Санкт-Петербургский государственный университет
Факультет прикладной математики - процессов управления
Кафедра математической теории игр и статистических решений

Байчорова Мария Маратовна

Выпускная квалификационная работа магистра

Математические модели выборов с несколькими участниками

Направление 010400

Прикладная математика, фундаментальная информатика

и основы программирования

Заведующий кафедрой, доктор физ.-мат. наук, профессор	Петросян Л. А.
Научный руководитель, кандидат физ.-мат. наук, профессор	Петросян Л. А.
Рецензент	Колабутин Н. В.

Санкт-Петербург

2018

Содержание

Введение

С древних времен люди осознавали, что основой для любого общества должны служить власть и структура, иначе хаос в нем неизбежен. Необходима конструктивная организация, четкое распределение ролей каждого члена общества, способная в совокупности обеспечить его процветание и благополучие. С течением временем подобное абстрактное понятие обрело четкое название — политический строй. Политический строй (или иначе режим) — это совокупность разнообразных методик управления политическими отношениями в государстве. Из столетия в столетие политический строй разных стран мира постоянно изменялся в стремлении соответствовать как можно большему числу нужд всех граждан и в итоге от ограничивающих свободы и права человека тоталитарного и авторитарного режимов преобразовался к современному идеалу — демократии. Демократия в ее первоначальном значении понимается как народовластие, возможность любого человека безбоязненно и свободно выражать свою политическую позицию, аргументировать свою собственную точку зрения, не боясь быть осужденным или наказанным за демонстрацию своей точки зрения публично. К сожалению, на сегодняшний день далеко не каждое государство может сказать, что их режим может быть охарактеризован подобным образом, но многие страны уже на пути к достижению данной цели , и один из первоначальных шагов на даном пути — это организация справедливых и честных выборов. История развития избирательных процедур корнями уходит далеко в прошлое на тысячи лет назад и берет начало еще в Древней Греции. В древнегреческом обществе царствовала абсолютная демократия, так как любой гражданин был обязан участвовать в проведении заседаний собраний чтобы поддержать свою точку зрения в момент принятия коллективных решений, которые представляли собой довольно широкий спектр разнообразных процедур, начиная с выборов лидеров общества и заканчивая решением об их изгнании из города. Такие решения могли быть приняты как открыто, так и анонимно. Аналогичная картина наблюдалась и в Киевской Руси. Наиболее ярким из примеров может послужить Новгородское вече, во время которого народ принимал решения при помощи схожего с процедурами голосования в Древней Греции образа. Но, к сожалению, в последующие столетия самодержавие, слишком прочно укрепившееся в немалом числе стран, подавило волю простого народа, практически полностью лишив их права голоса и способности каким-либо образом выражать свои желания и стремления. Неоспоримо огромную роль в возвращении на путь к демократии в режимах многих стран сыграла Великая французская революция, давшая народам многих стран подтверждение того, что они обязаны заявлять о своих правах, а также показавшая властям, что обычные люди тоже имеют право быть услышанными.

Постановка задачи

В выпускной квалификационной работе ставилась задача изучения различных математических моделей голосования, основанных на теории игр, исследования соответствующей научной литературы, построения новых математических моделей и их исследования. В итоге данная задача свелась к построению математической модели, основанной на теории многошаговых и кооперативных игр, для выборов между несколькими потенциальными кандидатами, проведению соответствующего анализа и численного эксперимента.

Обзор литературы

Для написания данной работы были использованы научная и учебно-методическая литература, а также публикации в различных научных изданиях.

Основы методик и процедур голосования были изучены с помощью монографии [1]. Особый интерес представляет ее четвертая глава, называющаяся "Voting procedures". Ее авторами являются Питер Фишборн и Стивен Брамс, знаменитые благодаря своим работам в сфере альтернативных процедур голосования, например, одобряющего голосования. В этой главе описываются разнообразные методы проведения голосования, такие как голосование абсолютного и относительного большинства, голосование по принципу Кондорсе и по правилу Борда, а также парадоксы, возникающие при них. Кроме того, исторические сведения о развитии различных избирательных систем и описание некоторых процедур, упомянутых выше, приводятся в работе [2].

В свою очередь нестандартные методики голосования описаны, к примеру, в работе [5]. В данной статье авторы рассматривают процедуру, согласно которой для голосования выдвигается ряд кандидатов, их список дается некоей группе голосующих, которая должна выбрать из них k имен. После этого человек, невходящий в описываемую группу голосующих выбирает из данного списка одного победителя. Так как на этапе составления списка потенциальных победителей из k имен могут быть использованы различные методики голосования, получается целое семейство подобных процедур. Также авторы рассматривают ряд реальных примеров и проводят их теоретический анализ, учитывая случаи стратегического манипулирования избирателей результатами голосования.

Примеры моделирования процессов голосования при помощи теории игр приведены в ряде работ, таких как [8], [9], [10], [11], [12] и [14]. В работе [14] рассматривается процесс избрания президента США в ситуации, когда выбор осуществляется между представителями двух правящих партий: республиканской и демократической. Модель характеризует шансы каждого из кандидатов на победу и представляет собой игру двух лиц, в которой функции выигрыша каждого игрока являются суммой двух линейных и одной квадратичной функции.

Статья [9] является продолжением исследования, начатого Палфреем и Розенталем в работе [8] в 1983 году. В [9] характеризуется симметричное равновесие по Нэшу в симметричной игре голосования с полной информацией, описанной в статье [8]. Здесь подтверждается предположение Палфрея и Розенталя о существовании и неединственности данного равновесия, а также рассматривается то, как изменение количества игроков влияет на равновесие.

В работе [4] Роджер Лагунов представляет класс динамических игр, в которых альтернативами являются сами процедуры голосования. Разыгрывается игра, и в результате осуществляется выбор между данными процедурами. При этом процедура голосования называется *стабильной*, если она "выбирает сама себя". Если голосовании при помощи данной процедуры побеждает другая процедура, делается вывод о необходимости реформирования рассматриваемого политического института. В результате автор делает вывод о том, что стабильность процедуры голосования являются ли исходы, полученные при ее использовании, динамически устойчивыми. Также для иллюстрации работы модели автор описывает параметрическую модель распределения общественных благ.

Глава 1. Процедуры голосования.

1.1. Виды процедур голосования.

В современном обществе существует множество форм и проявлений процедур голосования таких как голосование абсолютного большинства, голосование относительного большинства, одобряющее голосование, мажоритарные избирательные системы, голосование Борда и Кондорсе, а также многие другие. Область их применения не ограничивается лишь государственным, а распространяется и на муниципальный, и на региональный уровни. Кроме того, применение данных схем может стать удачным и при выборе главы фирмы или организации, выборе директора школы, выборе главы совета директоров и в других подобных ситуациях. Огромный и действительно разнообразный спектр использования данных процедур делает их разработку и исследование задачей неописуемой важности. Любая из них имеет свои сильные стороны, которые могут быть по-разному использованы в зависимости от рассматриваемой системы, в которой они применяются. Для того чтобы более наглядно описать процесс функционирования каждой из них, рассмотрим некую конкретную задачу, подробно опишем каждую процедуру, а затем решим задачу с помощью каждой из них.

Задача. Итак, рассмотрим ситуацию, в которой у нас проходит голосование между четырьмя кандидатами. Пусть это будут A, B, C и D. В голосовании принимают участие N человек, и пусть по условию задачи $N = 50$. Каждый из избирателей имеет свои предпочтения, исходя из которых он определяет свое решение и отдает свой голос за определенного кандидата. Будем считать, что предпочтения некоторых групп людей идентичны, и имеется следующая картина:

$$n_1 = 20 : a \succ b \succ d \succ c,$$

$$n_2 = 15 : b \succ d \succ c \succ a,$$

$$n_3 = 5 : c \succ d \succ b \succ a,$$

$$n_4 = 10 : d \succ b \succ c \succ a.$$

где n_i — количество людей с одинаковыми предпочтениями. Обозначение $a \succ b$ символизирует, что для данного избирателя кандидат a более предпочтителен, и в ситуации выбора между a и b он проголосует за кандидата a.

Рассмотрим следующие процедуры голосования:

Голосование относительного большинства.

Данная процедура голосования является самой простой и понятной для обывателя. В своей цепочке предпочтений каждый избиратель имеет лидера, за которого он в итоге и голосует. Каждый человек отдает голос только за одного кандидата. После проведения данной процедуры все голоса подсчитываются и кандидат, набравший наибольшее их количество, одерживает победу в выборах. Голосование будет безрезультатным только в том случае, если два или более кандидатов наберут одинаковое количество голосов избирателей.

Рассмотрим нашу задачу при помощи данной процедуры. В течение голосования кандидату A достанется 20 голосов, кандидат B получит 15 голосов, кандидат C удостоится 5 голосов, а кандидат D получит 10. Очевидно, что победу одержит первый кандидат. Однако стоит отметить, что после подобного голосования число людей, которые останутся неудовлетворены исходом голосования будет равно 30, что больше половины от всего количества голосующих. Этот факт говорит нам о том, что данные выборы нельзя назвать в целиком и полностью справедливыми, так как победивший кандидат в попарном сравнении с другими проигрывает. Поэтому очевидно, что этот метод нуждается в совершенствовании.

Голосование абсолютного большинства.

Основное отличие данной избирательной процедуры от первой заключается в том, что для победы кандидату нужно обязательно набрать строго больше половины голосов избирателей. В случае если по итогам голосования данное условие не выполнено, то в подавляющем большинстве случаев организовывается второй тур голосования. Зачастую до данного этапа доходят два кандидата, набравшие наибольшее число голосов в первом туре. Голосование абсолютного большинства широко используется в современных политических системах, к примеру, при выборах президента во многигих странах мира, таких как Португалия, Франция, Хорватия, Колумбия и т.д. Россия также входит в их число.

Решим нашу задачу данным методом. При проведении первого тура голоса распределятся так же, как и в описанном выше примере. Но необходимо отметить, что число поддерживающих победившего в первом туре кандидата A меньше 50% всех голосующих, поэтому необходимо проведение второго тура. Кандидат A набрал 20 голосов, кандидат B набрал 15 голосов, соответственно именно они становятся участниками второго тура голосования. При голосовании во втором туре вновь те же 20 избирателей поддержат первого кандидата, 5 представителей третьей группы предпочтений, а также 10 представителей четвертой группы отдадут свои голоса за кандидата B, поэтому решающими станут голоса людей, которые в изначально голосовали за кандидатов C и D. Для них более выгодна победа кандидата B по сравнению с победой кандидата A, поэтому они и проголосуют за него. Соответственно, второй кандидат получит $15+5+10=35$ голосов и будет признан победителем. С данным результатом выборов будут согласны 70% голосующих, таким образом условие абсолютного большинства будет выполнено, и результаты второго тура голосования могут однозначно быть признаны и результатом выборов в целом. Главное преимущество данной процедуры голосования, коим является более точное и полное выражение воли абсолютного большинства избирателей, становится особенно важным при сильной раздробленности политических взглядов в государстве и большом количестве различных видов предпочтений среди голосующих. Факт исключения кандидатов в ходе процедуры голосования позволяет нам в итоге получить наиболее умеренный результат, который обеспечивает стабильное развитие общества в целом.

Голосование с последовательным исключением.

Данную процедуру зачастую также называют "олимпийской системой". Эта методика голосования также довольно проста и незатейлива. Предположим, что в выборах участвует n кандидатов. Начиная с первого, каждый кандидат подряд попарно сравнивается со следующим и одержавший в данным парном противостоянии победу проходит в следующий тур. Соответственно, всего проводится $n-1$ этапов. Победитель последнего этапа становится победителем и во всем процессе голосования. Решим нашу задачу данным методом. В первом туре будет проведено голосование между кандидатами A и B соответственно. Первый кандидат получает 20 голосов избирателец, второй — 30. Соответственно, дальнейшую борьбу продолжает кандидат B, в свою очередь кандидат A покидает избирательную гонку. Во втором туре он соперничает с третьим кандидатом, кандидатом . В результате голосования получаем следующую картину: B — 45, C — 5. В этом противостоянии также побеждает кандидат b. Следующим его прямым конкурентом за победу становится кандидат D. Голоса распределяются следующим образом: B — 35, а D — 15 Таким образом, кандидат B одерживает победу и в выборах в целом. Данная избирательная процедура широко применяется не только в вопросах голосования, но и при отборе в ходе многих спортивных соревнований и мероприятий.

Голосование по принципу Кондорсе.

Автором идеи данной методики является французский математик Николя де Кондорсе, данная процедура была описана в XVIII веке. Кондорсе был убежден, что для цели совершенствования избирательного процесса необходимо организовать попарные соревнования между всеми кандидатами, после которых победителем должен признаваться тот, кто одержит победу в каждом из них. Ход проведения данной процедуры описывается при помощи таблицы. В каждой клетке с индексом ij фиксируется число голосов, которые были даны за i-го кандидата в его противостоянии с j-ым в ситуации, когда i-ый кандидат победил в противостоянии. Построим эту таблицу для рассматриваемой нами задачи.

Таким образом, из таблицы ниже мы видим, что победу в выборах одерживает второй кандидат, так как он превзошел первого, третьего и четвертого кандидатов по количеству набранных голосов в очных про-

	a	**b**	**c**	**d**	**Итог**
a	–	20	20	20	60
b	30	–	45	35	110
c	30	5	–	45	40
d	30	15	45	–	90

тивостояниях.

Основной и, к сожаленью, довольно часто встречающейся проблемой при проведении данной процедуры голосования является возникновение такого явления, как парадокс Кондорсе. Его суть заключается в том, что при проведении избирательного процесса в парных противостояниях среди кандидатов не удается выявить того единственного, который выиграл бы в каждом из них. Другими словами, предопочтения избирателей замыкаются в цикл.

