Санкт-Петербургский государственный университет
Факультет прикладной математики - процессов управления
Кафедра математической теории игр и статистических решений

Комарова Наталья Эдуардовна

Выпускная квалификационная работа магистра

Многошаговая игра банкротства

Направление 010400

Прикладная математика, фундаментальная информатика

и основы программирования

Заведующий кафедрой, доктор физ.-мат. наук, профессор	Петросян Л. А.
Научный руководитель, кандидат физ.-мат. наук, профессор	Петросян Л. А.
Рецензент	Муравьев А. В.

Санкт-Петербург

2018

Содержание

Введение

Банкротство (нем. Bankrott, Bankarotta) – долговая несостоятельность предприятия, несостоятельность его удовлетворить требования кредиторов по оплате услуг, товаров и работ, а также неспособность вносить обязательные платежи в бюджет и внебюджетные фонды. Это происходит потому, что долговые обязательства предприятия-должника превышают размеры его имущества или структура его баланса неудовлетворительна.

Банкротство фирмы - это долгий и очень сложный процесс. Оно наступает, когда компания не может расплатиться по своим долгам. Этому способствуют различные причины - предприятие стало убыточным, финансовый кризис привел к тому, что владельцы не в состоянии вернуть долги банкам и другим кредиторам.

В России число банкротств, если рассматривать поквартальную статистику, не снижается уже более чем три года. Так, в начале 2015 года в среднем 3217 компаний за квартал становились несостоятельными. А в третьем квартале 2017 года суды приняли 3264 таких решений. Число сообщений компаний и их кредиторов о намерении обратиться в суд с заявлениями о банкротстве юридических лиц в январе-сентябре 2017 года выросло на 6% к аналогичному периоду прошлого года. Из этого можно сделать вывод, что в ближайшем будущем темпы несостоятельности изменятся незначительно. Поэтому тема рассматриваемой работы актуальна в настоящее время.

Успех деятельности фирмы порождается различными внешними и внутренними факторами, и, если она ведет эту деятельность неэффективно, то наступает момент, когда ее нужно вывести с рынка. Для этого выполняется последовательность действий, одним из которых является оценка ликвидационной стоимости. После чего встает вопрос о разделе этой стоимости между заявителями, кредиторами и истцами, что приводит к большому числу юридических конфликтов. Данная проблема заключается в том, что стоимости фирмы в большинстве случаев недостаточно, чтобы выплатить все долги. Необходимо установить наиболее приемлемые правила дележа.

В литературе представлен ряд таких правил, которые используются на практике, но необходимо эти правила как-то сравнивать между собой для определения достоинств и недостатков каждого из них. Самое распространенное правило - правило пропорциональности, при котором денежные средства между кредиторами распределяются пропорционально требованиям. Но, зачастую, данный дележ сопровождается большим количеством споров между истцами процедуры банкротства и тогда приходится прибегать к пересмотру дел.

С другой стороны, цель распределения - удовлетворить потребности кредиторов, истцов и заявителей. А они, в свою очередь, хотят максимизировать свою часть выплат. Поэтому для решения этой проблемы логично использовать математическое моделирование средствами теории кооперативных игр. Такие игры моделируют ситуации, при которых участники игры, объединяясь, могут получить дополнительную прибыль.

Кроме того, серьезным шагом в математическом моделировании банкротства фирм является разработка динамических моделей, которые учитывают временные затраты рассматриваемого процесса. Если исследовать ликвидацию больших предприятий, то можно заметить, что выплаты должникам происходят поэтапно. Это может быть связано с наличием дочерних фирм, с дебиторскими задолженностями, с банковскими особенностями и другими экономическими факторами. Тогда необходимо понимать какую часть денежных средств нужно выплачивать конкретному заявителю в каждый момент времени. Отсюда приходит идея использования теории многошаговых кооперативных игр.

При построении динамической игры необходимо придерживаться определенного принципа оптимальности. Поэтому встает вопрос о том, какой именно принцип следует выбрать для задачи распределения долгов. Во-первых, необходимо, чтобы существовало единственное решение в игре. Во-вторых, логично предположить, что делёж должен быть справедливым. Следовательно, мы можем обратиться к принципу оптимальности- вектору Шепли. Построим такую динамическую игру, исследуем её применимость на реальных ситуациях, оценим плюсы и минусы модели.

Постановка задачи

Пусть предприятие признано несостоятельным, и определена его ликвидационная стоимость $\mathrm{E} \in R^{+}$. Она поступает на счёт должника поэтапно, т.е имеем вектор $E(t) = (E(t_1), E(t_2), ..., E(t_m))$ (m - количество этапов поступления) и $\sum_{i=1}^{m} E(t_i) = E$. Необходимо сделать справедливое распределение этой стоимости среди конечного множества агентов N(истцов, заявителей, кредиторов), требования которых в сумме превышают число E. Определим заявку i-ого агента как $d_i \in R^{+}$. Суммарное требование заявителей принимает вид $D = \sum_{i=1}^{n} d_i$.

Тогда под задачей банкротства мы будем понимать пару (d, E), для которой выполняется условие $D > E$. Данная задача эквивалента реальной ситуации в суде по делам о банкротстве. Мы будем рассматривать конфликт претензий агентов и искать способы нахождения оптимального распределения вида $(x_1^j, x_2^j, ..., x_n^j)$ в каждый момент поступления . Компонента x_i^j показывает сумму выплат i-ому заявителю в момент времени j.

Правило дележа- это функция, которая для произвольной пары $(d, E(t))$ ставит в соответствие набор векторов x, таких что $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i^j = E$. Построим такие правила при помощи теории кооперативных динамических игр и проанализируем их.

Исследуем возможность применения многошаговых выплат в инвестиционном процессе. Выделим преимущества и недостатки данной методологии. Определим степень влияния на доходность инвесторов и общий объём инвестиций.

Обзор литературы

Исследование правил распределения долгов при банкротстве имеет достаточно длинную историю. Авторы предлагают различные подходы к решению данной задачи, описывают соответствующие свойства и проводят сравнительный анализ. В работе Аумана и Машлера [1] впервые рассматривается исторически известное правило Талмуда. Сравнение трёх основных законов распределения проводят К. Херреро и А. Виллар [2]. Широкий обзор правил и объединений в семейства сделан У. Томсоном [3].

Немного позднее вопрос возврата долгов был описан инструментами теории игр. Для того, чтобы понять принципы построения кооперативных моделей можно обратиться к книге Петросяна Л. А., Зенкевича Н. А., Шевкопляс Е. В. [4]. В ней подробно и доступно описываются основные понятия теории игр. Основателем теоретико-игрового подхода моделирования ситуации банкротства можно считать Б. О'Нейла [5]. Он предложил несколько подходов к решению проблемы, одним из которых является метод с использованием вектора Шепли.

