Санкт-Петербургский государственный университет
Кафедра теории управления

Кугушева Анастасия Петровна

Магистерская диссертация

Сравнительный анализ двух схем стабилизации систем с запаздыванием в управлении

Направление 01.04.02
Прикладная математика и информатика
Магистерская программа «Методы прикладной математики и информатики в задачах управления»

Научный руководитель,
доктор физ. – мат. наук,
профессор
Харитонов В. Л.

Рецензент,
кандидат физ. – мат. наук,
Сумачёва В. А.

Санкт-Петербург
2018

Содержание

Введение

Задача стабилизации систем с запаздываниями в управлении рассматривалась в 1979 году в работе Manitius A.Z., Olbrot A.W. "Finite spectrum assignment for systems with delay" [3], но до сих пор поиск других вариантов решения задачи стабилизации является актуальной проблемой. Целью выпускной квалификационной работы является сравнительный анализ двух схем построения стабилизирующего управления, одна из которых была представлена в работе Manitius A.Z., Olbrot A.W., в которой показано, что задача стабилизации для системы с несколькими запаздываниями в управлении с помощью специальной замены сводится к решению задачи стабилизации системы без запаздываний. Вторая схема стабилизации была представлена в работе Tsubakino D., Oliveira T.R., Krstic M. "Predictor-feedback for multi-input LTI systems with distinct delays" [4] в 2015 году, в которой предложен двухэтапный подход к построению стабилизирующего управления, на первом этапе ищется управление для компоненты с наименьшим запаздыванием. На втором этапе строится управление для компоненты с большим запаздыванием.

В представленной работе схема стабилизации по методу из статьи Manitius A.Z., Olbrot A.W. рассматривается в Главе 1. Описание метода из статьи Tsubakino D., Oliveira T.R., Krstic M. дано в Главе 2. Основным результатом работы является сравнительный анализ двух схем, представленный в Главе 3. Рассмотрен вопрос существования стабилизирующего управления и выбора собственных чисел замкнутой системы. Глава 4 посвящена анализу найденного управления. Так как в уравнении для управления появляются интегралы, которые нельзя вычислить аналитически, то при практическом использовании, приходится заменять их конечными суммами. Это приводит к изменению характеристической функции замкнутой системы. Она становится функцией нейтрального типа. Это меняет расположение корней на комплексной плоскости и может привести к потере экспоненциальной устойчивости. Известно, что у функции запаздывающего типа все корни, большие по модулю, располагаются вдоль логарифмических линий и имеют отрицательную вещественную часть. А для функций нейтрального типа часть корней, больших по модулю, будет располагаться в вертикальной полосе комплексной плоскости. Показано, как можно избежать изменения природы характеристической функции. Введен оператор специального вида, при применении которого, в случае замены интегралов конечными суммами, характеристическая функция остается функцией запаздывающего типа и сохраняется экспоненциальная устойчивость замкнутой системы.

Постановка задачи

В работе рассматривается система дифференциальных уравнений с запаздываниями в управлении. Целью исследования является построение управления двумя способами, при которых замкнутая система будет экспоненциально устойчива.

Первый метод построения стабилизирующего управления был представлен в работе Manitius A.Z., Olbrot A.W. в 1979 году [3]. В этой работе рассматривается система

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 u(t-\tau_1) + B_2 u(t-\tau_2), \tag{1}$$

выбранное управление имеет вид

$$u(t) = Fx(t) + F\int\limits_{-\tau_1}^{0} e^{-A(\tau_1+\theta)}B_1 u(t+\theta)d\theta + F\int\limits_{-\tau_2}^{0} e^{-A(\tau_2+\theta)}B_2 u(t+\theta)d\theta, \tag{2}$$

система (1) стабилизируема, если для неё имеется управление, которое делает систему экспоненциально устойчивой.

Решение замкнутой системы (1)-(2) задается с помощью начальных условий, в качестве начального момента времени возьмем ноль, т.к. система стационарная.

Начальные условия для системы (1)

$$\begin{cases} x(0) = x_0, \\ u(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\tau_2, 0), \end{cases}$$

где $\varphi \in \mathbb{C}([-\tau_2, 0], R^m)$.

Определение 1. *[1] Замкнутая система (1)-(2) экспоненциально устойчива, если существуют $\gamma \geq 1$ и $\sigma > 0$ такие, что все решения $x(t, x_0, \varphi)$, $u(t, x_0, \varphi)$ замкнутой системы удовлетворяют оценке*

$$||x(t, x_0, \varphi)|| + ||u(t, x_0, \varphi)|| \leq \gamma e^{-\sigma t}(||x_0|| + ||\varphi||_{\tau_2}), \ t \geq 0.$$

В работе показано, что решение задачи стабилизации для системы с несколькими запаздываниями в управлении сводится к решению задачи стабилизации системы без запаздываний, с помощью специальной замены. Система, замкнутая таким управлением будет экспоненциально устойчивой.

Второй метод рассматривается в работе Tsubakino D., Oliveira T.R., Krstic M. [4], написанной в 2015 году, здесь рассматривается система немного другого вида

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + b_1 u_1(t - \tau_1) + b_2 u_2(t - \tau_2), \tag{3}$$

Начальные условия для системы (3)

$$\begin{cases} x(0) = x_0, \\ u_1(t) = \varphi_1(t), \quad t \in [-\tau_1, 0), \\ u_2(t) = \varphi_2(t), \quad t \in [-\tau_2, 0), \end{cases}$$

где $\varphi_1 \in \mathbb{C}([-\tau_1, 0], R^1)$,
$\varphi_2 \in \mathbb{C}([-\tau_2, 0], R^1)$.

В работе предлагается поэтапная схема построения стабилизирующего управления. На первом этапе выбирается управление u_1 вида

$$u_1(t) = k_1^T (e^{A\tau_1} x(t) + \int\limits_{t-\tau_1}^{t} e^{A(t-\theta)} b_1 u_1(\theta) d\theta + \int\limits_{t-\tau_2}^{t+\tau_1-\tau_2} e^{A(t+\tau_1-\tau_2-\theta)} b_2 u_2(\theta) d\theta), \tag{4}$$

потом управление (4) подставляется в систему (3) и только затем выбирается управление u_2 для системы, в которую уже подставлено u_1, получается u_2 вида

$$u_2(t) = k_2^T (e^{A_1\tau_2} x(t) + \int\limits_{t-\tau_2}^{t} e^{A_1(t-\theta)} b_2 u_2(\theta) d\theta). \tag{5}$$

Система (3), замкнутая управлениями (4)-(5), будет экспоненциально устойчивой.

