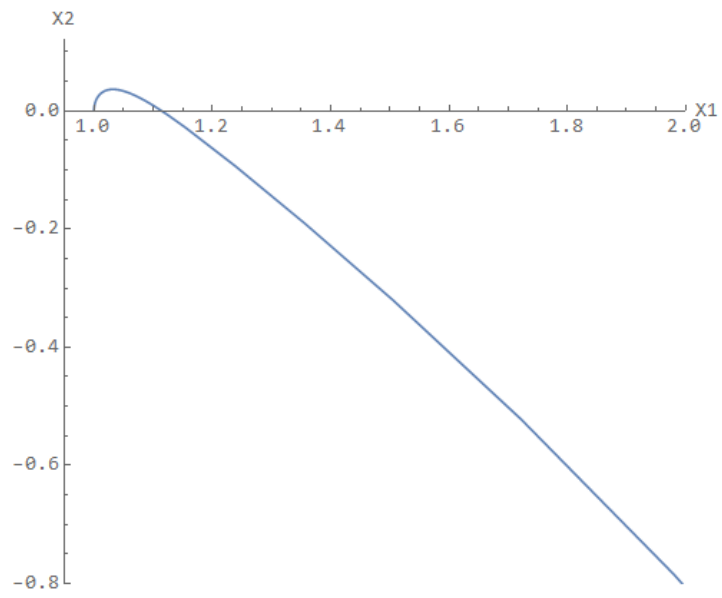
Численное моделирование плоского движения в окрестности L_1 предполагает рассмотрение вариации компонент начальных условий $(x_1, x_2; y_1, y_2)$; компоненты $(x_3; y_3)$ в начальных условиях остаются неизменными и соответственно равными $(0; 0)$.

Как было отмечено в п. 1.1, во вращающейся системе координат центром является Земля, ось X_1 всегда направлена на Солнце, плоскость X_1OX_2 совпадает с плоскостью эклиптики [7]. Направления пространства импульсов совпадает с направлениями пространства координат.

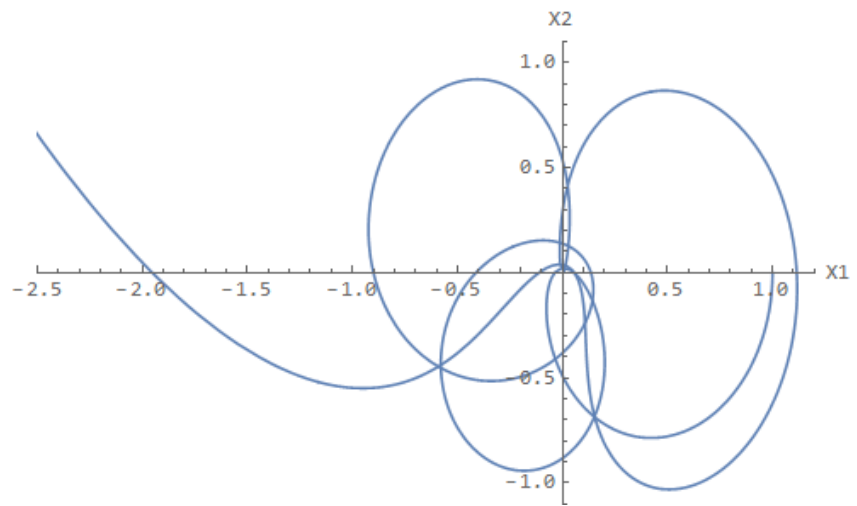
С целью определения диапазона значений пространства импульсов выполним численное моделирование для следующих координат:

- а) $(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3) = (1, 0, 0; 0, 1.1, 0)$;
- б) $(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3) = (1, 0, 0; 0, -1.1, 0)$;
- в) $(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3) = (1, 0, 0; 0.1, 1, 0)$;
- г) $(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3) = (1, 0, 0; -1.1, 1.1, 0)$;
- д) $(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3) = (1, 0, 0; -1.1, -1.1, 0)$.

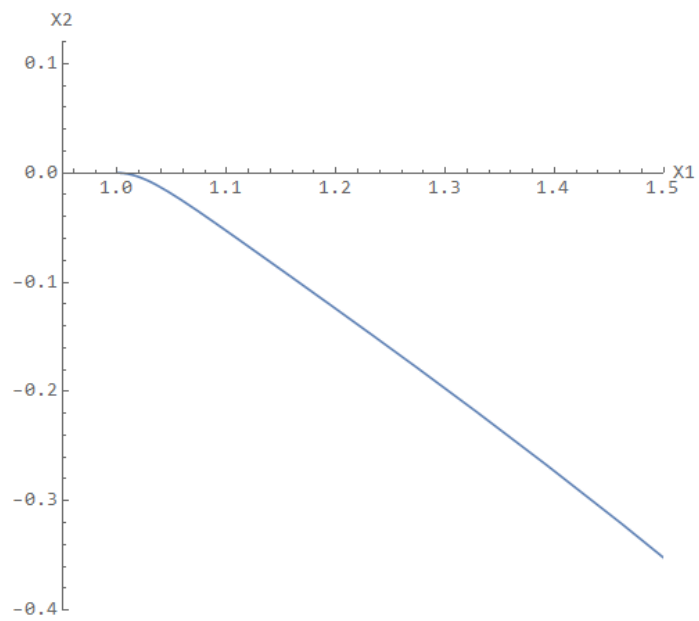
По результатам моделирования, представленным на рисунке 2.1, видно, что для начальных условий а) и б) при $y_2 \geq 1.1$ и $y_2 \leq -1.1$ наблюдается уход МНТ на расстояние более 0,02 а.е.; для условий в) при малом положительном y_1 наблюдается уход в сторону Солнца; для условий г) и д) при $y_1 \leq -1.1$ наблюдается уход МНТ на расстояние более 0,02 а.е.