Вектор Шепли был предложен Ллойдом Шепли в 1953 году. Идея решения состоит в измерении ценности игры в числовом эквиваленте. Чтобы вычислить вектор Шепли нужно знать обобщенную характеристическую функцию игры. Пример применения этого принципа для раздела имущества рассматривается в работе С. Гуиэзу [6]. Описывается ситуация, схожая с основной задачей банкротства фирмы.

Нельзя не отметить, что процедура банкротства - это длительный процесс. Поэтому главной задачей в работе будет разработка многошаговых динамических моделей. Анализ финансовой состоятельности и диагностика процедуры выплат должника описываются в книге Грузинова В. П. [7]. Примеры построения динамических кооперативных моделей для решения экономических задач предложены в работе [9].

Помимо этого, процедура банкротства регулируется Федеральным законом «О несостоятельности» [10], который устанавливает очередность выплат. До тех пор пока полностью не погашены требования одной очереди заявителей, выплаты следующей очереди выполняться не должны. Поэтому в построенную модель необходимо вводить ограничения.

В заключение, правила банкротства и соответствующие математические модели используются в других экономических задачах. Так, например, в работах [11],[12] исследуется объём инвестиций при использовании различных правил возврата долгов. Инвестированный капитал возвращается и приносит доход только в прибыльных проектах. Если проект убыточен — то мы получаем схожую задачу распределения долгов. Авторы доказывают, что суммарное инвестирование увеличивается, если обратиться к ограниченному правилу равных убытков при банкротстве фирмы. Самое неоптимальное, по их мнению, правило - это правило равных выплат. Проверим, какие результаты мы можем получить при использовании многошаговых игр в этой проблеме.

Глава 1. Динамическая игра банкротства

§1.1. Общие сведения из теории игр

Рассмотрим в данной главе моделирование ситуации банкротства предприятия инструментами теории кооперативных игр. Данный метод имеет большое значение в различных областях экономических наук. Он применим не только для решения общехозяйственных задач, но и для исследования стратегических проблем рынков, отраслей, предприятий, систем управленческого учета и форм стимулирования эффективной деятельности. С помощью теории игр менеджмент предприятия получает возможность предусмотреть ходы своих партнеров и конкурентов.

Перед построением модели необходимо упомянуть ряд базовых понятий.

Под игрой мы будем понимать процесс, в котором участвуют две и более сторон, ведущие борьбу за реализацию своих интересов. Пусть условия игры допускают совместные действия и перераспределения выигрыша. Главная задача исследования – это оптимальное распределение благ между членами объединения.

Пусть $N = \{1, 2, ..., n\}$ - это множество всех игроков в рамках рассматриваемой модели. Тогда любое непустое подмножество $S \subset N$ мы будем называть коалицией.

Под характеристической функцией v будем понимать функцию, которая для каждой возможной коалиции ставит в соответствие вещественное число. Для любых двух непересекающихся коалиций $T \subset N$ и $S \subset N$ выполняется неравенство:

$$v(T) + v(S) \leq v(T \cup S)$$

Это означает, что коалиция $T \cup S$ имеет не меньше возможностей, чем две непересекающиеся коалиции T и S, действующие в одиночку.

Тогда кооперативной игрой назовём пару (N, v) и определим её решение. Чаще всего используются принципы оптимальности такие как С-ядро, NM-решение, вектор Шепли. Но мы выберем метод, который подходит для решения задачи справедливого дележа и, который гарантирует единственность решения. Этот принцип вводится аксиоматически.

Аксиомы Шепли.

Аксиома 1. Если S - любой носитель игры (N, v), то выполняется:

$$\sum_{i \in S} \phi_i[v] = v(S).$$

Аксиома 2. Для любой подстановки π и $\forall i \in N$ верно:

$$\phi_{\pi(i)}[\pi v] = \phi_i[v].$$

Аксиома 3. Если (N, v) и (N, u) - две произвольные кооперативные игры, то:

$$\phi_i[u + v] = \phi_i[u] + \phi_i[v].$$

Пусть ϕ - это функция, которая ставит в соответствие согласно аксиомам (1)-(3) любой игре (N, v) вектор $\phi(v)$. Тогда этот вектор будем называть вектором Шепли игры (N, v).

Сформулируем теперь простую задачу возврата долгов кредиторам. Характеристическую функцию для такой игры построим на основании уже существующих правил распределения. Каждой коалиции поставим в соответствие уступки кредиторов, не входящих в рассматриваемое объединение. В случае, когда уступка будет иметь отрицательное значение, поставим нулевое значение коалиции. Итак, получаем следующую характеристическую функцию:

$$v^{(d,E)}(S) = max\{E - \sum d_i, 0\}, i \in N \setminus S. \tag{1}$$

Рассмотрим пример построения характеристической функции (1) на реальном примере. Пусть ликвидационная стоимость фирмы равна 500 000 рублей. Имеется три кредитора с задолженностью 100,300 и 400 тыс. рублей. Общий долг составляет 800 000 рублей. Построим функцию v для данной ситуации.

Коалиция	Значение
$v(\emptyset)$	0
$v(\{1\})$	0
$v(\{2\})$	0
$v(\{3\})$	100 000
$v(\{1,2\})$	100 000
$v(\{1,3\})$	200 000
$v(\{2,3\})$	100 000
$v(\{1,2,3\})$	500 000

§1.2. Построение динамической модели

Рассмотрим далее процесс возврата долгов больших предприятий. При их ликвидации возникают проблемы, которые приводят к тому, что денежная сумма поступает на счет должника поэтапно. К этому может привести, например, наличие у юридических лиц дочерних подразделений, дебиторских задолженностей, ограничений со стороны банков и другое. Но тогда появляется вопрос, какое количество ликвидационной стоимости выплатить кредиторам в каждый момент времени. В решении данной проблемы может помочь кооперативная теория динамических игр.

Приведём формальную постановку задачи. Пусть мы заранее знаем процедуру поступления денежных средств на счёт несостоятельного предприятия. Тогда вектор ликвидационной стоимости имеет вид $E(t) = (E(t_1), E(t_2), ..., E(t_m))$, где m- количество этапов начисления. Необходимо сделать оптимальное распределение этой стоимости среди кредиторов предприятия, т. е. получить в каждый момент времени j вектор выплат $(x_1^j, x_2^j, ..., x_n^j)$.

Построим многошаговую динамическую модель, как способ решения рассматриваемой задачи. При построении этого метода воспользуемся характеристической функцией (1). Динамическая модель представляет собой семейство игр $\{\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_m\}$. Для каждой такой игры будем строить характеристическую функцию и вычислять Вектор Шепли. Отметим, что решение каждой следующей игры зависит от решения предыдущей. Поэтому будем рассматривать игры в строгой последовательности от игры под номером 1 к игре m, при этом будем уменьшать распределяемую денежную сумму.