Определение 2. *[1] Замкнутая система (3)-(4)-(5) экспоненциально устойчива, если существуют $\gamma \geq 1$ и $\sigma > 0$ такие, что все решения $x(t, x_0, \varphi_1, \varphi_2)$, $u_1(t, x_0, \varphi_1, \varphi_2)$, $u_2(t, x_0, \varphi_1, \varphi_2)$ замкнутой системы удовлетворяют оценке*

$$\begin{aligned} ||x(t, x_0, \varphi_1, \varphi_2)|| + |u_1(t, x_0, \varphi_1, \varphi_2)| + |u_2(t, x_0, \varphi_1, \varphi_2)| \\ \leq \gamma e^{-\sigma t}(||x_0|| + ||\varphi||_{\tau_1} + ||\varphi||_{\tau_2}),\ t \geq 0. \end{aligned}$$

В выпускной квалификационной работе произведен подробный анализ построения схем стабилизации двумя способами. Проведен сравнительный анализ и рассмотрен вопрос реализации построенных управлений.

Глава 1. Первый алгоритм построения стабилизирующего управления

В статье [3] рассматривается система (1)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 u(t - \tau_1) + B_2 u(t - \tau_2),$$

где $x \in R^n$, $u \in R^m$, матрицы $A \in R^{n \times n}$, $B_1, B_2 \in R^{n \times m}$ запаздывание $\tau_1 < \tau_2$.

Начальные условия для системы

$$\begin{cases} x(0) = x_0, \\ u(\xi) = \varphi(\xi), \quad \xi \in [-\tau_2, 0). \end{cases}$$

Обозначим

$$\widetilde{B} = e^{-A\tau_1} B_1 + e^{-A\tau_2} B_2,$$

показано, что для того, чтобы найти решение задачи стабилизации нужно стабилизировать вспомогательную систему

$$\dot{x} = Ax + \widetilde{B}u. \tag{6}$$

Если существует управление

$$u = Fx,$$

стабилизирующее систему (6), то замкнутая система

$$\dot{x} = (A + \widetilde{B}F)x,$$

является экспоненциально устойчивой. В работе Manitius A.Z., Olbrot A.W. [3] показано, что задача стабилизации системы (1) имеет решение, если система (6) стабилизируема.

В статье [3] предлагается взять управление вида (2)

$$u(t) = Fx(t) + F \int\limits_{-\tau_1}^{0} e^{-A(\tau_1 + \theta)} B_1 u(t + \theta) d\theta + F \int\limits_{-\tau_2}^{0} e^{-A(\tau_2 + \theta)} B_2 u(t + \theta) d\theta.$$

В результате получим замкнутую систему вида

$$
\begin{cases}
\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1u(t-\tau_1) + B_2u(t-\tau_2), \\
u(t) = Fx(t) + F\int\limits_{-\tau_1}^{0} e^{-A(\tau_1+\theta)}B_1u(t+\theta)d\theta + \\
\qquad + F\int\limits_{-\tau_2}^{0} e^{-A(\tau_2+\theta)}B_2u(t+\theta)d\theta,
\end{cases} \tag{7}
$$

где F– матрица, найденная при решении задачи стабилизации системы (6), размерности $m \times n$.

Для проверки устойчивости замкнутой системы (7), найдем её характеристическую функцию. Будем искать решение замкнутой системы (7) в виде $x(t) = \mu e^{st}$, $u(t) = \gamma e^{st}$, где s—комплексное число, μ, γ—постоянные векторы, не равные одновременно нулю, получим

$$
\begin{cases}
s\mu e^{st} = A\mu e^{st} + B_1\gamma e^{s(t-\tau_1)} + B_2\gamma e^{s(t-\tau_2)}, \\
\gamma e^{st} = F\mu e^{st} + F\int\limits_{-\tau_1}^{0} e^{-A(\tau_1+\theta)}B_1\gamma e^{s(t+\theta)}d\theta + F\int\limits_{-\tau_2}^{0} e^{-A(\tau_2+\theta)}B_2\gamma e^{s(t+\theta)}d\theta.
\end{cases}
$$

Перенесем слагаемые в левую часть, сгруппируем по множителям μ, γ, сократим на e^{st}, тогда система будет иметь вид

$$
\begin{pmatrix}
sE - A & -B_1e^{-s\tau_1} - B_2e^{-s\tau_2} \\
-F & E - F\int\limits_{-\tau_1}^{0} q_1e^{s\theta}d\theta - F\int\limits_{-\tau_2}^{0} q_2e^{s\theta}d\theta
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \mu \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},
$$

где

$$
q_1 = e^{-A(\tau_1+\theta)}B_1,
$$
$$
q_2 = e^{-A(\tau_2+\theta)}B_2.
$$

Эта система имеет решение только когда определитель матрицы

$$
\begin{pmatrix}
sE - A & -B_1e^{-s\tau_1} - B_2e^{-s\tau_2} \\
-F & E - F\int\limits_{-\tau_1}^{0} e^{-A(\tau_1+\theta)}B_1e^{s\theta}d\theta - F\int\limits_{-\tau_2}^{0} e^{-A(\tau_2+\theta)}B_2e^{s\theta}d\theta
\end{pmatrix}, \tag{8}
$$

равен нулю. Такая матрица (8) называется характеристической, а её определитель называется характеристической функцией замкнутой системы.

Для вычисления характеристической функции воспользуемся домножением характеристической матрицы слева на

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ F(sE-A)^{-1} & E \end{pmatrix},$$

а затем справа на

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ -F & E \end{pmatrix}.$$

Дополнительные матрицы имеют определитель равный единице, это позволяет утверждать, что определитель матрицы, полученной после домножения, совпадает с определителем характеристической матрицы.
В результате домножения получим матрицу вида

$$\begin{pmatrix} sE - A - \widetilde{B}F & \widetilde{B} \\ \\ 0 & E \end{pmatrix},$$

определитель этой матрицы $det(sE - A - \widetilde{B}F)$.

Получилось, что определитель характеристической матрицы системы (7) совпадает с характеристическим полиномом матрицы $(A + \widetilde{B}F)$, и замкнутая система (7) является экспоненциально устойчивой, что решает задачу стабилизации.

Глава 2. Второй алгоритм построения стабилизирующего управления

Рассмотрим систему с запаздываниями (3)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + b_1u_1(t-\tau_1) + b_2u_2(t-\tau_2),$$

где $t \geq 0$, запаздывание $\tau_1, \tau_2 > 0$, $\tau_1 < \tau_2$, u_1, u_2- скалярные управления, матрица $A \in R^{n\times n}$, b_1, b_2- вектор столбцы.

Обозначим начальные условия для системы

$$\begin{cases} x(0) = x_0, \\ u_1(\xi) = \varphi_1(\xi), \quad \xi \in [-\tau_1, 0), \\ u_2(\xi) = \varphi_2(\xi), \quad \xi \in [-\tau_2, 0). \end{cases}$$

Рассмотрим вспомогательную систему

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + b_1u_1(t) + b_2u_2(t), \tag{9}$$

без запаздываний, когда $\tau_1 = \tau_2 = 0$.
Если существует управление

$$u_1 = k_1^Tx(t),$$

$$u_2 = k_2^Tx(t),$$

стабилизирующее систему (9), то замкнутая система

$$\dot{x}(t) = (A + b_1k_1^T + b_2k_2^T)x(t), \tag{10}$$

экспоненциально устойчива, т.е. матрица замкнутой системы (10) $A+b_1k_1^T+b_2k_2^T$- матрица Гурвица, т.е. матрица у которой все собственные числа имеют отрицательную вещественную часть.