Проиллюстрируем описанное выше примером. Будем считать, что предпочтения избирателей имеют следующий вид:

$$n_1 = 20 : a \succ b \succ c,$$

$$n_2 = 20 : b \succ c \succ a,$$

$$n_3 = 20 : c \succ a \succ b.$$

При проведении попарных голосований мы получим следующие результаты:

	a	**b**	**c**	**Итог**
a	–	40	20	60
b	20	–	40	60
c	40	20	–	60

Ситуация в данном примере складывается следующая. В ситуации попарного сравнения при выборе между A и B победит A, при выборе между кандидатами A и C выиграет C, при выборе между B и C победу одержит B. Следовательно, можно утверждать, что цепочка всеобщих предпочтений избирателей примет вид: $A \succ B$, $B \succ C$, $C \succ A$. Соответственно, кандидат, одержавший победу во всех своих противостояниях, отсутствует, поэтому отсутствует и победитель по принципу Кондорсе.

Голосование по правилу Борда.

Данный способ проведени избирательного процесса так же, как и предыдущий, был предложена в XVIII веке во Франции членом Парижской Академии Наук Жан Шарлем де Борда. Пусть в голосовании участвует n кандидатов. В соответствие со своими личными предпочтения, каждый из голосующих ранжирует кандидатов, выставляя каждому из них баллы от $n-1$ (для лучшего по его мнению кандидата) до 0 (для худшего кандидата соответственно). После проведения данной процедуры, проставленные каждому кандидату баллы суммируются, и в итоге победу одерживает кандидат с максимальной итоговой суммой баллов.

Проведем данную процедуру в условиях рассматриваемой нами задачи.

Построим таблицу для подсчета баллов:

	$n_1 = 20$	$n_2 = 15$	$n_3 = 5$	$n_4 = 10$	**Итог**
a	3	0	0	0	60
b	2	3	1	2	120
c	0	1	3	1	40
в	1	2	2	3	90

Из приведенной таблицы видно, что в выборах победу одержит второй кандидат.

Помимо самих процедур голосования по принципу Кондорсе и правилу Борда существуют также и их обобщения.

Голосование при помощи подсчета очков.

Данная процедура является обобщением процедуры голосования по правилу Борда. Будем считать, что в голосовании принимают участие n кандидатов. Вводится последовательность чисел (или рангов) вида $r_0 \leq r_1 \leq \cdots \leq r_{n-1}$, для которой обязательным является следующее условие: $r_0 < r_{n-1}$. Далее каждый голосующий упорядочивает кандидатов по возрастанию в соответствии со своими предпочтениями и каждому в соответствие ставит ранг из последовательности r_i. В результате в выборах побеждает кандидат, получивший наибольшую сумму очков. Следовательно, что исход голосования зависит в первую очередь от выбора числовых значений рангов в последовательности r_i.

Докажем это на примере рассматриваемой задачи. Построим таблицу:

	$n_1 = 20$	$n_2 = 15$	$n_3 = 5$	$n_4 = 10$	**Итог**
a	20	0	0	0	400
b	2	20	1	2	365
c	0	1	20	1	125
в	1	2	2	20	240

За значения рангов мы возьмем числа от 0 до $n-1$, то мы придем непосредственно к исходному голосованию по правилу Борда, результат которого, а именно победа кандидата B, нам известен. Взамен рассмотрим ситуацию, при которой значения рангов будут следующими: $r_0 = 0, r_1 = 1, r_2 = 2, r_3 = 20$. Таким образом, в данных условиях побеждает кандидат А.

Голосование по правилу Компленда.

В свою очередь, данная процедура — обобщение процедуры голосования по принципу Кондорсе. Введем функцию $F(a_i)$, где a_i — это i-ый кандидат. Затем проведем попарные сравнения кандидатов между собой. Рассмотрим двух кандидатов m и n. Если для большинства избирателей m предпочтительнее n, то $F(m) = +1$, если n предпочтительнее m, то $F(m) = -1$, если число предпочитающих m и число предпочитающих n равно, то $F(m) = 0$. Побеждает кандидат, для которого значение функции F является максимальным.

Рассчитав значения функции F для нашей задачи, мы получим следующие значения:

$$F(a) = -3,$$
$$F(b) = 3,$$
$$F() = -1,$$
$$F(d) = 1.$$

Таким образом, получаем, что при голосовании данным методом победу одержит кандидат B. Как было отмечено выше, данный метод является обобщением правила Кондорсе, и стоит подметить тот факт, что результаты у обеих процедур совпадают.

Компьютерное моделирование.

В ходе работы были реализованы алгоритмы на языке программирования Java, каждый из которых моделирует работу одной из процедур голосования, описанных выше. В качестве параметров для функция передаются вектора a, b, c, d, каждый из которых описывает предпочтения одной из групп избирателей. Также задается вектор v, значение каждой компоненты которого равняется количеству человек в соответствующей группе избирателей.

Также в задании присутствует вектор r, необходимый моделирования процедуры голосования при подсчете очков:

```
int[] a = {3,2,0,1};
int[] b = {0,3,1,2};
int[] c = {0,1,3,2};
int[] d = {0,2,1,3};
int[] v = {20,15,5,10};
int[] rank = {20,2,1,0};
```

Рис. 1: Параметры задания программы

В результате работы программы получаем:

```
run:
Предпочтения избирателей имеют вид:
Первая группа (n = 20): a > b > d > c;
Вторая группа (n = 15): b > d > c > a;
Третья группа (n = 5): c > d > b > a;
Четвертая группа (n = 10): d > b > c > a;
Результат выборов при голосовании по Кондорсе:
в выборах побеждает кандидат номер 2
Результат выборов при голосовании методу Компленда:
в выборах побеждает кандидат номер 2
Результат выборов при голосовании относительного большинства:
в выборах побеждает кандидат номер 1
Результат выборов при голосовании по методу Борда:
в выборах побеждает кандидат номер 2
Результат выборов при голосовании с последовательным исключением:
в выборах побеждает кандидат номер 2
Результат выборов при голосовании с подсчетом очков:
в выборах побеждает кандидат номер 1
СБОРКА УСПЕШНО ЗАВЕРШЕНА (общее время: 0 секунд)
```

Рис. 2: Результат работы программы

Полный код программы представлен в **Приложении**.

Глава 2. Многошаговая игра голосования.

2.1. Модель для выборов между n кандидатами.

Будем рассматривать следующую задачу. Пусть N — это множество избирателей, принимающих участие в голосовании. Данное множество не меняется на протяжении всех этапов проведения процедуры голосования. В свою очередь, множество K - множество кандидатов, участвующих в выборах. Мощности множеств N и K равны n и k соответственно. Будем считать, что множества N и K не пересекаются.

Каждый из избирателей, принадлежащих множеству N, имеет свой вектор выигрышей $u^i = (u_1^i, \ldots, u_l^i, \ldots, u_k^i)$, где $j = \overline{1, k}$, где l-ая компонента каждого вектора соответствует выигрышу, который получит i-ый избиратель, если l-ый кандидат одержит победу в голосовании.

Процедура голосования проводится в несколько этапов или стадий. На каждой стадии избиратели одновременно голосуют за наиболее предпочтительного им кандидата и в соответствии с заранее выбранной процедурой голосования выбирается кандидат, который будет исключен из процедуры голосования на данном этапе. Пусть это будет кандидат l. Следовательно, во втором этапе проведения голосования принимает участие уже $k-1$ кандидат и множество кандидатов становится K/l. Исходя из этого трансформируются и вектора выигрышей избирателей, их размерность уменьшается на единицу путем исключения l-ой координаты из каждого из них.

Таким образом, мы переходим на вторую стадию голосования. На ней процедура повторяется аналогично предыдущему этапу и один из кандидатов также исключается из избирательной гонки. Множество кандидатов для третьей стадии и вектора выигрышей модифицируются в соответствии с принятым решением так же, как и на предыдущем этапе.

Процедура может быть продолжена до тех пор, пока в множестве кандидатов не останется один человек. Таким образом, количество стадий J не может превосходить $k-1$, в противном случае победившего кандидата не останется, следовательно, и выигрыши всех избирателей будут нулевыми.

Формализуем описанную выше процедуру в виде многошаговой игры голосования. Игроками в ней будут являться избиратели, а в роли альтернатив будут выступать возможности исключения одного из кандидатов на j-ом этапе игры. Также, как было описано выше, каждый избиратель имеет свой вектор выигрышей $u^i = (u_1^i, \ldots, u_l^i, \ldots, u_k^i)$, где $j = \overline{1, k}$, где l-ая компонента каждого вектора соответствует выигрышу, который получит i-ый избиратель, если l-ый кандидат одержит победу в голосовании (иными словами, не будет исключен из избирательной гонки ни на одном из этапов).

Таким образом, будем рассматривать j-шаговую игру $H(x_1, j)$ на множестве состояний X, в свою очередь N - множество игроков. Игра начинается в состоянии x_1, которое является первым этапом голосования, на котором в избирательной гонке участвуют все кандидаты из множества K. В каждом состоянии все избиратели из множества N выбирают за исключение какого кандидата из множества K_j (то есть множества участвующих на этапе J в голосовании кандидатов) они проголосуют, что и является их стратегией v_j^i на данном шаге. Множество стратегий $v_j = (v_j^1, \ldots, v_j^n)$ будем называть ситуацией в игре j-ом этапе.

Таким образом, игроки выбирают свои стратегии на первом этапе голосования, в игре образуется ситуация $v_1 = (v_1^1, \ldots, v_1^n)$, вследствие которой один из кандидатов из множества K исключен и игра переходит в следующее состояние x_2, или, другими словами, на следующий, второй, этап. На нем процедура повторяется и так до тех пор, пока множество кандидатов не будет включать в себя одного единственного представителя. В итоге на последнем этапе игроки получают выигрыши, равные значению координаты их вектора выигрыша u^i, номер которой соответствует победившему кандидату, после чего игра заканчивается.

Определим функцию выигрыша для каждого i-го игрока через функцию W, которая будет иметь вид:

$$W_i = v_i \cdot k^j$$

где k^j - вектор, в котором на месте оставшихся на последней проводимой в рамках голосовании стадии кандидатов стоят единицы, а на месте тех, кого исключили в ходе голосования стоят нули. Рассмотрим описанную выше игру на примере. Будем считать, что в процедуре голосования участвуют четыре кандидата A, B, C, D. Множество избирателей состоит из 55 человек:

$$n_1 = 20 : a \succ b \succ d \succ c,$$

$$n_2 = 15 : b \succ d \succ c \succ a,$$

$$n_3 = 5 : c \succ d \succ b \succ a,$$

$$n_4 = 15 : d \succ b \succ c \succ a.$$

Из этого можем сделать вывод о том, что вектора выигрышей для избирателей, входящих в одну группу, также будут одинаковыми. Для рассматриваемой нами задачи они примут вид:

$$v_1 = (5, 0, 1, 1), \quad i = \overline{(1, 20)}$$

$$v_2 = (2, 4, 3, 1), \quad i = \overline{(21, 35)}$$

$$v_3 = (0, 3, 4, 1), \quad i = \overline{(36, 40)}$$

$$v_4 = (1, 1, 2, 3), \quad i = \overline{(41, 55)}.$$

Далее смоделируем нашу игру при помощи графа.

Определение 1. *Графом* называется пара (Y, G), где Y является конечным множеством, а G в свою очередь, отображение из Y в Y.

Обозначим наш граф символом F. Элементы из Y будут отображать точками на плоскости, каждую пару y и z из которых соединим непрерывной линией со стрелкой, направленной из y в z. Тогда получим, что каждый элемент множества X будет являться узлом графа (или иначе его вершиной), а пара (y, z), где $z \in G_y$ - это дуга графа. Для каждой дуги $q = (y, z)$ узлы y и z будут являться граничными узлами дуги, в свою очередь y - начало дуги, z - ее конец. Смежными будут являться две дуги в случае, когда они различны, но при этом имеют общий граничный узел.

Путем в графе $F = (Y, G)$ будем называть такую последовательность дуг $q = (q_1, \dots, q_l, \dots)$, что конец каждой из предыдущих дуг будет совпадать с началом последующей. Длиной пути будем называть число дуг в рассматриваемой последовательности пути.

Под *циклом* понимается конечный путь, который начинается и заканчивается в одном и то же узле графа. Также мы можем называть граф *связным*, если путем могут быть соединены любые две его вершины.

Определение 2. Древовидным графом (или иначе деревом) называется конечный связный граф, который не содержит циклом и включает в себя не менее двух узлов, а также в нем существует только одна вершина y_0, такая что $G_{y_0} = Y$. Данная вершина называется начальной вершиной y_0 для графа F.

В древовидном графе, иллюстрирующем рассматриваемую нами игру, за исключением начальной вершины будет 3 уровня, так как в выборах участвует 4 кандидата, соответственно нам нужно последовательно исключить троих из них.

Таким образом дерево игры будет иметь следующий вид:

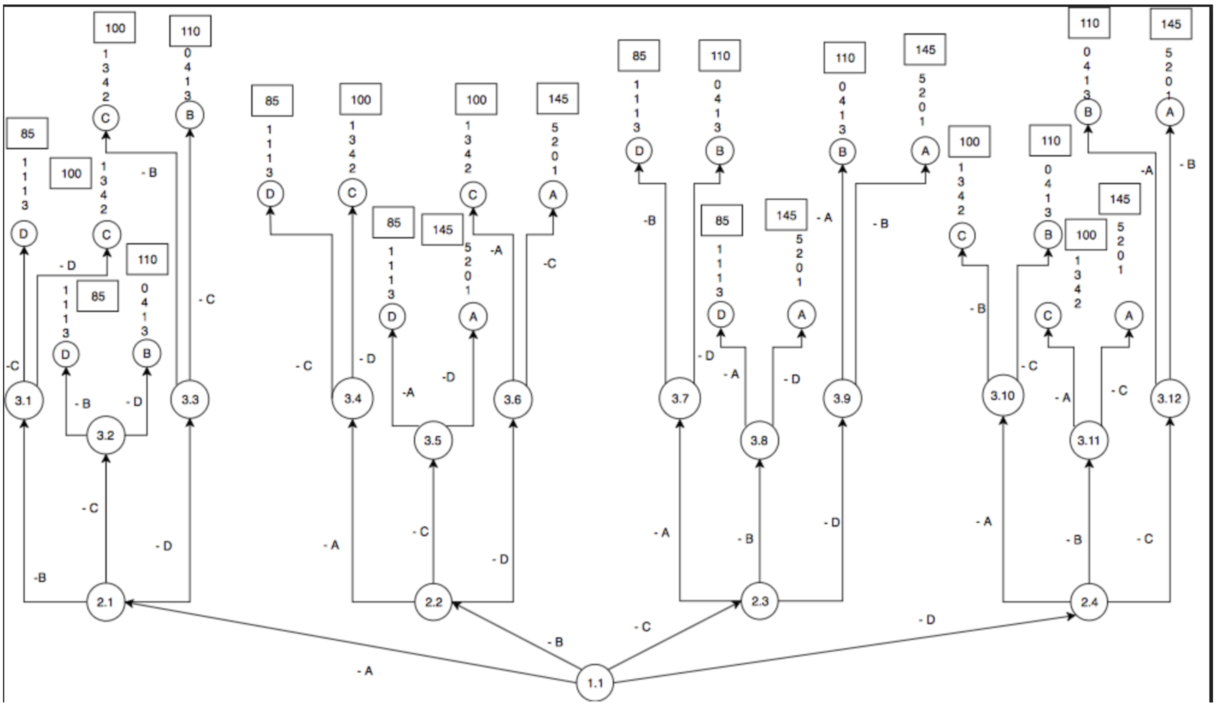

Рис. 3: Дерево игры.

