

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
КАФЕДРА УПРАВЛЕНИЯ МЕДИКО-БИОЛОГИЧЕСКИМИ
СИСТЕМАМИ

Чернушенко Константин

Магистерская диссертация

**Построение и статистический анализ валютных
корзин минимальной волатильности (на примере
стран Евразийского экономического союза)**

Направление 01.04.02

«Прикладная математика и информатика»

Магистерская программа «Математическое и информационное обеспечение
экономической деятельности»

Научный руководитель,
кандидат физ.-мат. наук,
доцент
Корников В.В.

Санкт-Петербург

2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

Содержание.....	2
Введение.....	3
Обзор литературы.....	4
Глава 1. Валютные корзины и инструменты их построения.....	5
1.1. Матрица обмена валютных пар.....	5
1.2. Инвариантные индексы.....	7
1.3. Валютные корзины.....	9
Глава 2. Построение и статистический анализ валютных корзин.....	11
2.1. Графическое представление индексов и валютных корзин РФ и РК.....	11
2.2. Поиск оптимальных весов для валютных корзин.....	17
2.3. Программный продукт.....	18
2.4. Построение и статистический анализ валютных корзин минимальной волатильности РФ и РК.....	20
2.5. Использование программного продукта в реальной жизни.....	26
Глава 3. Прогнозирование значений валютных корзин.	
Модель вида ARMA(p,q).....	30
3.1. Модель вида ARMA(p,q).....	30
3.2. Прогнозирование. Программная реализация.....	34
Заключение.....	38
Введение.....	40

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. В наше время, люди не знают, в какой валюте хранить деньги. Вопрос о стабильности валюты всегда остаётся актуальным. Поэтому хотелось бы иметь валютную корзину минимальной волатильности, которая обеспечит надёжность как в настоящем, так и в будущем.

Объектом исследования являются валютные корзины Республики Казахстан и Российской Федерации, а также курсы валют стран-участниц Евразийского экономического союза и нескольких мировых валют.

Цели исследования:

1. Статистическая оценка валютных корзин.
2. Построение валютных корзин минимальной волатильности.
3. Прогнозирование валютной корзины минимальной волатильности.

Задачи исследования:

1. Рассмотреть экономическую модель валютного рынка, включающую в себя инвариантные индексы и валютные корзины.
2. Разработать программу для построения валютных корзин.
3. Построить валютные корзины минимальной волатильности.
4. Построить прогноз валютных корзин минимальной волатильности, используя модели вида $ARMA(p,q)$.

ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

Матрица обмена валютных пар на основе которой строятся математические модели в данной работе, встречаются в совместных публикациях научных сотрудников СПбГУ: кандидата физико-математических наук, доцента кафедры высшей математики факультета прикладной математики – процессов управления – Геннадия Михайловича Хитрова, и профессора экономического факультета – Николая Васильевича Хованова [17, 18, 19]. Также хотелось бы отметить и другие труды Хованова в соавторстве с другими научными деятелями на схожие темы [2, 3, 4, 5]. Нобелевский лауреат Р. Манделл в трудах, посвященных проблемам международной монетарной системы [6, 7], затронул интересный вопрос о создании стабильной мировой валюты, с которой не возникло бы проблем, которые решаются в данной работе.

В данной работе понадобятся навыки во владении программным обеспечением Python, основные из которых методы машинного обучения [13] и реализация интерфейса. Поэтому хотелось бы сразу выделить несколько источников, которые могут помочь в реализации технической и теоретической частей. В работе использовалась модель вида $ARMA(p,q)$, для реализации технической части использовалась библиотека «statsmodels» с хорошей документацией [10], там же частично описана теоретическая часть, для лучшего понимания которой лучше обратиться к книге Андерсона Т. «Статистический анализ временных рядов» [11], в ходе работы будем не раз ссылаться на выкладки из этой книги. Графический интерфейс был реализован при помощи библиотеки «tkinter» [1].

Глава 1. Валютные корзины и инструменты их построения

1.1. Матрица обмена валютных пар

Необходимо построить математическую модель, которая поможет более объективно определить стоимость той или иной валюты. Пусть $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ - набор валют. Каждая из валют может иметь количественную характеристику – действительное число $q_i \geq 0, i = 1, \dots, n, q_1 + \dots + q_n > 0$.

Любая валюта из набора G эквивалентна определенному количеству другой валюты из этого же набора. Тогда, можно определить коэффициент обмена для двух валют g_i и g_j как:

$$c(i,j) = \frac{q_j}{q_i}$$

Необходимо иметь значение коэффициента $c(i,j)$ для любой пары из рассматриваемых валют. Набор коэффициентов $c(i,j)$ составляет матрицу обмена $C = \{c(i,j)\}, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n$, которые, по сути, и являются курсами валют. Также отметим некоторые свойства набора коэффициентов c :

- 1) рефлексивность - любую валюту можно обменять саму на себя;
- 2) симметричность - если валюту a можно обменять на валюту b , то и валюту b можно обменять на валюту a ;
- 3) транзитивность - если валюту a можно обменять на валюту b , а валюту b на валюту c , то валюту a можно обменять на валюту c .

Выполнение свойства транзитивности позволяет рассчитать все значения матрицы обмена, зная одну лишь её строку. То есть коэффициент обмена любых двух валют можно посчитать путём конвертации через ту валюту, в которой выражены элементы множества G .

Стоит отметить два очевидных свойства матрицы C :

1) по главной диагонали стоят единицы, так как одна единица некоторой валюты эквивалентна одной единице этой же самой валюты;

2) если единица валюты i обменивается на одну единицу валюты j с коэффициентом $c(i,j)$, то одна единица валюты i обменивается на единицу валюты j с коэффициентом $\frac{1}{c(i,j)}$.

1.2. Инвариантные индексы

Таким образом, изменение одного элемента матрицы обмена C во времени отражает динамику изменения валютной пары по отношению друг к другу, но не отражает реальную ситуацию на валютном рынке, так как не понятно, как ведет себя целевая валюта по отношению к другим валютам, чем вызвано колебание курса и тд. На практике часто вводят характеристику, которая включала бы в себя изменение не одной валюты, а изменения всех валют, входящих в множество G . Таким образом, полученный индекс будет инвариантен по отношению к каждой конкретной денежной единице. Это позволит наиболее объективным образом оценивать изменения в ценности валют. Существует много различных индексов. В данной работе используются аддитивные и мультипликативные индексы следующего вида:

$$IndAdd(i) = \frac{c(i,j)}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n c(i,j)}, \text{ где } j \in \{1, \dots, n\}$$

$$IndMult(i) = \frac{c(i,j)}{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n c(i,j)}}, \text{ где } j \in \{1, \dots, n\}.$$

Значение данных индексов для валюты i не зависит от выбора базовой валюты j . Далее необходимо ввести в рассмотрение последовательность моментов времени $t \in \{1, \dots, T\}$, в которые измеряются значения курсов для входных данных. Соответственно, инвариантные индексы будут зависеть от t :

$$IndAdd(i, t) = \frac{c(i,j,t)}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n c(i,j,t)}, \text{ где } j \in \{1, \dots, n\}, t \in \{1, \dots, T\}$$

$$IndMult(i, t) = \frac{c(i,j,t)}{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n c(i,j,t)}}, \text{ где } j \in \{1, \dots, n\}, t \in \{1, \dots, T\}.$$

Полученные индексы могут иметь сильно различающиеся числовые значения, что осложняет визуальное восприятие динамики изменения валюты.

Поэтому из соображений удобства будет разумно редуцировать индексы следующим образом:

$$IndAddR(i, \frac{t}{t_0}) = \frac{IndAdd(i, t)}{IndAdd(i, t_0)}$$

$$IndMultR(i, \frac{t}{t_0}) = \frac{IndMult(i, t)}{IndMult(i, t_0)}$$

Здесь t_0 – некоторый момент времени. В программе в качестве t_0 используется начальный момент времени.

1.3. Валютные корзины

Пусть валютная корзина — это набор определенных количеств различных валют, где количество — весовой коэффициент (удельный вес, вес) той или иной валюты. В отдельности любая из валют имеет большие колебания, аномальные выбросы и тд. по отношению к любой из существующих валют. В связи с этим возникает потребность в использовании валютной корзины, которая будет более стабильна. Сумма нескольких валют в определенных пропорциях позволяет комплексно учитывать рыночную ситуацию и изменение общеэкономических условий обмена. Есть два вполне логичных ограничения на весовые коэффициенты валютной корзины:

- 1) каждый весовой коэффициент принадлежит отрезку $[0; 1]$;
- 2) сумма всех весовых коэффициентов должна равняться единице.

Валютные корзины, как и отдельные валюты, по сути, являются расчётными единицами. Поэтому из тех же соображений, что и для валют, имеет смысл для формализации понятия «валютная корзина» использовать редуцированный индекс, не зависящий от базовых валют, выбранных для построения индексов компонентов корзины. Искомая величина будет являться функцией от инвариантных индексов отдельных валют, приведенных к начальному моменту времени:

$$CBind\left(w, \frac{t}{t_0}\right) = \sum_{i=1}^n w_i IndR\left(i, \frac{t}{t_0}\right)$$

где n — число валют в корзине. Здесь и далее под $IndR\left(i, \frac{t}{t_0}\right)$ подразумевается аддитивный или мультипликативный индекс. Ограничения на значения удельных весов $w = (w_1, \dots, w_n)$ в формульном виде:

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1, w_i \geq 0 \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

Значение индекса корзины минимальной волатильности с течением времени должно изменяться минимальным образом (оставаться неизменным в идеальном случае). Нестабильность корзины можно выразить через дисперсию:

$$D = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (CBind(w, t) - MCBind(w))^2$$

$$MCBind(w) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T CBind(w, t)$$

$\{1, \dots, T\}$ – рассматриваемые моменты времени.

Таким образом, для построения валютной корзины минимальной волатильности необходимо подобрать весовые коэффициенты w_i таким образом, чтобы дисперсия D была наименьшей.

Глава 2. Построение и статистический анализ валютных корзин

2.1. Графическое представление индексов и валютных корзин РФ и РК

В данной работе для расчётов и анализа всевозможных объектов использовались курсы валют за период с 1 января 2016 по 31 декабря 2016, то есть за весь 2016 год. Выборки курсов были скачены с официальных сайтов Республики Казахстан [12] и Российской Федерации [14] в денежных единицах соответствующей страны.

Таким образом, можно составить матрицу обмена C , так как известен курс интересующих нас валют в любой из дней 2016 года. Имея матрицу обмена, можно посчитать значения мультипликативного и аддитивного индексов для любой из валют. Имея рассчитанные индексы и зная веса для каждой из валют, можно построить и валютные корзины.