В случае положительных τ_1, τ_2 управление вида

$$u_1(t) = k_1^Tx(t+\tau_1) \tag{11}$$

не реализуемо, т.к. требует знания решения системы в будущий момент времени.
По формуле Коши [1] решение может быть представлено в виде

$$x(t+\tau_1)=e^{A\tau_1}x(t)+\int\limits_t^{t+\tau_1} e^{A(t+\tau_1-\xi)}\Big(b_1u_1(\xi-\tau_1)+b_2u_2(\xi-\tau_2)\Big)d\xi=$$

$$=e^{A\tau_1}x(t)+\int\limits_{t-\tau_1}^{t} e^{A(t-\theta)}b_1u_1(\theta)d\theta+\int\limits_{t-\tau_2}^{t+\tau_1-\tau_2} e^{A(t+\tau_1-\tau_2-\theta)}b_2u_2(\theta)d\theta.$$

Если подставим получившееся решение в управление (11), получим (4)

$$u_1(t)=k_1^T(e^{A\tau_1}x(t)+\int\limits_{t-\tau_1}^{t} e^{A(t-\theta)}b_1u_1(\theta)d\theta+\int\limits_{t-\tau_2}^{t+\tau_1-\tau_2} e^{A(t+\tau_1-\tau_2-\theta)}b_2u_2(\theta)d\theta).$$

Если для разыскания второй компоненты пользоваться таким же способом, то

$$u_2(t)=k_2^Tx(t+\tau_2),$$

тогда по формуле Коши [1]

$$x(t+\tau_2)=e^{A\tau_2}x(t)+\int\limits_t^{t+\tau_2} e^{A(t+\tau_2-\xi)}\Big(b_1u_1(\xi-\tau_1)+b_2u_2(\xi-\tau_2)\Big)d\xi=$$

$$=e^{A\tau_2}x(t)+\int\limits_{t-\tau_1}^{t+\tau_2-\tau_1} e^{A(t+\tau_2-\tau_1)}b_1u_1(\theta)d\theta+\int\limits_{t-\tau_2}^{t} e^{A(t-\theta)}b_2u_2(\theta)d\theta, \quad (12)$$

получается, что в правой части формулы (12) для u_1 надо знать значение в будущем, что является недоступным.

В работе [4] предлагается не искать таким образом управление u_2, а предварительно подставить управление (4) в систему (3)

$$\dot{x}(t)=(A+b_1k_1^T)x(t)+b_2u_2(t-\tau_2),\quad t\geq\tau_1 \quad (13)$$

и только после этого переходить к поиску второй компоненты $x(t+\tau_2)$ для получившейся системы (13). Обозначим $A_1=A+b_1k_1^T$, тогда

$$x(t+\tau_2)=e^{A_1\tau_2}x(t)+\int\limits_t^{t+\tau_2} e^{A_1(t+\tau_2-\xi)}b_2u_2(\xi-\tau_2)d\xi=$$

$$=e^{A_1\tau_2}x(t)+\int\limits_{t-\tau_2}^{t} e^{A_1(t-\theta)}b_2u_2(\theta)d\theta,$$

получаем

$$u_2(t)=k_2^T(e^{A_1\tau_2}x(t)+\int\limits_{t-\tau_2}^{t}e^{A_1(t-\theta)}b_2u_2(\theta)d\theta).$$

Замкнутая система имеет вид:

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t)+b_1u_1(t-\tau_1)+b_2u_2(t-\tau_2),\\ u_1(t)=k_1^T(e^{A\tau_1}x(t)+\int\limits_{t-\tau_1}^{t}e^{A(t-\theta)}b_1u_1(\theta)d\theta+\\ \qquad+\int\limits_{t-\tau_2}^{t+\tau_1-\tau_2}e^{A(t+\tau_1-\tau_2-\theta)}b_2u_2(\theta)d\theta),\\ u_2(t)=k_2^T(e^{A_1\tau_2}x(t)+\int\limits_{t-\tau_2}^{t}e^{A_1(t-\theta)}b_2u_2(\theta)d\theta).\end{cases}\tag{14}$$

Нас интересует экспоненциальная устойчивость замкнутой системы (14). Покажем, что собственными числами замкнутой системы (14) являются собственные числа матрицы $A^*=A+b_1k_1^T+b_2k_2^T$, т.к. k_1,k_2 были выбраны так, чтобы матрица A^* была матрицей Гурвица, то при таком выборе k_1,k_2 замкнутая система (14) будет экспоненциально устойчивой.

Перейдем к анализу характеристической функции этой системы, для этого будем искать решение замкнутой системы (14) в специальном виде, $x(t)=\mu e^{st}$, $u_1(t)=\gamma e^{st}$ и $u_2(t)=\eta e^{st}$, где μ - n-мерный вектор; γ, η - скалярные величины, при этом по крайней мере одна из компонент μ, γ, η $\neq 0$, $s-$комплексное число, получим

$$\begin{cases}s\mu e^{st}=A\mu e^{st}+b_1\gamma e^{s(t-\tau_1)}+b_2\eta e^{s(t-\tau_2)},\\ \gamma e^{st}=k_1^T\Big(e^{A\tau_1}\mu e^{st}+\int\limits_{t-\tau_1}^{t}e^{A(t-\theta)}b_1\gamma e^{s\theta}d\theta+\int\limits_{t-\tau_2}^{t+\tau_1-\tau 2}e^{A(t+\tau_1-\tau_2-\theta)}b_2\eta e^{s\theta}d\theta\Big),\\ \eta e^{st}=k_2^T(e^{A_1\tau_2}\mu e^{st}+\int\limits_{t-\tau_2}^{t}e^{A_1(t-\theta)}b_2\eta e^{s\theta}d\theta).\end{cases}$$

Перенесем слагаемые в левую часть, сгруппируем по множителям μ,γ, η, сократим на экспоненциальный множитель e^{st}, тогда после сокращения получим систему для определения μ,γ, η

$$\begin{pmatrix} sE-A & -b_1e^{-s\tau_1} & -b_2e^{-s\tau_2} \\ \\ -k_1^Te^{A\tau_1} & 1-r_1b_1 & -k_1^T(sE-A)^{-1}(Ee^{s(\tau_1-\tau_2)}-e^{(A\tau_1-Es\tau_2)})b_2 \\ \\ -k_2^Te^{A_1\tau_2} & 0 & 1-r_2b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu \\ \\ \gamma \\ \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 0 \\ \\ 0 \end{pmatrix},$$

где

$$r_1 = k_1^T(sE-A)^{-1}(E-e^{-(sE-A)\tau_1}),$$
$$r_2 = k_2^T(sE-A_1)^{-1}(E-e^{-(sE-A_1)\tau_2}).$$

Эта система будет иметь ненулевое решение, когда определитель характеристической матрицы замкнутой системы (14)

$$\begin{pmatrix} sE-A & -b_1e^{-s\tau_1} & -b_2e^{-s\tau_2} \\ \\ -k_1^Te^{A\tau_1} & 1-r_1b_1 & -k_1^T(sE-A)^{-1}(Ee^{s(\tau_1-\tau_2)}-e^{(A\tau_1-Es\tau_2)})b_2 \\ \\ -k_2^Te^{A_1\tau_2} & 0 & 1-r_2b_2 \end{pmatrix},$$

равен нулю.