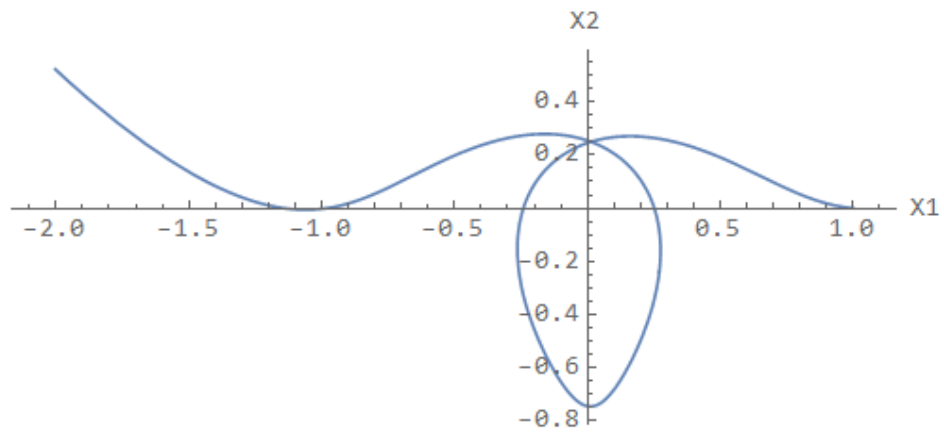
a)



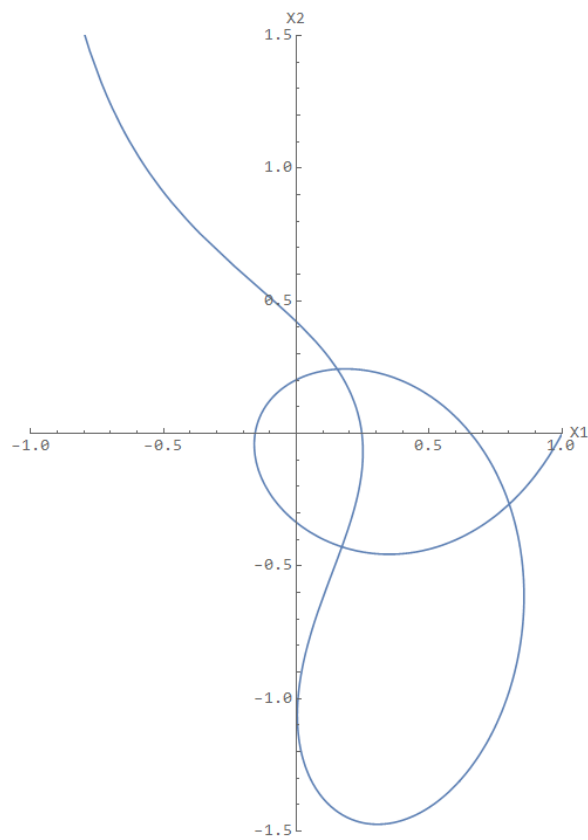
б)



B)



Г)



Д)

Рисунок 2.1 – Траектория движения тела при различных значениях (y_1, y_2)

Таким образом, для дальнейшего моделирования примем следующие ограничения:

$$y_1 \in [-1.1; 0], \quad y_2 \in [-1.1; 1]. \quad (7)$$

Стоит отметить, что не имеет смысла рассматривать $y_1 \rightarrow -\infty$, поскольку физически невозможно обеспечить бесконечно большое значение

импульса, хотя, очевидно, в таком случае МНТ наверняка могло бы сблизиться с Землей на опасное расстояние.

2.2 Регуляризация уравнений движения

Рассмотрим особенность гамильтониана (5), а именно отношение $\frac{1}{\|x\|}$. В случае сближения с Землей $\|x\| \approx \varepsilon$ и значительно ухудшается точность численного моделирования, как показано на рисунке 2.2.

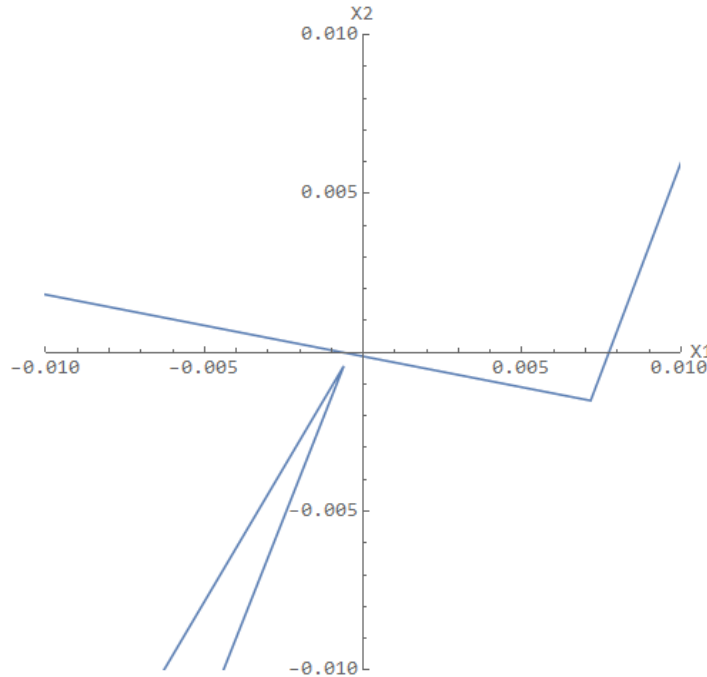


Рисунок 2.2 – Результат численного моделирования в случае сближения с Землей для исходного гамильтониана

В работе [5] Пуанкаре высказал идею по замене времени. В данной работе эта идея используется для регуляризации уравнений движения. По определению: $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}$, $\dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}$.