Сформулируем определение равновесия по Нэшу для рассматриваемой нами игры:

Определение 3. Ситуация $v^* = (v_1^*, \ldots, v_n^*)$ будет являться *ситуацией равновесия по Нэшу*, если справедливо следующее неравенство:

$$W_i(v_1^*, \ldots, v_{i-1}^*, v_i^*, v_{i+1}^*, \ldots, v_n^*) > W_i(v_1^*, \ldots, v_{i-1}^*, v_i, v_{i+1}^*, \ldots, v_n^*)$$

для всех $v_i \in V$ и $i \in N$.

Далее введем понятие подыгры, иными словами, игры, расположенной на подграфе основной игры.

Пусть $x \in Y$. Будем рассматривать подграф $F_z = (Y_z, G)$, с которым свяжем подыгру следующим образом. Множество окончательных позиций игроков положим $Z^x_{k-1} = Y_{k-1} \cap Y_x$, выигрыш i-ого игрока будем считать равным:

$$W^x_i(y) = W_i(y), \quad y \in Z^x_{k-1} \; i = \overline{1, n}$$

Следовательно, стратегия i-го игрока v^z_i в данной подыгре H_x будет определяться как сужение стратегии v_i в игре H на множество Z^x_i, а множество всех стратегий i-го игрока в данной подыгре будем обозначать как U^x_i.

Отсюда получим следуюшее определение:

Определение 4. Ситуацией *абсолютного равновесия Нэшу* в игре H будем называть ситуацию равновесия по Нэшу такую, что для любого $x \in Y$ ситуация $(v^*)^x = ((v^*_1)^z, \dots, (v^*_n)^z)$, где $(v^*)^x$ - сужение стратегии v^*_i на подыгру H_z, в свою очередь является ситуацией равновесия по Нэшу в подыгре H_z.

Попробуем найти ситуацию абсолютного равновесия по Нэшу в рассматриваемом нами примере. Для этого мы воспользуемся методом математической индукции и будем рассматривать подыгры H_x начиная с финального этапа игры.

Рассмотрим поочередно все подыгры, начинающиеся в вершинах 3.1–3.12. Мы будем расценивать оптимальность каждого из исходов исходя из суммарного выигрыша, который получают все избиратели вместе. В первой подыгре, для которой исходной вершиной является 3.1 к третьему раунду голосования уже исключены кандидаты A и B, соответственно, на данной стадии решается вопрос об исключении кандидата C или кандидата D. У избирателей есть две альтернативы:

1. Исключить кандидата C. Тогда победителем станет кандидат D и группы избирателей получат следующие выигрыши:

$$n_1 = 1;$$

$$n_2 = 1;$$

$$n_3 = 1;$$

$$n_4 = 3.$$

   Далее посчитаем общий суммарный выигрыш, который получат все голосующие вместе в случае победы кандидата D. Для этого перемножим выигрыш представителя каждой из четырех групп избирателей на количество человек в данной группе и просуммируем:

$$W_N = 1 \cdot 20 + 1 \cdot 15 + 1 \cdot 5 + 3 \cdot 15 = 85;$$

2. Второй вариант действий - исключить кандидата D. Тогда победителем станет кандидат C. Действуем аналогично предыдущему случаю: подсчитываем выигрыши, которые получат группы избирателей:

$$n_1 = 1;$$

$$n_2 = 3;$$

$$n_3 = 4;$$

$$n_4 = 2.$$

   Далее также посчитаем общий суммарный выигрыш, который получат все голосующие вместе в случае победы кандидата C. Аналогично перемножаем выигрыши представителей каждой из групп избирателей на количество человек в данной группе и суммируем:

$$W_N = 1 \cdot 20 + 3 \cdot 15 + 4 \cdot 5 + 2 \cdot 15 = 115;$$

Из анализа двух данных альтернатив можем сделать вывод о том, что с точки зрения максимизации суммарного выигрыша всех игроков оптимальным является вариант исключения кандидата D и следующей из этого победы кандидата C. Соответственно, ситуацией равновесия по Нэшу в данной подыгре будет исход 4.2, при котором в вершине 3.1 все игроки выбирают своей стратегией исключение кандидата D.

Аналогично описанному выше алгоритму рассмотрим оставшиеся узлы 3.2 – 3.12:

- **Вершина 3.2** В данной подыгре будет осуществляться выбор между B и D. В случае победы D суммарный выигрыш избирателей будет равен $W_n^D = 85$, в случае победы B — $W_n^B = 110$ Оптимальная стратегия для всех игроков — исключение кандидата D.

- **Вершина 3.3** В данной подыгре будет осуществляться выбор между B и C. В случае победы C суммарный выигрыш избирателей будет равен $W_n^C = 115$, в случае победы B — $W_n^B = 110$ Оптимальная стратегия для всех игроков — исключение кандидата B.

- **Вершина 3.4** В данной подыгре будет осуществляться выбор между C и D. В случае победы D суммарный выигрыш избирателей будет равен $W_n^D = 85$, в случае победы B — $W_n^B = 115$ Оптимальная стратегия для всех игроков — исключение кандидата D.

- **Вершина 3.5** В данной подыгре будет осуществляться выбор между A и D. В случае победы D суммарный выигрыш избирателей будет равен $W_n^D = 85$, в случае победы A — $W_n^A = 145$ Оптимальная стратегия для всех игроков — исключение кандидата D.

- **Вершина 3.6** В данной подыгре будет осуществляться выбор между A и C. В случае победы C суммарный выигрыш избирателей будет равен $W_n^C = 115$, в случае победы A — $W_n^A = 145$ Оптимальная стратегия для всех игроков - исключение кандидата C.

- **Вершина 3.7** В данной подыгре будет осуществляться выбор между B и D. В случае победы D суммарный выигрыш избирателей будет равен $W_n^D = 85$, в случае победы B — $W_n^B = 110$ Оптимальная стратегия для всех игроков — исключение кандидата D.

- **Вершина 3.8** В данной подыгре будет осуществляться выбор между A и D. В случае победы D суммарный выигрыш избирателей будет равен $W_n^D = 85$, в случае победы A — $W_n^A = 145$ Оптимальная стратегия для всех игроков — исключение кандидата D.

- **Вершина 3.9** В данной подыгре будет осуществляться выбор между A и B. В случае победы B суммарный выигрыш избирателей будет равен $W_n^B = 110$, в случае победы A — $W_n^A = 145$ Оптимальная стратегия для всех игроков — исключение кандидата B.

- **Вершина 3.10** В данной подыгре будет осуществляться выбор между B и C. В случае победы C суммарный выигрыш избирателей будет равен $W_n^C = 115$, в случае победы B — $W_n^B = 110$ Оптимальная стратегия для всех игроков — исключение кандидата B.

- **Вершина 3.11** В данной подыгре будет осуществляться выбор между A и C. В случае победы C суммарный выигрыш избирателей будет равен $W_n^C = 115$, в случае победы A — $W_n^A = 145$ Оптимальная стратегия для всех игроков —- исключение кандидата C.

- **Вершина 3.12** В данной подыгре будет осуществляться выбор между A и B. В случае победы B суммарный выигрыш избирателей будет равен $W_n^B = 110$, в случае победы A — $W_n^A = 145$ Оптимальная стратегия для всех игроков — исключение кандидата B.

Для дальнейших вычислений перейдем на уровень ниже в древовидном графе и будем рассматривать подыгры, берущие начало в вершинах $2.1 - 2.4$. Начнем с вершины 2.1.

Из нее выходят три альтернативы: $3.1 - 3.3$. Подыгры, начинающиеся в данных узлах, были рассмотрены выше и ситуации равновесия по Нэшу нам известны:

- **Вершина 3.1** Ситуация равновесия — победа кандидата C.
- **Вершина 3.2** Ситуация равновесия — победа кандидата B.
- **Вершина 3.3** Ситуация равновесия — победа кандидата C.

Следовательно, из трех перечисленных выше альтернатив необходимо выбрать ту, которая приносит максимальный суммарный доход избирателей. Это победа кандидата C.

$$W_N^C = 115.$$

Аналогично ищем ситуации равновесия по Нэшу в подыграх $2.2 - 2.4$:

- **Вершина 2.2** Ситуация равновесия — победа кандидата A:

$$W_N^A = 145.$$

- **Вершина 2.3** Ситуация равновесия — победа кандидата A:

$$W_N^A = 145.$$

- **Вершина 2.4** Ситуация равновесия — победа кандидата A:

$$W_N^A = 145.$$

Следующий, и последний этап рассмотрения - это рассмотрение игры в целом. Будем выбирать ситуацию равновесия ориентируясь на ситуации равновесия, найденные на предыдущем этапе. Очевидно, максимизировать суммарный выигрыш всех избирателей победа кандидата A. Следовательно, все стратегии игроков, обеспечивающие победу кандидата A будут являться абсолютным равновесием по Нэшу в рассматриваемом примере.

2.2. Кооперативный вариант модели.

Как было рассмотрено выше, в качестве критерия оптимальности при нахождении абсолютного равновесия по Нэшу была использована максимизация общего суммарного выигрыша всех игроков. В данном случае интуитивно следующим встает вопрос о распределении выигрыша между игроками, а так же о том, как совместными усилиями данный выигрыш может быть максимизирован для отдельных групп избирателей.

Для решения данной задачи нам необходимо модифицировать нашу игру при помощи теории кооперативных игр.

Обозначим за $N = 1, \ldots, n$ множество всех игроков. В свою очередь любое множество $S \in N$, являющееся непустым, будем называть *коалицией.*

Определение 5. *Характеристической функцией* для игры n лиц называется вещественная функция V, опеределенная на всех коалициях $S \in N$, кроме того для всех непересекающихся коалиций P и Q (где $P \in N$ и $Q \in N$) справедливо неравенство:

$$V(P) + V(Q) \leq V(P \cup Q),$$

$$V(\varnothing) = 0.$$

Данное свойство будем называть *свойством супераддитивности.* Также из свойства супераддитивности можем сделать вывод, что для любых коалиций $S_1, \ldots, S_k$, имеющих в пересечении пустое множество, имеет место неравенство:

$$\sum_{i=1}^{n} V(S_i) \leq V(N).$$

Определение 6. Пара $< N, V >$ называется кооперативной игрой в форме характеристической функции.

Построим кооперативный вариант описанной выше игры $H(y_i, j)$. Будем считать, что на каждом этапе j игроки выбирают такой набор стратегий $v_j = (v_{j1}^*, \ldots, v_{jn}^*)$, который максимизирует суммарный выигрыш, получаемый всеми игроками на финальном этапе игры:

$$W_N^j = \sum_{i=1}^{n} W_i^j = \max_{v} \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot k^j.$$

Данная ситуация $v = (v_1^*, \ldots, v_n^*)$ будет называться кооперативной ситуацией, соответствующая ей траектория $(y_1^*, \ldots, y_l^*)$ - кооперативная траектория. Следовательно, используя в качестве основы рассмотренную в предыдущем разделе главы игру $H(y_i^*, j)$, мы получим ее кооперативный вариант $H_c(y_1^*, j) =< N, V >$, где V - характеристическая функция.

Существует ряд способов задания характеристической функции, мы рассмотрим два из них.

Первым является классический подход Неймана-Моргенштерна. На протяжении сравнительно долгого периода времени данная методика считалась единственной возможной для задания характеристической функции. Согласно ей, под значением $V(S)$ мы будем рассматривать максимальный гарантированный выигрыш, который коалиция S способна обеспечить для себя. В то же время игроки из коалиции N/S играют против коалиции S, соответственно минимизируя ее выигрыш:

$$V(S) = \begin{cases} 0, \quad if S = \varnothing, \\ \max\limits_{i \in S} \min\limits_{i \in N/S} \quad \sum_{i \in S} v_i, \quad if S \in N, \\ \max\limits_{i \in S} \sum_{i \in S} v_i, \quad if S = N. \end{cases}$$

Помимо построения характеристической функции, важным вопросом, решением которого занимается кооперативная теория игр, является вопрос нахождения оптимальных способов деления выигрыша, полученного каждой из коалиций в результате игры.

Обозначим за a_i сумму, которую получит каждый игрок i в ходе распределения максимального суммарного выигрыша $V(N)$, где $N = 1, 2, \ldots, n$. [3]

Определение 7. Вектор $a = (a_1, \ldots, a_n)$, который удовлетворяет двум условиям:

$$a_i \leq V(i), \quad i \in N,$$
$$\sum_{i=1}^{n} a_i = V(N).$$

называется дележом (здесь $V(i)$ — значение характеристической функции для одноэлементной коалиции $S = (i)$).