Для вычисления характеристической функции воспользуемся домножением характеристической матрицы на

$$\begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ -r_1e^{s\tau_1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

слева, а затем на

$$\begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ k_1^Te^{s\tau_1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

справа, получаем

$$\begin{pmatrix} sE-A_1 & -b_1e^{-s\tau_1} & -b_2e^{-s\tau_2} \\ \\ 0 & 1 & 0 \\ \\ -k_2^Te^{A_1\tau_2} & 0 & 1-r_2b_2 \end{pmatrix},$$

поскольку каждый раз происходило домножение на матрицу, определитель которой равен единице, то определитель получившейся матрицы совпадает с определителем характеристической матрицы. Проведем последнее домножение на

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ -r_2 e^{s\tau_2} & 1 \end{pmatrix}$$

слева и получим

$$\begin{pmatrix} sE - A_1 - b_2 k_2^T & -b_2 e^{-s\tau_2} \\ \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

в качестве A_1 брали $A + b_1 k_1^T$. Получается, что определитель матрицы равен $det(sE - A - b_1 k_1^T - b_2 k_2^T)$, соответственно он совпадает с определителем матрицы A^*, и замкнутая система (14) является экспоненциально устойчивой.

Глава 3. Сравнительный анализ двух схем стабилизации систем с запаздыванием в управлении

§1. Сравнительный анализ

В методе из работы Manitius A.Z., Olbrot A.W. не накладывается никаких ограничений на выбор матриц B_1, B_2, они предполагаются произвольными. А в работе Tsubakino D., Oliveira T.R., Krstic M. эти матрицы имеют специальный вид, для того, чтобы во втором методе получилось $B_1 u_1(t-\tau_1) + B_2 u_2(t-\tau_2)$ надо взять матрицы

$$B_1 = (b_1, 0),$$

$$B_2 = (0, b_2).$$

Вторая схема работает только с такой специальной структурой матриц B_1, B_2. Проводить сравнение надо там, где оба метода могут одновременно работать. И так как в первом методе нет ограничения на матрицы B_1, B_2, а во втором есть, значит сравнивать два метода будем в том классе систем, которые используются во второй схеме, т.е. рассматриваем первый способ построения стабилизирующего управления, примененный к системе (3),

$$\dot{x}(t) \ = Ax(t) + b_1 u_1(t-\tau_1) + b_2 u_2(t-\tau_2),$$

и второй способ построения стабилизирующего управления, примененный к этой же системе.

Начальные условия будут

$$\begin{cases} x(0) = x_0, \\ u_1(\xi) = \varphi_1(\xi), \quad \xi \in [-\tau_1, 0), \\ u_2(\xi) = \varphi_2(\xi), \quad \xi \in [-\tau_2, 0). \end{cases}$$

Замкнутая система, полученная по способу Manitius A.Z., Olbrot A.W. для системы (3) будет иметь вид:

$$
\begin{cases}
\dot{x}(t) = Ax(t) + b_1u_1(t-\tau_1) + b_2u_2(t-\tau_2), \\
u_1(t) = k_1^T\Big(x(t) + \int\limits_{-\tau_1}^{0} e^{-A(\tau_1+\theta)}b_1u_1(t+\theta)d\theta + \\
\qquad + \int\limits_{-\tau_2}^{0} e^{-A(\tau_2+\theta)}b_2u_2(t+\theta)d\theta\Big), \\
u_2(t) = k_2^T\Big(x(t) + \int\limits_{-\tau_1}^{0} e^{-A(\tau_1+\theta)}b_1u_1(t+\theta)d\theta + \\
\qquad + \int\limits_{-\tau_2}^{0} e^{-A(\tau_2+\theta)}b_2u_2(t+\theta)d\theta\Big).
\end{cases} \tag{15}
$$

Нас интересует экспоненциальная устойчивость замкнутой системы (15). Покажем, что собственные числа системы (15) совпадают с собственными числами матрицы $A^* = A + b_1k_1^T + b_2k_2^T$, которая была выбрана так, чтобы её собственные числа имели отрицательную вещественную часть, тогда замкнутая система (15) будет экспоненциально устойчивой.

Вычислим характеристическую функцию, аналогично предыдущим главам, $x(t) = \mu e^{st}$, $u_1(t) = \gamma e^{st}$ и $u_2(t) = \eta e^{st}$, получим

$$
\begin{cases}
s\mu e^{st} = A\mu e^{st} + b_1\gamma e^{s(t-\tau_1)} + b_2\eta e^{s(t-\tau_2)}, \\
\gamma e^{st} = k_1^T\Big(\mu e^{st} + \int\limits_{-\tau_1}^{0} e^{-A(\tau_1+\theta)}b_1\gamma e^{s(t+\theta)}d\theta + \int\limits_{-\tau_2}^{0} e^{-A(\tau_2+\theta)}b_2\eta e^{s(t+\theta)}d\theta\Big), \\
\eta e^{st} = k_2^T\Big(\mu e^{st} + \int\limits_{-\tau_1}^{0} e^{-A(\tau_1+\theta)}b_1\gamma e^{s(t+\theta)}d\theta + \int\limits_{-\tau_2}^{0} e^{-A(\tau_2+\theta)}b_2\eta e^{s(t+\theta)}d\theta\Big).
\end{cases}
$$

Перенесем слагаемые в левую часть, сгруппируем по множителям μ,γ, η, сократим на экспоненциальный множитель e^{st}, после сокращения получим систему для определения μ,γ, η

$$
\begin{pmatrix}
sE - A & -b_1e^{-s\tau_1} & -b_2e^{-s\tau_2} \\
-k_1^T & 1 - k_1^Tr_1b_1 & -k_1^Tr_2b_2 \\
-k_2^T & -k_2^Tr_1b_1 & 1 - k_2^Tr_2b_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \mu \\ \gamma \\ \eta \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},
$$

где

$$r_1 = (sE - A)^{-1}(e^{-A\tau_1} - e^{-s\tau_1}E),$$
$$r_2 = (sE - A)^{-1}(e^{-A\tau_2} - e^{-s\tau_2}E).$$

Эта система будет иметь ненулевое решение, когда определитель характеристической матрицы замкнутой системы (15)

$$\begin{pmatrix} sE - A & -b_1e^{-s\tau_1} & -b_2e^{-s\tau_2} \\ -k_1^T & 1 - k_1^T r_1 b_1 & -k_1^T r_2 b_2 \\ -k_2^T & -k_2^T r_1 b_1 & 1 - k_2^T r_2 b_2 \end{pmatrix},$$

равен нулю.