Пусть

$$H_{mod}(x, y) = g(x, y)(H(x, y) - h),$$

где $h \stackrel{\text{def}}{=} H(x_0, y_0) = H(x_0, y_0)$ – интеграл энергии.

Тогда на изоэнергетических траекториях с константой h выполняется

$$\dot{x} = \frac{\partial H_{mod}}{\partial y} = \frac{\partial H}{\partial y} g(x, y); \quad \dot{y} = -\frac{\partial H_{mod}}{\partial x} = -\frac{\partial H}{\partial x} g(x, y)$$

$$\frac{dx}{g(x,y) dt} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \frac{dy}{g(x,y) dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}.$$

В итоге преобразуем исходный гамильтониан (5) следующим образом:

$$H_{mod}(x, y, t) = \left(\frac{1}{2} [yy] - \frac{3}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} [xx] + y_1 x_2 - y_2 x_1 - h \right) * \|x\| - 3 \quad (8)$$

Полученный гамильтониан (8) по сути является исходным гамильтонианом (5), в котором используется другое время, а отсутствие $\|x\|$ в знаменателе положительно сказывается на точность вычислений (рисунок 2.3).

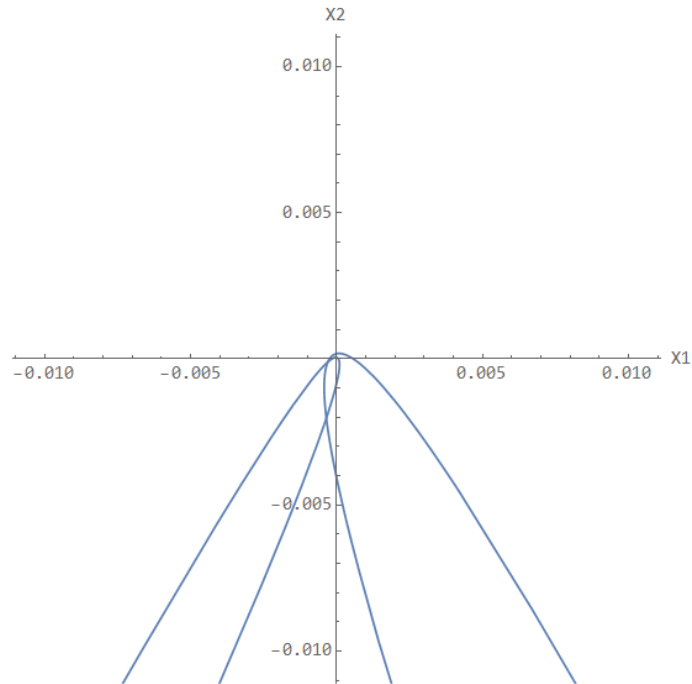


Рисунок 2.3 - Результат численного моделирования при сближении с Землей для преобразованного гамильтониана

3 ПОСТРОЕНИЕ ОБЛАСТИ БЕЗОПАСНОГО МАНЕВРИРОВАНИЯ

3.1 Построение траекторий, близких к соударению

Выполним численное моделирование системы уравнений Гамильтона, соответствующих гамильтониану (8), в качестве начальных условий выберем координаты точки либрации L_1 со значениями пространства импульсов (y_1, y_2) , изменяющимися в пределах (7) с шагом 0.05 с целью определения наборов значений начальных условий, соответственно удовлетворяющих условиям областей опасного и безопасного маневрирования.

На рисунке 3.1, отражающем результат моделирования, представлен набор точек и соответствующая им область опасного маневрирования.

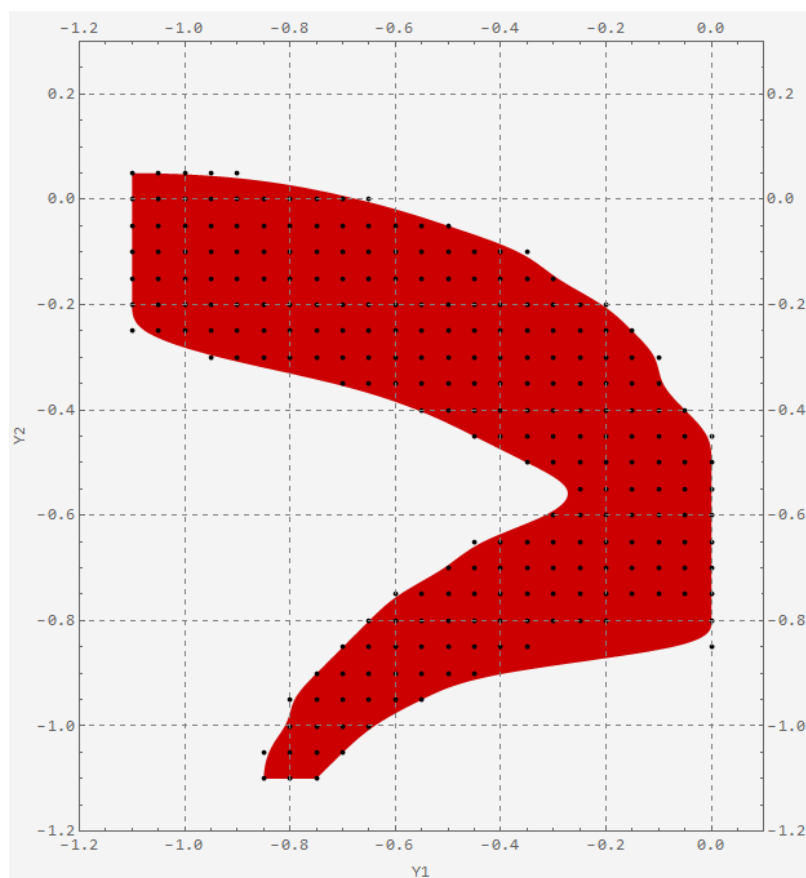


Рисунок 3.1 – Область опасного маневрирования

На рисунке 3.2 представлено сравнение области опасного маневрирования и области, соответствующей пролету МНТ на удалении 630 км от поверхности Земли. Указанные области практически совпадают в силу того, что рассматриваемые расстояния сближения с Землей несущественны по сравне-

нию с единицей измерения в используемых координатах, а именно 1.5 млн. км.