Рассмотрим первую кооперативную игру Γ_1. Определим вектор выплат, как сумму денежных средств на всех этапах начисления. Обратимся к характеристической функции (1), построим вектор Шепли и предположим, что мы выплатили всем кредиторам часть долга. При построении следующей игры необходимо учесть эти выплаты. Таким образом, мы получаем зависимость решения игры Γ_2 от выплат на предыдущем этапе. Поэтому мы можем составить разность между решениями двух игр и приравнять её к неизвестным выплатам на этапе 1. Этот процесс необходимо продолжить до последней игры, после чего мы получим векторы выплат в каждый момент начисления. Задача решена. Сформулируем подробный формальный алгоритм решения динамической модели.

Шаг 1. Имеем вектор ликвидационной стоимости $E(t) = (E(t_1), E(t_2), ..., E(t_m))$ и вектор претензий со стороны кредиторов $d^1 = (d^1_1, d^1_2, ..., d^1_n)$. Пусть $E^1 = \sum_{j=1}^{m} E(t_j)$. Строим характеристическую функцию $v^{(d^1,E^1)}(S) = max\{E^1 - \sum_{i \in N \setminus S} d^1_i, 0\}$. Итак, получили игру $\Gamma_1 = (N, v^{(d^1,E^1)})$. Вычисляем для неё вектор Шепли $Sh^1 = (Sh^1_1, Sh^1_2, ..., Sh^1_n)$ и предполагаем неизвестный вектор выплат $x^1 = (x^1_1, x^1_2, ..., x^1_n)$.

Шаг 2. Уменьшаем распределяемую сумму и учитываем выплаты на шаге 1. Пусть $E^2 = \sum_{j=2}^{m} E(t_j)$, а $d^2(x^1) = d^1 - x^1$.

Вычисляем характеристическую функцию по формуле (1):

$$v^{(d^2(x^1),E^2)}(S) = max\{E^2 - \sum_{i \in N \setminus S} d_i^2(x^1), 0\}.$$

Таким образом, получена игра $\Gamma_2 = (N, v^{(d^2(x^1),E^2)})$. Вычисляем для неё вектор Шепли $Sh^2(x^1)$ и составляем следующую разность $Sh_1 - Sh_2(x^1) = x^1$. Эта разность представляет собой систему n линейных уравнений с n неизвестными. Решаем её любым удобным способом и находим неизвестный вектор выплат на первом этапе $x^1 = (x_1^1, x_2^1, ..., x_n^1)$. При подстановке компонентов этого вектора в вектор $Sh^2(x^1)$ получаем вектор Шепли $Sh^2 = (Sh_1^2, Sh_2^2, ..., Sh_n^2)$. И снова предполагаем неизвестные выплаты в данный момент времени $x^2 = (x_1^2, x_2^2, ..., x_n^2)$.

Шаг 3. Вычисляем новый вектор претензий и ликвидационную стоимость. Тогда $E^3 = \sum_{j=3}^{m} E(t_j)$, а $d^3(x^2) = d^2 - x^2$. Определяем характеристическую функцию:

$$v^{(d^3(x^2),E^3)}(S) = max\{E^3 - \sum_{i \in N \setminus S} d_i^3(x^2), 0\}.$$

Получили новую кооперативную игру, зависящую от вектора выплат на предыдущем шаге. Вычисляем вектор Шепли $Sh^3(x^2)$, составляем систему уравнений $Sh_2 - Sh_3(x^2) = x^2$ и решаем её. Таким образом, находим выплаты кредиторам $x^2 = (x_1^2, x_2^2, ..., x_n^2)$ на шаге 2.

Процесс построения каждого следующего шага Γ_j аналогичен. Все вычисления производятся последовательно. Осталось упомянуть только последний этап многошаговой игры.

Шаг m. Рассмотрим кооперативную игру Γ_m, где $E^m = E(t_m)$ и $d^m(x^{m-1}) = d^{m-1} - x^{m-1}$. Строим следующую функцию

$$v^{(d^m(x^{m-1}),E^m)}(S) = max\{E^m - \sum_{i \in N \setminus S} d_i^m(x^{m-1}), 0\}.$$

Вычисляем вектор Шепли $Sh^m(x^{m-1})$, составляем систему уравнений $Sh_{m-1} - Sh_m(x^{m-1}) = x^{m-1}$ и решаем её. Таким образом, находим выплаты кредиторам $x^{m-1} = (x_1^{m-1}, x_2^{m-1}, ..., x_n^{m-1})$ на шаге m-1. Подставляем их вектор Шепли на текущем шаге. Выплачиваем каждому кредитору сумму равную соответствующей компоненте Sh_i^m.

Итак, игра решена. Все агенты получили определённую сумму денег в каждый момент поступления. Мы можем вычислить вектор суммарных выплат:

$$x = (\sum_{j=1}^{m} x_1^j, \sum_{j=1}^{m} x_2^j, ..., \sum_{j=1}^{m} x_n^j)$$

. Далее на реальном примере, рассмотрим предложенный подход и убедимся в практическом применении данного алгоритма.

Пример 1. Некоторая строительная компания подала в суд о принятии её банкротом. Ликвидационная стоимость её составляет 38 041 000 рублей. Требования истцов, кредиторов и заявителей равны (13 787 000, 18 655 537, 37 530 244). Известно, что денежная сумма поступает на счёт должника в два этапа:продажа основного имущества и возврат задолженностей со стороны иной фирмы. Таким образом, $E = (E(t_1), E(t_2))$=(26 801 000, 11 240 000). Рассчитаем выплаты трём агентам при помощи вышеуказанного кооперативного метода.

Шаг 1. Рассмотрим первую игру $\Gamma_1 = (N, v^{(d^1, E^1)})$, где вектор d^1 =(13 787 000, 18 655 537, 37 530 244), а $E^1 = E(t_1) + E(t_2)$. Строим характеристическую функцию:

Коалиция	Значение
$v(\emptyset)$	0
$v(\{1\})$	0
$v(\{2\})$	0
$v(\{3\})$	5 598 463
$v(\{1,2\})$	510 756
$v(\{1,3\})$	19 385 463
$v(\{2,3\})$	24 254 000
$v(\{1,2,3\})$	38 041 000

Рассчитаем вектор Шепли:

$Sh_1^1 = \frac{1}{3}(-24254000) + \frac{1}{6}(510756 - 5598463) + \frac{1}{6}19385463 + \frac{1}{3}38041000$ $= 6\ 978\ 626$.

$Sh_2^1 = \frac{1}{3}(-19385463) + \frac{1}{6}(510756 - 5598463) + \frac{1}{6}24254000 + \frac{1}{3}38041000$ $= 9412894{,}5$.

$Sh_3^1 = \frac{1}{3}(5598463 - 510756) + \frac{1}{6}(19385463) + \frac{1}{6}24254000 + \frac{1}{3}38041000$ $= 21\ 649479{,}5$.