Для дальнейшего изучения дележа выигрыша коалиции поставим в соответствие каждой из кооперативных игр вектор $m(V) = (m_1(V), \ldots, m_1(V))$. Его компоненты мы будем интерпретировать как выигрыши, присвоенные игрокам вследствие некоторого соглашения. Также положим, что данное соответствие удовлетворяет трем аксиомам (*аксиомам Шепли*):

1. Если S - любой носитель игры $< N, V >$, то
$$\sum_{i \in S} m_i(V) = V(S).$$
2. Для любой подстановки π и $i \in N$:
$$m_{\pi(i)}[\pi V] = m_i[V].$$
3. Если $< N, V >$ и $< N, U >$ любые две кооперативные игры, то справедливо:
$$m_{(i)}[V + U] = m_i[V] + m_i[U].$$

Определение 8. Пусть m - это функция, которая ставит в соответствие каждой кооперативной игре $< N, V >$ вектор $m[V]$ согласно аксиомам 1—3. В таком случае вектор $m[V]$ будет называться вектором значений или иначе *вектором Шепли.*

Далее будем обозначать вектор Шепли как $Sh = (Sh_1, \ldots, Sh_n)$, где каждая координата соответствует выигрышу, который получает каждый игрок, принимающий участие в игре.

Координаты вектора Шепли рассчитываются по формуле:

$$Sh_i = \sum_{S \supset i} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}(V(S) - V(S/i).$$

Таким образом, будем рассматривать вектор Шепли в качестве принципа оптимальности в нашей игре. Поведение игроков, удовлетворяющее этому принципу оптимальности, будем называть решением игры. Оно обязано удовлетворять двум свойствам: во-первых, быть выполнимым в условиях рассматриваемой игры,и во-вторых, достаточно адекватно отражать понятие оптимальности для данной игры. В многошаговой игре важным становится еще одно условие: реализуемость и значимость данного принципа оптимальности должно быть сохранено в течение всей игры. Данное условие называют *динамической устойчивостью решения игры* [15]. Иными словами, игра развивается вдоль кооперативной траектории, следовательно, игроки в любой момент времени действуют в соответствии с одним и тем же принципом оптимальности, значит, какие-либо основания для того, чтобы уклониться от изначального оптимального поведения, у них отсутствуют. В случае же, если условие динамической устойчивости не выполняется, то в некий момент времени появляются условия, в соответствии с которыми первоначальное поведение перестает быть оптимальным, следовательно, изначально выбранный принцип оптимальности - неисполнимым.

При движении вдоль кооперативной траектории игроки оказываются в подыграх, где текущая вершина становится начальной. В некий момент времени t в игре может сложиться ситуация, при которой оптимальное решение данной игры не будет удовлетворять игроков, или же просто не будет существовать. Следовательно, в данной ситуации у игроков не будет оснований придерживаться изначальной траектории, что и означает динамическую неустойчивость игры в целом.

Для проверки нашей игры на предмет динамической устойчивости будем исследовать рассматриваемый в предыдущем разделе пример вдоль кооперативной траектории. Как было установлено выше, исходом, максимизирующим общий совокупный доход всех игроков, будет победа кандидата с A. Таких исходов в данном примере шесть, следовательно, получим шесть кооперативных траекторий. Начнем с верхнего уровня, то есть с подыгр, берущих свое начало в следующих узлах:

- 3.5
- 3.6
- 3.8
- 3.9
- 3.11
- 3.12

Построим кооперативный вариант подыгры, для которой начальной вершиной является 3.5 с использованием характеристической функции, построенной по правилу Неймана-Моргенштерна. Также важным моментом является то, какое правило голосования будет использовано в каждом из узлов для исключения одного из кандидатов. В данном случае будем использовать аналог голосования относительного большинства: каждый из избирателей голосует за **наименее** импонирующего ему кандидата, затем кандидат, набравший максимальное количество голосов, исключается из избирательной гонки. Кроме того, для удобства расчетов при построении характеристической функции мы будем рассматривать группы избирателей с одинаковыми предпочтениями как одного игрока. Таким образом, в данной игре множество игроков будет состоять из четырех:

$$|N| = 4.$$

В данной подыгре осуществляется выбор между исключением кандидатов A и D.

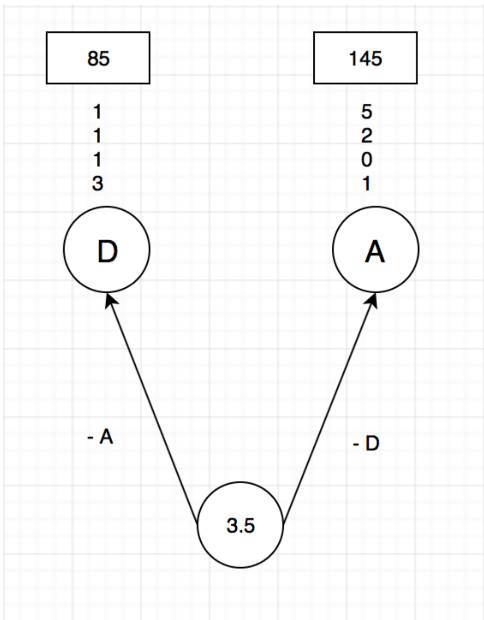

Рис. 4: Дерево подыгры.

Строим характеристическую функцию для данного случая. Начнем с нахождения ее значений для коалиций состоящих из одного игрока V_i.

Рассмотрим $V(1)$. Под игроком номер 1 подразумевается группа избирателей с одинаковыми предпочтениями, состоящая из 20 человек. Следовательно, оставшиеся 35 человек входят в коалицию N/S (которая в терминах рассматриваемой игры состоит из игроков $2-4$) и стремятся минимизировать выигрыш. Так как их подавляющее большинство, их мнение будет решающим. Они проголосуют за исключение кандидата A, так как в данном случае победит кандидат D и выигрыш коалиции $V(1)$ будет равен 20 (значение 20 мы получаем как произведение выигрыша игрока номер 1, который равен 1, на количество человек одинаковыми предпочтениями, которые подразумеваются под данным игроком, т. е. 20 человек).

Аналогичным образом строим значения характеристической функции для оставшихся коалиций, состоящих из одного игрока:

$$V(1) = 20,$$

$$V(2) = 15,$$

$$V(3) = 0,$$

$$V(4) = 15.$$

Более интересным случаем представляется построение значений характеристической функции для коалиций, состоящих из двух игроков, так как в данном случае важную роль будет играть количество реальных голосующих, скрывающихся в данной коалиции и тот факт, являются ли они большинством и, следовательно, способны ли он повлиять на голосование.

Начнем с коалиции $S(1,2)$. По факту, под ней скрывается $20+15=30$ избирателей. Для общего количества избирателей, равного 55 людям, это большинство, следовательно, они смогут максимизировать свой выигрыш вне зависимости от результатов голосования коалиции $V(N/S)$. Максимальным для них будет выигрыш в результате победы кандидата A, который рассчитывается аналогично уже рассмотренному случаю единичных коалиций, т. е. $20 \cdot 5 + 15 \cdot 2 = 130$.

Перейдем к коалиции $S(1, 3)$. Для этой коалиции ситуация не такая благоприятная, так как в сумме под ней скрывается $20 + 5 = 25$ человек. В свою очередь противоборствующая ей коалиция $V(N/S) = V(2, 4)$ включает в себя $15+15 = 30$ избирателей. Следовательно, именно решение коалиции $V(2, 4)$ будет решающим. Так как их задача - минимизировать выигрыш $V(1, 3)$, они проголосуют за исключение кандидата A, что, в свою очередь, приведет к победе кандидата D и выигрышу $V(1, 3)$, равному:

$$V(1, 3) = 20 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 25.$$

Проведем аналогичные процедуры для оставшихся четырех коалиций:

- **S(1,4)**. Рассматриваемая коалиция является большинством ($20 + 15 = 35$ против $15 + 5 = 20$), следовательно, их выбор будет решающим. Максимальный выигрыш им обеспечит исключение кандидата D, ведущее к победе A. Выигрыш коалиции S в данном случае составит:

$$V(1, 4) = 20 \cdot 5 + 15 \cdot 1 = 115.$$

- **S(2,3)**. Рассматриваемая коалиция является меньшинством ($15 + 5 = 20$ против $20 + 15 = 35$), следовательно, выбор их соперников, коалиции $N/S = (1, 4)$ будет решающим. Минимальный выигрыш благодаря усилиям их соперников им обеспечит исключение кандидата A, ведущее к победе D. Выигрыш коалиции S в данном случае составит:

$$VS(2,3) = 15 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 20.$$

- **S(2,4)**. Рассматриваемая коалиция является большинством ($15 + 15 = 30$ против $20 + 5 = 25$), следовательно, их выбор будет решающим. Максимальный выигрыш им обеспечит исключение кандидата A, ведущее к победе D. Выигрыш коалиции S в данном случае составит:

$$VS(2,4) = 15 \cdot 1 + 15 \cdot 3 = 60.$$

- **S(3,4)**. Рассматриваемая коалиция является меньшинством ($5 + 15 = 20$ против $20 + 15 = 35$), следовательно, выбор их соперников, коалиции $N/S = (1,2)$ будет решающим. Минимальный выигрыш благодаря усилиям их соперников им обеспечит исключение кандидата D, ведущее к победе A. Выигрыш коалиции S в данном случае составит:

$$VS(3,4) = 5 \cdot 0 + 15 \cdot 1 = 15.$$

Далее к перейдем к рассмотрению коалиций, состоящих из трех игроков. Для них во всех случаях они будут являться подавляющим большинством голосующих, поэтому результат голосования противоборствующих им коалиций N/S не будет иметь значения.

- **S(1,2,3)**. Максимальный выигрыш для данной коалиции обеспечит исключение кандидата D, ведущее к победе A. Выигрыш коалиции

S в данном случае составит:

$$V(1,2,3) = 20 \cdot 5 + 15 \cdot 2 + 5 \cdot 0 = 130.$$

- **S(1,2,4)**. Максимальный выигрыш для данной коалиции обеспечит исключение кандидата D, ведущее к победе A. Выигрыш коалиции S в данном случае составит:

$$V(1,2,4) = 20 \cdot 5 + 15 \cdot 2 + 15 \cdot 1 = 145.$$

- **S(1,3,4)**. Максимальный выигрыш для данной коалиции обеспечит исключение кандидата D, ведущее к победе A. Выигрыш коалиции S в данном случае составит:

$$V(1,3,4) = 20 \cdot 5 + 5 \cdot 0 + 15 \cdot 1 = 115.$$

- **S(2,3,4)**. Максимальный выигрыш для данной коалиции обеспечит исключение кандидата A, ведущее к победе D. Выигрыш коалиции S в данном случае составит:

$$V(2,3,4) = 15 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 15 \cdot 3 = 65.$$

И в завершении необходимо посчитать значение характеристической функции для коалиции N, состоящей из всех игроков. Как было описано ранее, максимальный суммарный выигрыш обеспечивает победа кандидата A. Следовательно, данная коалиция исключит кандидата D и значение характеристической функции для них будет равно:

$$V(N) = 20 \cdot 5 + 15 \cdot 15 + 5 \cdot 0 + 15 \cdot 1 = 145.$$

Таким образом, кооперативная игра в форме характеристической функции для данной подыгры будет иметь вид:

$$V(1) = 20 \quad V(2) = 15 \quad V(3) = 0 \quad V(4) = 15,$$
$$V(1,2) = 130 \quad V(1,3) = 25 \quad V(1,4) = 115$$
$$V(2,3) = 20 \quad V(2,4) = 60 \quad V(3,4) = 15$$
$$V(1,2,3) = 130 \quad V(1,2,4) = 145 \quad V(1,3,4) = 115$$
$$V(2,3,4) = 65 \quad V(N) = 145.$$

Следующим шагом рассчитаем вектор Шепли для данной игры:

$$Sh_1 = \frac{1}{12} \cdot (115 + 25 + 100) + \frac{1}{12} \cdot (110 + 85 + 100) + \frac{1}{4} \cdot (20 + 80) =$$
$$= \frac{535 + 300}{12} = \frac{835}{12},$$
$$Sh_2 = \frac{1}{12} \cdot (110 + 20 + 45) + \frac{1}{12} \cdot (105 + 30 + 50) + \frac{1}{4} \cdot (30 + 15) =$$
$$= \frac{360 + 135}{12} = \frac{495}{12},$$
$$Sh_3 = \frac{1}{12} \cdot (5 + 5 + 0) + \frac{1}{12} \cdot (0 + 0 + 5) + \frac{1}{4} \cdot (0 + 0) =$$
$$= \frac{15 + 0}{12} = \frac{15}{12},$$
$$Sh_4 = \frac{1}{12} \cdot (95 + 45 + 15) + \frac{1}{12} \cdot (15 + 90 + 15) + \frac{1}{4} \cdot (15 + 15) =$$
$$= \frac{305 + 90}{12} = \frac{395}{12}.$$

Далее рассмотрим оставшиеся вершины аналогичным образом, то есть построим кооперативную игру в форме характеристической функции и рассчитаем соответствующий вектор Шепли:

- **Случай 3.6.** В данном случае выбор совершается между исключением кандидатов A и C. Кооперативная игра в форме характеристической функции в данном случае пример вид:

$$V(1) = 20 \quad V(2) = 30 \quad V(3) = 0 \quad V(4) = 15,$$

$$V(1,2) = 130 \quad V(1,3) = 40 \quad V(1,4) = 115$$

$$V(2,3) = 30 \quad V(2,4) = 75 \quad V(3,4) = 15$$

$$V(1,2,3) = 130 \quad V(1,2,4) = 145 \quad V(1,3,4) = 115$$

$$V(2,3,4) = 95 \quad V(N) = 145.$$

Следующим шагом рассчитываем вектор Шепли:

$$Sh_1 = \frac{1}{12} \cdot (100 + 40 + 100) + \frac{1}{12} \cdot (100 + 70 + 100) + \frac{1}{4} \cdot (50 + 20) =$$
$$= \frac{510 + 210}{12} = \frac{720}{12},$$
$$Sh_2 = \frac{1}{12} \cdot (110 + 30 + 60) + \frac{1}{12} \cdot (90 + 30 + 80) + \frac{1}{4} \cdot (30 + 30) =$$
$$= \frac{400 + 180}{12} = \frac{580}{12},$$
$$Sh_3 = \frac{1}{12} \cdot (20 + 0 + 0) + \frac{1}{12} \cdot (0 + 0 + 20) + \frac{1}{4} \cdot (0 + 0) =$$
$$= \frac{40 + 0}{12} = \frac{40}{12},$$
$$Sh_4 = \frac{1}{12} \cdot (95 + 45 + 15) + \frac{1}{12} \cdot (15 + 75 + 65) + \frac{1}{4} \cdot (15 + 15) =$$
$$= \frac{310 + 90}{12} = \frac{400}{12}.$$