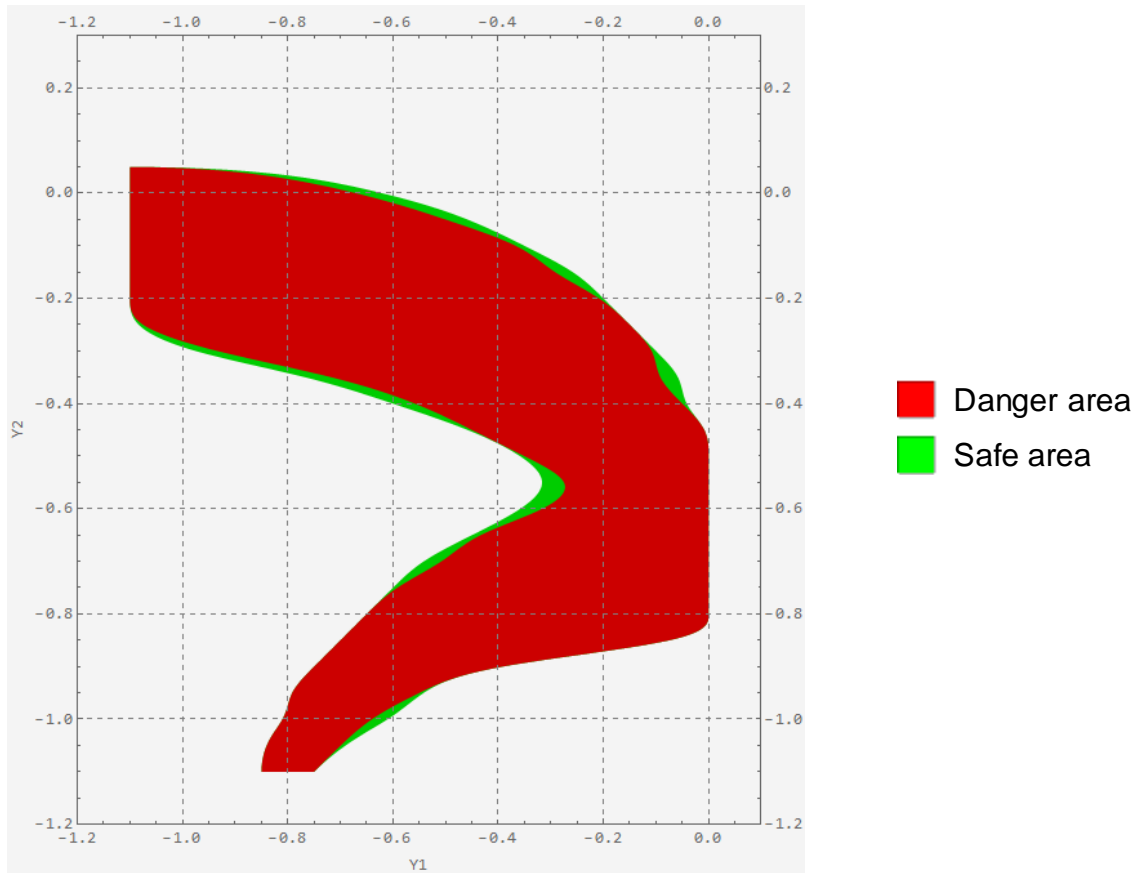


Рисунок 3.2 – Сравнение областей опасного и безопасного сближения с Землей

Остальную область, исключая указанные на рисунке 3.2, можно считать областью безопасного маневрирования.

3.2 Численное моделирование движения на инвариантном множестве

Запишем линеаризованную систему (6.1) [8] в матричном виде для случая движения в плоскости эклиптики в окрестности точки L_1 :

$$\dot{z} = A z,$$

где $z = (x_1 - 1, x_2, y_1, y_2 - 1)$; $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 8 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Пусть b_1 – собственный вектор-строка матрицы A , соответствующий собственному числу матрицы A

$$\lambda_1 = \sqrt{1 + 2\sqrt{7}}.$$

Тогда справедливо выполняется:

$$b_1 A = \lambda_1 b_1.$$

Рассмотрим скалярную функцию l :

$$l = b_1 z,$$

$$\dot{l} = b_1 \dot{z} = \lambda_1 l.$$

Решением последнего соотношения будет являться «функция опасности» [8,9,10]

$$l(t) = e^{\lambda_1(t-t_0)} l(t_0) \quad (9)$$

Очевидно, что в случае равенства нулю правой части (9) МНТ неограниченно долго будет оставаться в окрестности точки L_I . Тогда

$$l(t) = b_1 z = 0 \quad (10)$$

будем считать уравнением инвариантного многообразия [8,9,10].