Домножим получившуюся матрицу на

$$\begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ k_1^T(sE - A)^{-1} & 1 & 0 \\ k_2^T(sE - A)^{-1} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

слева, а затем справа на

$$\begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ e^{(sE-A)\tau_1}k_1^T & 1 & 0 \\ e^{(sE-A)\tau_2}k_2^T & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot$$

получим

$$\begin{pmatrix} sE - A - b_1k_1^T - b_2k_2^T & -b_2e^{-s\tau_2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Так как определитель матриц, на которые происходило домножение равен единице, то определитель получившейся матрицы совпадает с определителем характеристической матрицы. Определитель матрицы равен $det(sE - A - b_1k_1^T - b_2k_2^T)$, соответственно, он совпадает с определителем матрицы A^*, и замкнутая система (15) экспоненциально устойчива.

§2. Выбор собственных чисел

Характеристическая функция замкнутой системы (15) имеет вид

$$F(s) = det(sE - A - b_1 k_1^T - b_2 k_2^T).$$

А характеристическая функция замкнутой системы, построенной в работе Manitius A.Z., Olbrot A.W.:

$$det(sE - A - \widetilde{B}F),$$

где $\widetilde{B} = e^{-A\tau_1}B_1 + e^{-A\tau_2}B_2$.

Матрицы B_1, B_2 имеют специальный вид

$$B_1 = (b_1, 0),$$

$$B_2 = (0, b_2),$$

т.е. $\widetilde{B} = (e^{-A\tau_1}b_1, e^{-A\tau_2}b_2)$. Получаем, $det(sE - A - e^{-A\tau_1}b_1 f_1^T - e^{-A\tau_2}b_2 f_2^T)$

Если в (15) положить $\widetilde{b}_1 = e^{-A\tau_1}b_1, \widetilde{b}_2 = e^{-A\tau_2}b_2$, то получится

$$F(s) = det(sE - A - \widetilde{b}_1 k_1^T - \widetilde{b}_2 k_2^T).$$

В случае метода Manitius A.Z., Olbrot A.W., выбирая f_1, f_2, можем сделать собственные числа системы любыми, заранее заданными, с отрицательной вещественной частью. Так и в случае Tsubakino D., Oliveira T.R., Krstic M., выбирая k_1, k_2, можем сделать собственные числа такими, которые необходимы. Выберем в первом и во втором случае собственные числа так, чтобы характеристические полиномы были одинаковыми, тогда и первое управление даёт замкнутой системе характеристический полином, созданный заранее, и управление из второй системы будет давать тоже самое. Т.е. получается, что два управления дают замкнутой системе одно и то же характеристическое уравнение.

§3. Условие существования стабилизирующего управления

В случае метода Manitius A.Z., Olbrot A.W. говорится, что пара $A, \widetilde{B}$, где $\widetilde{B} = e^{-A\tau_1}B_1 + e^{-A\tau_2}B_2$, должна быть стабилизируема. Если матрица $B_1 = (b_1, 0)$, $B_2 = (0, b_2)$, то это приводит к

$$(A, \widetilde{B}) = (A, e^{-A\tau_1}B_1 + e^{-A\tau_2}B_2) = (A, e^{-A\tau_1}b_1, e^{-A\tau_2}b_2).$$

Во втором случае Tsubakino D., Oliveira T.R., Krstic M. пара $A, \hat{B}$, где $\hat{B} = (b_1, b_2)$ должна быть стабилизируема

$$(A, \hat{B}) = (A, b_1, b_2).$$

Рассмотрим условия, при которых существует стабилизирующее управление в первом и во втором случаях. Система из работы Tsubakino D., Oliveira T.R., Krstic M. стабилизируема тогда и только тогда, когда система из работы Manitius A.Z., Olbrot A.W. стабилизируема. Т.е. эти две системы одновременно стабилизируемы, если для одной системы существует стабилизирующее управление, то и для другой оно существует. Стабилизирующие управления можно выбрать так, чтобы собственные числа замкнутой системы для управления, выбранного в первом случае, и для управления, выбранного во втором случае, были одни и те же.

Критерий Hautus'а стабилизируемости [6]. *Система* $\dot{x} = Ax + Bu$ *стабилизируема* $\Leftrightarrow$ *ранг матрицы Hautus'а*

$$rank(sE - A, B) = n,$$

$\forall s : Re(s) \geq 0.$

Утверждение. *Пусть для* $s \in \mathbb{C}$ *имеет место равенство*

$$rank(sE - A, b_1, ..., b_m) = n,$$

тогда для любого набора вещественных чисел $\lambda_1, ..., \lambda_m$ *справедливо равенство*

$$rank(sE - A, e^{\lambda_1 A} b_1, ..., e^{\lambda_m A} b_m) = n.$$

Доказательство.

Предположим от противного, что

$$rank(sE - A, e^{\lambda_1 A} b_1, ..., e^{\lambda_m A} b_m) < n.$$

Тогда $\exists\ \gamma \neq 0 :$

$$\gamma^T (sE - A, e^{\lambda_1 A} b_1, ..., e^{\lambda_m A} b_m) = 0, \tag{16}$$

в частности $\gamma^T(sE - A) = 0 \Rightarrow s-$ собственные числа матрицы A, а $\gamma-$ собственные вектора.

Следовательно $\gamma^T e^{\lambda_j A} b_j = \gamma^T e^{\lambda_j s} b_j = e^{\lambda_j s} \gamma^T b_j$, $j = 1..m$.

В результате получим равенство

$$\gamma^T (sE - A, e^{\lambda_1 A} b_1, ..., e^{\lambda_m A} b_m) = \gamma^T (sE - A, b_1, ..., b_m) \begin{pmatrix} E & \dots & \dots & \dots \\ 0 & e^{\lambda_1 s} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & e^{\lambda_m s} \end{pmatrix}$$

Матрица

$$\begin{pmatrix} E & \dots & \dots & \dots \\ 0 & e^{\lambda_1 s} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & e^{\lambda_m s} \end{pmatrix}$$

неособоя, следовательно (16) приводит к заключению

$$\gamma^T(sE - A, b_1, ..., b_m) = 0,$$

что противоречит условию утверждения.

Следствие 1. *случай Manitius A.Z., Olbrot A.W.*

Пусть $B_1 = (b_1, 0)$, $B_2 = (0, b_2)$. *Если*

$$rank(sE - A, e^{-\tau_1 A} B_1, e^{-\tau_2 A} B_2) = n,$$

то и

$$rank(sE - A, b_1, b_2) = n.$$

Следствие 2. *случай Tsubakino D., Oliveira T.R., Krstic M.*

Пусть $\hat{B} = (b_1, b_2)$. *Если*

$$rank(sE - A, \hat{B}) = n,$$

то и

$$rank(sE - A, e^{-\tau_1 A} b_1, e^{-\tau_2 A} b_2) = n.$$

Другими словами, показано, что два способа стабилизации системы (3) либо одновременно применимы, либо одновременно не применимы.

