Санкт-Петербургский Государственный Университет

01.04.01 Математика

Буряков Михаил Александрович

# Линейные алгебраические группы параболического типа

Квалификационная работа магистра

Научный руководитель:
д. ф.-м. н., профессор Вавилов Н. А.

Рецензент:
к. ф.-м. н., доцент Певзнер И. М.

Санкт-Петербург
2018

SAINT-PETERSBURG STATE UNIVERSITY

01.04.01 Mathematics

Mikhail Buryakov

# Parabolic-like Linear Algebraic Groups

Master’s Thesis

Scientific supervisor:
Dr. of Sc. (Phys.-Math.), Prof. Nikolai Vavilov

Reviewer:
Cand. of Sc. (Phys.-Math.), Assoc. Prof. Igor Pevzner

Saint-Petersburg
2018

# Оглавление

# 1. Введение

Настоящая работа развивает структурную теорию линейных алгебраических групп над кольцами. Нормальное строение групп точек редуктивных групп является одной из центральных тем всей структурной теории алгебраических групп на протяжение всего XX века, сотни работ посвящены этой теме. Не имея возможности детально описывать эти результаты, упомянем лишь некоторые наиболее значимые результаты. После первоначального прорыва Х. Басса [9], положившего начало изучению нормального строения линейных групп над общими кольцами, были получены классические результаты Дж. Вилсона [26] и И. З. Голубчика [2] о классических группах над коммутативным кольцом и результат Э. Абе [6] о произвольных группах Шевалле.

Большой интерес представляет обобщение результатов о нормальном строении групп Шевалле в двух направлениях. Во-первых, это задача описания подгрупп, нормализуемых не всей группой или её элементарной подгруппой, а некоторыми меньшими подгруппами. В частности, в работе А. В. Степанова [4] вводится понятие ”стандартного” расположения подгрупп, нормализуемых некоторой фиксированной подгруппой. Ранние работы, относящиеся к нормальному строению, перечислены, к примеру, в обзорной части работ [8], [24], [25], [14]. Из важных недавних работ, не попавших в данные обзоры, имеет смысл отметить работы А. В. Степанова [23], [5], Р. Пройсера [18], А. К. Ставровой и А. В. Степанова [20].

Второе направление обобщения теории нормального строения заключается в изучении структурной теории нередуктивных групп. В этом направлении результатов, описывающих случай произвольного коммутативного кольца, в настоящее время известно не так много. Нормальное строение параболических подгрупп в группах Шевалле изучается, к примеру, в работах [7], [19]. Одной из достаточно важных работ является работа А. К. Ставровой [21], где приводится описание подгрупп максимальной параболической группы, нормализуемых элементарной подгруппой Леви.

Настоящая работа посвящена переносу результатов работы [21] на более широкий класс нередуктивных групп. Целью данной работы является описание нормального строения некоторого класса нередуктивных групп, которые строятся на основе линейного представления редуктивной группы, и по своим свойствам сходны с классом параболических подгрупп с абелевым унипотентным радикалом в группах Шевалле. Исследуемая задача имеет весьма высокую научную значимость, о чём свидетельствуют многочисленные публикации с доказательствами различных теорем о нормальном строении линейных групп над коммутативными кольцами.

Работа устроена следующим образом: во втором разделе изложены некоторые предпосылки к формулировке задачи, третий и четвёртый разделы содержат базовые определения и факты, необходимые для формулировки основного результата. В пятом разделе вводится определение групп параболического типа с абелевым унипотентным радикалом. Следующие два раздела содержат формулировку и доказательство основного результата работы о нормальном строении групп параболического типа с абелевым унипотентным радикалом. В восьмом разделе обсуждается существенное условие, возникающее в доказательстве основного результата, и влияние этого условия на расположение подгрупп, нормализуемых элементарной. В последнем разделе работы даются предпосылки для возможного обобщения результатов о нормальном строении групп параболического типа с абелевым унипотентным радикалом на группы параболического типа с неабелевым унипотентным радикалом.

## 2. Постановка задачи

Одной из предпосылок к постановке задачи послужила следующая проблема. Рассмотрим *ортогональную группу* $\mathrm{O}(B)$ — группу автоморфизмов $R$-модуля $V$, сохраняющих билинейную форму $B$:

$$\mathrm{O}(B) = \{g \in \mathrm{GL}(V) \mid B(gx, gy) = B(x, y) \text{ для всех } x, y \in V\}$$

Во многих работах, изучающих структурную теорию этой группы, предполагается невырожденность формы $B$. Но даже в тех работах, где требования невырожденности нет (например, в работе В. А. Петрова [3]), элементарная подгруппа определяется через трансвекции Эйхлера—Зигеля—Диксона:

$$T_{uv}(\xi) : w \mapsto w + u(B(v, w) + \xi B(u, w)) + vB(u, w)\ ,$$

где $B(u, u) = B(u, v) = 0$.

Очевидно, если билинейная форма вырожденная (в частности, если она имеет вид $B \oplus 0$), то элементарная группа, определённая таким образом, существенно меньше всей группы. Такого вида ортогональные группы уже не будут редуктивными над тем кольцом, над которым форма вырождена. Над полем нормальное строение классических групп, отвечающих вырожденной форме, изучалось, например, в работах Эриха Эллерса и его учеников ([13]).

Структура таких групп достаточно близка к структуре параболических подгрупп в группах Шевалле, хотя они в общем случае могут не вкладываются в группы Шевалле в качестве параболических подгрупп. Это сходство послужило отправной точкой для изучения более общего класса нередуктивных групп, включающего оба случая: параболические подгруппы групп Шевалле и вырожденные ортогональные группы. Структурной теории предложенного обобщения — *группам параболического типа* — и посвящена данная работа.

Как известно из работы [7], на унипотентном радикале параболической подгруппы можно ввести структуру модуля, так что на некотором его фактормодуле действует подгруппа Леви. Введение понятия *групп параболического типа* имеет целью "обратить" данную конструкцию, то есть явным образом конструировать группу из некоторого заданного представления.

# 3. Основные обозначения

В настоящей работе используются следующие обозначения из теории групп. Пусть $G$ — произвольная абстрактная группа. Коммутатор элементов $x$ и $y$ из $G$ мы будем обозначать как $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$. Левый сопряжённой к элементу $y$ при помощи $x$, а именно произведение $xyx^{-1}$, кратко будем записывать ${}^{x}y$.

Если $X \subseteq G$ — подмножество группы $G$, тогда под $\langle X \rangle$ будем понимать подгруппу, порожденную $X$. Запись $H \leqslant G$ означает, что $H$ — подгруппа $G$. Если $H$ — нормальная подгруппа в $G$, то это записывается как $H \trianglelefteqslant G$. В случае, если $H \leqslant G$, запись $\langle X \rangle^{H}$ означает наименьшую подгруппу в $G$, которая содержит $X$ и которая нормализуется $H$. Полупрямое произведение двух групп $G$ и $F$ обозначается через $G \leftthreetimes F$, где $F$ — нормальный сомножитель. Запись $[F, H]$ для двух подгрупп $F, H \leqslant G$ обозначает их взаимный коммутант:

$$[F, H] = \langle [f, g] \mid f \in F, g \in G \rangle .$$

Известно, что всякой приведённой неприводимой системе корней $\Phi$ единственным образом соответствует односвязная аффинная групповая схема $G(\Phi, -)$ над $\mathbb{Z}$, называемая групповой схемой Шевалле—Демазюра ([17], [22], [11]). Под рациональным представлением алгебраической группы $G$ будем понимать гомоморфизм групповых схем $G \to \mathrm{GL}_n$. Это означает, что представление над базовым кольцом индуцирует с помощью расширения скаляров представление над расширенным кольцом.

Представление (над некоторым полем $k$) называется неприводимым (в терминологии [16] простым), если оно не содержит нетривиальных собственных подпредставлений. Неприводимые представления редуктивных групповых схем над полем соответствуют модулям старшего веса ([15], следствие 2.7).