Найдем одно из возможных численных решений для (10) и проиллюстрируем его на графике (рисунок 3.3):

$$(x_1, x_2; y_1, y_2) = (0.95, 0; 0, 1.269410341315), \quad (11)$$

$$(x_1, x_2; y_1, y_2) = (0.95, 0; 0, 1.26941034132).$$

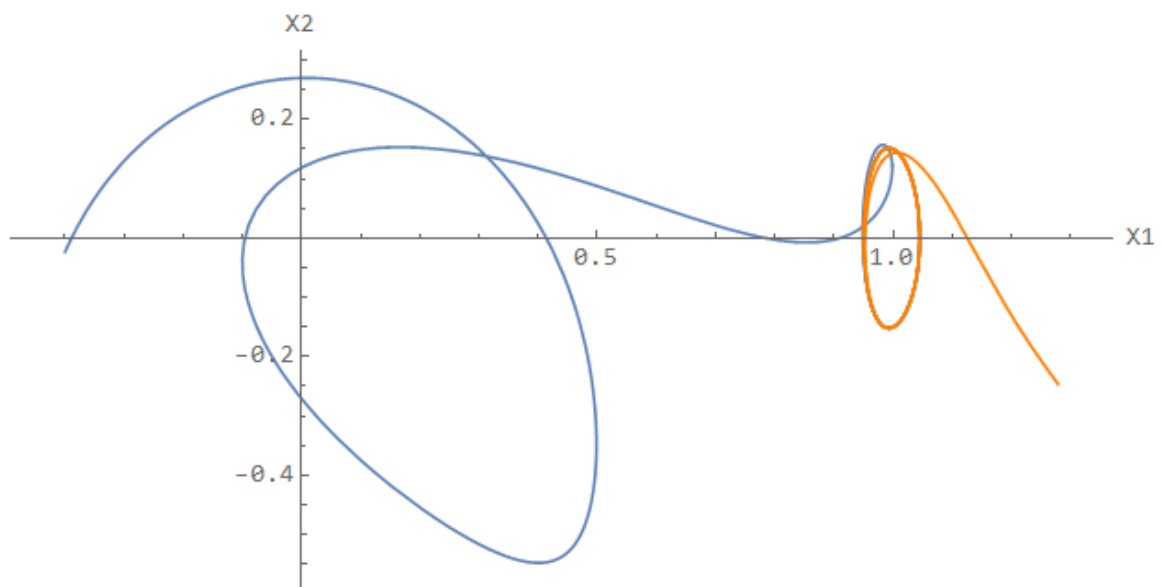


Рисунок 3.3 – Траектория МНТ вблизи инвариантного множества окрестности L_I для начальной точки (11)

Как видно из рисунка МНТ остается в окрестности точки либрации в течение продолжительного времени, выполняя несколько витков вокруг нее, т.е. находится на инвариантном множестве, но в итоге покидает его. При этом для разницы y_2 в одиннадцатом знаке наблюдаются две кардинально отличающиеся траектории – уход в сторону Солнца и в сторону Земли. Во втором случае сближение происходит на значительном удалении и не представляет реальной угрозы. Это также можно видеть на рисунке 3.4 – указанная точка пространства импульсов не принадлежит области опасного маневрирования.

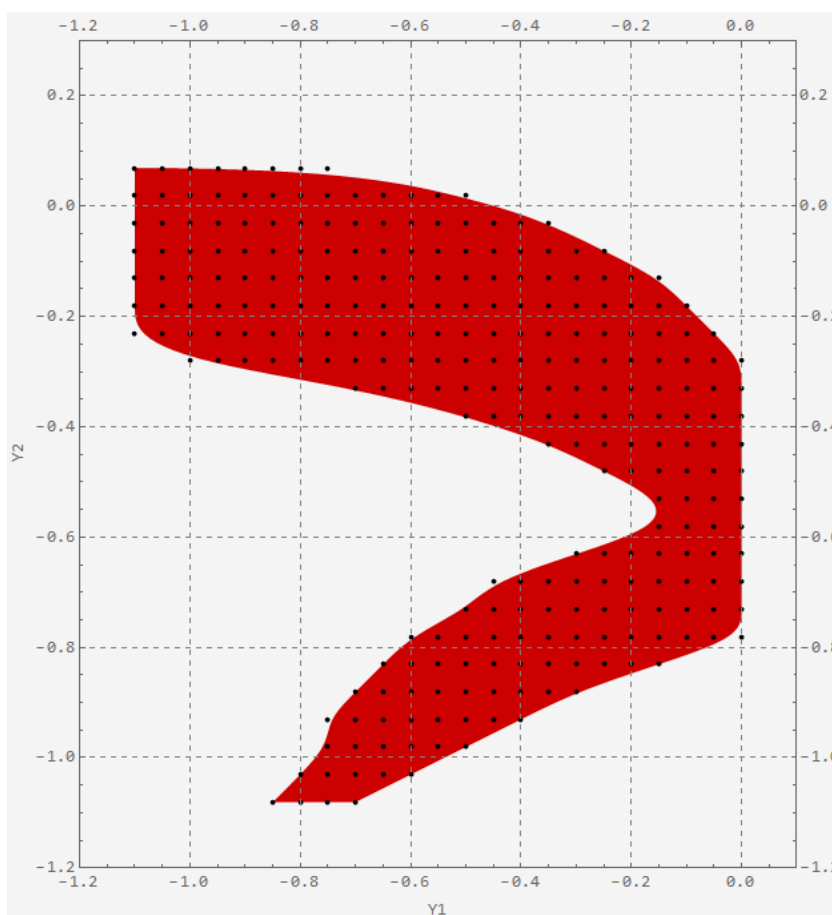


Рисунок 3.4 – Область опасного сближения с Землей для начальной точки (11)

Рассмотрим другое решение (10) и соответствующий ему график (рисунок 3.5). Область опасного маневрирования для данного решения представлена на рисунке 3.6.