Вектор Шепли данной подыгры имеет вид:

$$Sh = (\frac{720}{12}\ ;\ \ \frac{580}{12}\ ;\ \ \frac{40}{12}\ ;\ \ \frac{400}{12})$$

- **Случай 3.8.** Данный случай аналогичен случаю в вершине **3.5**. Следовательно, вектор Шепли данной подыгры будет иметь вид:

$$Sh = (\frac{835}{12}\ ;\ \ \frac{495}{12}\ ;\ \ \frac{15}{12}\ ;\ \ \frac{395}{12})$$

- **Случай 3.9.** В данном случае выбор совершается между исключением кандидатов A и B. Кооперативная игра в форме характеристической функции в данном случае пример вид:

$$V(1)=0 \quad V(2)=30 \quad V(3)=0 \quad V(4)=15,$$
$$V(1,2)=130 \quad V(1,3)=5 \quad V(1,4)=115$$
$$V(2,3)=30 \quad V(2,4)=105 \quad V(3,4)=15$$
$$V(1,2,3)=130 \quad V(1,2,4)=145 \quad V(1,3,4)=115$$
$$V(2,3,4)=110 \quad V(N)=145.$$

Далее рассчитываем вектор Шепли:

$$Sh_1 = \frac{1}{12}\cdot(100+5+100)+\frac{1}{12}\cdot(100+40+100)+\frac{1}{4}\cdot(35+0)= \\ =\frac{445+105}{12}=\frac{550}{12},$$
$$Sh_2 = \frac{1}{12}\cdot(130+30+90)+\frac{1}{12}\cdot(125+30+95)+\frac{1}{4}\cdot(30+30)= \\ =\frac{500+180}{12}=\frac{680}{12},$$
$$Sh_3 = \frac{1}{12}\cdot(5+0+0)+\frac{1}{12}\cdot(0+0+5)+\frac{1}{4}\cdot(0+0)= \\ =\frac{10+0}{12}=\frac{10}{12},$$
$$Sh_4 = \frac{1}{12}\cdot(115+75+15)+\frac{1}{12}\cdot(15+110+80)+\frac{1}{4}\cdot(15+15)= \\ =\frac{410+90}{12}=\frac{500}{12}.$$

Вектор Шепли данной подыгры имеет вид:

$$Sh=(\frac{550}{12}\,;\ \ \frac{680}{12}\,;\ \ \frac{10}{12}\,;\ \ \frac{500}{12})$$

- **Случай 3.11.** Данный случай аналогичен случаю в вершине **3.6**. Следовательно, вектор Шепли данной подыгры будет иметь вид:

$$Sh=(\frac{720}{12}\,;\ \ \frac{580}{12}\,;\ \ \frac{40}{12}\,;\ \ \frac{400}{12})$$

- **Случай 3.12.** Данный случай аналогичен случаю в вершине **3.9**. Следовательно, вектор Шепли данной подыгры будет иметь вид:

$$Sh = (\frac{550}{12}\,;\ \ \frac{680}{12}\,;\ \ \frac{10}{12}\,;\ \ \frac{500}{12})$$

Таким образом, мы рассмотрели все узлы на кооперативной траектории, принадлежащие самой верхней части графа. Далее продолжим рассмотрение, спустившись на уровень ниже. В свою очередь там уже кооперативная траектория проходит через три узла: 2.2, 2.3 и 2.4.

Начнем с узла 2.2. В данной на первом уровне осуществляется выбор между исключением кандидатов A, C или D, а затем между исключением кандидатов A или C и A или D. Построим кооперативную игру для данного случая при помощи характеристической функции Неймана-Моргенштерна.

Аналогично предыдущим случаям первоначально рассмотрим коалиции, состоящие из одного игрока. В всех случаях решение коалиций N/S будет решающим, так как их число будет большим. Следовательно, мы будем искать минимальное значение выигрыша для коалиций S,так как именно эта минимизация и является основной стратегией N/S. Для коалиции $V(1)$ таким результатом будет выигрыш равный 20, который является следствием исключения кандидата D на первом этапе подыгры и кандидата A на втором этапе (либо аналогичного исключения C, а затем A, так как в данных ситуациях выигрыш коалиции $V(1)$ одинаков). Таким же образом рассмотрим оставшиеся коалиции, состоящие из одного игрока, получим следующие значения характеристической функции:

$$V(1) = 20,$$

$$V(2) = 15,$$

$$V(3) = 0,$$

$$V(4) = 15.$$

Далее переходим к оставшимся коалициям. В них мы также действуем аналогично подыграм, состоящим из одного уровня, т.е. результат от зависит исключительно от количества избирателей в коалициях S и N/S. Проведя необходимые расчеты, получим следующую игру:

$$V(1) = 20 \quad V(2) = 15 \quad V(3) = 0 \quad V(4) = 15,$$

$$V(1,2) = 130 \quad V(1,3) = 25 \quad V(1,4) = 115$$

$$V(2,3) = 20 \quad V(2,4) = 75 \quad V(3,4) = 15$$

$$V(1,2,3) = 130 \quad V(1,2,4) = 145 \quad V(1,3,4) = 115$$

$$V(2,3,4) = 95 \quad V(N) = 145.$$

Следующим этапом будем рассчитывать вектор Шепли для данной игры:

$$Sh_1 = \frac{1}{12} \cdot (115 + 25 + 100) + \frac{1}{12} \cdot (110 + 70 + 100) + \frac{1}{4} \cdot (20 + 50) =$$
$$= \frac{520 + 210}{12} = \frac{730}{12},$$
$$Sh_2 = \frac{1}{12} \cdot (110 + 20 + 60) + \frac{1}{12} \cdot (105 + 30 + 80) + \frac{1}{4} \cdot (15 + 30) =$$
$$= \frac{405 + 135}{12} = \frac{540}{12},$$
$$Sh_3 = \frac{1}{12} \cdot (5 + 5 + 0) + \frac{1}{12} \cdot (0 + 0 + 20) + \frac{1}{4} \cdot (0 + 0) =$$
$$= \frac{30 + 0}{12} = \frac{30}{12},$$

$$Sh_4 = \frac{1}{12} \cdot (95 + 60 + 15) + \frac{1}{12} \cdot (15 + 90 + 75) + \frac{1}{4} \cdot (15 + 15) =$$
$$= \frac{355 + 90}{12} = \frac{440}{12}.$$

Таким образом, вектор Шепли данной подыгры примет вид:

$$Sh = (\frac{730}{12}\ ; \quad \frac{540}{12}\ ; \quad \frac{30}{12}\ ; \quad \frac{440}{12})$$

Далее рассмотрим подыгру, берущую свое начало в узле 2.3. В данной подыгре решается вопрос о последовательном исключении кандидатов B и D, либо D и B (так как победа кандидата A все еще остается оптимальным исходом с точки зрения максимизации общего группового выигрыша).

Кооперативная игры в форме характеристической функции в данном случае примет вид:

$$V(1) = 0 \quad V(2) = 15 \quad V(3) = 0 \quad V(4) = 15,$$
$$V(1,2) = 130 \quad V(1,3) = 5 \quad V(1,4) = 115$$
$$V(2,3) = 20 \quad V(2,4) = 105 \quad V(3,4) = 15$$
$$V(1,2,3) = 130 \quad V(1,2,4) = 145 \quad V(1,3,4) = 115$$
$$V(2,3,4) = 110 \quad V(N) = 145.$$

Следующим шагом рассчитаем вектор Шепли для данной игры:

$$Sh_1 = \frac{1}{12} \cdot (115 + 5 + 100) + \frac{1}{12} \cdot (110 + 40 + 100) + \frac{1}{4} \cdot (35 + 0) =$$
$$= \frac{470 + 105}{12} = \frac{575}{12},$$
$$Sh_2 = \frac{1}{12} \cdot (130 + 20 + 90) + \frac{1}{12} \cdot (125 + 30 + 95) + \frac{1}{4} \cdot (30 + 15) =$$
$$= \frac{490 + 135}{12} = \frac{625}{12},$$
$$Sh_3 = \frac{1}{12} \cdot (5 + 5 + 0) + \frac{1}{12} \cdot (0 + 0 + 5) + \frac{1}{4} \cdot (0 + 0) =$$

$$= \frac{15+0}{12} = \frac{15}{12},$$

$$Sh_4 = \frac{1}{12} \cdot (115+90+15) + \frac{1}{12} \cdot (15+110+90) + \frac{1}{4} \cdot (15+15) =$$

$$= \frac{435+90}{12} = \frac{525}{12}.$$

Вектор Шепли будет иметь вид:

$$Sh = (\frac{575}{12}\ ; \quad \frac{625}{12}\ ; \quad \frac{15}{12}\ ; \quad \frac{525}{12})$$

Далее в данной группе подыгр нам остается рассмотреть еще только одну, берущую начало в вершине 2.4. Здесь голосующими принимается решение о последовательным исключении либо кандидатов B и C, либо C и B. Построенная кооперативная игра будет вид:

$$V(1) = 0 \quad V(2) = 30 \quad V(3) = 0 \quad V(4) = 15,$$

$$V(1,2) = 130 \quad V(1,3) = 5 \quad V(1,4) = 115$$

$$V(2,3) = 30 \quad V(2,4) = 105 \quad V(3,4) = 15$$

$$V(1,2,3) = 130 \quad V(1,2,4) = 145 \quad V(1,3,4) = 115$$

$$V(2,3,4) = 110 \quad V(N) = 145.$$

Из значений характеристической функции видно, что данная подыгра совпадает игрой из узла 3.12, которая в свою очередь является ее подыгрой. Следовательно, и вектор Шепли для них будет одинаков и будет иметь вид:

$$Sh = (\frac{550}{12}\ ; \quad \frac{680}{12}\ ; \quad \frac{10}{12}\ ; \quad \frac{500}{12})$$

Теперь мы вновь сдвигаемся на уровень ниже в дереве решений и приходим в исходную вершину. В данной ситуации под угрозой исключения находятся три кандидата B, C и D, а победа A так и остается оптимальным вариантом. Аналогично всем предыдущим случаям, строим кооперативную игру в форме характеристической функции по правилу Неймана-Моргенштерна, она будет иметь вид:

$$V(1) = 0 \quad V(2) = 15 \quad V(3) = 0 \quad V(4) = 15,$$

$$V(1,2) = 130 \quad V(1,3) = 5 \quad V(1,4) = 115$$

$$V(2,3) = 20 \quad V(2,4) = 105 \quad V(3,4) = 15$$

$$V(1,2,3) = 130 \quad V(1,2,4) = 145 \quad V(1,3,4) = 115$$

$$V(2,3,4) = 110 \quad V(N) = 145.$$

Можно сделать вывод о том, что данная игра совпадает с своей подыгрой, берущей начало в узле 2.3, и вектор Шепли примет вид: Вектор Шепли будет иметь вид:

$$Sh = (\frac{575}{12}\ ; \quad \frac{625}{12}\ ; \quad \frac{15}{12}\ ; \quad \frac{525}{12})$$

Проанализируем полученные результаты. Вдоль кооперативных траекторий 1.1 - 2.3 - 3.8 и 1.1 - 2.3 - 3.9 решение игры не является одинаковым в каждой из рассматриваемой подыгр. В частности, сравним значения компонент вектора Шепли в подыграх, берущих начало в вершинах 3.8 и 2.3:

$$\beta_1 = Sh_1^{(2.3)} - Sh_1^{(3.8)} = \frac{575}{12} - \frac{835}{12} = -\frac{260}{12};$$
$$\beta_2 = Sh_2^{(2.3)} - Sh_2^{(3.8)} = \frac{625}{12} - \frac{495}{12} = \frac{130}{12};$$
$$\beta_3 = Sh_3^{(2.3)} - Sh_3^{(3.8)} = \frac{15}{12} - \frac{15}{12} = 0;$$
$$\beta_4 = Sh_4^{(2.3)} - Sh_4^{(3.8)} = \frac{525}{12} - \frac{395}{12} = \frac{130}{12}.$$

Ненулевые значения β_i говорят о том, что вектор Шепли в данной игре **не является** динамически устойчивым.

Метод Неймана-Моргенштерна не является единственной методикой задания характеристической функции при построении кооперативной игры, существует ряд подобных методик. Для сравнения в качестве второй методики построения характеристической функции мы обратимся к ζ— характеристической функции [17] . Для этого, как и ранее, в качестве критерия оптимальности будем расценивать максимизацию общего выигрыша всех игроков—избирателей. Соответственно, как было описано выше, $v_j = (v^*_{j1}, \ldots, v^*_{jn})$ - это набор стратегий, позволяющий получить максимальный выигрыш. Будем считать, что игроки из коалиции S придерживаются данной оптимальной стратегии, а в это время коалиция N/S старается минимизировать их выигрыш соответственно:

$$V(S) = \begin{cases} 0, \quad if\ S = \varnothing, \\ \inf\limits_{\substack{v_i = v_i^* if i \in S \\ v_i if i \in N/S}} \sum_{i \in S} W_i(v^*_S, v_{N/S}), \quad if\ S \in N, \\ \max\limits_{v_1, \ldots, v_n} \sum_{i=1}^{n} W_i(v_1, \ldots, v_n), \quad if\ S = N. \end{cases}$$

Основными преимуществами данной методики задания характеристической функции является более облегченный процесс вычисления, по сравнению с методом Неймана—Моргенштерна, а также тот факт, что в общем случае она удовлетворяет свойству супераддитивности.

Вернемся к нашему примеру. Будем действовать аналогично случаю с методикой Неймана—Моргенштерна: исследуем вектор Шепли на предмет динамической устойчивости вдоль кооперативной траектории и начнем с рассмотрения подыгр, берущих начало в узлах 3.5, 3.6, 3.8, 3.9, 3.11 и 3.12. Также будем считать, что голосование проводится по правилу относительного большинства, то есть основную роль в значимости решения коалиции будет играть число избирателей в ней.