Пусть $G_{\mathbb{Z}}$ — связная расщепимая редуктивная групповая схема с системой корней $\Phi = \Phi_1 + \cdots + \Phi_n$, где $\Phi_i$ — приведённые неприводимые системы корней, $n \geqslant 1$. Далее пусть $\pi : G_{\mathbb{Z}} \to \mathrm{GL}(U_{\mathbb{Z}})$ — рациональное представление $G_{\mathbb{Z}}$ над $\mathbb{Z}$, становящееся неприводимым над алгебраически замкнутым полем характеристики 0. Тогда $U_{\mathbb{Z}}$ — конечномерный свободный модуль старшего веса ([12]). Будем в дальнейшем предполагать, что его ранг больше единицы, сиречь rk $U_{\mathbb{Z}} \geqslant 2$. Тогда если $R$ — произвольное коммутативное кольцо, то $\pi$ индуцирует действие группы $G = G_{\mathbb{Z}}(R)$ на модуле $U = U_Z \otimes R$, которое будем обозначать через $\pi_R(g) : u \mapsto {}^g u$.

Так как $\pi$ является морфизмом схем, то $U$, как и $U_{\mathbb{Z}}$, будет являться свободным модулем, и в случае выбора максимального тора $T$ является ([10]) прямой суммой весовых подпространств

$$U = \bigoplus_{\sigma \in \Sigma \subset X(T)} U \cap U_\sigma,$$

где

$$U_\sigma = \{x \in U_{\mathbb{C}} \mid {}^h x = \sigma(h)x \text{ для всех } h \in T\},$$
$$\Sigma = \{\sigma \in X(T) \mid U_\sigma \neq \varnothing\} \text{ — множество весов представления,}$$
$$X(T) \text{ — группа рациональных характеров тора.}$$

# 4. Корневые элементы и их действие

Известно ([16], раздел 19.11), что для каждого корня $\alpha \in \Phi_i$ в $G$ задана *корневая подгруппа* $X_\alpha(R)$, изоморфная аддитивной группе кольца и состоящая из *корневых элементов* $x_\alpha(\xi)$, $\xi \in R$. Подгруппу в $G$, порождаемую всеми корневыми элементами $x_\alpha(\xi)$, где $\alpha \in \Phi$, $\xi \in R$, будем обозначать $E = E(\Phi, R)$. Подгруппу в $G$, порождаемую всеми корневыми элементами $x_\alpha(\xi)$, где $\alpha \in \Phi^+$ — положительные корни, $\xi \in R$, будем обозначать $EB = EB(\Phi, R)$. и называть *элементарной борелевской подгруппой*. Для каждого идеала $I \trianglelefteqslant R$ также будем обозначать $X_\alpha(I) := \langle x_\alpha(\xi) \,|\, \xi \in I\rangle$ и $E(\Phi, I) := \langle x_\alpha(\xi) \,|\, \alpha \in \Phi\, \xi \in I\rangle$. Нормальное замыкание $E(\Phi, I)$ в $E(\Phi, R)$ будем называть *относительной элементарной подгруппой* и обозначать $E(\Phi, R, I) := E(\Phi, I)^{E(\Phi,R)}$.

Перечислим основные свойства корневых элементов $x_\alpha(\xi)$:

- Для экстремальных весов (в частности, для старшего веса $\widetilde{\sigma}$), весовые пространства $U_\sigma$ одномерны.

- Операторы, соответствующие в конечномерном представлении $\pi_R$ корневым элементам, унипотентны:

  $$\exists n : (\pi_R(x_\alpha(\xi)) - 1)^n = 1$$

  Для базисных представлений (микровесовые представления, представления на коротких корнях и присоединённые представления групп с системами корней с простыми связями, [17]) это верно уже при $n = 3$. Для микровесовых представлений это верно уже при $n = 2$.

- Корневые элементы аддитивны по параметру:

$$x_\alpha(\xi)\, x_\alpha(\theta) = x_\alpha(\xi+\theta)$$

$$x_\alpha(\xi)^n = x_\alpha(n\,\xi), \quad n \in \mathbb{Z}$$

На модуле $U$ корневым элементам $x_\alpha(\xi)$ соответствуют операторы $\pi_R(x_\alpha(\xi))$. Поэтому, если в базовом кольце числа $2\ldots n-1$ обратимы, то определён логарифм этих операторов, который является полиномиальной функцией от них:

$$\varepsilon_\alpha(\xi) \coloneqq \ln \pi_R(x_\alpha(\xi)) = \sum_{i=0}^{n-1} \pi_R(x_\alpha(\xi))^i k_i$$

При этом имеется изоморфизм (над базовым кольцом) между корневыми подгруппами $X_\alpha = \langle x_\alpha(\xi)\rangle$ и циклическими группами, порождёнными $\varepsilon_\alpha(\xi)$.

Можно видеть, что умножение параметра на целое число эквивалентно умножению на число самого оператора $\varepsilon_\alpha(\xi)$:

$$\varepsilon_\alpha(n\,\xi) = \ln \pi_R(x_\alpha(n\,\xi)) = \ln \pi_R(x_\alpha(\xi))^n = n\, \ln \pi_R(x_\alpha(\xi)) = n\, \varepsilon_\alpha(\xi), \quad n \in \mathbb{Z}$$

Так как изоморфизм между циклическими группами $\langle x_\alpha(\xi)\rangle \leqslant G$ и $\langle \varepsilon_\alpha(\xi)\rangle \leqslant \mathrm{GL}(U)$ определён над базовым кольцом, то аналогичным образом выглядит умножение параметра на произвольные константы:

$$\varepsilon_\alpha(\eta\,\xi) = \eta\, \varepsilon_\alpha(\xi), \quad \eta \in R$$

**Лемма 1.** *Оператор $\varepsilon_\alpha(\xi)$ переводит элементы из подпространства $U_\sigma$ в подпространство $U_{\sigma+\alpha}$.*

*Доказательство.*

$$\begin{aligned}
{}^h(\varepsilon_\alpha(\xi)\, u) &= {}^h\left(\sum_i {}^{\pi_R(x_\alpha(\xi))^i} u\, k_i\right) = \sum_i {}^{h\pi_R(x_\alpha(\xi))^i} u\, k_i = \\
&= \sum_i {}^{({}^h\pi_R(x_\alpha(\xi)))^i h} u\, k_i = \sum_i {}^{(\pi_R(x_\alpha(\alpha(h)\cdot\xi)))^i} \left({}^h u\right) k_i = \\
&= \sum_i {}^{(\pi_R(x_\alpha(\alpha(h)\cdot\xi)))^i} u \cdot \sigma(h)\, k_i = \varepsilon_\alpha(\alpha(h)\cdot\xi)\, u \cdot \sigma(h) = \\
&= \varepsilon_\alpha(\xi)\, u \cdot \alpha(h)\sigma(h)
\end{aligned}$$

□

Следующее требование, которые мы в дальнейшем будем предполагать выполненным, относится одновременно к модулю $U$ и кольцу $R$. Для базисных представлений без нулевого веса оно выполнено всегда независимо от кольца $R$, но для более сложных случаев оно может означать обратимость в $R$ некоторых целых чисел.

> **Свойство 1.** Если $u$ — некоторый вектор из $U_\sigma$, и $V = {}^{EB}\langle u \rangle$ — минимальный $EB$-инвариантный подмодуль, содержащий $u$, то $u \in {}^{E}\langle V \cap U_{\widetilde{\sigma}} \rangle$, или, что то же самое, ${}^{E}\langle V \cap U_{\widetilde{\sigma}} \rangle = {}^{E}\langle u \rangle$.
>
> Иными словами, если $u$ — некоторый вектор из $U_\sigma$, то его образы в пространстве $U_{\widetilde{\sigma}}$ старшего веса под действием операторов $\left(\prod_{\alpha_i} \varepsilon_{\alpha_i}(1)\right)$, где $\alpha_i$ пробегает по всем цепочкам положительных корней, так что $\sum_i \alpha_i = \widetilde{\sigma} - \sigma$, не содержатся ни в каком $E$-инвариантном модуле, в котором бы не содержался $u$. Иными словами, все эти образы в совокупности порождают (как $E$-инвариантный подмодуль) тот же самый подмодуль, который порождается (как $E$-инвариантный подмодуль) исходным вектором $u$.