И полагаем, что мы сделали выплаты каждому кредитору, т.е. получили вектор выплат $x^1 = (x_1^1, x_2^1, x_3^1)$. Численное значение данного вектора мы узнаем на следующем шаге. Но при построении следующей игры учтём эти выплаты и вычтем их из начальных требований игроков.

Шаг 2. Рассмотрим игру Γ_2. Уменьшаем распределяемую сумму $E^2 = E(t_2)$ и вычисляем новый вектор требований

$d^2 = (13787000 - x_1^1, 18655537 - x_2^1, 37530244 - x_3^1)$.

Строим характеристическую функцию и находим вектор Шепли:

Коалиция	Значение
$v(\emptyset)$	0
$v(\{1\})$	0
$v(\{2\})$	0
$v(\{3\})$	0
$v(\{1,2\})$	-26 290 244 + x_3^1
$v(\{1,3\})$	-7 415 537 + x_2^1
$v(\{2,3\})$	-2 547 000 + x_1^1
$v(\{1,2,3\})$	11 240 000

$$Sh_1^2(x^1) = \frac{-2x_1^1 + x_2^1 + x_3^1}{6} - \frac{2043927}{2}.$$

$$Sh_2^2(x^1) = \frac{x_1^1 - 2x_2^1 + x_3^1}{6} - 1412305.$$

$$Sh_3^2(x^1) = \frac{x_1^1 + x_2^1 - 2x_3^1}{6} - \frac{21699317}{2}.$$

Составляем разность $Sh^1 - Sh^2(x^1) = x^1$, решаем систему из трёх уравнений с тремя неизвестными:

$$x^1 = (7067500, 7067500, 12666000).$$

Итак, получены выплаты для каждого игрока в первый момент поступления.

Пользуясь этим же алгоритмом не сложно рассчитать вектор выплат на втором шаге

$$x^2 = (2239833\frac{1}{3}, 4500083\frac{1}{3}, 4500083\frac{1}{3}).$$

Вынесем полное решение многошаговой игры и сравним его с результатами при одношаговом распределении:

Период выплаты	Вектор выплат, руб.
t_1	(7 067 500, 7 067 500, 12 666 000)
t_2	(2 239 833.3, 4 500 083.3, 4 500 083.3)
Суммарная выплата	(9 307 333.3, 11 567 583.3, 17 166 083.3)
Одношаговая игра	(6 978 626, 9 412 894.5, 21 649 479.5)

Таким образом, получены новые результаты. Решение динамической задачи явно отличается от итогов при одношаговом распределении. На примере показано, что большая часть кредиторов получила дополнительную прибыль. Это могло бы помочь избежать ряд судебных конфликтов. Выплаты кредиторам отличаются от выплат по пропорциональному правилу. Но, при этом, модель построена на основе распределения, равного среднему вкладу игрока в коалицию. Поэтому можно сделать вывод о применимости данного подхода в реальных жизненных ситуациях. Однако, нынешнее законодательство имеет значительный блок норм и предписаний для юридических лиц. Необходимо разобраться в тонкостях и порядке действий в рамках процедуры ликвидации предприятия и ввести дополнительные модификации в модель.

§1.3. Построение динамической модели с ограничениями

Обратимся теперь к федеральному закону „о несостоятельности“от 26.10.2002 №127-ФЗ, который гласит о том, что требования кредиторов погашаются в соответствии с очередностью. До тех пор пока полностью не будут выплачены долги одной очереди, выплаты другим очередям производится не могут.

Требования кредиторов, истцов и заявителей удовлетворяются в следующем порядке:

1) В первую очередь выполняются требования граждан, перед которыми предприятие-банкрот несет ответственность за причинение вреда здоровью, а также морального вреда;

2) Во вторую очередь погашаются выходные пособия и заработная плата для лиц, работающих по трудовому договору;

3) В третью очередь производятся расчёты с иными кредиторами.

Рассмотренный ранее алгоритм при наличии очередей в процедуре банкротства противоречит данному закону. Многошаговая игра не учитывает личных качеств агентов, а охватывает лишь различия в суммах претензий. Соответственно, кредиторы высшего приоритета могут не получить суммы своих заявок. Поэтому применение такой модели невозможно. Необходимо вводить новые ограничения.

Разделим все требования кредиторов на три группы по очередям. Тогда вектор претензий принимает следующий вид:

$$d = (d_1, d_2, ..., d_k, d_{k+1}, d_{k+2}, ..., d_l, d_{l+1}, d_{l+2}, ..., d_n).$$

Отсюда получаем, что из всех представленных кредиторов ровно k заявителей первой очереди, $l-k$ заявителей второй очереди и $n-l$ заявителей третьей очереди. Каждая очередь имеет своё суммарное требование. Пока не будет погашена заявка для более приоритетной очереди, выплаты для следующей очереди будут нулевые. Поэтому построение модели с очередями зависит от размера ликвидационной стоимости предприятия и от размеров суммарных требований каждой очереди заявителей. Таким образом, рассматриваемая многошаговая игра разбивается на три случая. Рассмотрим эти ситуации более подробно и приведём соответствующие примеры.

Ситуация 1. Самый простой случай, когда распределяемая сумма денежных средств не превышает суммарное требование кредиторов первой очереди, т. е.

$$E \leq \sum_{i=1}^{k} d_i$$

Если эта сумма строго меньше суммарной заявки, то мы можем построить динамическую модель (§1.2) для кредиторов первой очереди и получить решение. А выплаты для агентов второй и третьей очередей будут нулевые. Если же ликвидационная стоимость равна суммарному требованию первой очереди, то вектор выплат будет выглядеть:

$$x = (d_1, d_2, ..d_k, 0, 0, 0, ..., 0, 0).$$

Данное решение соответствует вышеуказанному федеральному закону.

Ситуация 2. Второй случай, когда распределяемая сумма должника превышает суммарное требование агентов первой очереди, но не превосходит суммарное требование кредиторов первой и второй очередей

$$\sum_{i=1}^{k} d_i < E \leq \sum_{i=1}^{l} d_i.$$

Тогда кредиторы первой очереди должны получить полную стоимость своих требований, а кредиторы второй очереди получают выплаты соответствующие решению многошаговой игры. Поэтому при построении модели мы ограничим выплаты для агентов до номера k и учтем эти выплаты на каждом шаге. Заявители третьей очереди в этой ситуации не получат ничего. Их требования не учитываются при построении игры. Проанализируем данные ограничения и рассмотрим модифицированный алгоритм многошаговой игры.