На языке программирования Python алгоритм, отвечающий за подсчет мультипликативных индексов, выглядит следующим образом:

```
IndMult_time = []
for x in range(len(C_time)):
    IndMult = [ 1 for y in range(n)]
    for z in range(n):
        mult1 = 1
        mult2 = 1
        for y in range(n):
            mult1 = mult1*C_time[x][y][0]
            mult2 = mult2*C_time[0][y][0]
        IndMult[z]=(C_time[x][z][0]/(mult1**(1/n)))/(C_time[0][z][0]/(mult2**(1/n)))
```

```
IndMult_time.append(IndMult)
IndR = IndMult_time
```

Алгоритм, отвечающий за подсчет мультипликативных индексов:

```
IndAdd_time = []
for x in range(len(C_time)):
    IndAdd = [ 1 for y in range(n)]
    for z in range(n):
        sum1 = 0
        sum2 = 0
        for y in range(n):
            sum1 += C_time[x][y][0]
            sum2 += C_time[0][y][0]
        IndAdd[z]=(n*C_time[x][z][0]/sum1)/(n*C_time[0][z][0]/sum2)
    IndAdd_time.append(IndAdd)
IndR = IndAdd_time
```

Функция, отвечающей за подсчёт значения валютной корзины в определенный момент времени:

```
def CB(t,w):
    CB = 0
    for x in range(n):
        CB += w[x]*IndR[t][x]
    return CB
```

Функция, отвечающая за подсчёт значений валютной корзины на всем временном промежутке:

```
def CB_Full(w):
```

```

CB_full = []
for x in range(len(usd_r)):
    CB_full.append(CB(x,w))
return CB_full

```

Начнём построение с валютной корзины РФ и индексов, входящих в неё. В валютную корзину РФ входят евро и американский доллар с весами 0.45 и 0.55, соответственно.

Визуализируем полученные расчёты. На рисунке 2.1.1 изображены аддитивные индексы валют, входящих в валютную корзину РФ, и валютная корзина РФ, выраженная через аддитивные индексы. А на рисунке 2.1.2 изображены те же объекты, но выраженные через мультипликативные индексы.

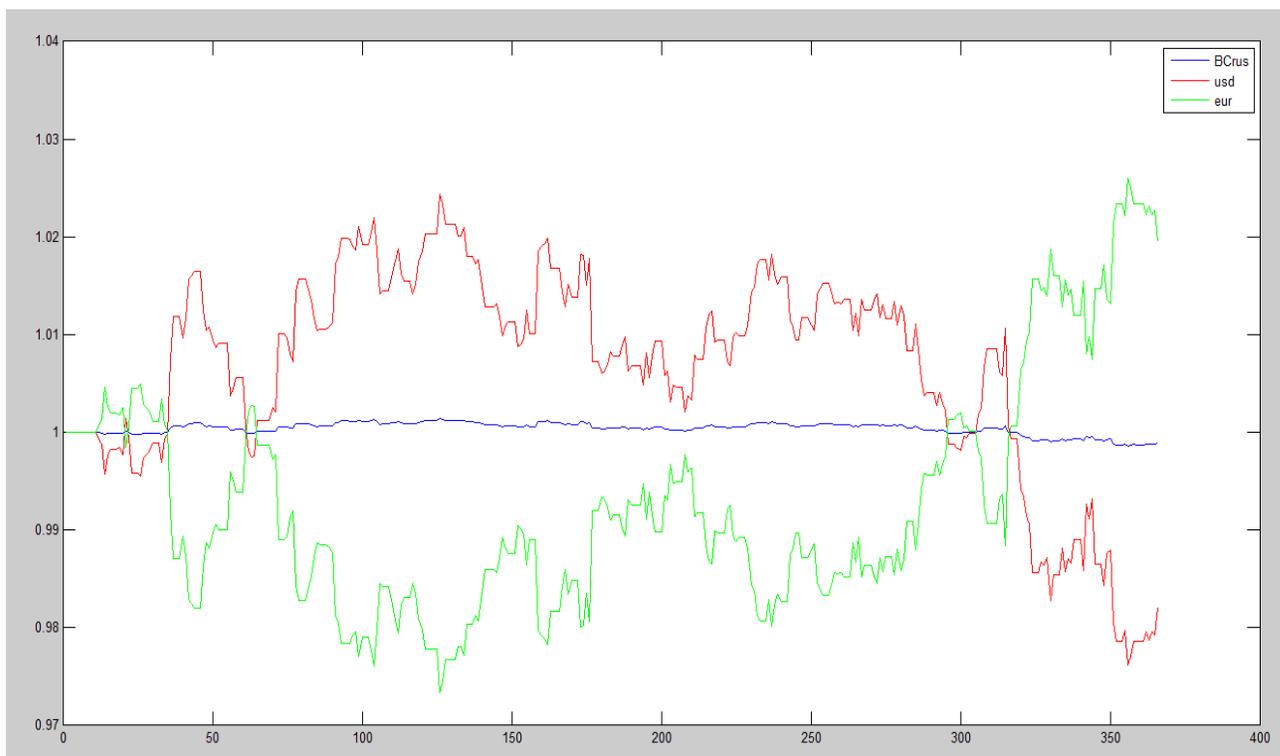


Рисунок 2.1.1 График аддитивных индексов евро и американского доллара и валютной корзины РФ, выраженной через эти аддитивные индексы с весами 0.45 для евро и 0.55 для американского доллара

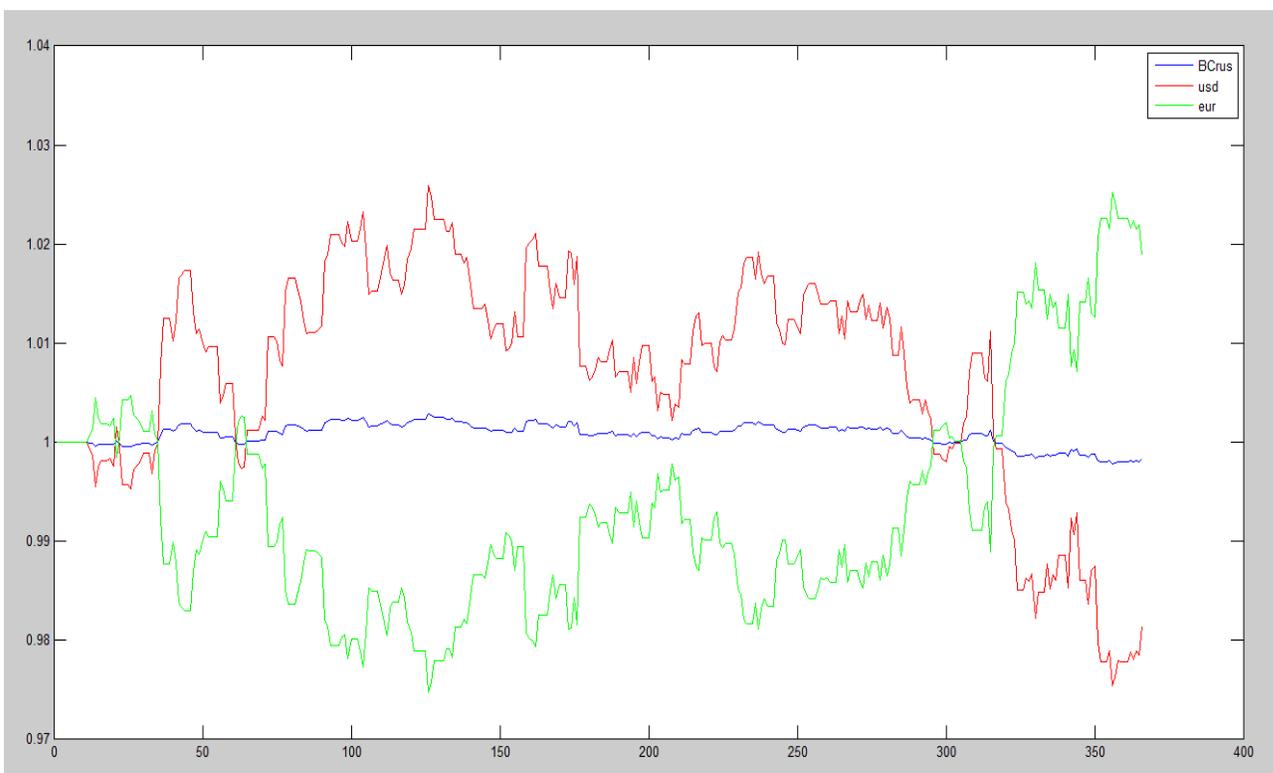


Рисунок 2.1.2 График мультипликативных индексов евро и американского доллара и валютной корзины РФ, выраженной через эти мультипликативные индексы с весами 0.45 для евро и 0.55 для американского доллара

Визуально валютные корзины выглядят приемлемо с колебаниями возле единицы и не имеют аномальных выбросов. Ниже представлена данные со статистическими характеристиками валютных корзин.

	BCrus_mult_orig	BCrus_add_orig
Среднее	1,006514271	1,000381734
Медиана	1,009315626	1,000545893
Стандартное отклонение	0,010620876	0,00062238
Дисперсия выборки	0,000112803	3,87357E-07
Минимум	0,976150457	0,998602424
Максимум	1,024413161	1,001430604

Далее, когда будут рассчитаны значения аддитивных и мультипликативных валютных корзин минимальной волатильности и их

статистические показатели, будет возможность сравнить их между собой.

В валютные корзины РК входят три валюты: евро, американский доллар и российский рубль с весами 0.2, 07 и 01, соответственно. Имея курсы этих валют, выраженных в казахстанском тенге, можно проделать ту же работу и получить следующие результаты:

	BCkz_mult_orig	BCkz_add_orig
Среднее	0,992622834	1,090115752
Медиана	0,992046104	1,111633215
Стандартное отклонение	0,00732769	0,065936845
Дисперсия выборки	5,3695E-05	0,004347667
Минимум	0,976143355	0,891709717
Максимум	1,013757727	1,206381514