$$(x_1, x_2; y_1, y_2) = (0.9, 0; 0, 1.51807227), \quad (12)$$

$$(x_1, x_2; y_1, y_2) = (0.9, 0; 0, 1.518072275).$$

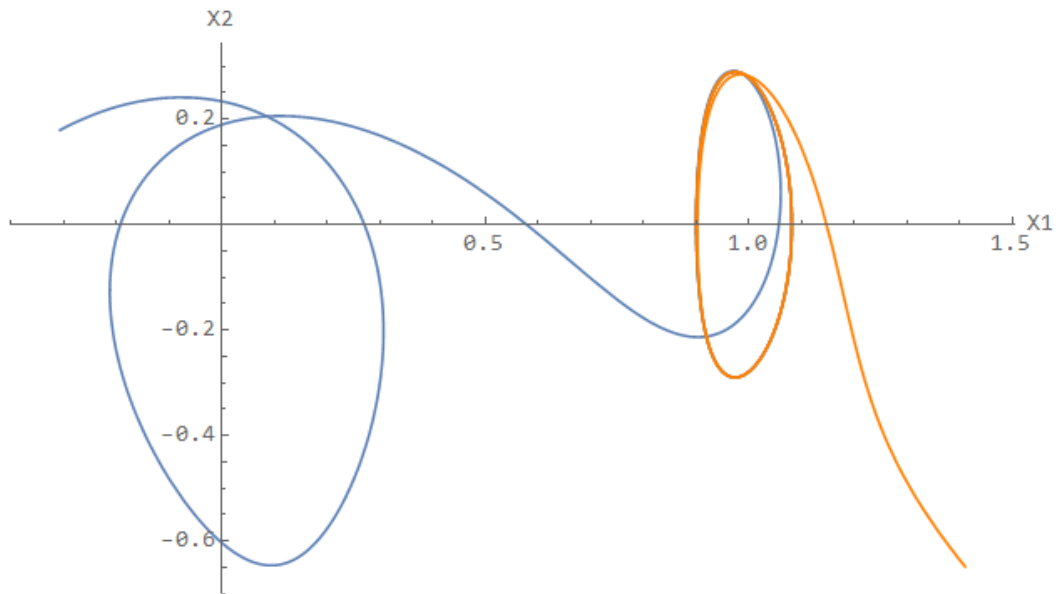


Рисунок 3.5 – Траектория МНТ вблизи инвариантного множества окрестности L_1 для начальной точки (12)

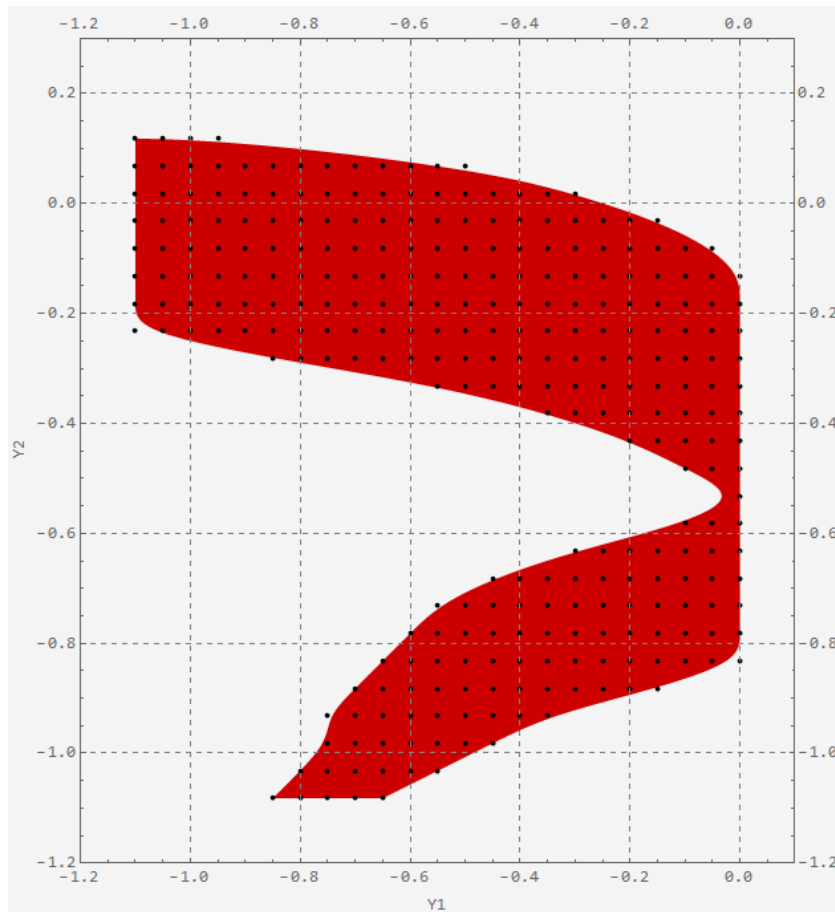


Рисунок 3.6 – Область опасного сближения с Землей для начальной точки (12)

Для решения (12) также наблюдаются две траектории ухода с инвариантного многообразия окрестности L_1 , одна из которых проходит на безопас-

ном удалении от Земли, что также видно на рисунке 3.6, поскольку указанная точка не принадлежит области опасного маневрирования.

3.3 Численное моделирование на длительном промежутке времени

Рассмотрим несколько результатов численного моделирования в окрестности L_1 , выполненных на промежутке времени $t > 10$. Зафиксируем положение МНТ в пространстве координат $(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 0)$ и посмотрим какие траектории получатся при отрицательных значениях импульса.

На рисунке 3.7 представлена траектория, у которой начальный импульс имеет значение $(y_1, y_2, y_3) = (0, -1.3, 0)$.