Алгоритм многошаговой игры для ситуации 2. Имеем вектор ликвидационной стоимости $E(t) = (E(t_1), E(t_2), ..., E(t_m))$ и вектор претензий со стороны кредиторов

$$d = (d_1, ..., d_k, d_{k+1}, ..., d_l, d_{l+1}, ..., d_n).$$

Сперва необходимо рассчитать ограничения- суммы выплат для кредиторов первой очереди в каждый момент поступления.

$$x_i^j = \frac{d_i \cdot E(t_j)}{E}, i \in \{1, ..., k\}.$$

Далее пересчитаем вектор E(t), учитывая вышеуказанные выплаты

$$E^*(t) = (E(t_1) - \sum_{i=1}^{k} x_i^1, E(t_2) - \sum_{i=1}^{k} x_i^2, ..., E(t_m) - \sum_{i=1}^{k} x_i^m).$$

Этот модифицированный вектор показывает, на какую сумму денежных средств могут рассчитывать заявители второй очереди процедуры банкротства. После этого мы пошагово строим модель для этой очереди (§1.2), используя рассчитанные данные.

Шаг 1. Пусть $E^1 = \sum_{j=1}^{m} E^*(t_j)$, а $d^1 = (d^1_{k+1}, d^1_{k+2}, ..., d^1_l)$. Строим характеристическую функцию $v^{(d^1, E^1)}(S)$. Получили игру $\Gamma_1 = (\{k+1, ..., l\}, v^{(d^1, E^1)})$. Вычисляем для неё вектор Шепли $Sh^1 = (Sh^1_{k+1}, Sh^1_{k+2}, ..., Sh^1_l)$ и предполагаем неизвестный вектор выплат $x^1 = (x^1_{k+1}, x^1_{k+2}, ..., x^1_l)$.

Шаг 2. Уменьшаем распределяемую сумму и учитываем выплаты на шаге 1. Пусть $E^2 = \sum_{j=2}^{m} E^*(t_j)$, а $d^2(x^1) = d^1 - x^1$.

Вычисляем характеристическую функцию по формуле (1).Таким образом, получена игра $\Gamma_2 = (N, v^{(d^2(x^1), E^2)})$. Вычисляем для неё вектор Шепли $Sh^2(x^1)$ и составляем следующую разность $Sh_1 - Sh_2(x^1) = x^1$. Эта разность представляет собой систему $l-k$ линейных уравнений с $l-k$ неизвестными. Решаем и находим неизвестный вектор выплат для кредиторов второй очереди на первом этапе $x^1 = (x^1_{k+1}, x^1_{k+2}, ..., x^1_l)$. При подстановке компонентов этого вектора в вектор $Sh^2(x^1)$ получаем вектор Шепли $Sh^2 = (Sh^2_{k+1}, Sh^2_{k+2}, ..., Sh^2_l)$. И снова предполагаем неизвестные выплаты в данный момент времени $x^2 = (x^2_{k+1}, x^2_{k+2}, ..., x^2_l)$. Эти выплаты будут получены на следующем шаге игры.

Продолжаем аналогичным образом процесс до последнего шага, получая каждый раз суммы выплат кредиторам второй очереди.

Вычислим общий вектор выплат для всех очередей заявителей

$$x = (d_1, d_2, ...d_k, \sum_{j=1}^{m} x_{k+1}^j, \sum_{j=1}^{m} x_{k+2}^j, ..., \sum_{j=1}^{m} x_l^j, 0, 0, ..., 0).$$

Пример 2. Пусть ликвидационная стоимость фирмы составляет 800 000 рублей. Она поступает на счёт должника в два этапа, т. е. $E(t)$=(500 000, 300 000). Имеется три очереди кредиторов, истцов и заявителей. В первой очереди находится один человек с претензией 300 000 рублей, во второй очереди три юридических лица с требованиями 100 000, 200 000, 500 000 рублей соответственно. Третья очередь включает в себя двух лиц с претензиями 250 000 рублей и 50 000 рублей. Необходимо выполнить распределение денежных средств среди 6 агентов в два этапа поступления.

Будем следовать согласно алгоритму. Рассчитаем ограничения:

$$x_1^1 = 300000 \cdot \frac{500000}{800000} = 187500$$

$$x_1^2 = 300000 \cdot \frac{300000}{800000} = 112500$$

Модифицируем вектор распределяемой суммы

$$E^*(t) = (500000 - 187500, 300000 - 112500) = (312500, 187500)$$

Далее переходим к двухшаговой кооперативной игре агентов второй очереди.

Шаг 1. Вычисляем необходимые величины $E^1 = 312500 + 187500 = 500000$, $d^1 = (100000, 200000, 500000)$. Строим характеристическую функцию:

Коалиция	Значение
$v(\emptyset)$	0
$v(\{2\})$	0
$v(\{3\})$	0
$v(\{4\})$	200000
$v(\{2,3\})$	0
$v(\{2,4\})$	300000
$v(\{3,4\})$	400000
$v(\{2,3,4\})$	500000

Вычисляем вектор Шепли:

$$Sh_2^1 = \frac{1}{3}(-400000) + \frac{1}{6}(-200000) + \frac{1}{6}300000 + \frac{1}{3}500000 = 50000.$$

$$Sh_3^1 = \frac{1}{3}(-300000) + \frac{1}{6}(-200000) + \frac{1}{6}400000 + \frac{1}{3}500000 = 100000.$$

$$Sh_4^1 = \frac{1}{3}200000 + \frac{1}{6}400000 + \frac{1}{6}300000 + \frac{1}{3}500000 = 350000.$$

И предполагаем, что мы выплатили заявителям второй очереди некоторую часть средств $x^1 = (x_2^1, x_3^1, x_4^1)$.

Шаг 2. На данном этапе игры сумма $E^2 = 187500$, а вектор претензий $d^2 = (100000 - x_2^1, 200000 - x_3^1, 500000 - x_4^1)$. Построим характеристическую функцию, а все дальнейшие вычисления выполним в пакете MATLAB 9.3 (см. Приложение).

Характеристическая функция для игроков 2,3,4:

Коалиция	Значение
$v(\emptyset)$	0
$v(\{2\})$	0
$v(\{3\})$	0
$v(\{4\})$	$-112500 + x_2^1 + x_3^1$
$v(\{2,3\})$	0
$v(\{2,4\})$	$-12500 + x_3^1$
$v(\{3,4\})$	$87500 + x_2^1$
$v(\{2,3,4\})$	187500

Находим значение вектора $Sh^2(x^1)$, составляем систему из трёх уравнений $Sh^1 - Sh^2(x^1) = x^1$ и находим выплаты на первом шаге игры. Получаем следующие результаты:

$$x^1 = (x_2^1, x_3^1, x_4^1) = (40000, 80000, 192500).$$

Подставляем полученный результат в вектор $Sh^2(x^1)$ и находим выплаты на этапе 2:

$$x^2 = (x_2^2, x_3^2, x_4^2) = (30000, 60000, 210000).$$

Теперь мы можем дать окончательный ответ для нашей задачи. На этапе 1 выплаты для всех очередей кредиторов имеют вид:

$$(187500, 40000, 70000, 192500, 0, 0)$$

На втором этапе имеем:

$$(112500, 39500, 60500, 97500, 0, 0)$$

Проанализируем полученные результаты.