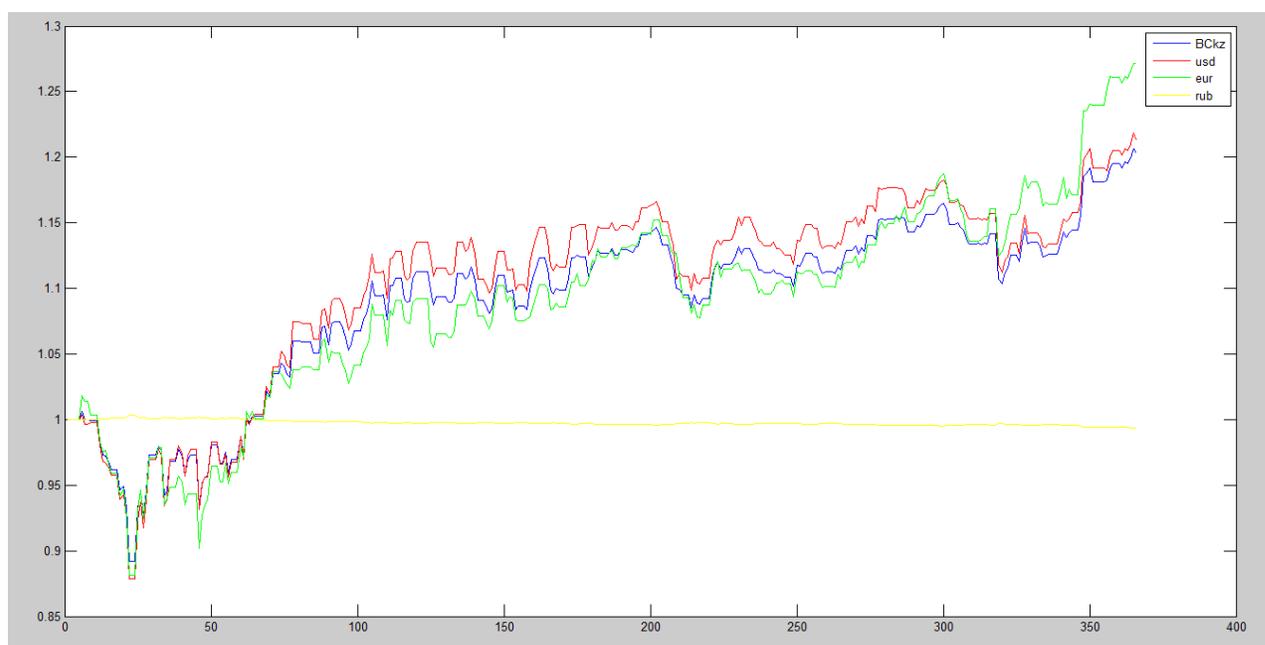


Рисунок 2.1.3 График аддитивных индексов евро, американского доллара и российского рубля и валютной корзины РК, выраженной через эти аддитивные индексы с весами 0.2 для евро, 0.70 для американского доллара и 0.1 для российского рубля

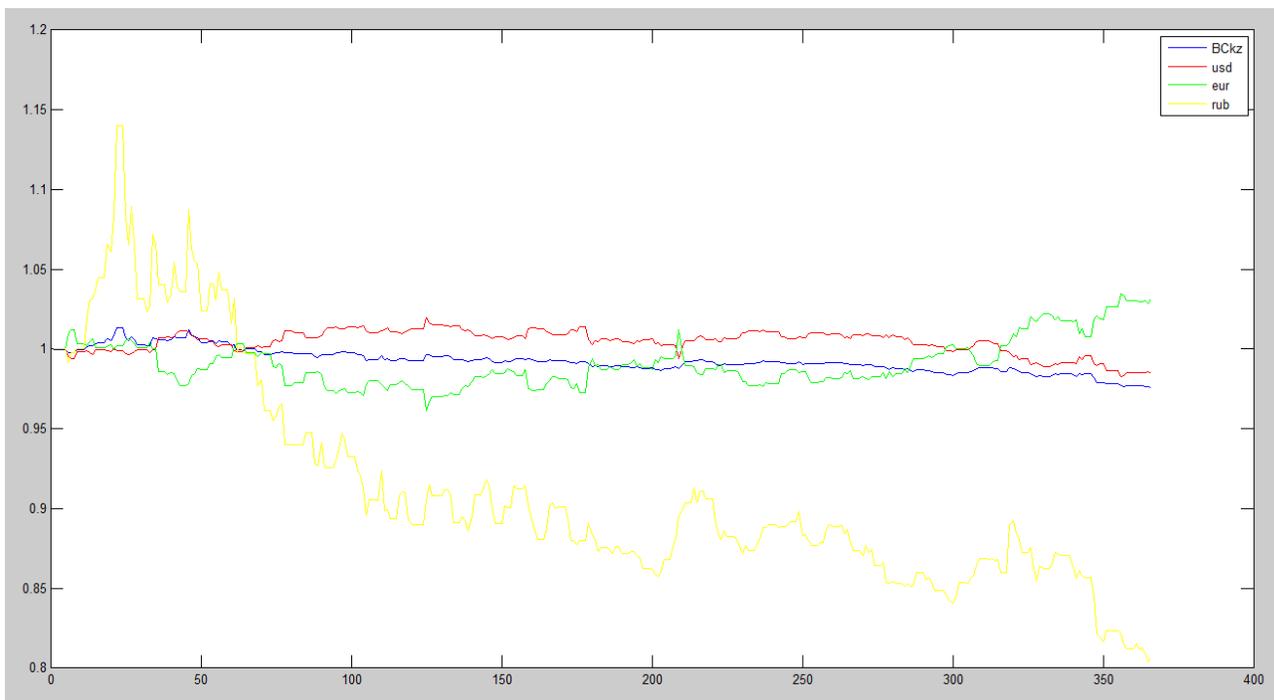


Рисунок 2.1.3 График мультипликативных индексов евро, американского доллара и российского рубля и валютной корзины РК, выраженной через эти аддитивные индексы с весами 0.2 для евро, 0.7 для американского доллара и 0.1 для российского рубля

Как можно заметить, ситуация с мультипликативной валютной корзиной аналогична с предыдущими: никаких аномалий не наблюдается. Но если посмотреть на график аддитивной валютной корзины, то можно сделать вывод, что она сильно волатильна. Статистические показатели это подтверждают. Максимальное значение валютной корзины отклонилось от единицы больше чем на 0.2.

Это объясняется тем, что валютная корзина РК имеет большой весовой коэффициент при американском долларе, который имеет большую волатильность на этом временном промежутке.

2.2. Поиск оптимальных весов для валютных корзин

Основная цель работы — построить валютную корзину минимальной волатильности [8, 9]. Для того, чтобы построить такую корзину, по сути, необходимо найти оптимальные веса для минимизации волатильности, которая была определена в первой главе как дисперсия.

Код функции, которая подсчитывает дисперсию/волатильность валютной корзины:

```
def D(w):
    def MCB(w1):
        sum1 = 0
        for x in range(len(usd_r)):
            sum1 += CB(x,w1)/len(usd_r)
        return sum1
    sum2 = 0
    for x in range(len(usd_r)):
        sum2 += ((CB(x,w)-MCB(w))**2)/len(usd_r)
    return sum2
```

Поиск оптимальных весов был проведён путем простого перебора всевозможных весов валют, входящих в корзину, с заранее заданным шагом. Этот способ был выбран для того, чтобы:

- 1) после перебора была возможность увидеть график распределения дисперсий в зависимости от изменения весов;
- 2) была возможность поставить ограничения на вес одной или нескольких валют и получить результат, учитывая эти условия.

2.3. Программный продукт

В ходе работы был разработан программный продукт (рисунок 2.2.1) средствами языка программирования Python, который позволяет решить поставленные задачи. В программный продукт были включены государственные валюты стран-участниц Евразийского экономического союза и несколько мировых валют, такие как евро, американский доллар и тд.

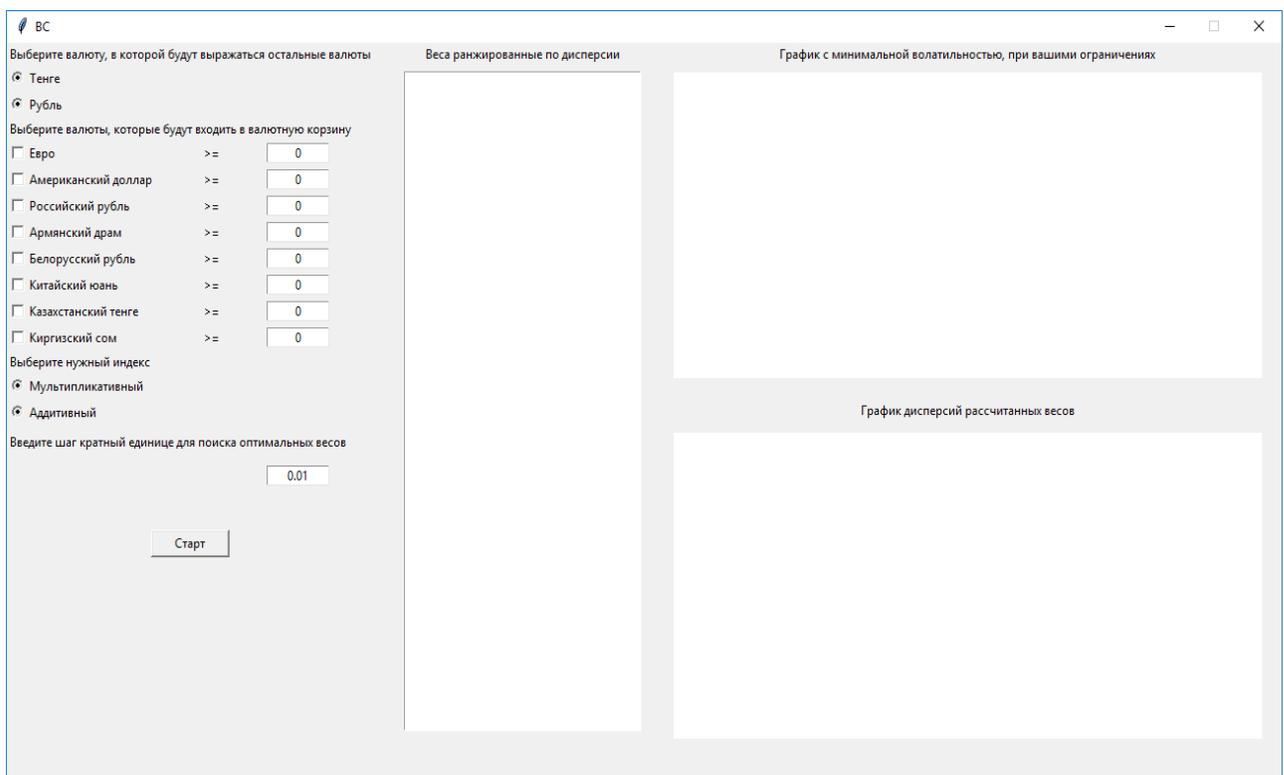


Рисунок 2.2.1 Результат программного продукта сразу после запуска

Параметры и инструкция пользования:

1) Необходимо выбрать одну из двух валют (казахстанский тенге или российский рубль), в которой будут выражаться все остальные валюты, входящие в валютную корзину.

2) На выбор предоставляются валюты, которые войдут в валютную корзину, а также ограничение для весового коэффициента для каждой из

выбранной валюты. По умолчанию весовое ограничение для каждой валюты из списка валют равно 0. Важно понимать, что ограничения в сумме не должны превышать единицу, иначе результат будет — пустое множество.

3) Далее необходимо выбрать один индекс (мультипликативный или аддитивный), в котором будет производиться расчёт.

4) Также необходимо выбрать шаг, который обеспечивает интервальный переход при переборе. По умолчанию он равен 0.01. Важно понимать, что этот шаг должен быть кратен единице, иначе на последнем шаге получится выход за пределы массива.

Указав все необходимые параметры, будет получен следующий результат:

1) Проранжированный по дисперсиям список векторов с весами, где на первом месте будет значение дисперсии, а на втором вектор весов.

2) График валютной корзины минимальной волатильности, т.е. график валютной корзины с оптимальными весами (минимальной дисперсией), которые стоят в списке в первой строчке. В последней главе сюда же будет добавлен прогноз.