Следующие утверждения вытекают из данного свойства:

**Лемма 2.** *Пусть $\sigma$ и $\sigma + n\alpha$ — экстремальные корни и при этом $u \in U_\sigma$. Тогда если $(\varepsilon_\alpha(1)^n\, u)$ содержится в некотором $E$-инвариантном подмодуле $V$, то обязательно $u \in V$.*

*Доказательство.* Если $\sigma + n\alpha = \widetilde{\sigma}$ — максимальный корень, то утверждение является частным случаем свойства 1. В остальных случаях $\sigma + n\alpha$ переводится в $\widetilde{\sigma}$ некоторым элементом группы Вейля. □

**Лемма 3.** *Если $V$ — инвариантный подмодуль $U$, то $V = \bigoplus V_\sigma$, то есть проекции вектора $v \in V$ на корневые подпространства также лежат в $V$.*

*Доказательство.* Пусть $v = \sum v_\sigma$. Доказательство проведём индукцией по минимальному (то есть не имеющему меньших) весу $\sigma'$ из присутствующих в сумме. Базой индукции будет сумма из одного слагаемого старшего веса: $v = v_{\widetilde{\sigma}}$.

Пусть теперь $v = v_{\sigma'} + v'$, где $v'$, если лежит в $V$, то раскладывается в $V$ по весовым простраствам по индукционному предположению. Тогда цепочки положительных корней из свойства 1 будут переводить $v$ в различные $w := \left(\prod_\alpha \varepsilon_\alpha(1)\right)\, v \in V \cap U_{\widetilde{\sigma}}$. Но одновременно каждый такой $w = \left(\prod_\alpha \varepsilon_\alpha(1)\right)\, v_{\sigma'}$, поэтому, в силу 1, $v_{\sigma'}$ также лежит в $V$. □

**Лемма 4.** *Над кольцами, для которых выполняется свойство 1, инвариантные подмодули $U$ имеют вид $U_I = U \cdot I$, где $I \trianglelefteq R$ — некоторый идеал.*

*Доказательство.* Пусть $V$ — инвариантный подмодуль $U$. Достаточно доказать, что найдётся идеал $I$, такой что любой $V \cap U_\sigma = U_\sigma\, I$.

Свойство 1 устанавливает набор отображений, однозначно определяющих $V \cap U_{\widetilde{\sigma}}$ по $V \cap U_\sigma$ и наоборот. В силу одномерности $U_{\widetilde{\sigma}}$ подмодуль $V \cap U_{\widetilde{\sigma}}$ имеет вид $U_{\widetilde{\sigma}}\, I$ для некоторого идеала $I$. Следовательно, подмодули $U_\sigma\, I$ совпадают с $V \cap U_\sigma$. □

# 5. Группы параболического типа с абелевым унипотентным радикалом

Аддитивную группу $R[G]$-модуля $U$ можно рассматривать как абелеву группу с действием $G$ на ней, поэтому имеет смысл следующее определение.

> **Определение 1.** *Пусть* $\pi : G_{\mathbb{Z}} \to \mathrm{GL}(U_{\mathbb{Z}})$ *— рациональное представление* $G_{\mathbb{Z}}$ *над* $\mathbb{Z}$*, становящееся неприводимым над алгебраически замкнутым полем характеристики* $0$*,* $R$ *— коммутативное кольцо,* $U = U_{\mathbb{Z}} \otimes R$*.*
>
> *Тогда можно рассмотреть группу* $P := G \leftthreetimes U$*, являющуюся полупрямым произведением* $G$ *и аддитивной группы модуля* $U$*, элементами которой будут пары* $(g, u)$*,* $g \in G$*,* $u \in U$ *со следующим умножением:*
>
> $$(g, u) \cdot (g', u') = (gg', {}^{g'^{-1}}u + u')$$
>
> *Назовём такую группу* ***группой параболического типа с абелевым унипотентным радикалом****.*

В дальнейшем мы будем отождествлять элементы из $U$ с их образами в $P$, то есть с парами вида $(1, u)$. Это делает логичным использование мультипликативной нотации для обозначения сложения в $U$, а также обозначение действия $G$ на $U$ через

$${}^{g}u = gug^{-1}.$$

Используя для коммутатора обозначение $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$, сформулируем несколько простых свойств коммутаторов в $G \leftthreetimes U$:

- $[[g, u], v] = 1, \quad g \in G,\ u, v \in U$
- $[g, uv] = [g, u][g, v], \quad g \in G,\ u, v \in U$
- $[g, hu] = [g, h] \cdot {}^{h}[g, u], \quad g, h \in G,\ u \in U$
- $[g, {}^{h}u] = {}^{h}[\,{}^{h^{-1}}g\,, u], \quad g, h \in G,\ u \in U$

# 6. Вспомогательные утверждения

Следующие два утверждения о нормальной структуре редуктивных групп приведены в соответствии с работой [21].

**Лемма 5** ([21], Theorem 2.3, Corollary 2.4)**.** *Пусть* $G = G(\Phi, R)$ *— редуктивная групповая схема Шевалле—Демазюра с системой корней* $\Phi = \Phi_1 + \ldots + \Phi_n$*, где каждая неприводимая* *система корней $\Phi_i$ имеет ранг не меньше 2. В коммутативном кольце $R$ предполагается обратимость структурных констант группы $G$.*

*Тогда если подгруппа $H \leqslant G$ нормализуется элементарной группой $E = E(\Phi, R)$, то её коммутант с $E$ можно записать в виде прямого произведения*

$$[H, E] = \prod_{i=1}^{n} E(\Phi_i, R, I_i),$$

*где $E(\Phi_i, R, I_i) = E(\Phi_i, I_i)^{E(\Phi_i, R)}$ для некоторого набора идеалов $I_i \trianglelefteq R$.*

**Лемма 6** ([21], Lemma 4.1, а также[1], лемма 1)**.** *Для любых двух корней $\alpha, \beta \in \Phi$, таких что их сумма также является корнем, и для любых $\xi \in R$, $I \trianglelefteq R$ выполнено*

$$\langle x_\alpha(\xi) \rangle^{X_\beta(I)} \geqslant X_{\alpha+\beta}(\xi I),$$

*где $X_\alpha(I) = \{x_\alpha(\xi) | \xi \in I\}$ — относительная корневая подгруппа в $G$.*

Следующая лемма демонстрирует определяющее значение максимального корня при изучении нормальной структуры.

**Лемма 7.** *В группе $G = G(\Phi, R)$ с неприводимой системой корней, для которой* $\operatorname{rk} \Phi \geqslant 2$, *выполнено*

$$X_{\widetilde{\beta}}(I)^{E(\Phi, R)} = E(\Phi, R, I),$$

*где $\widetilde{\beta}$ — максимальный корень в $\Phi$.*

*Доказательство.* Очевидно, что

$$X_{\widetilde{\beta}}(I) \leqslant E(\Phi, I)$$
$$X_{\widetilde{\beta}}(I)^{E(\Phi,R)} \leqslant E(\Phi, I)^{E(\Phi,R)} = E(\Phi, R, I)$$

Обратное включение вытекает из леммы 6.

Действительно, возьмём в лемме 6 в качестве $\alpha$ максимальный корень $\widetilde{\beta}$, а в качестве идеала $I$ всё кольцо $R$. Тогда

$$\left\langle x_{\widetilde{\beta}}(\xi) \right\rangle^{X_\beta(R)} \geqslant X_{\widetilde{\beta}+\beta}(\xi R).$$

Следовательно, для любого корня $\gamma \in \Phi$, который может быть получен прибавлением к максимальному корню $\widetilde{\beta}$ некоторого отрицательного корня $\beta \in \Phi^-$, выполнено

$$X_\gamma(\xi R) \leqslant \left\langle x_{\widetilde{\beta}}(\xi) \right\rangle^{E(\Phi,R)}.$$

Многократно применяя лемму 6, получим, что это включение выполнено для всех корней из $\Phi$, так как любой корень может быть получен из максимального последовательным вычитанием отрицательных корней.

Группа $E(\Phi, I)$ порождается подгруппами $X_\gamma(I)$, $\gamma \in \Phi$, а следовательно

$$E(\Phi, I) \leqslant \left\langle X_{\widetilde{\beta}}(I) \right\rangle^{E(\Phi,R)}$$
$$E(\Phi, R, I) = E(\Phi, I)^{E(\Phi,R)} \leqslant \left\langle X_{\widetilde{\beta}}(I) \right\rangle^{E(\Phi,R)}$$

□

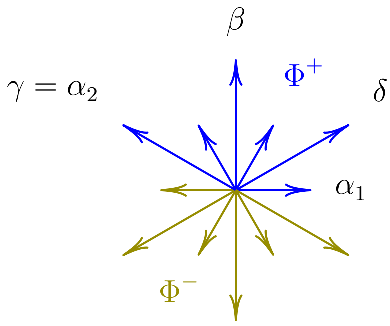
Следующие две леммы сопоставляют между собой неприводимую компоненту систему корней $\Phi_i$ и соответствующий ей слой в множестве весов $\Sigma$.