Первым рассмотрим узел 3.5. Здесь выбор осуществляется между исключением кандидатов A и D. Все коалиции, состоящие из одного игрока несомненно остаются в меньшинстве, поэтому их выигрыш будет равен минимально возможному. Касательно оставшихся коалиции, в случае, когда число реальных избирателей, скрывающихся в данной коалиции, является подавляющим большинством, коалиция получит выигрыш, гарантируемый ей изначально определенной оптимальной кооперативной траекторией. В противном случае их выигрыш также будет равен минимально возможному значению. Придерживаясь данных правил, получим следующую кооперативную игру в форме ζ—характеристической функции:

$$
\begin{aligned}
&V(1) = 20 \quad V(2) = 15 \quad V(3) = 0 \quad V(4) = 15,\\
&V(1,2) = 130 \quad V(1,3) = 25 \quad V(1,4) = 115\\
&V(2,3) = 20 \quad V(2,4) = 45 \quad V(3,4) = 15\\
&V(1,2,3) = 130 \quad V(1,2,4) = 145 \quad V(1,3,4) = 115\\
&V(2,3,4) = 45 \quad V(N) = 145.
\end{aligned}
$$

Вычислим вектор Шепли данной подыгры:

$$
Sh_1 = \frac{1}{12} \cdot (115 + 25 + 100) + \frac{1}{12} \cdot (110 + 100 + 100) + \frac{1}{4} \cdot (20 + 100) =
$$
$$
= \frac{550 + 360}{12} = \frac{910}{12},
$$
$$
Sh_2 = \frac{1}{12} \cdot (110 + 20 + 30) + \frac{1}{12} \cdot (105 + 30 + 30) + \frac{1}{4} \cdot (15 + 30) =
$$
$$
= \frac{325 + 135}{12} = \frac{460}{12},
$$
$$
Sh_3 = \frac{1}{12} \cdot (5 + 5 + 0) + \frac{1}{12} \cdot (0 + 0 + 0) + \frac{1}{4} \cdot (0 + 0) =
$$
$$
= \frac{10 + 0}{12} = \frac{10}{12},
$$
$$
Sh_4 = \frac{1}{12} \cdot (95 + 30 + 15) + \frac{1}{12} \cdot (15 + 90 + 25) + \frac{1}{4} \cdot (15 + 15) =
$$
$$
= \frac{270 + 90}{12} = \frac{360}{12}.
$$

Вектор Шепли примет вид:

$$Sh = (\frac{910}{12}\ ; \quad \frac{460}{12}\ ; \quad \frac{10}{12}\ ; \quad \frac{360}{12})$$

Далее проведем аналогичные процедуры для подыгр, берущих начало в пяти оставшихся на данном уровне кооперативной траектории вершинах:

- **Случай 3.6.** В данном случае выбор совершается между исключением кандидатов A и C. Кооперативная игра в форме характеристической функции в данном случае пример вид:

$$V(1) = 20 \quad V(2) = 30 \quad V(3) = 0 \quad V(4) = 15,$$
$$V(1,2) = 130 \quad V(1,3) = 40 \quad V(1,4) = 115$$
$$V(2,3) = 30 \quad V(2,4) = 45 \quad V(3,4) = 15$$
$$V(1,2,3) = 130 \quad V(1,2,4) = 145 \quad V(1,3,4) = 115$$
$$V(2,3,4) = 45 \quad V(N) = 145.$$

Следующим шагом рассчитываем вектор Шепли:

$$Sh_1 = \frac{1}{12}\cdot(100+40+100) + \frac{1}{12}\cdot(100+100+100) + \frac{1}{4}\cdot(20+100) =$$
$$= \frac{540+360}{12} = \frac{900}{12},$$
$$Sh_2 = \frac{1}{12}\cdot(110+30+30) + \frac{1}{12}\cdot(90+30+30) + \frac{1}{4}\cdot(30+30) =$$
$$= \frac{320+180}{12} = \frac{500}{12},$$
$$Sh_3 = \frac{1}{12}\cdot(20+0+0) + \frac{1}{12}\cdot(0+0+0) + \frac{1}{4}\cdot(0+0) =$$
$$= \frac{20+0}{12} = \frac{20}{12},$$
$$Sh_4 = \frac{1}{12}\cdot(95+15+15) + \frac{1}{12}\cdot(15+75+15) + \frac{1}{4}\cdot(15+15) =$$

$$= \frac{230+90}{12} = \frac{320}{12}.$$

Вектор Шепли данной подыгры имеет вид:

$$Sh = (\frac{900}{12}\ ; \ \ \frac{500}{12}\ ; \ \ \frac{20}{12}\ ; \ \ \frac{320}{12})$$

- **Случай 3.8.** Данный случай аналогичен случаю в вершине **3.5**. Следовательно, вектор Шепли данной подыгры будет иметь вид:

$$Sh = (\frac{910}{12}\ ; \ \ \frac{460}{12}\ ; \ \ \frac{10}{12}\ ; \ \ \frac{360}{12})$$

- **Случай 3.9.** В данном случае выбор совершается между исключением кандидатов A и B. Кооперативная игра в форме характеристической функции в данном случае пример вид:

$$V(1) = 0 \quad V(2) = 30 \quad V(3) = 0 \quad V(4) = 15,$$
$$V(1,2) = 130 \quad V(1,3) = 5 \quad V(1,4) = 115$$
$$V(2,3) = 30 \quad V(2,4) = 45 \quad V(3,4) = 15$$
$$V(1,2,3) = 130 \quad V(1,2,4) = 145 \quad V(1,3,4) = 115$$
$$V(2,3,4) = 45 \quad V(N) = 145.$$

Далее рассчитываем вектор Шепли:

$$Sh_1 = \frac{1}{12} \cdot (100+5+100) + \frac{1}{12} \cdot (100+100+100) + \frac{1}{4} \cdot (0+100) =$$
$$= \frac{505+300}{12} = \frac{805}{12},$$
$$Sh_2 = \frac{1}{12} \cdot (130+30+30) + \frac{1}{12} \cdot (125+30+30) + \frac{1}{4} \cdot (30+30) =$$
$$= \frac{375+180}{12} = \frac{555}{12},$$
$$Sh_3 = \frac{1}{12} \cdot (5+0+0) + \frac{1}{12} \cdot (0+0+0) + \frac{1}{4} \cdot (0+0) =$$

$$= \frac{5+0}{12} = \frac{5}{12},$$

$$Sh_4 = \frac{1}{12} \cdot (115+15+15) + \frac{1}{12} \cdot (15+110+15) + \frac{1}{4} \cdot (15+15) =$$

$$= \frac{285+90}{12} = \frac{375}{12}.$$

Вектор Шепли данной подыгры имеет вид:

$$Sh = (\frac{805}{12}\ ;\ \ \frac{555}{12}\ ;\ \ \frac{5}{12}\ ;\ \ \frac{375}{12})$$

- **Случай 3.11.** Данный случай аналогичен случаю в вершине **3.6**. Следовательно, вектор Шепли данной подыгры будет иметь вид:

$$Sh = (\frac{900}{12}\ ;\ \ \frac{500}{12}\ ;\ \ \frac{20}{12}\ ;\ \ \frac{320}{12})$$

- **Случай 3.12.** Данный случай аналогичен случаю в вершине **3.9**. Следовательно, вектор Шепли данной подыгры будет иметь вид:

$$Sh = (\frac{805}{12}\ ;\ \ \frac{555}{12}\ ;\ \ \frac{5}{12}\ ;\ \ \frac{375}{12})$$

Продолжим рассмотрение, спустившись на уровень ниже нашем дереве исходов. Необходимо построить кооперативную игру для подыгр, берущих начало в трех вершинах, через которые проходит кооперативная траектория: 2.2, 2.3 и 2.4. При построении действуем аналогично процедурам на предыдущем уровне рассмотрения:

- **Случай 2.2.** В данном случае выбор совершается между последовательным исключением кандидатов D и C или C и D (так как победа A дает нам максимальный суммарный доход всех игроков). Кооперативная игра в форме характеристической функции в данном случае пример вид:

$$V(1) = 20 \quad V(2) = 15 \quad V(3) = 0 \quad V(4) = 15,$$
$$V(1,2) = 130 \quad V(1,3) = 25 \quad V(1,4) = 115$$
$$V(2,3) = 20 \quad V(2,4) = 45 \quad V(3,4) = 15$$
$$V(1,2,3) = 130 \quad V(1,2,4) = 145 \quad V(1,3,4) = 115$$
$$V(2,3,4) = 45 \quad V(N) = 145.$$

По значениям нашей ζ—характеристической функции мы видим, что данная кооперативная игра совпадает с построенной в случае узла 3.5 на предыдущем уровне. Следовательно, вектор Шепли данной подыгры имеет вид:

$$Sh = (\frac{910}{12}\ ;\ \ \frac{460}{12}\ ;\ \ \frac{10}{12}\ ;\ \ \frac{360}{12})$$

- **Случай 2.3.** В данном случае выбор совершается между исключением кандидатов D и B или B и D. Кооперативная игра в форме характеристической функции в данном случае пример вид:

$$V(1) = 0 \quad V(2) = 15 \quad V(3) = 0 \quad V(4) = 15,$$
$$V(1,2) = 130 \quad V(1,3) = 5 \quad V(1,4) = 115$$
$$V(2,3) = 20 \quad V(2,4) = 45 \quad V(3,4) = 15$$
$$V(1,2,3) = 130 \quad V(1,2,4) = 145 \quad V(1,3,4) = 115$$
$$V(2,3,4) = 45 \quad V(N) = 145.$$

Рассчитаем вектор Шепли:

$$Sh_1 = \frac{1}{12} \cdot (115 + 5 + 100) + \frac{1}{12} \cdot (110 + 100 + 100) + \frac{1}{4} \cdot (0 + 100) =$$
$$= \frac{530 + 300}{12} = \frac{830}{12},$$

$$Sh_2 = \frac{1}{12} \cdot (130 + 20 + 30) + \frac{1}{12} \cdot (125 + 30 + 30) + \frac{1}{4} \cdot (15 + 30) =$$
$$= \frac{365 + 135}{12} = \frac{500}{12},$$
$$Sh_3 = \frac{1}{12} \cdot (5 + 5 + 0) + \frac{1}{12} \cdot (0 + 0 + 0) + \frac{1}{4} \cdot (0 + 0) =$$
$$= \frac{10 + 0}{12} = \frac{10}{12},$$
$$Sh_4 = \frac{1}{12} \cdot (115 + 30 + 15) + \frac{1}{12} \cdot (15 + 110 + 25) + \frac{1}{4} \cdot (15 + 15) =$$
$$= \frac{310 + 90}{12} = \frac{400}{12}.$$

Вектор Шепли данной подыгры имеет вид:

$$Sh = (\frac{830}{12}\ ;\ \ \frac{500}{12}\ ;\ \ \frac{10}{12}\ ;\ \ \frac{400}{12})$$

- **Случай 2.4.** В данном случае выбор совершается между последовательным исключением кандидатов B и C или C и B. Кооперативная игра в форме характеристической функции в данном случае пример вид:

$$V(1) = 0 \quad V(2) = 30 \quad V(3) = 0 \quad V(4) = 15,$$
$$V(1,2) = 130 \quad V(1,3) = 5 \quad V(1,4) = 115$$
$$V(2,3) = 30 \quad V(2,4) = 45 \quad V(3,4) = 15$$
$$V(1,2,3) = 130 \quad V(1,2,4) = 145 \quad V(1,3,4) = 115$$
$$V(2,3,4) = 45 \quad V(N) = 145.$$

По значениям характеристической функции мы видим, что данная кооперативная игра совпадает с построенной в случае узла 3.9 на предыдущем уровне. Следовательно, вектор Шепли данной подыгры имеет вид:

$$Sh = (\frac{805}{12}\ ;\ \ \frac{555}{12}\ ;\ \ \frac{5}{12}\ ;\ \ \frac{375}{12})$$

Осталось лишь рассмотреть игру, берущую начало в исходном узле кооперативной траектории. Для нее ζ—характеристическая функция будет принимать следующие значения:

$$V(1) = 0 \quad V(2) = 15 \quad V(3) = 0 \quad V(4) = 15,$$
$$V(1,2) = 130 \quad V(1,3) = 5 \quad V(1,4) = 115$$
$$V(2,3) = 20 \quad V(2,4) = 45 \quad V(3,4) = 15$$
$$V(1,2,3) = 130 \quad V(1,2,4) = 145 \quad V(1,3,4) = 115$$
$$V(2,3,4) = 45 \quad V(N) = 145.$$

Как мы видим, данная игру совпадает с подыгрой 2.3, соответственно, вектора Шепли для них будут идентичны:

$$Sh = (\frac{830}{12};\ \ \frac{500}{12};\ \ \frac{10}{12};\ \ \frac{400}{12})$$

Сделаем выводы из полученных выше результатов. Аналогично примеру с построением характеристической функции по методике Неймана-Моргенштерна, значения компонент вектора Шепли вдоль кооперативных траекторий 1.1 - 2.3 - 3.8 и 1.1 - 2.3 - 3.9 не является одинаковыми в каждой из рассматриваемой подыгр. Для подтверждения сравним значения компонент вектора Шепли в подыграх, берущих начало в вершинах 3.9 и 2.3:

$$\beta_1 = Sh_1^{(2.3)} - Sh_1^{(3.9)} = \frac{830}{12} - \frac{805}{12} = \frac{25}{12};$$
$$\beta_2 = Sh_2^{(2.3)} - Sh_2^{(3.9)} = \frac{500}{12} - \frac{555}{12} = -\frac{55}{12};$$
$$\beta_3 = Sh_3^{(2.3)} - Sh_3^{(3.9)} = \frac{10}{12} - \frac{5}{12} = \frac{5}{12};$$
$$\beta_4 = Sh_4^{(2.3)} - Sh_4^{(3.9)} = \frac{400}{12} - \frac{375}{12} = \frac{25}{12}.$$

Значения β_i, не равные нулю, говорят о том, что вектор Шепли в данной игре **не является** динамически устойчивым.