3) График дисперсий, проранжированных по векторам весов.

2.4. Построение и статистический анализ валютных корзин минимальной волатильности РФ и РК

Полученная программа была использована для решения поставленных задач. В первую очередь, была построена мультипликативная валютная корзина РФ. Выбор всех необходимых параметров и полученный результат изображен на рисунке 2.4.1.

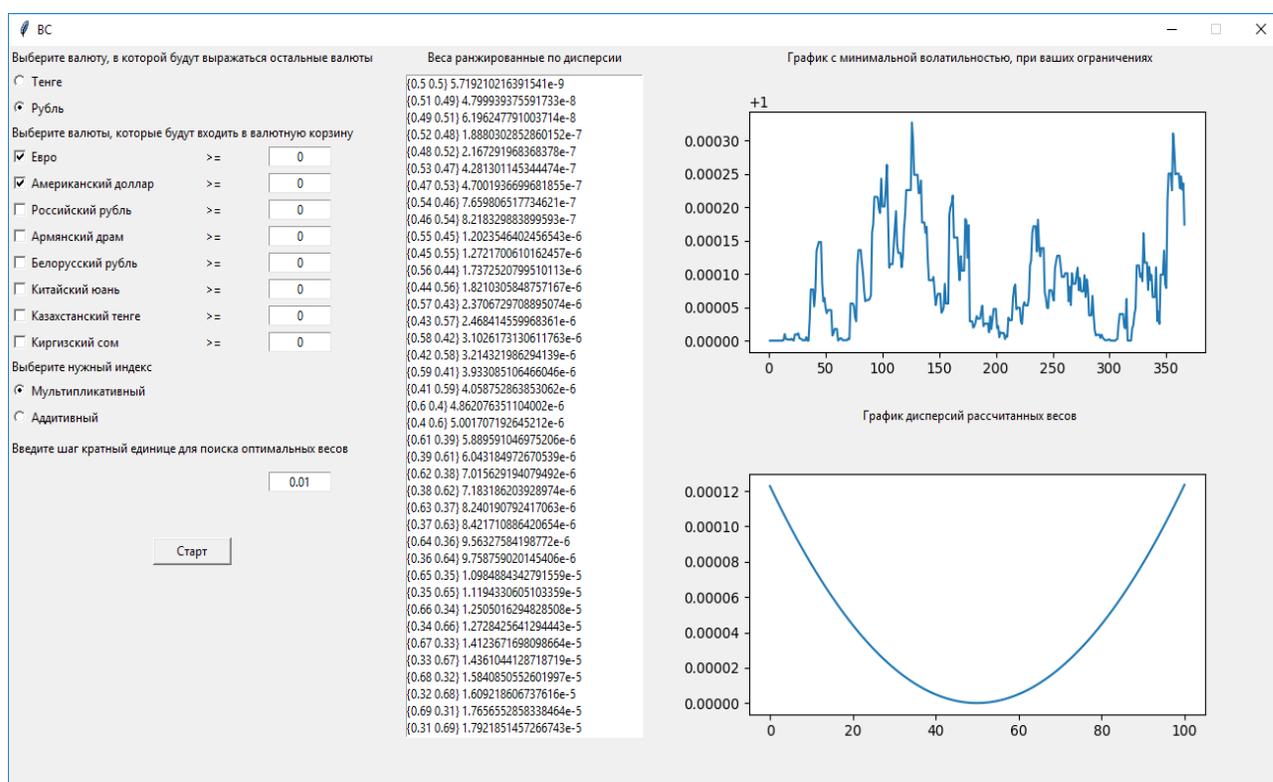


Рисунок 2.4.1 Результат использования программы для валютной корзины РФ, рассчитанной через мультипликативные индексы

Были получены веса для валютной корзины минимальной волатильности РФ равные 0.5 для евро и 0.5 для американского доллара. Эти веса не сильно отличаются от «оригинальных» весов. Но стоит отметить, что в списке проранжированных по дисперсиям «оригинальные» веса занимают одиннадцатую строчку. Сравним статистические показатели полученной

валютной корзины минимальной волатильности и статистические показатели, которые были получены ранее для валютной корзины с весами, используемыми на данный момент правительством РФ:

	BCrus_mult_opt	BCrus_mult_orig
Среднее	1,000084842	1,006514271
Медиана	1,000065433	1,009315626
Стандартное отклонение	7,5729E-05	0,010620876
Дисперсия выборки	5,73488E-09	0,000112803
Минимум	1	0,976150457
Максимум	1,000326942	1,024413161

Сравнивая любой из показателей, можно сделать вывод, что валютная корзина с оптимальными весовыми коэффициентами лучше.

Выставив параметры программы такими же, за исключением смены индекса, получим результат, изображенный на рисунке 2.4.2.

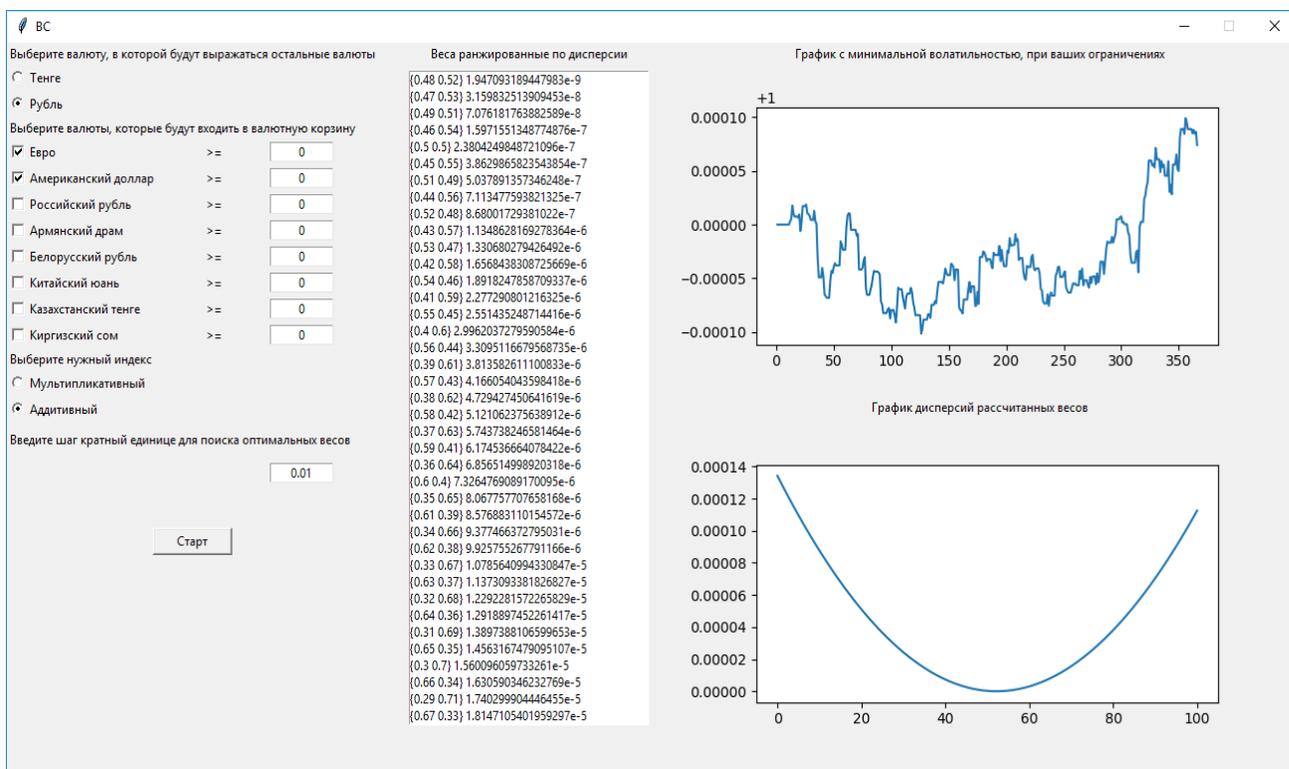


Рисунок 2.4.2 Результат использования программы для валютной корзины РФ, рассчитанной через аддитивные индексы

Были получены оптимальные веса: 0.48 для евро и 0.52 для американского доллара. Эти коэффициенты находятся ещё ближе к «оригинальным», которые занимают пятую строчку в списке.

Статистические показатели:

	BCrus_add_opt	BCrus_add_orig
Среднее	0,999972899	1,000381734
Медиана	0,999961244	1,000545893
Стандартное отклонение	4,41863E-05	0,00062238
Дисперсия выборки	1,95243E-09	3,87357E-07
Минимум	0,999898433	0,998602424
Максимум	1,000099222	1,001430604

Сравнив статистические показатели полученной валютной корзины минимальной волатильности и статистические показатели валютной корзины с «оригинальными» весами, можно сделать вывод, что отличаются они не сильно.

Далее, рассчитываем веса для валютной корзины минимальной волатильности РК. Выставляем параметры программы такие как на рисунке 2.4.3 и там же получим результат.

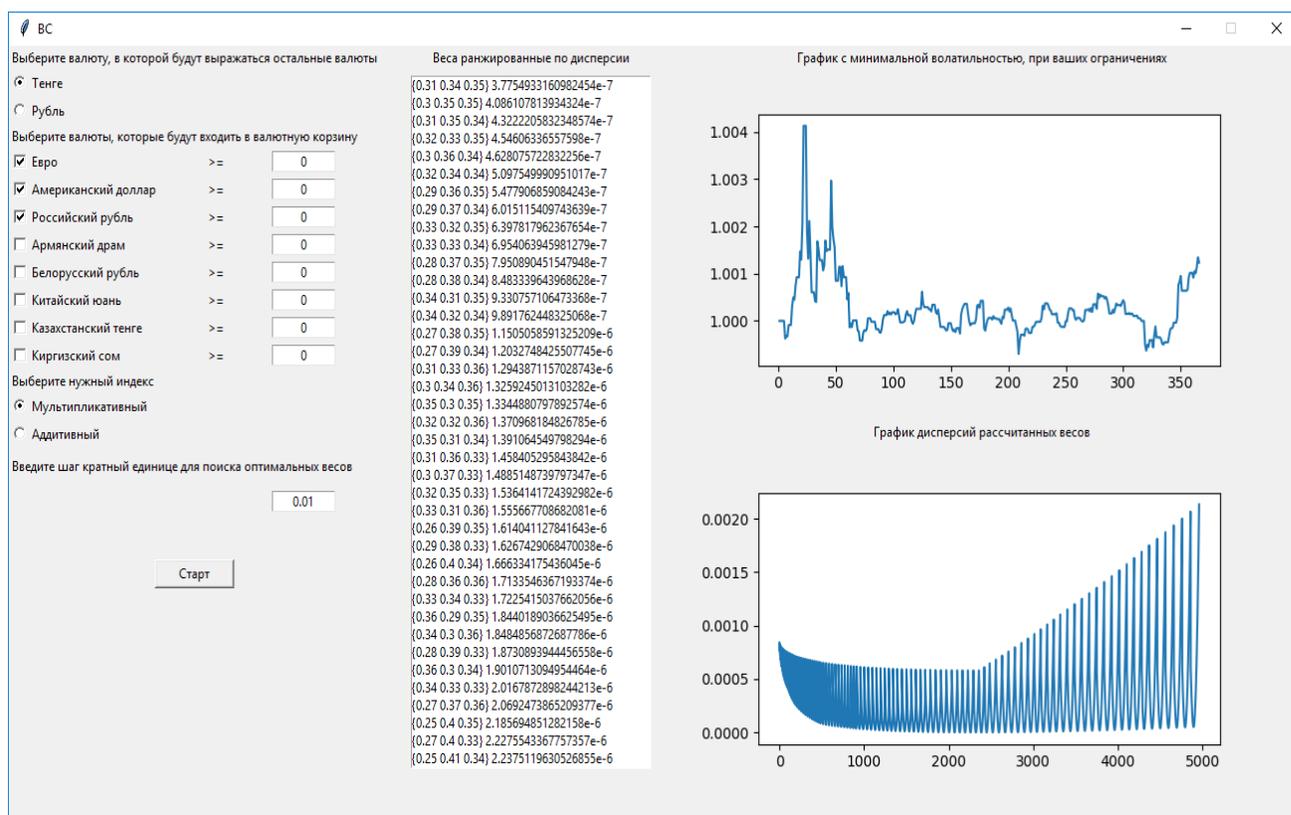


Рисунок 2.4.3 Результат использования программы для валютной корзины РК, рассчитанной через мультипликативные индексы