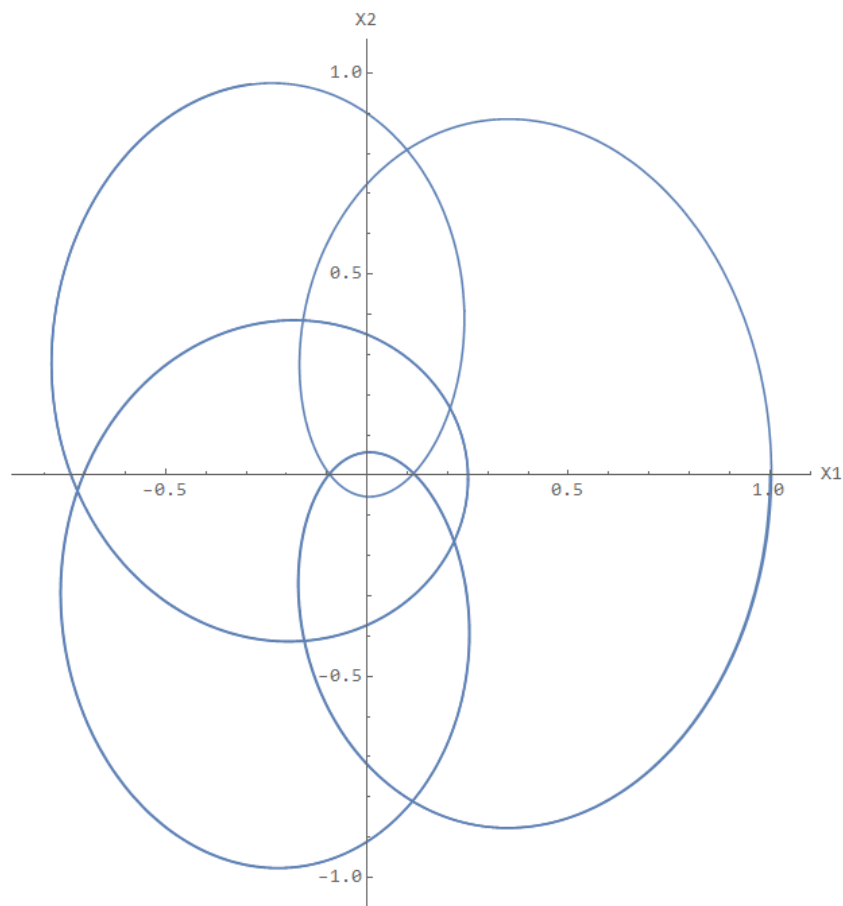


Рисунок 3.7 – Решение близкое к периодическому вне окрестности точки L_1 для $t = 11$

В этом случае получено решение близкое к периодическому, при котором МНТ, совершив несколько витков на безопасном удалении от Земли, возвращается в окрестность точки либрации за время $t \approx 11$. При дальней-

шем увеличении интервала интегрирования МНТ остается практически на той же траектории, что также можно наблюдать для времени 20 единиц и более. Но, как было отмечено в п. 1.3, моделирование на столь длительном отрезке времени приводит к значительному ухудшению точности, поскольку не учитываются многие возмущения, например, влияние Юпитера, Сатурна, Луны и других небесных тел Солнечной системы. Тем не менее, полученный результат полезен для построения точного аналитического периодического решения. Для этого можно воспользоваться гамильтоновой техникой, связанной с построением подходящей производящей функции.

На рисунке 3.8 изображена траектория, у которой импульс имеет значение $(y_1, y_2, y_3) = (-0.9, -1.3, 0)$.