**Лемма 8.** *Пусть $\Phi = \Phi_1 + \ldots + \Phi_n$ — система корней с неприводимыми компонентами ранга не менее 2, $\widetilde{\beta}_1 \ldots \widetilde{\beta}_n$ — максимальные корни в неприводимых компонентах, $\sigma$ — некоторый доминантный вес, такой что каждая разность $\sigma - \widetilde{\beta}_i$ не ортогональна $\Phi_i$.*

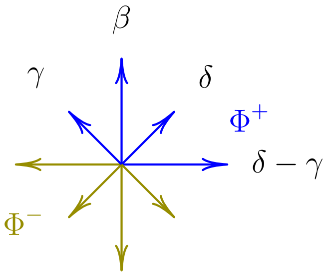
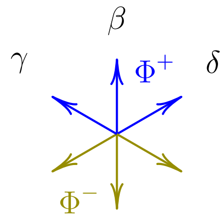
*Тогда каждый максимальный корень $\widetilde{\beta}_i$ можно представить в виде суммы двух корней $\gamma$ и $\delta$ одинаковой длины, так что любая положительная комбинация корней $\widetilde{\beta}_i$ и $-\gamma$ при разложении по простым корням будет иметь хотя бы один положительный коэффициент. Если же $\langle \sigma - \widetilde{\beta}_i, \widetilde{\beta}_i \rangle = 0$, то выбор можно совершить таким образом, чтобы дополнительно выполнялось $\langle \sigma, \delta - \gamma \rangle > 0$.*

*Заметим, что угол между $\gamma$ и $\delta$ в результате может оказаться либо $\frac{\pi}{2}$, либо $\frac{2\pi}{3}$. Угол $\frac{\pi}{3}$, возникающий в ситуации $\Phi_i = \mathrm{G}_2$, не подходит, так как тогда нарушится условие $\mathbb{N}\widetilde{\beta}_i - \mathbb{N}\gamma \not< 0$.*

*Доказательство.* При $\Phi_i = \mathrm{G}_2$ требованиям леммы удовлетворяет выбор $\gamma = \alpha_2$ и $\delta = 3\alpha_1 + \alpha_2$.




Пусть теперь $\Phi_i \neq \mathrm{G}_2$. Условие $k\widetilde{\beta}_i - l\gamma \not< 0$ $\forall k, l \in \mathbb{N}$ выполняется автоматически, если угол между $\gamma$ и $\delta$ составляет $\frac{2\pi}{3}$. Если же угол $\frac{\pi}{2}$, то обеспечить выполнения этого условия можно заменой местами $\gamma$ и $\delta$, чтобы $\delta - \gamma > 0$.





В случае, когда $\langle \sigma - \widetilde{\beta}_i, \widetilde{\beta}_i \rangle = 0$, обеспечить выполнения условия $\langle \sigma, \delta - \gamma \rangle > 0$ можно следующим образом. Выберем корень $\delta$, не ортогональный ни $\widetilde{\beta}_i$, ни $\sigma - \widetilde{\beta}_i$ (это можно сделать, так как $\Phi$ неприводима и в $\Phi$ есть корень, не ортогональный $\sigma - \widetilde{\beta}_i$). Не умаляя общности можно считать, что $\langle \delta, \widetilde{\beta}_i \rangle > 0$ и $\langle \delta, \sigma - \widetilde{\beta}_i \rangle > 0$. Тогда $\langle \delta, \widetilde{\beta}_i \rangle = \frac{1}{2} \langle \widetilde{\beta}_i, \widetilde{\beta}_i \rangle$ и $\gamma \coloneqq \widetilde{\beta}_i - \delta$. При этом $\langle \sigma, \delta - \gamma \rangle = \langle \sigma, 2\delta - \widetilde{\beta}_i \rangle = 2\langle \sigma, \delta \rangle - \langle \sigma, \widetilde{\beta}_i \rangle = 2\langle \sigma, \delta \rangle - \langle \widetilde{\beta}_i, \widetilde{\beta}_i \rangle = 2\langle \delta, \sigma \rangle - 2\langle \delta, \widetilde{\beta}_i \rangle = 2\langle \delta, \sigma - \widetilde{\beta}_i \rangle > 0$. Условие $k\widetilde{\beta}_i - l\gamma \not< 0 \ \forall k, l \in \mathbb{N}$ при этом будет выполнено, так как $\delta - \gamma$ не может быть отрицательным корнем (если это корень, то положительный). $\square$

**Лемма 9.** *Пусть $\gamma$ и $\delta$ выбраны в соответствии с предыдущей леммой. Тогда*

- *если угол между $\gamma$ и $\delta$ составляет $\frac{2\pi}{3}$, то выполняется хотя бы одно из следующих четырёх условий:*
  1. $\sigma - \gamma \notin \Sigma$
  2. $\sigma - \delta \notin \Sigma$
  3. $\sigma - 2\gamma \in \Sigma$
  4. $\sigma - 2\delta \in \Sigma$
- *если угол между $\gamma$ и $\delta$ составляет $\frac{\pi}{2}$, то выполняется хотя бы одно из следующих четырёх условий:*
  1. $\sigma - 2\gamma \notin \Sigma$
  2. $\sigma - 2\delta \notin \Sigma$
  3. $\sigma - 3\gamma \in \Sigma$
  4. $\sigma - 3\delta \in \Sigma$

*Доказательство.* Докажем, что все четыре условия не могут одновременно нарушаться. Так как множество весов инвариантно относительно отражений из группы Вейля, то

$$\sigma - \frac{2\langle \sigma, \gamma \rangle}{\langle \gamma, \gamma \rangle}\gamma \ \in \ \Sigma$$

$$\sigma - \frac{2\langle \sigma, \delta \rangle}{\langle \delta, \delta \rangle}\delta \ \in \ \Sigma \,,$$

но так как $\sigma$ при этом является старшим весом, то

$$\sigma - \frac{2\langle \sigma, \gamma \rangle}{\langle \gamma, \gamma \rangle}\gamma - \gamma \ \notin \ \Sigma$$

$$\sigma - \frac{2\langle \sigma, \delta \rangle}{\langle \delta, \delta \rangle}\delta - \delta \ \notin \ \Sigma \ .$$

Следовательно, как в случае угла $\frac{2\pi}{3}$ между $\gamma$ и $\delta$ так и в случае угла $\frac{\pi}{2}$, все четыре условия могут одновременно нарушаться, только если $\langle \sigma, \gamma \rangle = \langle \widetilde{\beta}_i, \gamma \rangle$ и одновременно $\langle \sigma, \delta \rangle = \langle \widetilde{\beta}_i, \delta \rangle$. Но это значит, что $\langle \sigma - \widetilde{\beta}_i, \widetilde{\beta}_i \rangle = 0$, а следовательно по условию предыдущей леммы $\langle \sigma, \delta - \gamma \rangle > 0$, что невозможно, так как $\langle \sigma, \delta - \gamma \rangle = \langle \widetilde{\beta}_i, \delta - \gamma \rangle = 0$. □

# 7. Основной результат

Теперь, можно перейти к описанию подгрупп в $P = G \leftthreetimes U$, нормализуемых элементарной группой $E \leqslant G$.