Весовые коэффициенты для мультипликативной валютной корзины минимальной волатильности РК: 0.31 для евро, 0.34 для американского доллара и 0.35 для российского рубля. Эти весовые коэффициенты сильно отличаются от «оригинальных» коэффициентов. Сравним статистические показатели:

	BCkz_mult_opt	BCkz_mult_orig
Среднее	1,00025825	0,992622834
Медиана	1,000123771	0,992046104
Стандартное отклонение	0,000615292	0,00732769
Дисперсия выборки	3,78584E-07	5,3695E-05
Минимум	0,999304254	0,976143355
Максимум	1,004124465	1,013757727

Любой из показателей на порядок меньше, что подтверждает стабильность валютной корзины минимальной волатильности и нестабильность «оригинальной» валютной корзины РК.

Далее выбираем в настройках программы «аддитивный индекс», с которым «оригинальная» валютная корзина показывала плохие статистические показатели, да и визуально она выглядела аномально. Результат изображен на рисунке 2.4.4.

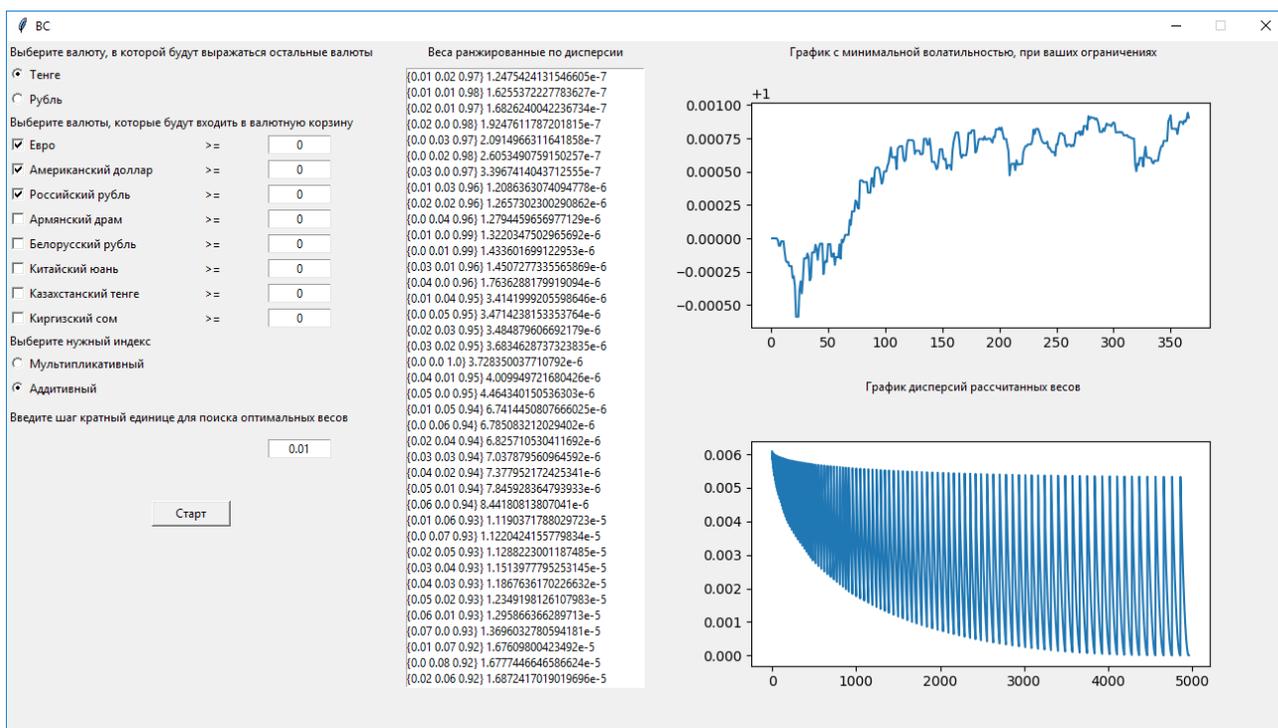


Рисунок 2.4.4 Результат использования программы для валютной корзины РК, рассчитанной через аддитивные индексы

Весовые коэффициенты для аддитивной валютной корзины минимальной волатильности РК: 0.49 для евро, 0.18 для американского доллара и 0.33 для российского рубля. Эти весовые коэффициенты так же сильно отличаются от весов в «оригинальной» валютной корзине, в которой при американском долларе стоит 0.7, а рассчитанный оптимальный коэффициент оказался 0.18. Статистические показатели:

	BCkz_add_opt	BCkz_add_orig
Среднее	0,999743375	1,090115752
Медиана	0,998795593	1,111633215
Стандартное отклонение	0,004411106	0,065936845
Дисперсия выборки	1,94579E-05	0,004347667
Минимум	0,992061621	0,891709717
Максимум	1,014149401	1,206381514

В показателях, которые описывают динамику временного и в идеале должны быть равными единице, что показало бы нулевую волатильность и, следовательно, абсолютную стабильность, различие есть уже в первом знаке после запятой, в то время, как показатели при оптимальных весах близки к единице. А показатели, описывающих отклонения, которые в идеале должны быть равны нулю, отличаются больше чем на порядок.

Проанализировав полученные результаты, можно сделать вывод:

1) У валютной корзины РФ, где выбор индекса мало меняет ситуацию, оптимальные веса близки к «оригинальным» значениям. Хотя и показатели у валютной корзины минимальной волатильности лучше, отличаются они не сильно.

2) Оптимальные веса валютной корзины РК сильно отличны, в зависимости от выбора индекса, но ни один из результатов не был близок к

«оригинальным» весовым коэффициентам. Как уже было описано ранее, причиной этому может быть тот факт, что у одной из валют стоит слишком большой весовой коэффициент, что дестабилизирует ситуацию в случае, когда эта валюта становится сильно волатильной, что случается не редко на валютном рынке. Поэтому, и по логическим соображениям лучше уменьшить вес у американского доллара в валютной корзине РК, и по статическим выкладкам видно, что показатели у валютных корзин минимальной волатильности, предложенных в этой работе, на много лучше существующей валютной корзины.

2.5. Использование программного продукта в реальной жизни

Можно придумать множество примеров, как можно было бы использовать программный продукт, разработанный в данной работе, в реальной жизни. Один из таких примеров:

Постановка задачи. Пусть некий рабочий получает зарплату в рублях. Его часто отправляют в командировки в Казахстан, поэтому он хотел бы как минимум половину своего капитала держать в казахстанском тенге. Помимо командировок в Казахстан, бывают командировки в США, поэтому рабочий хотел бы держать не меньше 20% своего капитала в американских долларах. Какую-то часть планируется отложить в евро. Как и любой человек, он хочет минимизировать потери и иметь валютные пропорции, которые бы обеспечили ему стабильность.

Таким образом, в валютную корзину войдут 3 валюты: евро, американский доллар и казахстанский тенге. Для казахстанского доллара предполагается весовой коэффициент не меньше 50%, для американского доллара не меньше 20%, для евро ограничения на вес нет.

Решение. Решить данную задачу можно при помощи программного продукта, выставив вышеописанные параметры. В валютную корзину войдут 3 валюты: евро, американский доллар и казахстанский тенге. Для казахстанского доллара предполагается весовой коэффициент не меньше 50%, для американского доллара не меньше 20%, для евро ограничения на вес нет.

Проанализируем и сравним решения, полученных при помощи аддитивного (рисунок 2.5.1) и мультипликативного (рисунок 2.5.2) индексов.

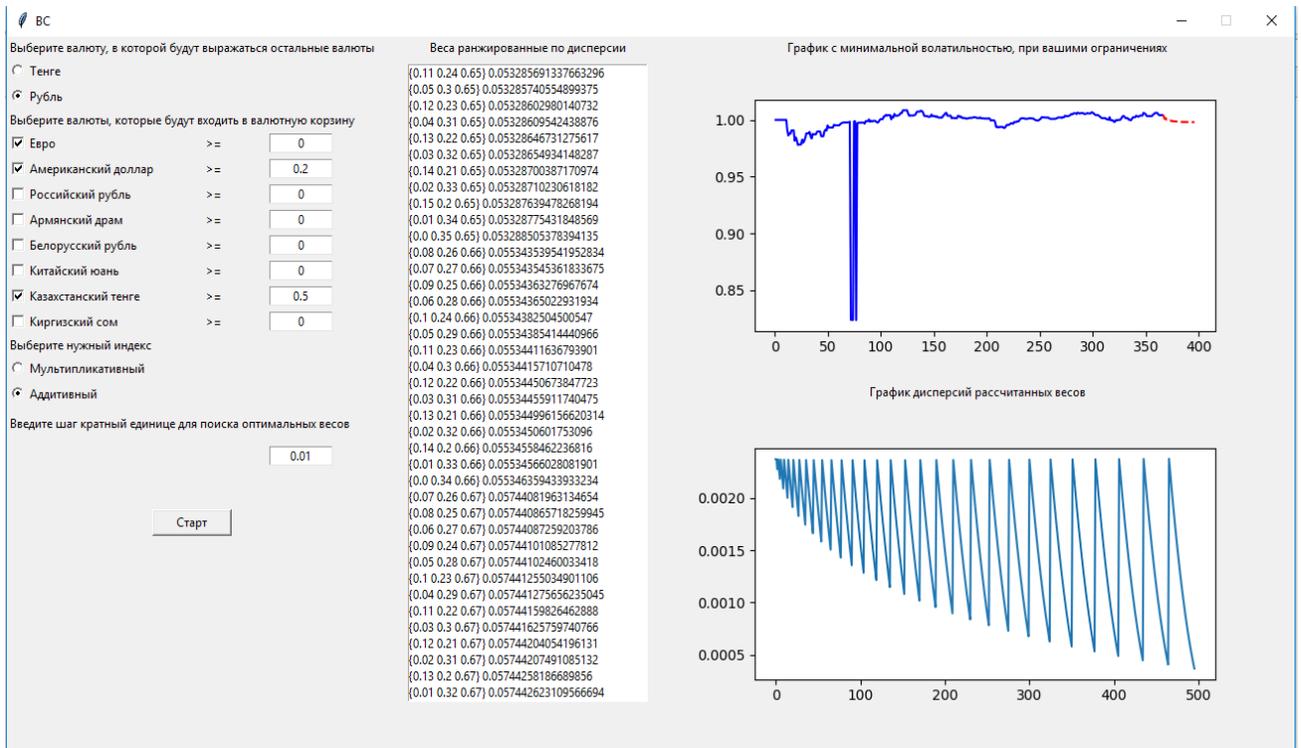


Рисунок 2.5.1 Результат использования программы для задачи из реальной жизни, используя аддитивный индекс