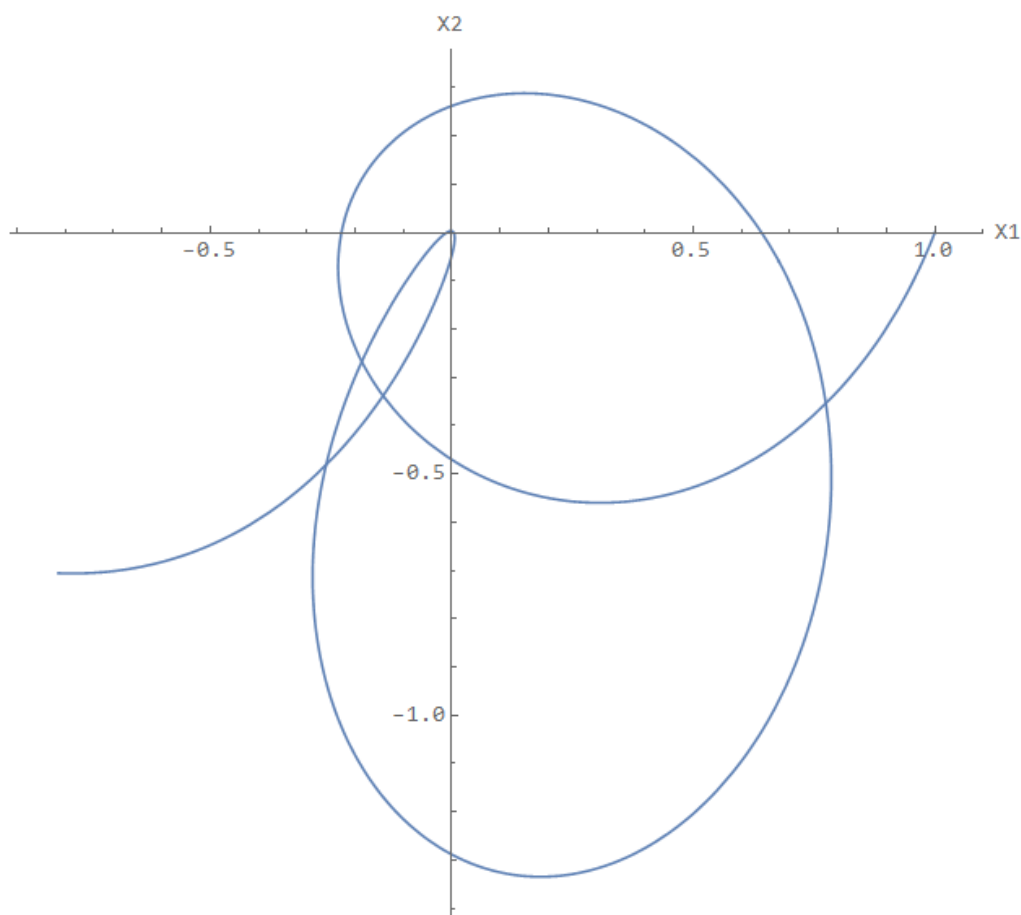


Рисунок 3.8 – Опасное сближение МНТ с Землей на втором витке

Из рисунка 3.8 видно, что МНТ после первого витка начинает удаляться на расстояние более 1 единицы, но затем возвращается в окрестность Земли. Более того, сближение происходит на расстоянии $\varepsilon \approx 0.003$, или

4500 км, что меньше радиуса Земли. Иначе говоря, наблюдается падение МНТ на поверхность планеты.

Таким образом, есть необходимость рассмотрения движения МНТ на более длительном промежутке времени и более широком диапазоне скоростей, т.к. построенная в п. 3.1 область безопасного маневрирования не дает полной гарантии избежать соударения малого небесного тела с Землей.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследована задача численного моделирования движения тела малой массы в условиях круговой ограниченной задачи трех тел, определены условия, при которых в результате ухода из окрестности коллинеарной точки либрации L_1 движение МНТ несет потенциальную угрозу падения на поверхность Земли.

В ходе выполнения работы получены следующие практические результаты:

- описана математическая модель исследуемой системы трех тел;
- найдено численное решение составленных уравнений движения тела малой массы в окрестности коллинеарной точки либрации L_1 ;
- сформулированы понятия областей опасного и безопасного маневрирования в окрестности точки либрации L_1 ;
- проведена регуляризация уравнений движения, позволяющая исследовать движение малого небесного тела в окрестности Земли;
- описаны области опасного и безопасного маневрирования для плоского движения с начальными данными в точке либрации L_1 ;
- найдено численное решение задачи Коши и показано, что смоделированное движение МНТ проходит вблизи инвариантного множества окрестности L_1 .

В дальнейшем необходимо рассмотреть трехмерное движение малого небесного тела в окрестности точки либрации, выполнить численное моделирование и описать области опасного и безопасного маневрирования для данного случая.

Инвариантные множества могут быть построены для линеаризованной системы исходных уравнений движения с дальнейшим исследованием «функции опасности», как отмечено в работах [8-11]; для нелинейной системы (6) нахождение инвариантных множеств является трудоемкой задачей, т.к. сводится к построению аналитических рядов от 6 переменных [12]. Ино-

гда прибегают к численному методу перебора начальных данных, что и было представлено в данной работе.

Подобное внимание к инвариантным множествам имеет явный практический интерес – их использование позволяет значительно увеличить время пребывания малого небесного тела в заданной окрестности точки либрации. Помимо построения траектории приведения МНТ на инвариантное множество не менее важным является его удержание в заданной точке пространства без опасности для Земли.

ЛИТЕРАТУРА

1. Farquhar R.W. Halo-Orbit and Lunar-Swing by Missions of the 1990's // 41st Congress of the IAF. October 1990, Germany
2. Лидов М.Л., Ляхова В.А., Тесленко Н.М., Траектории полета Земля – Луна – Гало-орбита в окрестности точки L_2 системы Земля – Солнце // Космические исследования. – 1992. – Т.30, № 4. – с. 435-454.
3. Planetary Resources | The Asteroid Mining Company [Электронный ресурс]. URL: <https://www.planetaryresources.com/>
4. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. Изд.6, 2017. 416 с.
ISBN 978-5-9710-4036-1
5. Пуанкаре А. Новые методы небесной механики. Том 1. Академия наук СССР. Серия "Классики науки". М.: Наука. 1971. - 772 с.
6. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит., 1968, 800 стр.
7. Шмыров В.А. Стабилизация управляемого орбитального движения космического аппарата в окрестности коллинеарной точки либрации L_1 // Вестник СПбГУ. Серия 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2005. №1-2. С.192-198
8. Шиманчук Д.В., Шмыров А.С. Построение траектории возвращения в окрестность коллинеарной точки либрации системы Солнце–Земля // Вестник СПбГУ. Серия 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2013. №2. С.75-84
9. Шмыров А.С., Шмыров В.А. Оптимальная стабилизация орбитального движения КА в окрестности коллинеарной точки либрации L_1 // Четвертые Поляховские чтения: избр. труды. СПб.: Изд-во «ВВМ», 2006. С. 296-300.
10. Шиманчук Д.В. Моделирование орбитального управляемого движения космического аппарата в окрестности коллинеарной точки либра-

ции L1 // Вестник СПбГУ. Серия 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2010. №3. С.86-92

11. Shmyrov A.S., Shmyrov V.A. Qualitative Properties of Controllable Orbital Motion in a Neighborhood of Collinear Libration Point // Classical and celestial mechanics: selected papers. Siedlce: Wydawnictwo Collegium Mazovia, 2012. P. 149-157.

12. Малявкин Г.П., Шмыров В.А., Шмыров А.С. Построение стабилизирующего управления орбитальным движением с использованием аналитического представления инвариантного многообразия в окрестности коллинеарной точки либрации. // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2017. Вып. 1. С. 102–112

13. Рой А. Движение по орбитам. 1981. – 544 с.

14. Корягин С.В., Яковлев А.А. Сравнительный анализ методов интегрирования с плавающим шагом. Cloud of Science. 2016. Т. 3. № 1.

ISSN 2409-031X