**Теорема 1.** *Пусть $G = G(\Phi, R)$ — редуктивная групповая схема Шевалле–Демазюра с системой корней $\Phi = \Phi_1 + \ldots + \Phi_n$, где каждая $\Phi_i$ — неприводимая система корней ранга не менее 2. $U$ — неприводимое над замкнутым полем рациональное представление $G$ с таким старшим весом $\widetilde{\sigma}$, что ни для какой неприводимой компоненты $\Phi_i$ с максимальным весом $\widetilde{\beta}_i$ разность $\widetilde{\sigma} - \widetilde{\beta}_i$ не оказывается ортогональна всей $\Phi_i$. В коммутативном кольце $R$ предполагается обратимость всех структурных констант группы $G$, а также в модуле $U$ над кольцом $R$ предполагается выполнение свойства 1.*

*Пусть в группе параболического типа с абелевым унипотентным радикалом $P = G \leftthreetimes U$ имеется подгруппа $H$, нормализуемая группой $E$, то есть $[H, E] \leqslant H$. Тогда образ $H$ при проекции $G \leftthreetimes U \to G$, обозначаемый как $H_G$, будет обладать следующим свойством: $[H_G, E] \leqslant H$.*

*Доказательство.* $H$ нормализуется $E$, следовательно $H_G$ также нормализуется $E$. По лемме 5 выполняется $[H_G, E] = \prod_{i=1}^n E(\Phi_i, R, I_i)$ при некотором выборе идеалов $I_i$. Требуется доказать, что $[H_G, E] \leqslant H$, то есть в прямом произведении $\prod_{i=1}^n E(\Phi_i, R, I_i)$ каждый множитель $E(\Phi_i, R, I_i)$ лежит в $H$.

Но по лемме 7 одновременно $E(\Phi_i, R, I_i) = X_{\widetilde{\beta}_i}(I_i)^{E(\Phi_i, R)}$. Поэтому достаточно доказать, что $X_{\widetilde{\beta}_i}(I_i)^{E(\Phi_i, R)} \leqslant H$, то есть что $x_{\widetilde{\beta}_i}(\xi) \in H$ для любого $\xi$ из $I_i$.

По построению известно, что $x_{\widetilde{\beta}_i}(\xi) \in [H_G, E] \leqslant H_G$. Обозначим за $h$ некоторый прообраз $x_{\widetilde{\beta}_i}(\xi)$ при проекции $G \leftthreetimes U \to G$.

$$\begin{array}{ccc}
G \leftthreetimes U & \longrightarrow & G \\
\vee\!\!/ & & \vee\!\!/ \\
H & \longrightarrow & H_G \\
\Cup & & \Cup \\
h & \longmapsto & x_{\widetilde{\beta}_i}(\xi) \\
\| & & \| \\
x_{\widetilde{\beta}_i}(\xi)\, u & \longmapsto & x_{\widetilde{\beta}_i}(\xi)
\end{array}$$

Требуется доказать, что $h$ можно выбрать таким образом, что $u = 1$.

Разложим $u$ по весовым подпространствам:

$$u = \prod_{\sigma \in \Sigma} u_\sigma \tag{1}$$

Докажем, что все множители, составляющие $u$, принадлежат $H$. Будем доказывать это индукцией по множеству весов, участвующих в произведении.

Пусть $\sigma$ — минимальный вес из присутствующих в произведении.

Предположим сначала, что $u \notin U_{\widetilde{\sigma}}$, то есть $u$ не является вектором максимального веса. Докажем переход индукции по аналогии с леммой 3.

Для некоторого положительного корня $\alpha_1 \in \Phi$ (не обязательно из $\Phi_i$) вычислим

$$[x_{\alpha_1}(1), h] = [x_{\alpha_1}(1), x_{\widetilde{\beta}_i}(\xi)u] = [x_{\alpha_1}(1), x_{\widetilde{\beta}_i}(\xi)] \cdot {}^{x_{\widetilde{\beta}_i}(\xi)}[x_{\alpha_1}(1), u] = \\ = {}^{x_{\widetilde{\beta}_i}(\xi)}[x_{\alpha_1}(1), u] \ \in \ U \cap H \ .$$

Рассмотрим цепочку положительных корней $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_k$, начинающуюся с $\alpha_1$, такую что $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k = \widetilde{\sigma} - \sigma$.

Последовательное коммутирование $u_\sigma$ с корневыми элементами этой цепочки приводит к такому же результату, как действие оператора $\varepsilon_{\alpha_k}(1) \ldots \varepsilon_{\alpha_2}(1)\, \varepsilon_{\alpha_1}(1)$:

$$[x_{\alpha_k}(1), [\ldots [x_{\alpha_2}(1), [x_{\alpha_1}(1), u_\sigma]] \ldots]] = \big(\varepsilon_{\alpha_k}(1) \ldots \varepsilon_{\alpha_2}(1) \varepsilon_{\alpha_1}(1)\big)(u_\sigma) \ .$$

При этом к тому же результату приводит и аналогичное коммутирование $u$:

$$[x_{\alpha_k}(1), [\ldots [x_{\alpha_2}(1), [x_{\alpha_1}(1), u]] \ldots]] = \big(\varepsilon_{\alpha_k}(1) \ldots \varepsilon_{\alpha_2}(1) \varepsilon_{\alpha_1}(1)\big)(u_\sigma) \ ,$$

и тот же результат получается при аналогичном коммутировании $h$:

$$
\begin{aligned}
&[x_{\alpha_k}(1),[\ldots[x_{\alpha_2}(1),[x_{\alpha_1}(1),h]]\ldots]] = \\
&\qquad\qquad = [x_{\alpha_k}(1),[\ldots[x_{\alpha_2}(1),{}^{x_{\widetilde{\beta}_i}(\xi)}[x_{\alpha_1}(1),u]]\ldots]] = \\
&\qquad\qquad = [x_{\alpha_k}(1),[\ldots{}^{x_{\widetilde{\beta}_i}(\xi)}[x_{\alpha_2}(1),[x_{\alpha_1}(1),u]]\ldots]] = \\
&\qquad\qquad = {}^{x_{\widetilde{\beta}_i}(\xi)}[x_{\alpha_k}(1),[\ldots[x_{\alpha_2}(1),[x_{\alpha_1}(1),u]]\ldots]] = \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad = \big(\varepsilon_{\alpha_k}(1)\ldots\varepsilon_{\alpha_2}(1)\varepsilon_{\alpha_1}(1)\big)(u_\sigma)\ ,
\end{aligned}
$$

Из этого можно заключить, что $\big(\varepsilon_{\alpha_k}(1)\ldots\varepsilon_{\alpha_2}(1)\varepsilon_{\alpha_1}(1)\big)(u_\sigma) \in H$ для всех цепочек положительных корней $\alpha_1\ldots\alpha_k$, а следовательно, по свойству 1 $u_\sigma \in H$. Таким образом, доказан переход индукции, то есть число множителей в разложении (1) можно уменьшить, выбрав другой прообраз $h$.

Докажем теперь базу индукции, то есть случай, когда $u \in U_{\widetilde{\sigma}}$. Представим $\beta \coloneqq \widetilde{\beta}_i$ в виде суммы $\gamma+\delta$ в соответствии с леммой 8.

Предварительно выделим и отдельно рассмотрим случай, когда $\widetilde{\sigma}-\delta+\gamma \in \Sigma$. В этом случае

$$
\begin{aligned}
&[x_{\gamma-\delta}(1),h] = [x_{\gamma-\delta}(1),x_\beta(\xi)u] = [x_{\gamma-\delta}(1),x_\beta(\xi)]\cdot{}^{x_\beta(\xi)}[x_{\gamma-\delta}(1),u] = \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad = {}^{x_\beta(\xi)}[x_{\gamma-\delta}(1),u] \ \in\ U\cap H\ .
\end{aligned}
$$

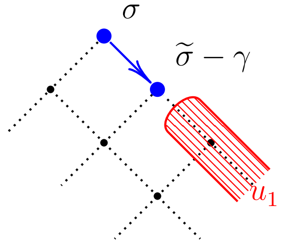
Очевидно, $\widetilde{\sigma}+\mathbb{N}(\gamma-\delta)+\mathbb{N}\beta \notin \Sigma$, поэтому $[x_{\gamma-\delta}(1),h] = [x_{\gamma-\delta}(1),u]$. Дальнейшее коммутирование с $x_{\gamma-\delta}(1)$ приводит к элементу $w \coloneqq \varepsilon_{\gamma-\delta}(1)^k(u)$, $k = 2\frac{\langle\sigma,\delta-\gamma\rangle}{\langle\delta-\gamma,\delta-\gamma\rangle}$, лежащему в подпространстве экстремального веса $\sigma - 2\frac{\langle\sigma,\delta-\gamma\rangle}{\langle\delta-\gamma,\delta-\gamma\rangle}(\delta-\gamma)$. Так как $w \in H$, то по лемме 2 также $u \in H$.