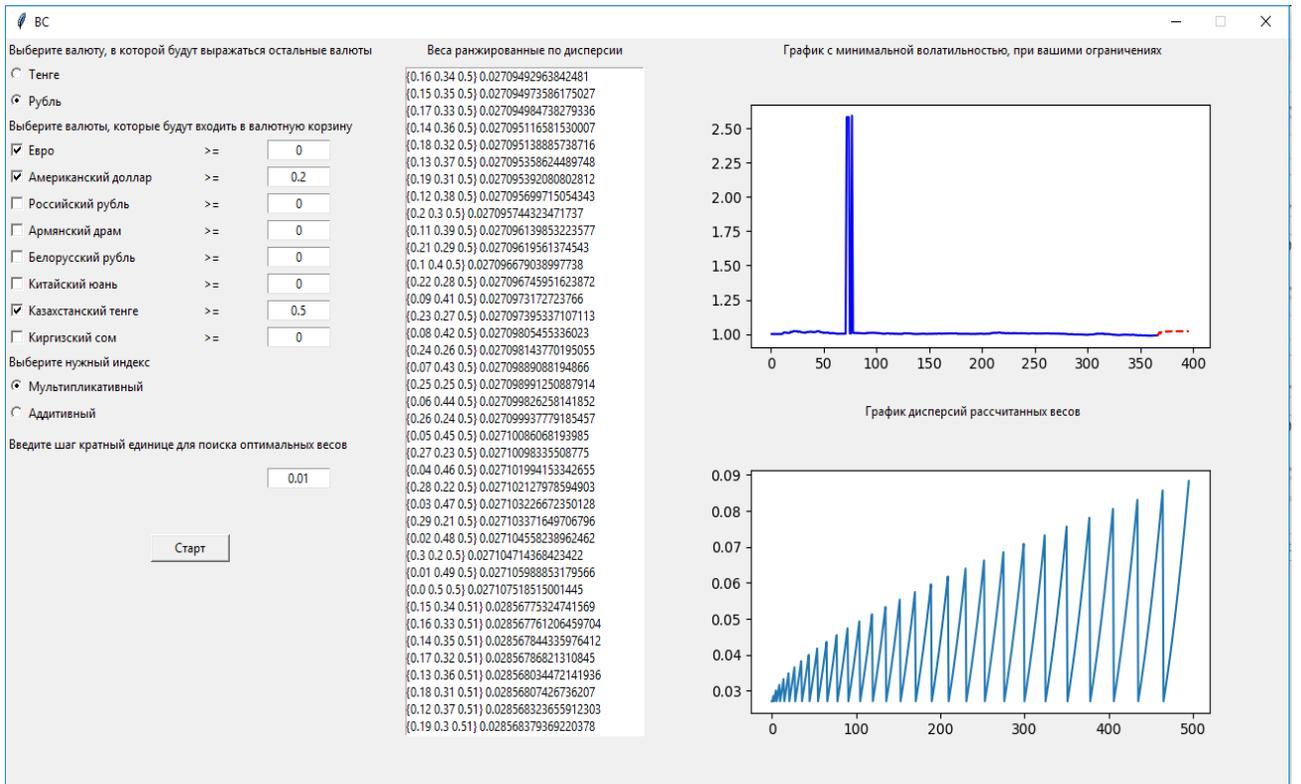


Рисунок 2.5.2 Результат использования программы для задачи из реальной жизни, используя мультипликативный индекс

Результат весовых коэффициентов аддитивной валютной корзины: 0.11 для евро, 0.24 для американского доллара и 0.65 для казахстанского тенге. Весовые коэффициенты мультипликативной валютной корзины для евро, американского доллара и казахстанского тенге 0.16, 0.34 и 0.5, соответственно.

Обе валютные корзины имеют выбросы, но в целом низковолатильны. Оценивая весовой коэффициент для евро, можно сделать вывод, что на нём не следует сосредотачивать больше 16% капитала. Распределение остатка между американским долларом и казахстанским тенге зависит от выбора инвариантного индекса.

На графиках валютных корзин минимальной волатильности красным цветом изображен прогноз, который говорит о стабильности на ближайший месяц. Метод построения прогноза описан в следующей главе.

Таким образом, полученный программный продукт может использовать любой человек для регулировки стабильности своих сбережений с предпочтениями для одной или нескольких валют.

Глава 3. Прогнозирование значений валютных корзин.

Модель вида ARMA(p,q)

3.1. Модель вида ARMA(p,q)

Теперь необходимо построить такую математическую модель, которая смогла бы наилучшим способом спрогнозировать динамику изменения значений валютной корзины.

Приведём основные определения, используемые далее:

Определение 1. Пусть (Ω, \mathcal{A}, P) – вероятностное пространство, t – параметр ($t \in T, T \subset [0, +\infty)$). Случайной функцией $\xi = \xi(t, \omega)$ ($t \in T, \omega \in \Omega$) называется измеримое отображение $\xi: [0, +\infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Если параметр t интерпретируется как время, то вместо термина «случайная функция» принято использовать термин «случайный процесс».

Определение 2. Временным или динамическим рядом называется совокупность наблюдений x_i в последовательные моменты времени $i = 1, \dots, N$.

Основной чертой, выделяющей анализ временных рядов среди других видов статистического анализа, является существенность порядка, в котором производятся наблюдения.

Различают два вида временных рядов: с дискретным временем и непрерывным.

Определение 3. Процесс с дискретным временем будем называть такой случайный процесс, который предполагает реализацию перехода из одного состояния в другое в определенные моменты времени: t_1, t_2, \dots , и не меняет свое состояние в промежутки времени между этими моментами. Процесс с непрерывным временем – это такой случайный процесс, который предполагает возможность осуществления перехода в любой случайный момент t .

Определение 4. Случайный процесс называют стационарным в широком смысле, если его математическое ожидание и дисперсия не зависят от времени, а корреляционная функция зависит только от разности моментов времени.

Определение 5. Пусть $\xi(\omega, t)$ – случайный процесс. Его центрированный случайный процесс определяется как

$$\overset{\circ}{\xi}(\omega, t) = \xi(\omega, t) - m_{\xi}(t),$$

а его центрированная дисперсия как

$$\overset{\circ}{D}_{\xi}[t] = M\left(\overset{\circ}{\xi}^2(\omega, t)\right) = D_{\xi}[t].$$

Заметим, что $M\left(\overset{\circ}{\xi}(\omega, t)\right) = 0$.

Определение 6. Центрированный и ортонормированный (в $L^2(\Omega)$) процесс $\varepsilon = \{\varepsilon_n, n \in Z\}$ называется белым шумом.

Существует множество моделей для описания временных рядов. Например, модели типа ARCH, GARCH, ARIMA. Одна из самых распространённых – авторегрессионная модель типа ARMA(p,q) [16].

Определение 7. Авторегрессия - модель временных рядов, в которой значение временного ряда в данный момент времени может быть выражено в виде линейной комбинации предыдущих значений этого же ряда и случайной ошибки, являющейся «белым шумом».

Теорема Вольда [11].

Пусть выполнен ряд следующих условий:

А) x_t – стационарный в широком смысле временной ряд, η_t – ошибки одношагового линейного прогноза по полной предыстории процесса $(x_{t-1}, x_{t-2}, \dots)$. Тогда ошибки η_t являются белым шумом, т.е. имеют нулевое математическое ожидание, не автокоррелированы и имеют одинаковую дисперсию:

$$E(\eta_t) = 0, \forall t;$$

$$E(\eta_s \eta_t) = 0, \text{ при } s \neq t;$$

$$E(\eta_t^2) = \sigma^2, \forall t.$$

В) Пусть, кроме того, x_t является регулярным, т.е. $E(x_t - \hat{x}_t)^2 = \sigma^2 > 0$, где \hat{x}_t - прогноз. Тогда он представим в следующем виде:

$$x_t = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \eta_{t-i} + v_t$$

где $\psi_0 = 1$, $\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2 < \infty$; процесс v_t здесь является стационарным, линейно детерминированным и не коррелирован с ошибками η_t : $E(\eta_s \eta_t) = 0$ при $\forall s, t$. Такое представление единственно.

Утверждения А и В составляют теорему Вольда. Эта теорема является одним из самых фундаментальных результатов в теории временных рядов. Утверждение В говорит о том, что любой стационарный процесс можно представить в виде так называемого линейного фильтра от белого шума плюс линейно детерминированная компонента. Это так называемое разложение Вольда.

Доказательство этой теоремы представлено в книге Андерсон Т. «Статистический анализ временных рядов» [11].

Определение 8. Случайный процесс x_t называют $AR(p)$ процессом авторегрессии порядка p , если его значение определяется линейной комбинацией p и его предыдущих значений и добавлением белого шума ε_t :

$$x_t = a_1 x_{t-1} + a_2 x_{t-2} + \dots + a_p x_{t-p} + \varepsilon_t,$$
 где a_1, \dots, a_p – некоторые коэффициенты авторегрессии.

Определение 9. Случайный процесс x_t называют $MA(q)$ процессом скользящего среднего порядка q , если в разложении Вольда присутствует q слагаемых:

$x_t = \sum_{j=0}^q \beta_j \varepsilon_{t-j} = \varepsilon_t + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \beta_q \varepsilon_{t-q}$, β_1, \dots, β_q – параметры скользящего среднего.

На практике иногда бывает целесообразно ввести в модель как элементы авторегрессии, так и элементы скользящего среднего. Это делается для того, чтобы с использованием как можно меньшего числа параметров уловить характеристики исследуемого эмпирического ряда. Такой процесс называется смешанным процессом авторегрессии – скользящего среднего и обозначается ARMA(p, q): $x_t = \phi_1 x_{t-1} + \dots + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$.