Глава 4. Анализ стабилизирующих управлений

§1. Скалярный случай

Рассмотрим скалярный случай, для системы (7)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ax(t) + b_1 u(t-\tau_1) + b_2 u(t-\tau_2), \\ u(t) = fx(t) + f \int\limits_{-\tau_1}^{0} e^{-a(\tau_1+\theta)} b_1 u(t+\theta) d\theta + \\ \qquad + f \int\limits_{-\tau_2}^{0} e^{-a(\tau_2+\theta)} b_2 u(t+\theta) d\theta. \end{cases} \tag{17}$$

Характеристическая матрица системы (17) имеет вид

$$\begin{pmatrix} s-a & -b_1 e^{-s\tau_1} - b_2 e^{-s\tau_2} \\ -f & 1 - f \int\limits_{-\tau_1}^{0} e^{-a(\tau_1+\theta)} b_1 e^{s\theta} d\theta - f \int\limits_{-\tau_2}^{0} e^{-a(\tau_2+\theta)} b_2 e^{s\theta} d\theta \end{pmatrix}.$$

Характеристическая функция будет иметь вид

$$p(s) = s - a - \widetilde{b} f,$$

где $\widetilde{b} = e^{-a\tau_1} b_1 + e^{-a\tau_2} b_2$.

Определение 3. *[1] Функция вида*

$$a_0 s + a_1 s e^{-s\tau} + b_0 + b_1 e^{-s\tau} = f(s)$$

называется квазиполиномом запаздывающего типа, если $a_0 \neq 0$ и $a_1 = 0$. Если $a_0 \neq 0$ и $a_1 \neq 0$, то функция называется квазиполиномом нейтрального типа.

У квазиполинома запаздывающего типа корни, большие по модулю, будут располагаться в левой полуплоскости вдоль логарифмических линий и будут заведомо иметь отрицательную вещественную часть.

В правой части уравнения для управления в системе (17) стоят интегралы, недопускающие конечных выражений, поэтому при практической реализации такого сорта управлений предлагается заменить интегралы конечными суммами. Воспользуемся формулой прямоугольников [2] и получим выражение вида

$$u(t) = fx(t) + f\Big(\sum_{g=1}^{M_1} r_g u(t+\theta_g) + \sum_{l=1}^{M_2} q_l u(t+\xi_l)\Big), \qquad (18)$$

коэффициенты $r_g = \frac{\tau_1}{M_1} e^{-a(\tau_1+\theta_g)} b_1$, $q_l = \frac{\tau_2}{M_2} e^{-a(\tau_2+\xi_l)} b_2$.

Характеристическая матрица для уравнения (18) имеет вид

$$\begin{pmatrix} s-a & -b_1 e^{-s\tau_1} - b_2 e^{-s\tau_2} \\ -f & 1 - f\sum\limits_{g=1}^{M_1} r_g e^{s\theta_g} - f\sum\limits_{l=1}^{M_2} q_l e^{s\xi_l} \end{pmatrix},$$

получаем, что характеристическая функция будет квазиполиномом нейтрального типа.

У квазиполиномов нейтрального типа на степенной диаграмме есть горизонтальный отрезок, который даёт цепочку больших по модулю корней, расположенных в вертикальной полосе комплексной плоскости. Получается, что корни, большие по модулю, могут иметь и отрицательную и положительную вещественные части.

При замене в выражении для управления интегралов на конечные суммы, поменялась природа характеристической функции. Для исходного интегрального уравнения функция была запаздывающего типа, а после замены интегралов на конечные суммы, функция стала нейтрального типа. Меняется расположение корней, больших по модулю, они могут иметь и положительную и отрицательную вещественные части. А у запаздывающего типа корни, большие по модулю, будут располагаться в левой полуплоскости вдоль логарифмических линий и будут заведомо иметь отрицательную вещественную часть.

Если управление не является внутренне устойчивым, т.е. система

$$u(t) = f\int\limits_{-\tau_1}^{0} e^{-a(\tau_1+\theta)} b_1 u(t+\theta)d\theta + f\int\limits_{-\tau_2}^{0} e^{-a(\tau_2+\theta)} b_2 u(t+\theta)d\theta,$$

не является экспоненциально устойчивой и у характеристической функции этой системы

$$\frac{1}{s-a}\Big((s-a) - fe^{-a\tau_1} b_1 (1 - e^{-(s-a)\tau_1}) - fe^{-a\tau_2} b_2 (1 - e^{-(s-a)\tau_2})\Big),$$

есть корень, вещественная часть которого неотрицательна. Т.е. у управления существует собственное число в правой полуплоскости, то тогда чем точнее будем делать приближение значения интеграла, тем хуже будет с точки зрения устойчивости замкнутая система после замены интегралов конечными суммами.

Для решения этой проблемы предлагается выбрать положительную константу k и рассмотреть оператор

$$\frac{d}{dt} - k : \forall q(t) = \dot{q}(t) - kq(t).$$

Применим этот оператор к левой и правой частям системы (17), получим систему вида

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ax(t) + b_1u(t-\tau_1) + b_2u(t-\tau_2), \\ \dot{u}(t) - ku(t) = f\Big(\dot{x}(t) - kx(t)\Big) + \\ \qquad\qquad + f\Big(e^{-a\tau_1}b_1u(t) - b_1u(t-\tau_1) + \\ \qquad\qquad + (a-k)\int\limits_{-\tau_1}^{0} e^{-a(\tau_1+\theta)}b_1u(t+\theta)d\theta\Big) + \\ \qquad\qquad + f\Big(e^{-a\tau_2}b_2u(t) - b_2u(t-\tau_2) + \\ \qquad\qquad + (a-k)\int\limits_{-\tau_2}^{0} e^{-a(\tau_2+\theta)}b_2u(t+\theta)d\theta\Big), \end{cases} \tag{19}$$

Она является системой запаздывающего типа. Если у такой системы провести замену интегралов в правой части на конечные суммы, то система останется запаздывающего типа.

Характеристическая матрица системы (19) имеет вид

$$\begin{pmatrix} s-a & -b_1e^{-s\tau_1} - b_2e^{-s\tau_2} \\ -f(a-k) & s-k-f(b_1e^{-s\tau_1}+b_2e^{-s\tau_2}) - fl_1 - fl_2 \end{pmatrix},$$

где
$l_1 = e^{-a\tau_1}b_1 - b_1e^{-s\tau_1} + (a-k)(s-a)^{-1}(e^{-a\tau_1} - e^{-s\tau_1})b_1,$
$l_2 = e^{-a\tau_2}b_2 - b_2e^{-s\tau_2} + (a-k)(s-a)^{-1}(e^{-a\tau_2} - e^{-s\tau_2})b_2.$

Получим характеристическую функцию для системы

$$p_1(s) = (s-a-\widetilde{b}f)(s-k),$$

где $s-a-\widetilde{b}f=p(s)$- характеристическая функция системы (17).