Пусть теперь $\widetilde{\sigma}-\delta+\gamma \notin \Sigma$. В этом случае $\mathbb{N}\beta-\mathbb{N}\delta$, так же как и $\mathbb{N}\beta-\mathbb{N}\gamma$, будут неотрицательны.

Обозначим

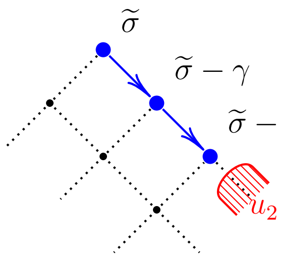
$$
\begin{aligned}
&h_{-\gamma} \coloneqq [x_{-\gamma}(1),h] = [x_{-\gamma}(1),x_\beta(\xi)u] = [x_{-\gamma}(1),x_\beta(\xi)]\cdot{}^{x_\beta(\xi)}[x_{-\gamma}(1),u] = \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad = x_{\beta-\gamma}(N_{-\gamma,\beta,1,1}\,\xi)\,x_{\beta-2\gamma}(\ldots)\,\varepsilon_{-\gamma}(u)\,u_1\ ,
\end{aligned}
$$

где $u_1$ раскладывается по подпространствам $U_\sigma$ с $\sigma \in \widetilde{\sigma}-\gamma-\mathbb{N}\gamma$ (абстрактные веса $\{\widetilde{\sigma}-\mathbb{N}\gamma+\mathbb{N}\beta\}$ не могут являться весами представления, так как среди $\{\mathbb{N}\beta-\mathbb{N}\gamma\}$ нет отрицательных абстрактных весов).




$$
\begin{aligned}
h_{-2\gamma} \coloneqq [x_{-\gamma}(1), h_{-\gamma}] &= \\
&= [x_{-\gamma}(1), x_{\beta-\gamma}(N_{-\gamma,\beta,1,1}\,\xi)\, x_{\beta-2\gamma}(\dots)\, \varepsilon_{-\gamma}(u)\, u_1] = \\
&= [x_{-\gamma}(1), x_{\beta-\gamma}(N_{-\gamma,\beta,1,1}\,\xi)\, x_{\beta-2\gamma}(\dots)]\cdot \\
&\cdot {}^{x_{\beta-\gamma}(N_{-\gamma,\beta,1,1}\,\xi)\, x_{\beta-2\gamma}(\dots)}[x_{-\gamma}(1), \varepsilon_{-\gamma}(u)\, u_1] = \\
&= x_{\beta-2\gamma}(N_{-\gamma,\beta,1,1}N_{-\gamma,\beta-\gamma,1,1}\,\xi)\ \varepsilon^2_{-\gamma}(u)\, u_2\ ,
\end{aligned}
$$

где $u_2$ раскладывается по подпространствам $U_\sigma$ с $\sigma \in \widetilde{\sigma} - 2\gamma - \mathbb{N}\,\gamma$.




Аналогично вводятся $h_{-\delta}$ и $h_{-2\delta}$, а также $h_{-3\gamma}$ и $h_{-3\delta}$.

$$
\begin{aligned}
h_{-3\gamma} \coloneqq [x_{-\gamma}(1), h_{-2\gamma}] &= \\
&= [x_{-\gamma}(1), x_{\beta-2\gamma}(N_{-\gamma,\beta,1,1}N_{-\gamma,\beta-\gamma,1,1}\,\xi)\ \varepsilon^2_{-\gamma}(u)\, u_2] = \\
&= {}^{x_{\beta-2\gamma}(N_{-\gamma,\beta,1,1}N_{-\gamma,\beta-\gamma,1,1}\,\xi)}[x_{-\gamma}(1), \varepsilon^2_{-\gamma}(u)\, u_2] = \varepsilon^3_{-\gamma}(u)\, u_3\ ,
\end{aligned}
$$

где $u_3$ раскладывается по подпространствам $U_\sigma$ с $\sigma \in \widetilde{\sigma} - 3\gamma - \mathbb{N}\,\gamma$.

Рассмотрим варианты в соответствии с леммой 9.

- Если угол между $\gamma$ и $\delta$ составляет $\frac{2\pi}{3}$:

  1. $\sigma - \gamma \notin \Sigma$, тогда $h_{-\gamma} = x_{\beta-\gamma}(N_{-\gamma,\beta,1,1}\,\xi) \in E \cap H$ и $x_\beta(\xi) \in H$
  2. $\sigma - \delta \notin \Sigma$, тогда $h_{-\delta} = x_{\beta-\delta}(N_{-\delta,\beta,1,1}\,\xi) \in E \cap H$ и $x_\beta(\xi) \in H$
  3. $\sigma - 2\gamma \in \Sigma$, тогда $h_{-2\gamma} = \varepsilon^2_{-\gamma}(u) \in U \cap H$ и, по лемме 2, $u \in H$
  4. $\sigma - 2\delta \in \Sigma$, тогда $h_{-2\delta} = \varepsilon^2_{-\delta}(u) \in U \cap H$ и, по лемме 2, $u \in H$

- Если угол между $\gamma$ и $\delta$ составляет $\frac{\pi}{2}$:

  1. $\sigma - 2\gamma \notin \Sigma$, тогда $h_{-2\gamma} = x_{\beta-2\gamma}(N_{-\gamma,\beta,1,1}N_{-\gamma,\beta-\gamma,1,1}\,\xi) \in E \cap H$ и $x_\beta(\xi) \in H$
  2. $\sigma - 2\delta \notin \Sigma$, тогда $h_{-2\delta} = x_{\beta-2\delta}(N_{-\delta,\beta,1,1}N_{-\delta,\beta-\delta,1,1}\,\xi) \in E \cap H$ и $x_\beta(\xi) \in H$
  3. $\sigma - 3\gamma \in \Sigma$, тогда $h_{-3\gamma} = \varepsilon^3_{-\gamma}(u) \in U \cap H$ и, по лемме 2, $u \in H$
  4. $\sigma - 3\delta \in \Sigma$, тогда $h_{-3\delta} = \varepsilon^3_{-\delta}(u) \in U \cap H$ и, по лемме 2, $u \in H$

Таким образом мы доказали, что максимальные корневые элементы $x_{\widetilde{\beta}_i}(\xi)$, лежащие в $[H_G, E]$, также лежат и в $H$, что и требовалось доказать.

$\square$

Теперь, когда мы увидели, что в $G$ содержится достаточно большая подгруппа, коммутант которой с $E$ лежит в $H$, структуру подгруппы $H$ описать достаточно легко. Сначала рассмотрим случай, когда $H$ целиком содержится в унипотентном радикале $U$, а затем докажем общий случай.

**Лемма 10.** *Любая подгруппа $H \leqslant U$, нормализуемая $G$, имеет вид $U_I$, где $I$ — идеал кольца.*

*Доказательство.* Данное утверждение непосредственно вытекает из леммы 4 и является её переформулировкой с использованием мультипликативной записи. $\square$

**Теорема 2.** *В условиях предыдущей теоремы подгруппа $H \leqslant G \leftthreetimes U$ может быть представлена в виде $H = H_G \leftthreetimes H_U$, где $[H_G, E] = \prod_{i=1}^n E(\Phi_i, R, I_i)$, а $H_U = U_I$ — подмодуль $U$, заданный некоторым идеалом кольца.*

*Доказательство.* Достаточно доказать, что $H_G \leqslant H$, оставшаяся часть следует из леммы 10.

Разложим элемент $h \in H$ в произведение $h = zu$, где $z \in H_G$, $u \in U$. Докажем, что $z$ и $u$ также лежат в $H$.

Прокоммутируем $h$ с некоторым $g$ из $E$:

$$[g, h] = [g, zu] = [g, z] \cdot {}^z[g, u]$$

По теореме 1 $[g, z] \in H$, следовательно, ${}^z[g, u]$ так же лежит в $H$. Но ${}^z[g, u] = {}^{zu}[u^{-1}, g]$, следовательно, $[u^{-1}, g] \in H$. Выбирая в качестве $g$ корневые элементы $x_\alpha(1)$ с корнями из начала цепочек, возникающих в формулировке свойства 1, получим, что $u$ также лежит в $H$. $\square$

Таким образом, оказывается, что если проекция старшего веса $\sigma$ на линейную оболочку каждой неприводимой компоненты $\Phi_i$ не совпадает с максимальным корнем этой компоненты, то любая подгруппа $H \leqslant P$, нормализуемая $E$, распадается в полупрямое произведение двух подгрупп, также нормализуемых $E$, одна из которых целиком лежит в редуктивной группе $G$, а другая унипотентна.