Номер заявителя	Очередь	Требование	Выплата
1	1	300000	300000
2	2	100000	79500
3	2	200000	130500
4	2	500000	290000
5	3	150000	0
6	3	50000	0

Полученные данные показывают, что применение кооперативной теории игр даёт новые результаты в решении задачи поэтапного возврата долгов. Заявители, объединяясь, получают дополнительную прибыль. При этом не нарушается порядок выплат для очередей требований кредиторов.

Замечание. В случае, когда ликвидационная стоимость предприятия равна сумме требований заявителей первой и второй очереди, тогда данные заявители получают суммы своих заявок, а кредиторы третьей очереди не получают ничего.

Ситуация 3. Последний случай охватывает все три очереди кредиторов. Распределяемая сумма строго больше суммарной заявки первых двух очередей и строго меньше общей заявки всех истцов:

$$\sum_{i=1}^{l} d_i < E < \sum_{i=1}^{n} d_i.$$

В этой ситуации мы должны ввести ограничения для двух очередей заявителей, а остаток денежных средств разыгрывается между последней очередью кредиторов. Рассмотрим далее формальный алгоритм для такого случая.

Алгоритм многошаговой игры для ситуации 3. Имеем вектор поступления средств на счёт должника

$E(t) = (E(t_1), E(t_2), ..., E(t_m))$ и вектор требований кредиторов

$$d = (d_1, ..., d_k, d_{k+1}, ..., d_l, d_{l+1}, ..., d_n).$$

Введём ограничения в игру - суммы выплат для кредиторов первой и второй очереди в каждый момент поступления.

$$x_i^j = \frac{d_i \cdot E(t_j)}{E}, i \in \{1, ..., l\}.$$

Вычислим модифицированный вектор распределяемых средств:

$$E^*(t) = (E(t_1) - \sum_{i=1}^{l} x_i^1, E(t_2) - \sum_{i=1}^{l} x_i^2, ..., E(t_m) - \sum_{i=1}^{l} x_i^m).$$

Шаг 1. Пусть $E^1 = \sum_{j=1}^{m} E^*(t_j)$, а $d^1 = (d_{l+1}^1, d_{l+2}^1, ..., d_n^1)$. Строим характеристическую функцию $v^{(d^1,E^1)}(S)$. Получили игру $\Gamma_1 = (\{l+1, ..., n\}, v^{(d^1,E^1)})$. Вычисляем для неё вектор Шепли $Sh^1 = (Sh_{l+1}^1, Sh_{l+2}^1, ..., Sh_n^1)$ и предполагаем неизвестный вектор выплат $x^1 = (x_{l+1}^1, x_{l+2}^1, ..., x_n^1)$.

Шаг 2. Уменьшаем распределяемую сумму и учитываем выплаты на шаге 1. Пусть $E^2 = \sum_{j=2}^{m} E^*(t_j)$, а $d^2(x^1) = d^1 - x^1$.

Вычисляем характеристическую функцию по формуле (1).Таким образом, получена игра $\Gamma_2 = (N, v^{(d^2(x^1),E^2)})$. Вычисляем для неё вектор Шепли $Sh^2(x^1)$ и составляем следующую разность $Sh_1 - Sh_2(x^1) = x^1$. Эта разность представляет собой систему

$n-l$ линейных уравнений с $n-l$ неизвестными. Решением этой системы является вектор выплат кредиторам третьей очереди на первом шаге $x^1 = (x^1_{l+1}, x^1_{l+2}, ..., x^1_n)$. При подстановке компонентов этого вектора в вектор $Sh^2(x^1)$ получаем вектор Шепли $Sh^2 = (Sh^2_{l+1}, Sh^2_{l+2}, ..., Sh^2_n)$. И снова предполагаем неизвестные выплаты в данный момент времени $x^2 = (x^2_{l+1}, x^2_{l+2}, ..., x^2_n)$.

Построение следующий шагов проводим аналогичным образом, получая новые векторы выплат на каждом из них.

Получим окончательный ответ- вычислим суммарные выплаты для всех заявителей:

$$x = (d_1, d_2, ...d_l, \sum_{j=1}^{m} x^j_{l+1}, \sum_{j=1}^{m} x^j_{l+2}, ..., \sum_{j=1}^{m} x^j_n).$$

Пример 3. Рассмотрим задачу распределения долгов трём очередям заявителей. Имеется ликвидационная стоимость в размере 22 250 тыс. рублей. Погашение долга производится в два этапа. Вектор выплат $E(t) = (5250000, 17000000)$. Требования кредиторов и порядок выплат представлены ниже в таблице.

Номер заявителя	Очередь	Требование
1	1	5000000
2	1	7000000
3	2	6000000
4	2	1000000
5	3	2500000
6	3	4000000

Построим двухшаговую модель согласно алгоритму. Будем следовать согласно алгоритму. Рассчитаем ограничения:

$$x_1^1 = 5000000 \cdot \frac{5250000}{22250000} = 1179775$$

$$x_1^2 = 5000000 \cdot \frac{17000000}{22250000} = 3820225$$

$$x_2^1 = 7000000 \cdot \frac{5250000}{22250000} = 1651685$$

$$x_2^2 = 7000000 \cdot \frac{17000000}{22250000} = 5348315$$

$$x_3^1 = 6000000 \cdot \frac{5250000}{22250000} = 1415730$$

$$x_3^2 = 6000000 \cdot \frac{17000000}{22250000} = 4584270$$

$$x_4^1 = 1000000 \cdot \frac{5250000}{22250000} = 235955$$

$$x_4^2 = 1000000 \cdot \frac{17000000}{22250000} = 764045$$

Эти ограничения показывают какую именно сумму кредиторы первой и второй очереди должны получить в каждый момент времени. А агенты третьей очереди могут рассчитывать на остаток, поэтому необходимо вычислить новый вектор выплат. Для этого мы вычтем из вектора $E(t)$ вышеуказанные уплаты. Получаем следующие результаты:

$$E^*(t) = (766855, 2483145)$$

Теперь построим игру Γ_1 с игроками третьей очереди и их претензиями $d = (2500000, 4000000)$. Описываем характеристическую функцию:

Шаг 1.

Коалиция	Значение
$v(\emptyset)$	0
$v(\{5\})$	0
$v(\{6\})$	750000
$v(\{5,6\})$	3250000

Вычисляем вектор Шепли: $Sh^1 = (1250000, 2000000)$. И предположим что мы выплатили игрокам суммы x_5^1 и x_6^1 соответственно.