Преобразуем нашу игру следующим образом: теперь игроки будут получать выигрыш на каждой стадии игры. Данный подход можно интерпретировать как отображение степени удовлетворенности голосующих на данном этапе игры, то, насколько им импонирует множество потенциально возможных в рассматриваемый момент времени исходов. В этом случае выигрыш игрока будет вычисляться как сумма всех выигрышей в узлах вдоль траектории, деленных на соответствующее число потенциальных последующих исходов в данной вершине.

Рассмотрим описанный процесс на примере рассматриваемой нами выше задачи. Строим дерево решений аналогично методологии, описанной в разделе 2.1. Различие заключается в том, что вектора выигрышей, получаемых игроками на финальной стадии игры, мы считаем как сумму всех выигрышей, расположенных вдоль рассматриваемой траектории. Таким образом получим дерево, изображенное на рис. 5.

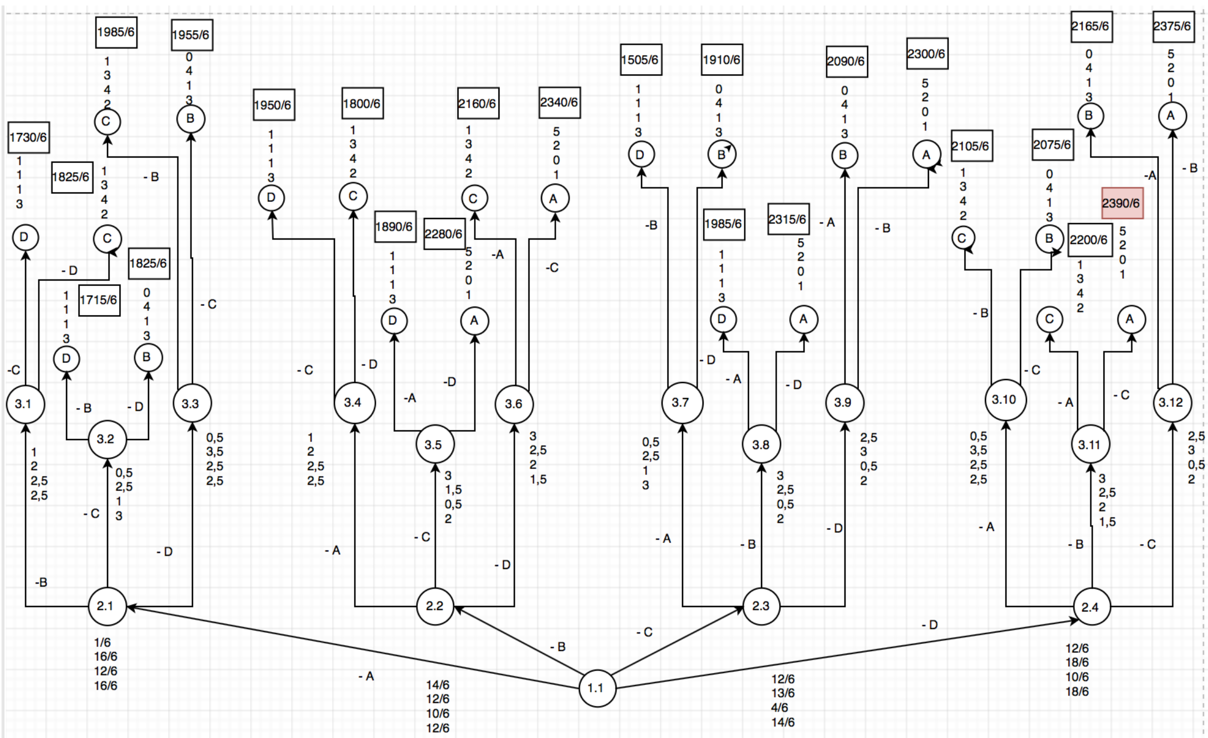

Рис. 5: Дерево игры

Как видно, в данной ситуации кооперативная траектория будет включать в себя только один исход: получаемый в результате последовательного исключения кандидатов D, B и C. В таком случае суммарный выигрыш все избирателей будет равен $\frac{2390}{6}$.

Следующим этапом изучим игру вдоль кооперативной траектории и, взяв в качестве критерия оптимальности вектор Шепли, проверим его на предмет динамической устойчивости. Начнем рассмотрение с верней подыгры, начальным узлом которой является вершина 3.11. В данном случае игра будет совпадать уже рассмотренной выше и, следовательно, вектор Шепли будет равен:

$$Sh = (\frac{900}{12}\ ;\ \ \frac{500}{12}\ ;\ \ \frac{20}{12}\ ;\ \ \frac{320}{12})$$

Спустимся на уровень ниже, рассматриваемое дерево игры изображено на рис.6.

Финальные выигрыши в данном случае равны сумме двух векторов в каждом исходе вдоль каждой траектории. Построим игру в форме характеристической функции, она будет иметь вид:

$$V(1) = 10 \quad V(2) = 67,5 \quad V(3) = 2,5 \quad V(4) = 37,5,$$

$$V(1,2) = 227,5 \quad V(1,3) = 62,5 \quad V(1,4) = 197,5$$

$$V(2,3) = 77,5 \quad V(2,4) = 195 \quad V(3,4) = 47,5$$

$$V(1,2,3) = 237,5 \quad V(1,2,4) = 270 \quad V(1,3,4) = 207,5$$

$$V(2,3,4) = 212,5 \quad V(N) = 275.$$

Рассчитываем вектор Шепли для данной игры:

$$Sh_1 = \frac{1}{12}\cdot(160+60+160) + \frac{1}{12}\cdot(160+75+160) + \frac{1}{4}\cdot(62,5+10) =$$
$$= \frac{775+217,5}{12} = \frac{1985}{24},$$

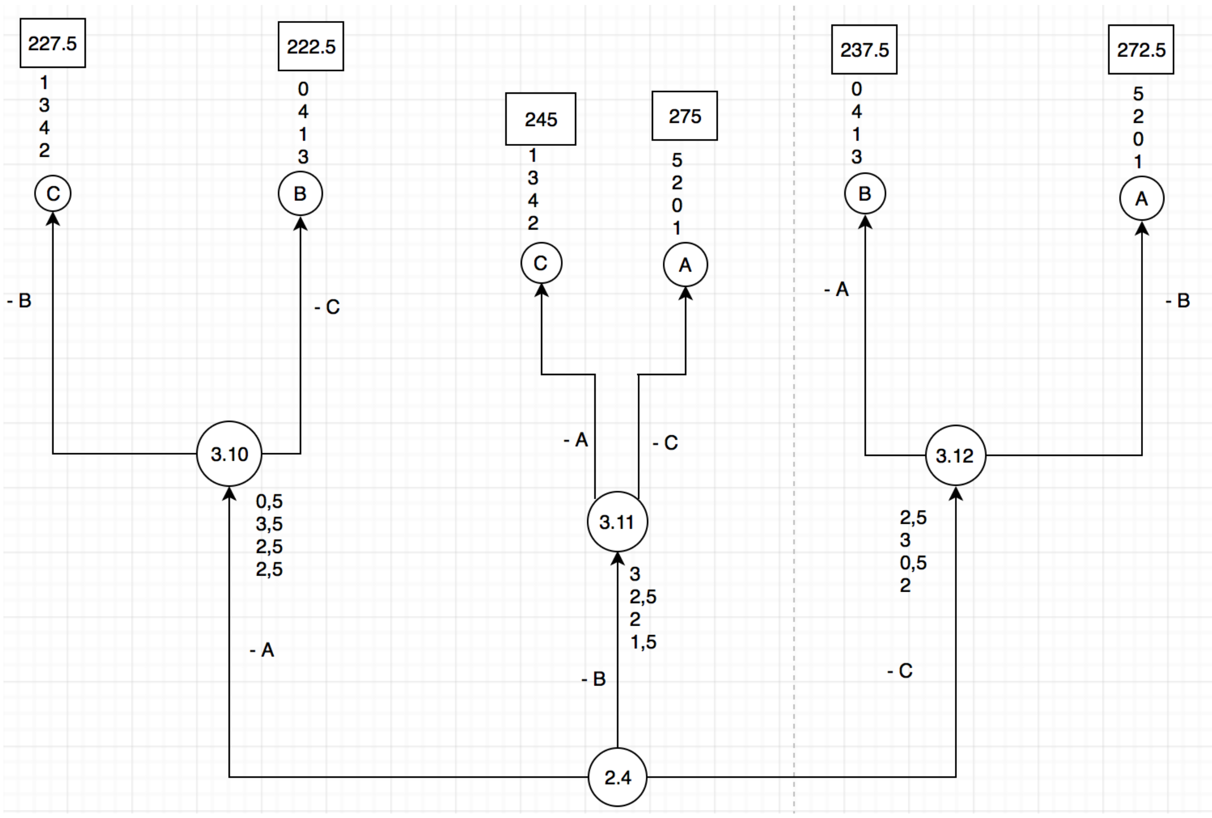

Рис. 6: Дерево подыгры

$$Sh_2 = \frac{1}{12} \cdot (217,5 + 75 + 157,5) + \frac{1}{12} \cdot (175 + 72,5 + 165) + \frac{1}{4} \cdot (67,5 + 67,5) =$$

$$= \frac{862,5 + 405}{12} = \frac{2535}{24},$$

$$Sh_3 = \frac{1}{12} \cdot (52,5 + 10 + 10) + \frac{1}{12} \cdot (10 + 10 + 17,5) + \frac{1}{4} \cdot (2,5 + 5) =$$

$$= \frac{110 + 22,5}{12} = \frac{265}{12},$$

$$Sh_4 = \frac{1}{12} \cdot (187,5 + 127,5 + 45) + \frac{1}{12} \cdot (42,5 + 145 + 135) + \frac{1}{4} \cdot (37,5 + 37,5) =$$

$$= \frac{310 + 90}{12} = \frac{1815}{24}.$$

Вектор Шепли рассматриваемой подыгры имеет вид:

$$Sh = (\frac{1985}{24}\ ;\ \ \frac{2535}{24}\ ;\ \ \frac{265}{12}\ ;\ \ \frac{1815}{24})$$

И последним этапом рассмотрим игру в целом и построим ее кооперативный вариант:

$$V(1)=\frac{140}{6}\quad V(2)=\frac{405}{6}\quad V(3)=\frac{35}{6}\quad V(4)=\frac{405}{6},$$
$$V(1,2)=\frac{1875}{6}\quad V(1,3)=\frac{260}{6}\quad V(1,4)=\frac{1645}{6}$$
$$V(2,3)=\frac{500}{6}\quad V(2,4)=275\quad V(3,4)=\frac{515}{6}$$
$$V(1,2,3)=\frac{1985}{6}\quad V(1,2,4)=380\quad V(1,3,4)=\frac{1715}{6}$$
$$V(2,3,4)=\frac{1815}{6}\quad V(N)=\frac{2390}{6}.$$

Рассчитываем вектор Шепли для данной игры:

$$Sh_1=\frac{1}{12}(\frac{1470}{12}+\frac{225}{12}+\frac{1240}{12})+\frac{1}{12}(\frac{1485}{12}+105+\frac{1200}{12})+\frac{1}{4}(\frac{140}{6}+\frac{575}{6})=$$
$$=(\frac{6250}{6}+\frac{2145}{6})/12=\frac{8395}{72},$$
$$Sh_2=\frac{1}{12}(\frac{1735}{6}+\frac{465}{6}+\frac{1245}{6})+\frac{1}{12}(\frac{1725}{6}+\frac{635}{6}+\frac{1300}{6})+\frac{1}{4}(\frac{405}{6}+\frac{675}{6})=$$
$$=(\frac{7105}{6}+\frac{3240}{6})/12=\frac{10345}{72},$$
$$Sh_3=\frac{1}{12}(\frac{120}{6}+\frac{95}{6}+\frac{110}{6})+\frac{1}{12}(\frac{110}{6}+\frac{70}{6}+\frac{165}{6})+\frac{1}{4}(\frac{35}{6}+\frac{110}{6})=$$
$$=(\frac{670}{6}+\frac{435}{6})/12=\frac{1105}{72},$$
$$Sh_4=\frac{1}{12}(\frac{1505}{6}+\frac{1245}{6}+\frac{480}{6})+\frac{1}{12}(\frac{405}{6}+\frac{1455}{6}+\frac{1315}{6})+\frac{1}{4}(\frac{405}{6}+\frac{405}{6})=$$
$$=(\frac{6405}{6}+\frac{2430}{6})/12=\frac{8835}{72},$$

Таким образом, вектор Шепли всей игры имеет вид:

$$Sh=(\frac{8395}{72}\ ;\ \frac{10345}{72}\ ;\ \frac{1105}{72}\ ;\ \frac{8835}{72})$$

Сформулируем выводы относительно динамической устойчивости решения. В данном случае в игре существует одна кооперативная траектория 1.1 - 2.4 - 3.11. В первую очередь сравним значения координат вектора Шепли для подыгр, берущих начало в 3.11 и 2.4:

$$\beta_1 = Sh_1^{(2.4)} - Sh_1^{(3.11)} = \frac{1985}{24} - \frac{900}{12} = \frac{185}{24};$$
$$\beta_2 = Sh_2^{(2.4)} - Sh_2^{(3.11)} = \frac{2535}{24} - \frac{500}{12} = -\frac{1535}{24};$$
$$\beta_3 = Sh_3^{(2.4)} - Sh_3^{(3.11)} = \frac{265}{24} - \frac{20}{12} = \frac{225}{24};$$
$$\beta_4 = Sh_4^{(2.4)} - Sh_4^{(3.11)} = \frac{1815}{24} - \frac{320}{12} = \frac{1175}{24}.$$

Из полученных значений β_i видно, что они не совпадают с значениями вектора выигрышей $(2.5, 3, 0.5, 2)$, добавляемого при переходе из подыгры 3.11 в подыгру 2.4.