Эта модель получила название модели Бокса-Дженкинса, поскольку была популяризирована Дж. Боксом и Г. Дженкинсом в их известной книге «Анализ временных рядов».

Основным условием построения ARMA модели является стационарность временного ряда, это вытекает из теоремы Вольда.

3.2. Прогнозирование. Программная реализация

На практике часто опускается проверка предпосылок для построения той или иной модели. Главное — получить модель с хорошим прогнозом. Так как входящие данные всегда меняются, опустим условия построения ARMA модели и сделаем упор на хороший прогноз.

После выставления всех настроек программы пользователем — получаем значения валютной корзины минимальной волатильности, которые будем прогнозировать. Прогноз будет делаться на 30 дней.

Возьмём два множества $p_s = (0,1,2,3,4)$ и $q_s = (0,1,2,3)$. Множество возможных пар параметров (p,q) для ARMA модели определим как декартово произведение множеств p_s и q_s . Объём этого множества равен 20, то есть в ходе работы программы имеется 20 готовых моделей и выбирается лучшая.

Разделим выборку на обучающую, на которой модели будут обучаться путем минимизации функции потерь, которую определим как квадрат суммы ошибок, и на тестовую, на которых будем тестировать прогноз полученных моделей. Возьмём соотношение обучающей и тестовой выборок как 4 к 1, то есть тестовая выборка будет составлять 20% от исходной выборки. Сравниваться модели будут путём сравнения значений функции потерь на тестовых выборках.

Далее, после нахождения оптимальных параметров p и q для модели вида ARMA(p,q), строится прогноз и отображается на графике валютной корзины минимальной волатильности другим цветом, пунктиром.

На рисунке 3.2.1 изображен результат законченного программного продукта с прогнозом для валютной корзины минимальной волатильности РФ с использованием мультипликативных индексов.

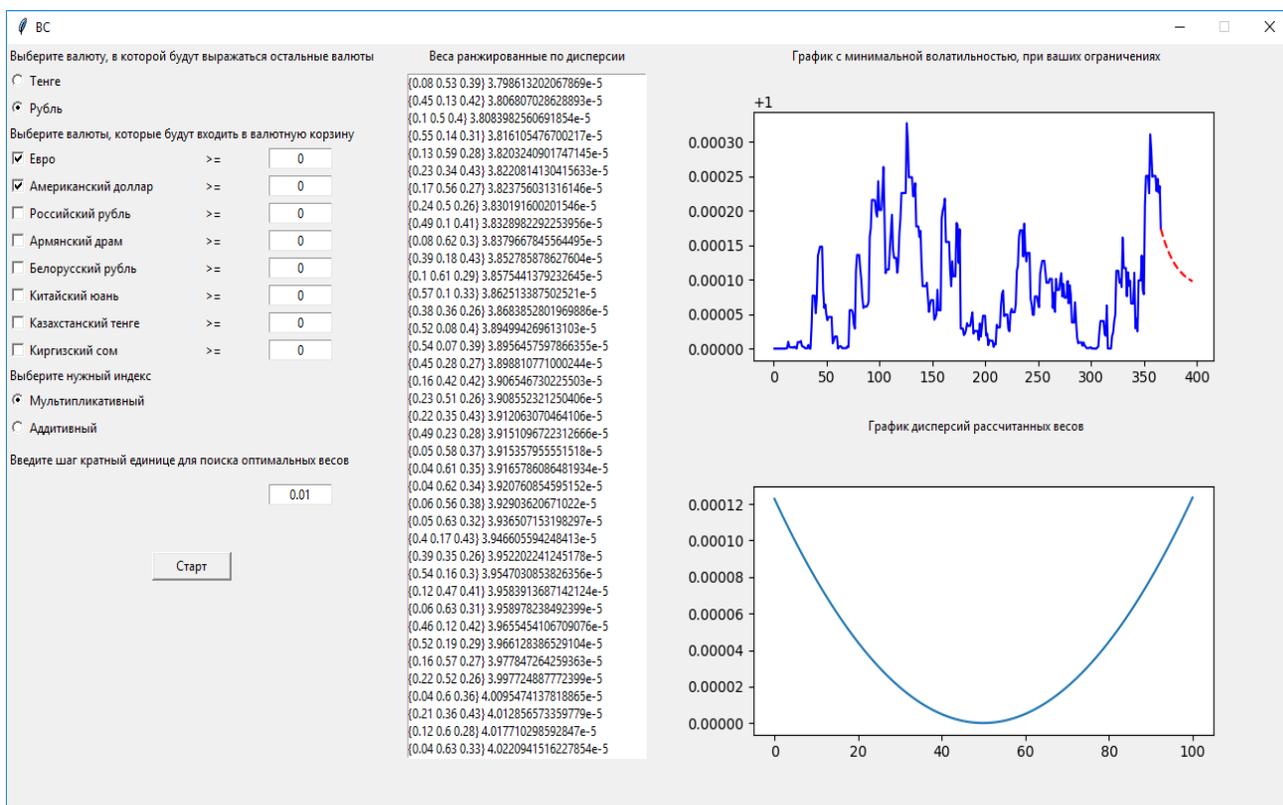


Рисунок 3.2.1 Результат использования программного продукта с прогнозом для валютной корзины РФ, рассчитанной через мультипликативные индексы

Полученный прогноз выглядит адекватным и стремится к единице, что показывает стабильность валютную корзину минимальной волатильности.

Похожие результаты для валютной корзины минимальной волатильности РФ, рассчитанной через аддитивные индексы (рисунок 3.2.2), и валютной корзины минимальной волатильности РК, рассчитанной через мультипликативные индексы (рисунок (3.2.3).

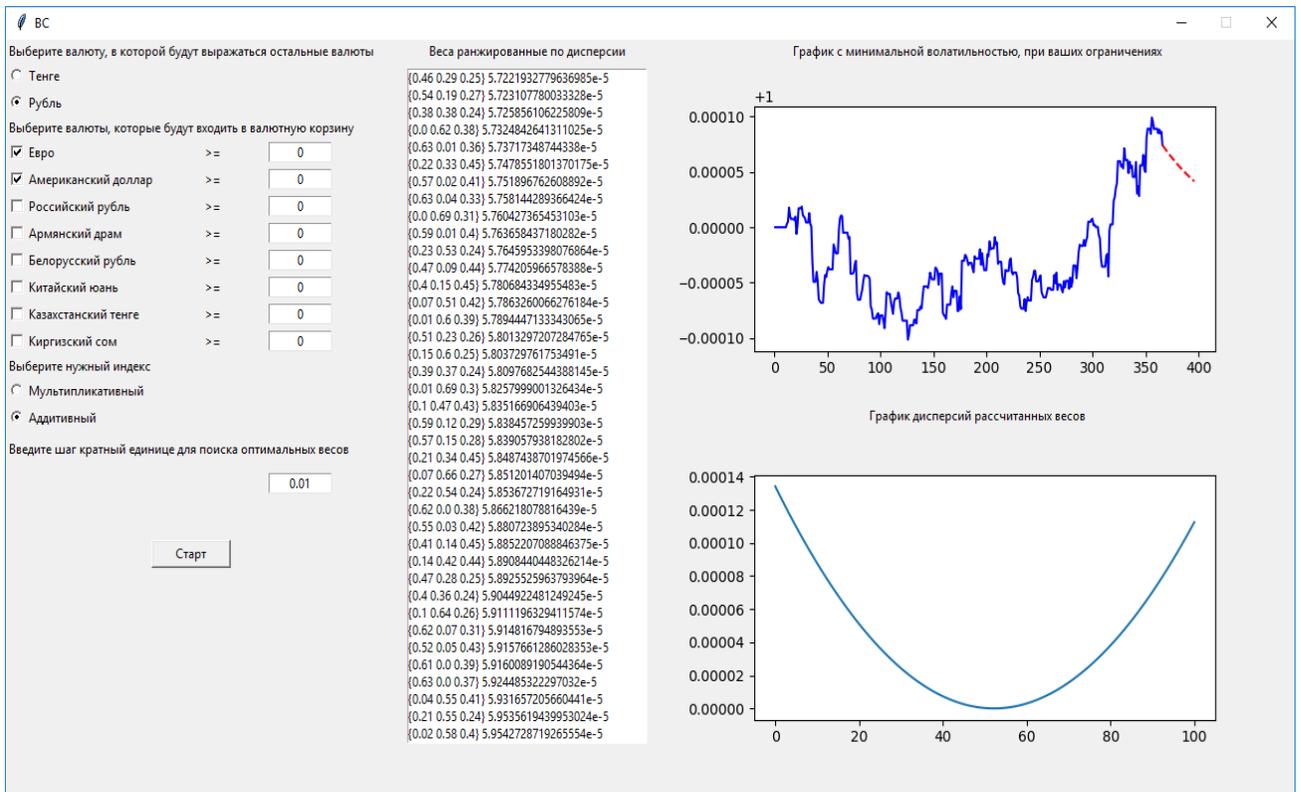


Рисунок 3.2.2 Результат использования программного продукта с прогнозом для валютной корзины РФ, рассчитанной через аддитивные индексы

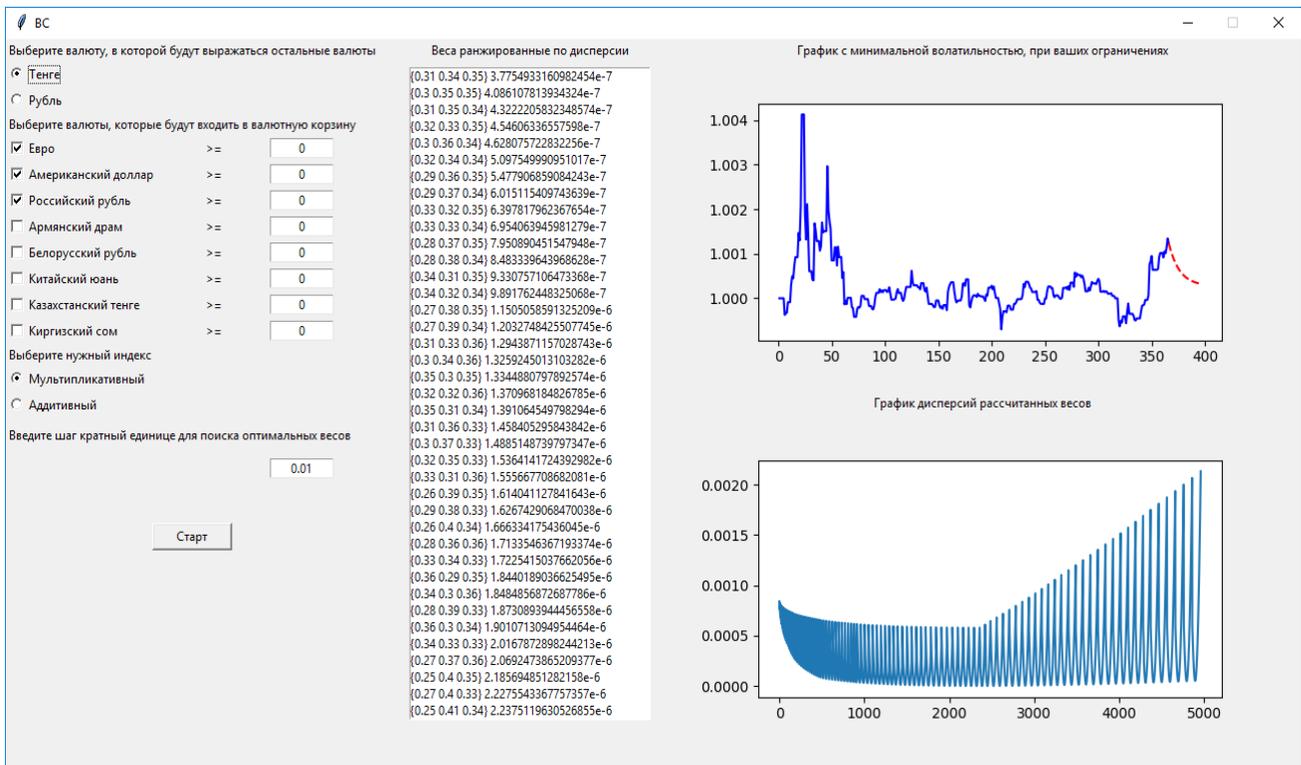


Рисунок 3.2.3 Результат использования программного продукта с прогнозом для валютной корзины РК, рассчитанной через мультипликативные индексы