Шаг 2. На втором шаге строим игру Γ_2 с учетом предыдущих оплат. Получаем, что вектор требований уменьшается:

$$d = (2500000 - x_5^1, 4000000 - x_6^1).$$

Вычисляем характеристическую функцию:

Коалиция	Значение
$v(\emptyset)$	0
$v(\{5\})$	0
$v(\{6\})$	-16855 + x_5^1
$v(\{5,6\})$	2483145

Вычисляем вектор Шепли $Sh^2(x^1)$. Составляем разность $Sh^1 - Sh^2(x^1) = x^1$ и получаем выплаты в первый момент поступления $x^1 = (226355, 540500)$.

После этого пересчитаем характеристическую функцию и найдём вектор Шепли - выплаты на втором этапе

$$Sh^2 = x^2 = (807045, 1676100).$$

Задача решена. Имеем подробный график выплат всем истцам в каждый момент поступления. Исследуем полученное решение:

Номер заявителя	Очередь	Требование	Общая выплата
1	1	5000000	5000000
2	1	7000000	7000000
3	2	6000000	6000000
4	2	1000000	1000000
5	3	2500000	1033400
6	3	4000000	2216600

Игроки первой и второй очереди получили суммы своих заявок полностью. Закон не нарушен. Модель работает адекватно. При использовании такой методологии можно построить подробную картину выплат на все этапы вперёд и оценить общие уплаты. В процессе ликвидации фирмы кредиторам важно распределение всех выплат по времени. Поэтому использование данного алгоритма возможно в реальных делах о несостоятельности.

Таким образом, сформулирован окончательный алгоритм распределения долгов банкрота. Закон устанавливает определённый порядок действий по степени важности выплат. В данной модели учтены все ограничения. Работа модели проиллюстрирована рядом практических примеров.

Глава 2. Моделирование инвестиционного процесса

Банкротство также является популярной темой исследования в финансовой математике. Анализ правил выплат при несостоятельности зачастую применяется в исследовании инвестиционных процессов.

Инвестиционный процесс- это ряд циклов финансирования некоторых проектов, которые повторяются через определенное время. Он предусматривает наличие связи между своими участниками и определенной среды инвестирования, в которой осуществляется вся их деятельность. Это понятие является специфическим и предусматривает заключение сделки между инвесторами и объектами инвестирования для последующего получения доходов.Участниками инвестиционного процесса считаются все физические и юридические лица, которые принимают непосредственное участие в проекте инвестирования. Но чаще всего в качестве инвесторов выступают:

- акционерные общества;
- некоммерческие организации;
- госпредприятия;
- банки и т.д.

К исполнителям относятся производственные фирмы, строительные организации, занимающиеся проектированием и пусконаладочными работами. Такие участники по договорам подряда проектируют сооружения, возводят здания, занимаются исследованиями, модернизируют оборудование, выполняют подготовку рабочих мест и т. д.

Исследователи анализируют влияние различных правил выплат на инвестиционные процессы.

В данной главе мы изучим эту задачу и проанализируем методы моделирования распределения инвестиций.

Инвестиции (инвестированный капитал) возвращаются и приносят доход только в прибыльных проектах. Если проект убыточен — инвестиции могут быть утрачены полностью или частично. В настоящее время разработано множество методических подходов, которые отражают особенности управления инвестиционным капиталом в кризисных ситуациях. Такие методы и оценки рассматривают проекты с фиксированными финансовыми потоками и постоянным составом участников.

Инструментарий теории игр имеет ряд преимуществ перед другими методами моделирования, потому что при помощи него возможно оптимизировать поведение людей с различными интересами. Поэтому опишем инвестиционный процесс при помощи игровой модели. Кроме того, для инвестора важен не только определённый объём получаемой прибыли, но и её распределение во времени. Следовательно, необходимо обратиться к динамическому моделированию.

Построим модель инвестиции, исследуем одношаговый и многошаговые подходы. Оценим применимость динамической модели банкротства на примере имитации капиталовложения.

§2.1. Построение модели распределения инвестиций

Пусть $N = \{1, ..., n\}$ это множество инвесторов (агентов). Каждый $i \in N$ вкладывает капитал $s_i \in R_+$ в одну фирму. После того, как все участники внесли свою часть, общее сбережение составляет $\sum_N s_i$. Затем инвестирование вовлекает сбережения в оборот. И, если проект успешный, то с вероятностью $p \in (0, 1)$ капитал увеличивается до следующей суммы $(1 + r) \sum_N s_i$, где $r \in (0, 1]$- это доля прибыли. С обратной вероятностью $(1 - p)$, компания становится банкротом. Общий капитал уменьшается до значения $\beta \sum_N s_i$, где β - это доля, которая переживает банкротство. Эта сумма распределяется между инвесторами в соответствии с заранее определенным правилом банкротства.

В качестве такого метода мы можем использовать любое существующее теоретическое правило банкротства из литературы. Но, следующие три правила будут наиболее важными в нашем экспериментальном анализе. Пропорциональное правило (PRO) определяется таким образом: каждый агент i получает соответствующую выплату $PRO_i(s) = \beta s_i$. Это означает, что инвестор получает долю, пропорциональную его инвестициям. Правило равных потерь (EL), с другой стороны, уравнивает убытки всех агентов. Формально, каждый участник инвестиционного процесса получает сумму $EL_i(s) = s_i - \frac{1-\beta}{n} \sum_N s_j$. Правило равных выплат (EA) предполагает сумму $EA_i(s) = \frac{\beta}{n} \sum_N s_i$ для каждого инвестора.

На ряду с теоретическими правилами мы проанализируем возможность использования результатов полученных при решении поэтапной кооперативной модели из главы 1.

Используя вышеуказанные выкладки, мы можем рассчитать ожидаемую доходность i-ого инвестора для инвестиционного процесса. Она определяется, как математическое ожидание прибыли и потери

$$M_i = p(r+1)s_i + (1-p)(G(s_i) - s_i),$$

где $G(s_i)$-правило банкротства. Получаем конечные формулы для расчёта дохода от инвестиции для различных правил:

1) Пропорциональное правило:

$$M_i = p(r+1)s_i + (1-p)(\beta s_i - s_i)$$

2) Правило равных выплат:

$$M_i = p(r+1)s_i + (1-p)(\frac{\beta}{n}\sum_N s_i - s_i)$$

3) Правило равных убытков:

$$M_i = p(r+1)s_i + (1-p)(-\frac{1-\beta}{n}\sum_N s_j)$$

4) Многошаговая игра банкротства:

$$M_i = p(r+1)s_i + (1-p)(\sum_{j=1}^{m} x_i^j - s_i),$$

где x_i^j - это выплата агенту i, соответствующая результатам решения модели.

Мы можем рассчитать доход по каждому из этих правил и сравнить полученные результаты.