Аналогичная ситуация складывается при рассмотрении подыгры 2.4 и всей игры в целом:

$$\beta_1 = Sh_1^{(1.1)} - Sh_1^{(2.4)} = \frac{8395}{72} - \frac{1985}{24} = \frac{305}{9};$$
$$\beta_2 = Sh_2^{(1.1)} - Sh_2^{(2.4)} = \frac{10345}{72} - \frac{2535}{24} = -\frac{685}{18};$$
$$\beta_3 = Sh_3^{(1.1)} - Sh_3^{(2.4)} = \frac{1105}{72} - \frac{265}{24} = \frac{155}{36};$$
$$\beta_4 = Sh_4^{(1.1)} - Sh_4^{(2.4)} = \frac{8835}{72} - \frac{1815}{24} = \frac{565}{12}.$$

В обеих ситуация значения β_i, не равные компонентам векторов выигрышей, добавляемым к рассматриваемым при переходе на следующий шаг игры, говорят о том, что вектор Шепли в данной игре **не является** динамически устойчивым.

Заключение

В ходе работы была построена многошаговая игра, моделирующая процесс голосования с последовательным исключением кандидатов. Далее игра была исследована вдоль кооперативной траектории, был построен ее кооперативный вариант в форме характеристической функции с использованием ζ—характеристической функции и функции, построенной по методике Неймана—Моргенштерна. Было проведено численное моделирование с вычислением оптимальных дележей при помощи вектора Шепли, проведена проверка на динамическую устойчивость.

Список литературы

1. Handbook of Social Choice and Welfare, Volume 1/ Edited by Arrow K. J., Sen A. K., Suzumura K.Elvester Science, 2002. P. 176-226.

2. Вольский В. И. "Процедуры голосования в малых группах с древнейших времени до начала XX века". М.: Изд. дом. Высшей школы экономики, 2014. 76 с.

3. Петросян Л. А., Зенкевич Н. А., Шевкопляс Е. В. Теория игр: учебник - 2-е изд., перераб. и доп. СПб.: БХВ—Петербург, 2012г. 432 с.

4. Lagunoff R. Dynamic stability and reform of political institutions // Games and Economic Behavior. November 2009, Vol. 67, P. 569–583.

5. Barbera S, Coelho D . On the rule of K names // Games and Economic Behavior. September 2012, Vol. 76, P. 249–271.

6. Krasa S, Polborn M. Political competition between differentiated candidates // Games and Economic Behavior. September 2010, Vol. 70, P. 44–61.

7. Alonso R, Camara O. Political disagreement and information in elections // Games and Economic Behavior. November 2016, Vol. 100, P. 390–412.

8. Palfrey T. R, Rosenthal H. A strategic calculus of voting. // Public Choice. 1983, Vol. 41, P. 7–53.

9. Noldeke G, Pena J. The symmetric equilibria of symmetric voter participation games with complete information // Games and Economic Behavior. September 2016, Vol. 99, P. 71–81.

10. Szajowski K, Yasuda M. Voting procedure on stopping games of Markov chain // Springer. 1997, Vol. 445.

11. Gelman A. Forming voting blocs and coalitions as a Prisoner's Dilemma: a possible theoretical explanation for political instability. // Journal of economic analysis and policy. 2003.

12. Merrill S. Strategic decisions under one-stage multi-candidate voting systems. // Public choice. 1981, Vol. 36, N. 1, P. 115–134.

13. Le Brendon M, Salles M. The stability set of voting games: classification and genericity results. // International Journal of Game Theory. June 1990, Vol. 19, I. 2, P. 111–127.

14. Belenky A. S. A modified "winner-take-it-all"rule for awarding state electoral votes in US presedential elections and a game model for its analyis. // Mathematical and computer modelling. November 2008, Vol. 48, I. 9-10, P. 1308–1325.

15. Петросян Л. А, Кузютин Д. В. Игры в развернутой форме: оптимальность и устойчивость. -СПб.: Издательство Санкт–Петербургского университета, 2000. 292 с.

16. Петросян Л. А, Громова Е. В. Двухуровневая кооперация в коалиционных дифференциальных играх. // Труды ИММ УрО РАН., 2014. Т. 20, вып. 3, с. 193–203.

17. Викулова А. А. О нестандартном задании характеристической функции в кооперативных играх. // СПбГУ, 2016.

Приложение.

```
public class Majority
public static int Major (int[] a, int[] b, int[] c, int[] d, int[] v)
int[] maxs = new int[4];
int j = 0;
int k;
for (int i = 0; i < 4; i++)
if (a[j]<a[i]) j=i;
maxs[0]=j;
j=0;
for (int i = 0; i < 4; i++)
if (b[j]<b[i]) j=i;
maxs[1]=j;
j=0;
for (int i = 0; i < 4; i++)
if (c[j]<c[i]) j=i;
maxs[2]=j;
j=0;
for (int i = 0; i < 4; i++)
if (d[j]<d[i]) j=i;
maxs[3]=j;
j=0;
int[] candidates = new int[4];
for (int i = 0; i < 4; i++)
k = maxs[i];
candidates[k]=+1;
```

```
for (int i = 0; i < 4; i++)
candidates[i]=candidates[i]*v[i];
j=0;
for (int i = 0; i < 4; i++)
if (candidates[j]<candidates[i])
j=i;
return j;
public static int Borda (int[] a, int[] b, int[] c, int[] d, int[] v)
int[] candidates = new int[4];
for (int i = 0; i < 4; i++)
candidates[i] = v[i]*(a[i]+b[i]+c[i]+d[i]);
int j=0;
for (int i = 0; i < 4; i++)
if (candidates[j]<candidates[i])
j=i;
return j;
public static int Elimination (int[] a, int[] b, int[] c, int[] d, int[] v)
int[] candidates = new int[4];
int[] hlp1 = a[0],b[0],c[0],d[0];
int[] hlp2 = a[1],b[1],c[1],d[1];
int[] hlp3 = a[2],b[2],c[2],d[2];
int[] hlp4 = a[3],b[3],c[3],d[3];
//случай 1 и 2
int k=0,l=0;
for (int i = 0; i < 4; i++)
if (hlp1[i]>hlp2[i])
```

```
k = k + v[i];
else
l = l + v[i];
if (k>l)
//случай 1 и 3
k=0;
l=0;
for (int i = 0; i < 4; i++)
if (hlp1[i]>hlp3[i])
k = k + v[i];
else
l = l + v[i];
if (k>l)
//случай 1 и 4
k=0;
l=0;
for (int i = 0; i < 4; i++)
if (hlp1[i]>hlp4[i])
k = k + v[i];
else
l = l + v[i];
if (k>l)
return 1;
else
return 4;
else
```

```
//случай 3 и 4
k=0;
l=0;
for (int i = 0; i < 4; i++)
if (hlp3[i]>hlp4[i])
k = k + v[i];
else
l = l + v[i];
if (k>l)
return 3;
else
return 4;
else
//случай 2 и 3
k=0;
l=0;
for (int i = 0; i < 4; i++)
if (hlp2[i]>hlp3[i])
k = k + v[i];
else
l = l + v[i];
if (k>l)
//случай 2 и 4
k=0;
l=0;
for (int i = 0; i < 4; i++)
```

```
if (hlp2[i]>hlp4[i])
k = k + v[i];
else
l = l + v[i];
if (k>l)
return 2;
else
return 4;
else
//случай 3 и 4
k=0;
l=0;
for (int i = 0; i < 4; i++)
if (hlp3[i]>hlp4[i])
k = k + v[i];
else
l = l + v[i];
if (k>l)
return 3;
else
return 4;
public static int CountingPoints (int[] a, int[] b, int[] c, int[] d, int[] v, int[] rank)
int[] candidates = new int [4];
//для первой группы избирателей
int j=0;
```

```
for (int i = 0; i < 4; i++)
if (a[j]<a[i])
j=i;
candidates[j] = candidates[j]+v[0]*rank[0];
a[j] = -1;
j=0;
for (int i = 0; i < 4; i++)
if (a[j]<a[i])
j=i;
candidates[j] = candidates[j]+v[0]*rank[1];
a[j] = -1;
j=0;
for (int i = 0; i < 4; i++)
if (a[j]<a[i])
j=i;
candidates[j] = candidates[j]+v[0]*rank[2];
a[j] = -1;
j=0;
for (int i = 0; i < 4; i++)
if (a[j]<a[i])
j=i;
candidates[j] = candidates[j]+v[0]*rank[3];
//для второй группы избирателей
j=0;
for (int i = 0; i < 4; i++)
if (b[j]<b[i])
```

```
j=i;
candidates[j] = candidates[j]+v[1]*rank[0];
b[j] = -1;
j=0;
for (int i = 0; i < 4; i++)
if (b[j]<b[i])
j=i;
candidates[j] = candidates[j]+v[1]*rank[1];
b[j] = -1;
j=0;
for (int i = 0; i < 4; i++)
if (b[j]<b[i])
j=i;
candidates[j] = candidates[j]+v[1]*rank[2];
b[j] = -1;
j=0;
for (int i = 0; i < 4; i++)
if (b[j]<b[i])
j=i;
candidates[j] = candidates[j]+v[1]*rank[3];
//для третьей группы избирателей
j=0;
for (int i = 0; i < 4; i++)
if (c[j]<c[i])
j=i;
candidates[j] = candidates[j]+v[2]*rank[0];
```

```
c[j] = -1;
j=0;
for (int i = 0; i < 4; i++)
if (c[j]<c[i])
j=i;
candidates[j] = candidates[j]+v[2]*rank[1];
c[j] = -1;
j=0;
for (int i = 0; i < 4; i++)
if (c[j]<c[i])
j=i;
candidates[j] = candidates[j]+v[2]*rank[2];
c[j] = -1;
j=0;
for (int i = 0; i < 4; i++)
if (c[j]<c[i])
j=i;
candidates[j] = candidates[j]+v[2]*rank[3];
//для четвертой группы избирателей
j=0;
for (int i = 0; i < 4; i++)
if (d[j]<d[i])
j=i;
candidates[j] = candidates[j]+v[3]*rank[0];
d[j] = -1;
j=0;
```

```
for (int i = 0; i < 4; i++)
if (d[j]<d[i])
j=i;
candidates[j] = candidates[j]+v[3]*rank[1];
d[j] = -1;
j=0;
for (int i = 0; i < 4; i++)
if (d[j]<d[i])
j=i;
candidates[j] = candidates[j]+v[3]*rank[2];
d[j] = -1;
j=0;
for (int i = 0; i < 4; i++)
if (d[j]<d[i])
j=i;
candidates[j] = candidates[j]+v[3]*rank[3];
//ищем победителя
for (int i = 0; i < 4; i++)
if (candidates[j]<candidates[i])
j=i;
return j;
public static int Condorcet (int[] a, int[] b, int[] c, int[] d, int[] v)
int[] candidates = new int [4];
int k=0,l=0;
for (int i = 0; i < 4; i++)
for (int j = 0; j < 4; j++)
```

```
if (a[i]>a[j])
k=k+v[0];
else
l=l+v[0];
//сравнение пары кандидатов для второй группы голосующих
if (b[i]>b[j])
k=k+v[1];
else
l=l+v[1];
//сравнение пары кандидатов для третьей группы голосующих
if (c[i]>c[j])
k=k+v[2];
else
l=l+v[2];
//сравнение пары кандидатов для четвертой группы голосующих
if (d[i]>d[j])
k=k+v[3];
else
l=l+v[3];
//подведение итогов для данной пары голосующих и добавление очков
if(k>l)
candidates[i] = candidates[i]+1;
else
candidates[j] = candidates[j]+1;
int j=10;
```

```
//ищем победителя for (int i = 0; i < 4; i++)
if (candidates[i]==3)
j=i;
return j;
public static int Complend (int[] a, int[] b, int[] c, int[] d, int[] v)
int[] candidates = new int [4];
int k=0,l=0;
for (int i = 0; i < 4; i++)
for (int j = 0; j < 4; j++)
//сравнение пары кандидатов для первой группы голосующих
if (a[i]>a[j])
k=k+v[0];
else
l=l+v[0];
//сравнение пары кандидатов для второй группы голосующих
if (b[i]>b[j])
k=k+v[1];
else
l=l+v[1];
//сравнение пары кандидатов для третьей группы голосующих
if (c[i]>c[j])
k=k+v[2];
else
l=l+v[2];
//сравнение пары кандидатов для четвертой группы голосующих
if (d[i]>d[j])
```

```
k=k+v[3];
else
l=l+v[3];
//подведение итогов для данной пары голосующих и добавление очков
if(k>l)
candidates[i] = candidates[i]+1;
candidates[j] = candidates[j]-1;
else
candidates[j] = candidates[j]+1;
candidates[i] = candidates[i]-1;
int m=0;
//ищем победителя
for (int i = 0; i < 4; i++)
if (candidates[m]<candidates[i])
m=i;  return m;
public static void main(String[] args)
int[] a = 3,2,0,1;
int[] b = 0,3,1,2;
int[] c = 0,1,3,2;
int[] d = 0,2,1,3;
int[] v = 20,15,500,10;
int[] rank = 20,2,1,0;
System.out.println("Предпочтения избирателей имеют вид: ");
System.out.println("Первая группа (n = 20): a > b > d > c;");
System.out.println("Вторая группа (n = 15): b > d > c > a;");
```

System.out.println("Третья группа (n = 5): c > d > b > a;");

System.out.println("Четвертая группа (n = 10): d > b > c > a;");

System.out.println("Результат выборов при голосовании по Кондорсе:");

System.out.println("в выборах побеждает кандидат номер"+

+ (Condorcet(a,b,c,d,v)+1));

System.out.println("Результат выборов при голосовании методу Компленда:");

System.out.println("в выборах побеждает кандидат номер"+

+ (Complend(a,b,c,d,v)+1));

System.out.println("Результат выборов при голосовании относительного большинства:");

System.out.println("в выборах побеждает кандидат номер"+

+ (Major(a,b,c,d,v)+1));

System.out.println("Результат выборов при голосовании по методу Борда:");

System.out.println("в выборах побеждает кандидат номер"+

+ (Borda(a,b,c,d,v)+1));

System.out.println("Результат выборов при голосовании с последовательным исключением:");

System.out.println("в выборах побеждает кандидат номер"+

+ (Elimination(a,b,c,d,v)));

System.out.println("Результат выборов при голосовании с подсчетом очков:");

System.out.println("в выборах побеждает кандидат номер"+

+ (CountingPoints(a,b,c,d,v,rank)+1));