Использование такого вида оператора приводит к появлению дополнительного множителя $(s-k)$ у характеристического уравнения. Если корни $p(s)$ имеют отрицательную вещественную часть, а число k выбрано положительным, то у $p_1(s)$ корни тоже имеют отрицательную вещественную часть и в этом случае замкнутая система остается экспоненциально устойчивой.

§2. Векторный случай

Рассмотрим векторный случай, для системы (7),

$$\begin{cases} \dot{x}(t)=Ax(t)+B_1u(t-\tau_1)+B_2u(t-\tau_2), \\ u(t)=Fx(t)+F\int\limits_{-\tau_1}^{0} e^{-A(\tau_1+\theta)}B_1u(t+\theta)d\theta+ \\ \qquad +F\int\limits_{-\tau_2}^{0} e^{-A(\tau_2+\theta)}B_2u(t+\theta)d\theta. \end{cases}$$

Найдем характеристическую матрицу замкнутой системы (7)

$$\begin{pmatrix} sE-A & -B_1e^{-s\tau_1}-B_2e^{-s\tau_2} \\ -F & E-F\int\limits_{-\tau_1}^{0} e^{-A(\tau_1+\theta)}B_1e^{s\theta}d\theta-F\int\limits_{-\tau_2}^{0} e^{-A(\tau_2+\theta)}B_2e^{s\theta}d\theta \end{pmatrix}.$$

Характеристическая функция будет иметь вид

$$p(s)=det(sE-A-\widetilde{B}F),$$

где $\widetilde{B}=e^{-A\tau_1}B_1+e^{-A\tau_2}B_2$.

Определение 4. *[9] Характеристическая функция*

$$det(sE+e^{-s\tau}sEA_1+B_0+e^{-s\tau}B_1),$$

называется квазиполиномом запаздывающего типа, если $detA_1=0$. *Если* $detA_1\neq 0$, *то характеристическая функция будет нейтрального типа.*

У квазиполинома запаздывающего типа корни, большие по модулю, будут располагаться в левой полуплоскости вдоль логарифмических линий и будут заведомо иметь отрицательную вещественную часть.

В правой части уравнения для управления в системе (7) стоят интегралы, недопускающие конечных выражений, поэтому при практической реализации такого сорта управлений предлагается провести аппроксимацию интегралов конечными суммами. Воспользуемся формулой прямоугольников [2] и получим выражение вида

$$u(t) = Fx(t) + F\Big(\sum_{g=1}^{M_1} R_g u(t+\theta_g) + \sum_{l=1}^{M_2} Q_l u(t+\xi_l)\Big), \tag{20}$$

коэффициенты $R_g = \frac{\tau_1}{M_1} e^{-A(\tau_1+\theta_g)} B_1$, $Q_l = \frac{\tau_2}{M_2} e^{-A(\tau_2+\xi_l)} B_2$.

Характеристическая матрица для уравнения (20) имеет вид

$$\begin{pmatrix} sE - A & -B_1 e^{-s\tau_1} - B_2 e^{-s\tau_2} \\ -F & E - F\sum\limits_{g=1}^{M_1} R_g e^{s\theta_g} - F\sum\limits_{l=1}^{M_2} Q_l e^{s\xi_l} \end{pmatrix}.$$

рассматрим структуру определителя этой матрицы, получается, что характеристическая функция будет квазиполиномом нейтрального типа.

У квазиполиномов нейтрального типа на степенной диаграмме есть горизонтальный отрезок, что порождает цепочку больших по модулю корней, расположенных в вертикальной полосе комплексной плоскости. Получается, что корни, большие по модулю, могут иметь и отрицательную и положительную вещественные части.

При замене в выражении для управления интегралов на конечные суммы, поменялась природа характеристической функции. Для исходного интегрального уравнения функция была запаздывающего типа, а после замены интегралов на конечные суммы, функция стала нейтрального типа. Меняется расположение корней, больших по модулю, они могут иметь и положительную и отрицательную вещественные части. А у запаздывающего типа корни, большие по модулю, будут располагаться в левой полуплоскости вдоль логарифмических линий и будут заведомо иметь отрицательную вещественную часть.

Если управление не является внутренне устойчивым, т.е. система

$$u(t) = F\int_{-\tau_1}^{0} e^{-A(\tau_1+\theta)} B_1 u(t+\theta)d\theta + F\int_{-\tau_2}^{0} e^{-A(\tau_2+\theta)} B_2 u(t+\theta)d\theta,$$

не является экспоненциально устойчивой и у характеристической функции этой системы

$$det(E - F(sE - A)^{-1}(e^{-A\tau_1} - e^{-s\tau_1}E)B_1 - F(sE - A)^{-1}(e^{-A\tau_2} - e^{-s\tau_2}E)B_2),$$

есть корень, вещественная часть которого неотрицательна. Т.е. у управления существует собственное число в правой полуплоскости, то тогда чем точнее будем делать приближение значения интеграла, тем хуже будет с точки зрения устойчивости замкнутая система после замены интегралов конечными суммами [2].

Для решения этой проблемы предлагается выбрать матрицу Гурвица K и рассмотреть оператор

$$\frac{d}{dt} - K : \forall Q(t) = \dot{Q}(t) - KQ(t).$$

Применим этот оператор к левой и правой частям системы (7), получим

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_1u(t-\tau_1) + B_2u(t-\tau_2), \\ \dot{u}(t) - Ku(t) = F\Big(\dot{x}(t) - Kx(t)\Big) + \\ \qquad\qquad + F\Big(e^{-A\tau_1}B_1u(t) - B_1u(t-\tau_1) + \\ \qquad\qquad + (A-K)\int\limits_{-\tau_1}^{0} e^{-A(\tau_1+\theta)}B_1u(t+\theta)d\theta\Big) + \\ \qquad\qquad + F\Big(e^{-A\tau_2}B_2u(t) - B_2u(t-\tau_2) + \\ \qquad\qquad + (A-K)\int\limits_{-\tau_2}^{0} e^{-A(\tau_2+\theta)}B_2u(t+\theta)d\theta\Big). \end{cases} \tag{21}$$

Новая система является системой запаздывающего типа. Если у такой системы провести замену интегралов в правой части на конечные суммы, то система останется системой запаздывающего типа.