# 8. Случай присоединённого представления

Описанный выше результат о виде подгрупп, нормализуемых $E$, получен при выполнении предположений теоремы 1. Среди этих условий выделяется условие о том, что все $\widetilde{\sigma} - \widetilde{\beta}_i$ не ортогональны соответствующим $\Phi_i$. Это требование вытекает из леммы 8 и отделяет случай, когда для некоторого $\Phi_i$ оказывается $\widetilde{\sigma} - \widetilde{\beta}_i$ ортогонально $\Phi_i$. Этот случай является существенным исключением, и для него выполняется более слабый результат.

**Теорема 3.** *Пусть выполняются условия теоремы 1 за исключением требования $\widetilde{\sigma} - \widetilde{\beta}_i \not\perp \Phi_i$ $\forall i$. А именно, пусть для некоторого $i$ выполнено $\widetilde{\sigma} - \widetilde{\beta}_i \perp \Phi_i$.*

*Тогда если $x_{\widetilde{\beta}_i}(\xi) \in H_G$, то $x_{\widetilde{\beta}_i}(\xi^2) \in H$.*

*Доказательство.* Как известно, системы корней $A_n$ при $n \geqslant 2$, $B_n$ и $C_n$ при $n \geqslant 3$, $D_n$ при $n \geqslant 3$, а также $E_6$, $E_7$, $E_8$, $F_4$ и $G_2$ содержат в себе систему корней $A_2$, проходящую через максимальный корень. Докажем теорему сначала для этого случая. Пусть $\gamma+\delta = \widetilde{\beta}_i$, и угол между $\gamma$ и $\delta$ составляет $\frac{2\pi}{3}$.

Тогда

$$
\begin{aligned}
x_{\gamma+\delta}(\xi^2) = [x_\delta(-1), [x_{\gamma+\delta}(1), & \\
& [x_{-\delta}(1), [x_{-\gamma-\delta}(1), x_{\gamma+\delta}(\xi) \cdot u]] \cdot \\
& \cdot [x_{-\delta}(-2\xi), x_{\gamma+\delta}(\xi) \cdot u] \cdot \\
& \cdot [x_{-\gamma-\delta}(-2\xi - 1), [x_{-\delta}(1), x_{\gamma+\delta}(\xi) \cdot u]]\ ]] \in H
\end{aligned}
$$

Если же система корней $\Phi_i$ не содержит в себе $A_2$, проходящую через максимальный корень, то $\Phi_i \cong C_2$. В этом случае пусть $\gamma + \delta = \widetilde{\beta}_i$, и угол между $\gamma$ и $\delta$ составляет $\frac{\pi}{2}$. Тогда

$$
\begin{aligned}
x_{\gamma+\delta}(4\xi^2) = [x_\delta(1), [x_\delta(1), & \\
& [x_\gamma(1), \\
& \quad [x_{-\delta}(1), [x_{-\gamma-\delta}(1), x_{\gamma+\delta}(\xi) \cdot u]] \cdot \\
& \quad \cdot [x_{-\delta}(-2\xi), x_{\gamma+\delta}(\xi) \cdot u]\ ] \cdot \\
& \cdot [x_{-\delta}(2\xi + 1), [x_{-\delta}(1), x_{\gamma+\delta}(\xi) \cdot u]]\ ]] \in H
\end{aligned}
$$

$\square$

# 9. Обобщение на случай неабелева унипотентного радикала

Группы, рассматриваемые в предыдущих разделах, являются нередуктивными линейными алгебраическими группами с абелевым унипотентным радикалом.

Перейдём теперь к рассмотрению групп, получающихся подобным же образом из представлений, но в которых унипотентный радикал будет уже не абелев, в класса нильпотентности 2, то есть коммутант унипотентного радикала будет абелевым.

**Определение 2.** *Пусть $U$ — $G$-модуль, являющийся алгеброй над $R$ с умножением, которое согласовано с действием $G$:*

$$\circledast : U \times U \to U$$

$${}^{g}u \circledast {}^{g}v = {}^{g}(u \circledast v).$$

*При этом, обозначив $V := U \circledast U$, мы будем предполагать, что $U$ раскладывается в прямую сумму $U = U/V \oplus V$.*

*Тогда можно рассмотреть группу $P$, являющуюся расширением $G$ с помощью $U$, элементами которой будут пары $(g, u)$, $g \in G$, $u \in U$ со следующим умножением:*

$$(g, u) \cdot (g', u') = (gg', {}^{g'^{-1}}u + u' + {}^{g'^{-1}}u \circledast u')$$

*Назовём такую группу* ***группой параболического типа с унипотентным радикалом класса нильпотентности 2****.*

**Пример 1.** *Если $V = 0$, то есть $u \circledast u'$ всегда тривиально, то эта конструкция представляет собой полупрямое произведение группы $G$ и аддитивной группы модуля $U$.*

Если же $u \circledast u'$ нетривиально, то $P$ тоже является полупрямым произведением группы $G$, но уже с группой, состоящей из элементов из $U$ с умножением $(u, u') \mapsto u + u' + u \circledast u'$.

**Пример 2.** *Частным случаем предыдущего примера является пример, когда группа $G$ является прямым произведением групп $G_1, \ldots, G_n$, а модуль $U$ раскладывается в прямую сумму $U_1 \oplus \ldots \oplus U_{n-1}$ со следующими действиями групп на них:*

$$\begin{array}{ccccc} G_1 & \curvearrowright & U_1 & \curvearrowleft & G_2 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ G_{n-1} & \curvearrowright & U_{n-1} & \curvearrowleft & G_n \end{array}$$

*Тогда действие $G$ на $U$ конструируется из левых и правых действий $G_1 \ldots G_n$ следующим образом:*

$$(g_1, \ldots, g_n) : u_i \mapsto g_i u_i g_{i+1}^{-1}$$

*В результате $P = G \leftthreetimes U$ можно записать как факторгруппу группы матриц вида*

$$\begin{pmatrix} g_1 & g_1u_1 & & & \\ & g_2 & g_2u_2 & & \ast \\ & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & g_{n-1} & g_{n-1}u_{n-1} \\ & & & & g_n \end{pmatrix}$$

*по подгруппе вида*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \\ & 1 & 0 & & \ast \\ & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & 1 & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

**Пример 3.** *Обобщая предыдущий пример на случай $V \neq 0$, можно рассмотреть факторгруппу матриц вида*

$$\left.\begin{pmatrix} g_1 & g_1u_1 & g_1v_1 & & & & \ast \\ & g_2 & g_2u_2 & \ddots & & & \\ & & g_3 & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & g_{n-2} & g_{n-2}u_{n-2} & g_{n-2}v_{n-2} \\ & & & & & g_{n-1} & g_{n-1}u_{n-1} \\ 0 & & & & & & g_n \end{pmatrix}\right/ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & \ast \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & & 1 & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix},$$

*где*

$$\begin{array}{ccccc} G_1 & \curvearrowright & U_1 & \curvearrowleft & G_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ G_{n-1} & \curvearrowright & U_{n-1} & \curvearrowleft & G_n \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} \circledast & : & U_1 \times U_2 & \to & V_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \circledast & : & U_{n-2} \times U_{n-1} & \to & V_{n-2} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} G_1 & \curvearrowright & V_1 & \curvearrowleft & G_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ G_{n-2} & \curvearrowright & V_{n-2} & \curvearrowleft & G_n \end{array}$$

*При этом согласованность операции $\circledast$ с действиями групп означает, что*

$$(g_1 u_1 g_2^{-1}, \ldots, g_{n-1} u_{n-1} g_n^{-1}) \circledast (g_1 u_1' g_2^{-1}, \ldots, g_{n-1} u_{n-1}' g_n^{-1}) =$$
$$= (g_1 u_1 g_2^{-1} g_2 u_2' g_3^{-1}, \ldots) = (g_1 u_1 u_2' g_3^{-1}, \ldots, g_{n-2} u_{n-2} u_{n-1}' g_n^{-1}).$$