Значения валютной корзины минимальной волатильности РК, рассчитанные через аддитивные индексы, визуально не выглядят хаотично и тем более не сходятся к единице, а наоборот, имеют противоположную динамику. Прогноз (рисунок 3.2.4) имеет динамику понижения к единице, но не такую «резкую», как хотелось бы.

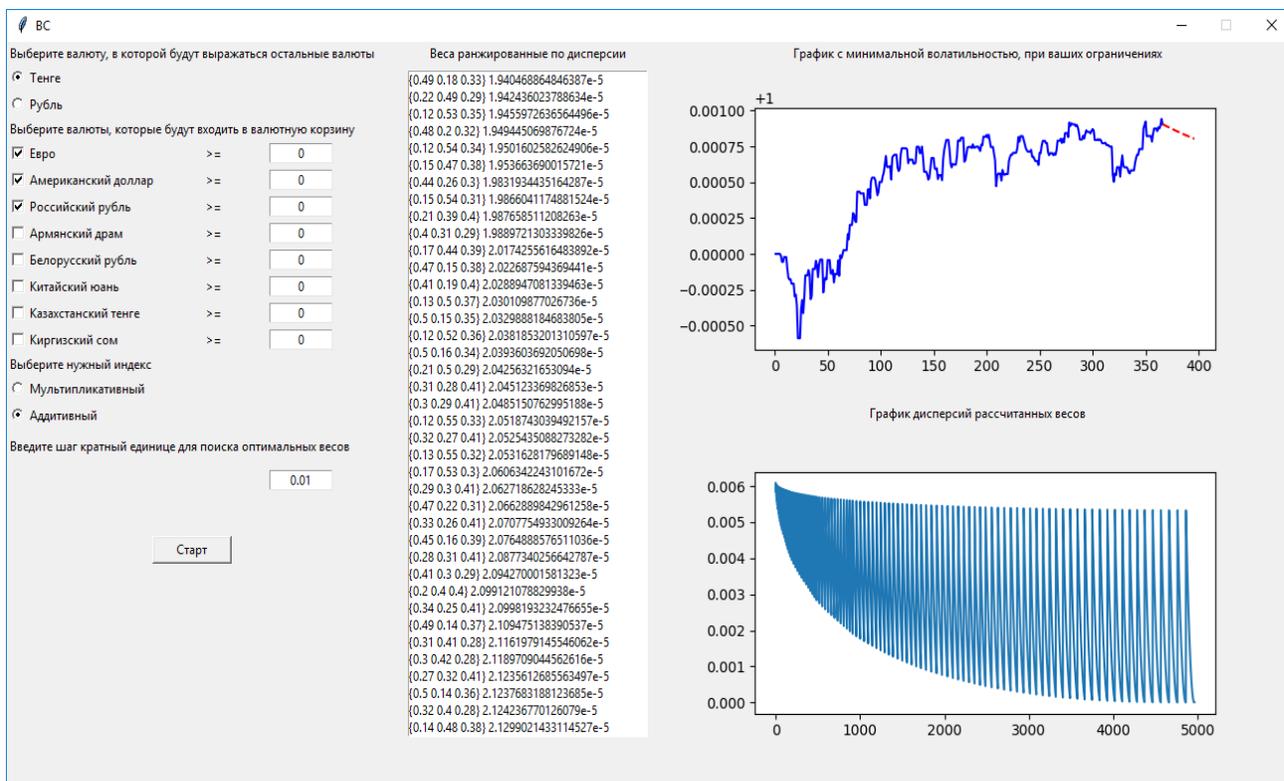


Рисунок 3.2.4 Результат использования программного продукта с прогнозом для валютной корзины РК, рассчитанной через аддитивные индексы

Таким образом, можно сделать вывод, что прогноз двух валютных корзин минимальной волатильности для РФ, независимо от выбора индекса, выглядит адекватно и предполагает дальнейшую стабильность. Прогноз для мультипликативной валютной корзины минимальной волатильности РК так же показал хорошие результаты, чего нельзя сказать о валютной корзине минимальной волатильности РК, рассчитанной через аддитивные индексы, где прогноз не гарантирует стабильность.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, выполнение поставленных исследовательских задач позволило получить следующие **основные результаты исследования**:

1. Была рассмотрена экономическая модель валютного рынка, включающая в себя инвариантные индексы и валютные корзины.

2. Были построены валютные корзины РК и РФ, используя инвариантные индексы, и проанализированы их статистические показатели.

3. Разработан программный продукт, который позволяет:

А) выставить разнообразные ограничения на входящие данные, нужные пользователю;

В) построить валютную корзину минимальной волатильности;

С) визуализировать распределение изменения волатильности при изменении весовых коэффициентов, входящих в валютную корзину;

Д) построить прогноз значений корзины минимальной волатильности при помощи модели вида $ARMA(p,q)$, где параметры p и q выбираются путём минимизации квадрата суммы ошибок на тестовой выборке.

4. Используя программный продукт, были построены валютные корзины минимальной волатильности РК и РФ, рассчитанных через инвариантные индексы, и проанализированы их статистические показатели:

А) Все статистические показатели валютной корзины минимальной волатильности РФ оказались лучше, независимо от выбора инвариантного индекса, чем эти же показатели валютной корзины РФ с весами, установленными правительством РФ. Такая валютная корзина являлась бы более стабильной. Так же прогноз сулит стабильность и в будущем.

В) С валютной корзиной РК, в случае выбора мультипликативного индекса для расчётов, похожая ситуация: все статистические показатели лучше и прогноз так же хороший. В случае выбора аддитивная индекса «оригинальная» валютная корзина показала плохие результаты, так как

аддитивный индекс американского доллара оказался волатильным, а при нем стоит весовой коэффициент равный 0.7. Рассчитывая оптимальные веса для такой корзины, получилось сильно улучшить статистические показатели, но прогноз значений такой валютной корзины минимальной волатильности не гарантирует стабильность.

Перспективы исследования:

Программный продукт можно использовать для построения валютных корзин и статистического анализа, используя другие входящие параметры, отличающиеся от тех, которые использовались в этой работе. Например, можно изменить шаг изменения весовых коэффициентов, который в этой работе был равен 0.01. Также можно изменить количество валютных пар, входящих в валютную корзину, или изменить сами валюты.

Данная работа была представлена на XIX Всероссийском Симпозиуме по прикладной и промышленной математике. Текст доклада принят к публикации в сборник труда конференции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Graphical User Interfaces with Tk. <https://docs.python.org/3/library/tk.html>
2. Hovanov N. V., Kolari J. W., Sokolov M. V. Computing currency invariant indices with an application to minimum variance currency baskets // Journal of Economic Dynamics & Control 28. 2004. P. 1481–1504.
3. Hovanov N. V., Kolari J. W., Sokolov M. V. Note on aggregated world currenctes of low volatility. // The Fifth International Scientific School “Modeling and Analysis of Safety and Risk in Complex systems. P. 271 – 277.
4. Hovanov N. V., Kolari J. W., Sokolov M. V., Sutyryn S. F. Meta-money: theory and application under risk and instability // The Sixth International Scientific School “Modeling and Analysis of Safety and Risk in Complex systems” (MASR2006). July 4–8, 2006. SPb., RAS, 2006. P. 240–247.
5. Hovanov N. V., Kolari J. W., Sokolov M., Sutyryn S. F. U.S. Dollar as an “Anchor” for Chinese yuan (An application of currency stochastic indices theory) // International Scientific School “Modeling and Analysis of Safety and Risk in Complex systems” (MASR-2004). June 22–25, 2004. SPb., Russia. IPME, 2004. P. 219–225.
6. Mundell R. A Reconsideration of the Twentieth Century // American Economic, 2000.
7. Mundell R. Currency Areas, Exchange Rate Systems and Intemational Monetary Reform. (Paper delivered at Universidad de CEMA, Buenos Aires, Argentina, 2000
8. Pontines V., Ramkishen S.R. The Asian Currency Unit (ACU): exploring alternative currency weights // Macroeconomics and Finance in Emerging Market Economies, 2008, Vol.1, № 2 September, p. 269 – 278.
9. Seton F. The Economics of Costj Use and Value: The Evaluation of

Performance, Structure, and Prices across Time, Space, and Economic Systems. Oxford, 1992.

10. statsmodels.tsa.arima_model.ARMA.
http://www.statsmodels.org/dev/generated/statsmodels.tsa.arima_model.ARMA.html
11. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов.— М.: «Мир», 1976. — 756 с.
12. База данных по курсам валют. http://www.cbr.ru/currency_base/
13. Открытый курс машинного обучения. Анализ временных рядов с помощью Python. <https://habrahabr.ru/company/ods/blog/327242/>
14. Официальные курсы валют.
<http://www.nationalbank.kz/?docid=747&switch=russian>
15. Обзорение прикладной и промышленной математики.
<http://www.tvp.ru/conferen/vsppmXIX/repso019.pdf>
16. Суслов В.И. Эконометрия. — М.: «СО РАН», 2005. — 744 с.
17. Хитров Г. М., Хованов Н. В. Простая модель обмена: анализ динамики покупательной способности и курсовой стоимости валюты // Вестник СанктПетербургского университета. Серия 5: Экономика. 1995. № 3. С. 90–96.
18. Хитров Г. М., Хованов Н. В. Простая модель обмена: основные предположения и ближайшие следствия // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 5: Экономика. 1992. № 4. С. 101–106.
19. Хитров Г. М., Хованов Н. В. Простая модель обмена: рандомизированные транзитивные матрицы коэффициентов обмена // Вестник СанктПетербургского университета. Серия 5: Экономика. 1994. № 1. С. 94–100.