Характеристическая матрица системы (21) имеет вид

$$\begin{pmatrix} sE - A & -B_1e^{-s\tau_1} - B_2e^{-s\tau_2} \\ -F(A-K) & sE - K - F(B_1e^{-s\tau_1} + B_2e^{-s\tau_2}) - Fl_1 - Fl_2 \end{pmatrix},$$

где

$$l_1 = e^{-A\tau_1}B_1 - B_1e^{-s\tau_1} + (A-K)(sE-A)^{-1}(e^{-A\tau_1} - e^{-s\tau_1}E)B_1,$$

$$l_2 = e^{-A\tau_2}B_2 - B_2e^{-s\tau_2} + (A-K)(sE-A)^{-1}(e^{-A\tau_2} - e^{-s\tau_2}E)B_2.$$

Получим характеристическую функцию для системы (21)

$$p_1(s) = p(s)det(sE-K),$$

где $\widetilde{B} = e^{-A\tau_1}B_1 + e^{-A\tau_2}B_2$, а $p(s) = det(sE - A - \widetilde{B}F)$- характеристическая функция системы (7).

Использование такого вида оператора приводит к появлению дополнительного множителя $(sE-K)$ у характеристического уравнения. Если корни $p(s)$ имеют отрицательную вещественную часть, а K- матрица Гурвица, то у $p_1(s)$ корни тоже имеют отрицательную вещественную часть и в этом случае замкнутая система остается экспоненциально устойчивой.

Известно [2], что в системе запаздующего типа замена интегралов конечными суммами не нарушает устойчивости, если используются квадратурные формулы хорошей точности.

Глава 5. Пример

Проанализируем, как выглядят управления в первом и во втором случаях для системы

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + b_1u_1(t-\tau_1) + b_2u_2(t-\tau_2).$$

Рассмотрим сначала Tsubakino D., Oliveira T.R., Krstic M.

Возьмем матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \tau_1 = 0.2,\ \tau_2 = 0.5$$

Найдем матрицу F, для этого сделаем несколько шагов:

1. Выберем собственные числа -3, $-2 \pm 2i$.
2. Построим базис Зубова из цепочки векторов, берем столбец

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

затем ищем Ab_1

$$Ab_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

получается, что Ab_1 линейно зависим с вектором b_1, поэтому берем столбец

$$b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ищем Ab_2

$$Ab_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

получаем матрицу из столбцов b_1, b_2, Ab_2, обозначим её S,

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Делаем замену переменных $x = Sz \Rightarrow$

$$\dot{z}(t) = S^{-1}ASz + S^{-1}Bu.$$

4. Считаем $S^{-1}AS$

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

рассмотрим первый блок, его последний столбец, для него $a_1 = -1$, возьмем первое собственное число $p_1 = -3$. Т.е.для этого блока выбираем управление $a_1 - p_1 = -4$.
Для второго блока $a_1 = -2$, $a_2 = 5$. Возьмем оставшиеся собственные числа $(x+2+2i)(x+2-2i) = x^2+4x+8$, получаем $p_1 = 4$, $p_2 = 8$.
Решаем систему для поиска управления $\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 3 \end{pmatrix}$.
получаем $v_1 = -6$, $v_2 = -15$.
5. Составляем матрицу из получившихся управлений

$$N = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -15 \end{pmatrix}.$$

6. Считаем матрицу $F = NS^{-1}$

$$F = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Управление будет иметь вид

$$\begin{cases} u_1(t) = -4x_1(t) + x_3(t) - 4 \int\limits_{-0.2}^{0} e^{-0.2-\theta} u_1(t+\theta) d\theta + \\ \qquad + \int\limits_{-0.5}^{0} e^{-0.5-\theta} (cos(1+2\theta) - 3.5 sin(1+2\theta)) u_2(t+\theta) d\theta, \\ u_2(t) = -3x_2(t) - 6x_3(t) - 6 \int\limits_{-0.5}^{0} e^{-0.5-\theta} (cos(1+2\theta) - sin(1+2\theta)) u_2(t+\theta) d\theta. \end{cases}$$

В случае Manitius A.Z., Olbrot A.W., в системе участвует матрица

$$\widetilde{B} = e^{-A\tau_1} B_1 + e^{-A\tau_2} B_2,$$

для которой $B_1 = (b_1, 0)$; $B_2 = (0, b_2)$.

Получим

$$\widetilde{B} = \begin{pmatrix} 0.81 & -0.51 \\ 0 & -0.51 \\ 0 & 0.07 \end{pmatrix},$$

Для сравнения управений, замкнутая система должна иметь один и тот же набор собственных чисел. Будем искать матрицу $\widetilde{F}$ такую, что матрица $A + \widetilde{B}\widetilde{F}$ имеет собственные числа такие же, как и матрица $A + BF$, т.е. $-3; -2 \pm 2i$.

Получим

$$\widetilde{F} = \begin{pmatrix} -4.93 & 0 & 1.93 \\ 0 & 10.96 & -5.86 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} u_1(t) = -4.93x_1(t) + 1.93x_3(t) - 3.99 \int\limits_{-0.2}^{0} e^{-0.2-\theta} u_1(t+\theta)d\theta + \\ \qquad + \int\limits_{-0.5}^{0} e^{-0.5-\theta}(2.64cos(1+2\theta) - 0.93sin(1+2\theta))u_2(t+\theta)d\theta, \\ u_2(t) = 10.96x_2(t) - 5.86x_3(t) - \\ \qquad - 6\int\limits_{-0.5}^{0} e^{-0.5-\theta}(-5.98cos(1+2\theta) + 4.07sin(1+2\theta))u_2(t+\theta)d\theta. \end{cases}$$

Заключение

В работе были изучены и разобраны два метода построения стабилизирующего управления в системах с запаздыванием в управлениях. Проведено сравнение, которое показало, что область применения метода из работы Manitius A.Z., Olbrot A.W. шире, чем область применения метода из работы Tsubakino D., Oliveira T.R., Krstic M.. Показано, что если выполнены условия существования стабилизирующего управления в первом методе, то эти же условия гарантируют существование стабилизирующего управления и во втором методе. Рассмотрено влияние замены интегралов в управлении на конечные суммы и способ избежать изменения природы характеристической функции. Для наглядности был рассмотрен пример построения стабилизирующего управления по двум схемам с подробным описанием вычисления коэффициентов.

Список литературы

[1] Bellman R., Cooke K. L. Differential Difference Equations. New York: Academic Press, 462 p., 1963

[2] Keqin Gu. A review of some subtleties of practical relevance for time-delay systems of neutral type. International Scholarly Research Network ISRN Applied Mathematics, 46 p., 2012

[3] Manitius A. Z., Olbrot, A. W.. Finite spectrum assignment for systems with delay. IEEE Trans. on Automatic Control, No 24. P. 541–553, 1979.

[4] Tsubakino D., Oliveira T. R., Krstic M.. Predictor-feedback for multi-input LTI systems with distinct delays. American Control Conference, pp. 571-576, 2015.

[5] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. Изд. 2-е изд. М.: Наука, 1966. 576 с.

[6] Егоров А. И. Основы теории управления. -М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 504 с.

[7] Зубов В. И. Лекции по теории управления. Изд.Наука, 1975. 496 с.

[8] Смирнов В. И. Курс высшей математики. Изд.Наука, 1974. 652 с.

[9] Штокало И. З. Операционное исчисление. Изд.Наукова-думка, 1972. 304 с.