**Пример 4.** *Чтобы группа $P$ была похожа на параболические подгруппы, нужно дополнительно потребовать, чтобы $U \circledast V = V \circledast U = 0$, то есть чтобы*

$$\circledast : U/V \times U/V \to V.$$

*Тогда результирующая группа будет состоять из троек $(g, u, v)$, $g \in G$, $u \in U/V$, $v \in V$ со следующим умножением:*

$$(g, u, v) \cdot (g', u', v') = (gg', {}^{g'^{-1}}u + u', {}^{g'^{-1}}v + v' + {}^{g'^{-1}}u \circledast u').$$

**Теорема 4.** *Пусть $P$ — группа параболического типа над $R$ с унипотентным радикалом класса нильпотентности 2, построенная по рациональному представлению $U$ группы $G$ со структурой алгебры $\circledast$ на представлении, причём $U = V \oplus U/V$, где $V := U \circledast U$.*

*Тогда если $V$ и $U/V$ — неприводимые над замкнутым полем характеристики 0 представления группы $G$, для которых с учётом выбора кольца $R$ выполняется свойство 1, то подгруппы унипотентного радикала, нормализуемые $E$, задаются парой идеалов $I$, $J$, где $I^2 \subset J$.*

*Доказательство.* Пусть $U' \leqslant U$ — подгруппа, нормализуемая $E$. Так как $P$ допускает факторизацию по $V$, то в $U/V$ будет подгруппа $U'/V$, так же нормализуемая $E$. Аналогично, в $V$ есть подгруппа $U' \cap V$, нормализуемая $E$. А так как $E$-инвариантные подмодули в $U/V$ и в $V$ определяются утверждением 4, то осталось доказать, что $I^2 \subset J$. Но это следует из замкнутости подмодуля относительно $\circledast$. □

Если $V$ и $U/V$ — модули старшего веса, то они раскладываются по весовым пространствам. Следующая лемма говорит о том, что операция $\circledast$ согласована с весовым разложением.

**Теорема 5.** *Если $u, u' \in U/V$ — векторы весов $\sigma, \sigma'$, то $u \circledast u' \in V$ — вектор веса $\sigma + \sigma'$.*

*Доказательство.*

$${}^{h}(u \circledast u') = {}^{h}u \circledast {}^{h}u' = \sigma(h)u \ \circledast \ \sigma'(h)u' = \sigma(h)\sigma'(h) \ \ u \circledast u'$$

□

Приведённые выше доказательства и примеры подтверждают корректность и осмысленность предложенного определения групп параболического типа с унипотентным радикалом класса нильпотентности 2. Наличие согласованного с действием $G$ весового разложения позволяет предположить, что для групп параболического типа с унипотентным радикалом класса нильпотентности 2 может быть получен результат, аналогичный теореме 1.

## 10. Заключение

В настоящей работе получено доказательство теоремы о нормальном строении линейных алгебраических групп параболического типа с абелевым унипотентным радикалом. А именно, установлено, что при выполнении некоторых условий, касающихся решётки весов, любая подгруппа, нормализуемая элементарной, распадается в полупрямое редуктивной части и унипотентной части. В исключительном случае, когда проекция старшего веса на одну из неприводимых компонент системы корней совпадает с соответствующим максимальным корнем, вычисления на решётках корней, положенные в основу доказательства, неприменимы, и в этом случае выполняется более слабое условие на подгруппы, нормализуемые элементарной.

Также в работе сформулировано обобщающее понятие линейных алгебраических групп параболического типа с унипотентным радикалом класса нильпотентности не более 2. Описание нормального строения для данного класса групп является предметом дальнейших исследований. Также представляет интерес возможность дальнейшего обобщения результатов данной работы на аналогичные по строению нередуктивные группы с унипотентным радикалом более высокого класса нильпотентности.

# Список литературы


[1] Вавилов Н. А. О параболических подгруппах групп Шевалле над полулокальным кольцом // Записки научных семинаров ЛОМИ. — 1978. — Т. 75. — С. 43–58.

[2] Голубчик И. З. О полной линейной группе над ассоциативным кольцом // Успехи математических наук. — 1973. — Т. 28. — С. 179–180.

[3] Петров В. А. Нечетные унитарные группы // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2003. — Т. 305. — С. 195–225.

[4] Степанов А. В. О расположении подгрупп, нормализуемых фиксированной // Записки научных семинаров ЛОМИ. — 1991. — Т. 198. — С. 92–102.

[5] Степанов А. В. Новый взгляд на разложение унипотентов и нормальное строение групп Шевалле // Алгебра и анализ. — 2016. — Т. 28. — С. 161–173.

[6] Abe E. Normal subgroups of Chevalley groups over commutative rings // Contemp. Math. — 1989. — Jan. — Vol. 83. — P. 1–17.

[7] Azad H., Barry M., Seitz G. On the structure of parabolic subgroups // Communications in Algebra. — 1990. — Vol. 18, no. 2. — P. 551–562.

[8] Bak A., Vavilov N. Structure Of Hyperbolic Unitary Groups - I. Elementary Subgroups // Algebra Colloquium. — 1999. — 05. — Vol. 7.

[9] Bass H. The stable structure of quite general linear groups // Bull. Amer. Math. Soc. — 1964. — 05. — Vol. 70, no. 3. — P. 429–433.

[10] Borel A. Properties and linear representations of Chevalley groups // Lecture Notes in Mathematics. — Springer Berlin Heidelberg, 1970. — P. 1–55.

[11] Chevalley C. Certains schémas de groupes semi-simples // Séminaire Bourbaki. — 1960-1961. — Vol. 6. — P. 219–234.

[12] Conrad B. Reductive group schemes // Notes for the SGA3 Summer School. — 2011.

[13] Ellers E., Frank R., Nolte W. Bireflectionality of the weak orthogonal and the weak symplectic groups // Journal of Algebra. — 1984. — may. — Vol. 88, no. 1. — P. 63–67.

[14] Hazrat R., Vavilov N. Bak's work on the K-theory of rings // Journal of K-Theory, v.4, 1-65 (2009). — 2009. — 08. — Vol. 4.

[15] Jantzen J. Representations of algebraic groups. — Boston : Academic Press, 1987. — ISBN: 0123802458.

[16] Milne J. Algebraic Groups. — Cambridge University Press, 2017.

[17] Plotkin E., Semenov A., Vavilov N. Visual Basic Representations // International Journal of Algebra and Computation. — 1998. — Feb. — Vol. 08, no. 01. — P. 61–95.

[18] Preusser R. Sandwich classification for $\mathrm{GL}_n(R)$, $\mathrm{O}_{2n}(R)$ and $\mathrm{U}_{2n}(R, \Lambda)$ revisited // Journal of Group Theory. — 2018. — Jan. — Vol. 21, no. 1. — P. 21–44.

[19] Röhrle G. On normal Abelian subgroups in parabolic groups. // Ann. Inst. Fourier. — 1998. — Vol. 48, no. 5. — P. 1455–1482.

[20] Stavrova A., Stepanov A. Normal structure of isotropic reductive groups over rings. — 2018. — Jan. — ArXiv e-prints. https://arxiv.org/abs/1801.08748.

[21] Stavrova A. Normal Structure of Maximal Parabolic Subgroups in Chevalley Groups over Rings // Algebra Colloquium. — 2009. — Dec. — Vol. 16, no. 04. — P. 631–648.

[22] Steinberg R. Lectures on Chevalley Groups (University Lecture Series). — American Mathematical Society, 2016. — ISBN: 9781470431051.

[23] Stepanov A. Structure of Chevalley groups over rings via universal localization // Journal of Algebra. — 2013. — 03. — Vol. 450.

[24] Stepanov A., Vavilov N. Decomposition Of Transvections: A Theme With Variations // K-Theory. — 1999. — 05. — Vol. 19.

[25] Vavilov N., Plotkin E. Chevalley Groups Over Commutative Rings I. Elementary Calculations // Acta Applicandae Mathematicae. — 1999. — 05. — Vol. 45.

[26] Wilson J. The normal and subnormal structure of general linear groups // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. — 1972. — mar. — Vol. 71, no. 02. — P. 163.