§2.2. Экспериментальный анализ правил банкротства в инвестициях

Ранее было показано, что нетрудно вычислить ожидаемые прибыль или потерю для участников инвестиционного процесса. Современные инструменты статистического анализа позволяют оценить вероятность эффективной реализации капитала. А модели банкротства, в свою очередь, помогают осуществить оптимальное распределение денежных средств при ликвидации проекта. Фирма заранее определяет, к какому именно правилу обратиться в случае несостоятельности. И от этого выбора напрямую зависит объём инвестиций- сумма всех вложений. Исследуем, как изменяется доход от инвестиции, при использовании различных правил банкротства.

Пример 4. Три инвестора вложили в строительство предприятия суммы 500 000\$, 750 000\$, 1000 000\$. С вероятностью 60 % предприятие реализует эти сбережения с долей 0.6. В случае если деятельность будет неэффективной общий капитал потеряет 70 % своей суммы. Необходимо рассчитать ожидаемый доход для каждого инвестора.

Начнем решение данной задачи с использования пропорционального правила (PRO). Рассчитаем вероятный доход для инвесторов:

$$M_1 = 0.6 \cdot 1.6 \cdot 500000 + 0.4(0.3 \cdot 500000 - 500000) = 340000$$

$$M_2 = 0.6 \cdot 1.6 \cdot 750000 + 0.4(0.3 \cdot 750000 - 750000) = 510000$$

$$M_3 = 0.6 \cdot 1.6 \cdot 1000000 + 0.4(300000 - 1000000) = 680000$$

Для правила (EA) равная выплата для каждого инвестора будет составлять $EA_i(s) = \frac{0.3}{3}2250000 = 225000$. Тогда вероятный доход для каждого инвестора будет следующий:

$M_1 = 0.6 \cdot 1.6 \cdot 500000 + 0.4(225000 - 500000) = 370000$

$M_2 = 0.6 \cdot 1.6 \cdot 750000 + 0.4(225000 - 750000) = 510000$

$M_3 = 0.6 \cdot 1.6 \cdot 1000000 + 0.4(225000 - 1000000) = 650000$

Правило (EA) уравнивает убыток, поэтому все ивесторы несут равные потери.

$M_1 = 0.6 \cdot 1.6 \cdot 500000 + 0.4(-525000) = 270000$

$M_2 = 0.6 \cdot 1.6 \cdot 750000 + 0.4(-525000) = 510000$

$M_3 = 0.6 \cdot 1.6 \cdot 1000000 + 0.4(-525000) = 750000$

Воспользуемся теперь динамической моделью банкротства. Положим поэтапные выплаты $E(t) = (1000000, 1250000)$. Решим полученную двухшаговую игру при помощи программного пакета MATLAB. Получим следующие результаты:

Инвестор	Сумма выплаты
1	167500
2	250500
3	257000

Тогда ожидаемый доход от инвестиции для каждого инвестора:

$M_1 = 0.6 \cdot 1.6 \cdot 500000 + 0.4(167500 - 500000) = 347000$

$M_2 = 0.6 \cdot 1.6 \cdot 750000 + 0.4(250500 - 750000) = 520200$

$M_3 = 0.6 \cdot 1.6 \cdot 1000000 + 0.4(257000 - 1000000) = 662800$

Сравним полученные результаты.

Проанализируем, как будет изменяться прибыль инвесторов при различных вероятностях с использованием всех правил. Построим диаграммы доходов агентов.

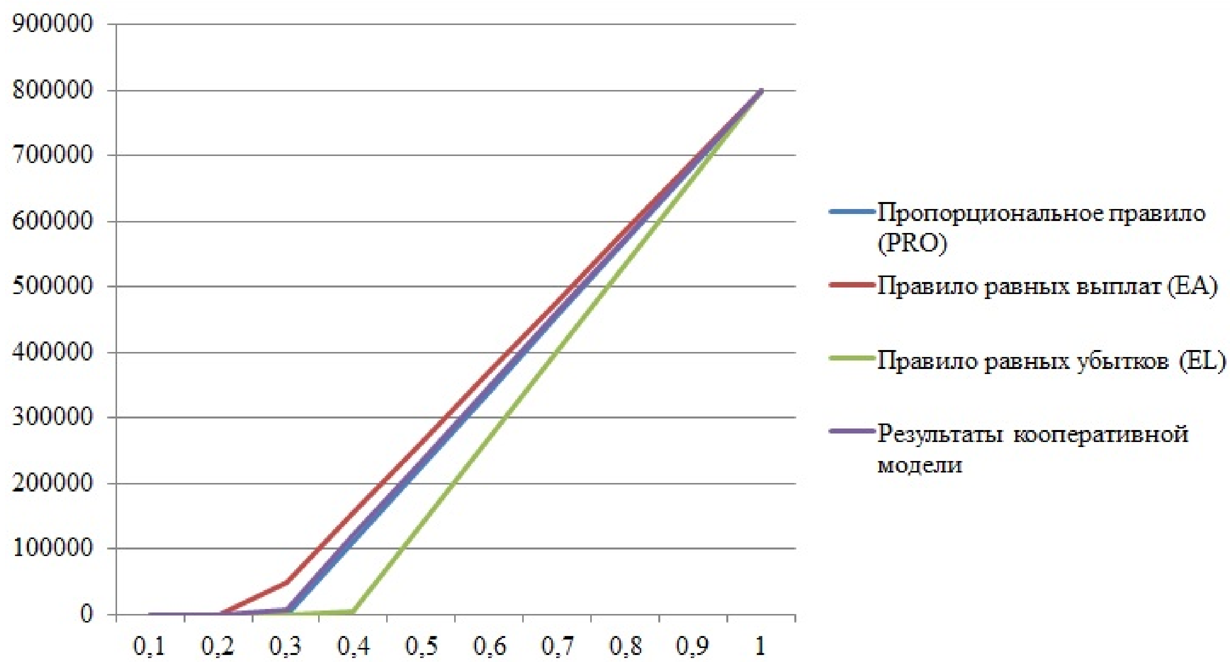

Рис. 1. Прибыль инвестора 1 при различном распределении вероятности

Очевидно, что использование правила равных выплат наиболее выйгрышно для инвестора 1. Данный инвестор внес наименьшую сумму, а получает в итоге равную долю со всеми игроками. При использовании такого правила инвесторы с большими вложениями несут большие потери. Отсюда получается снижение начальных взносов и уменьшение суммарного капитала. Поэтому данное правило крайне редко применяется на практике.

Результаты кооперативной модели почти повторяют выплаты при использовании правила (PRO). Но при этом они несут более высокие выплаты инвестору. Поэтому, использование многошаговой модели банкротства выгодно в этой ситуации. Проанализируем результаты моделирования для инвестора 2 и 3. Построим соответствующие диаграммы.

Для второго инвестора все правила приносят почти одинаковый доход. Поэтому для него трудно вынести наиболее предпочтительное правило.

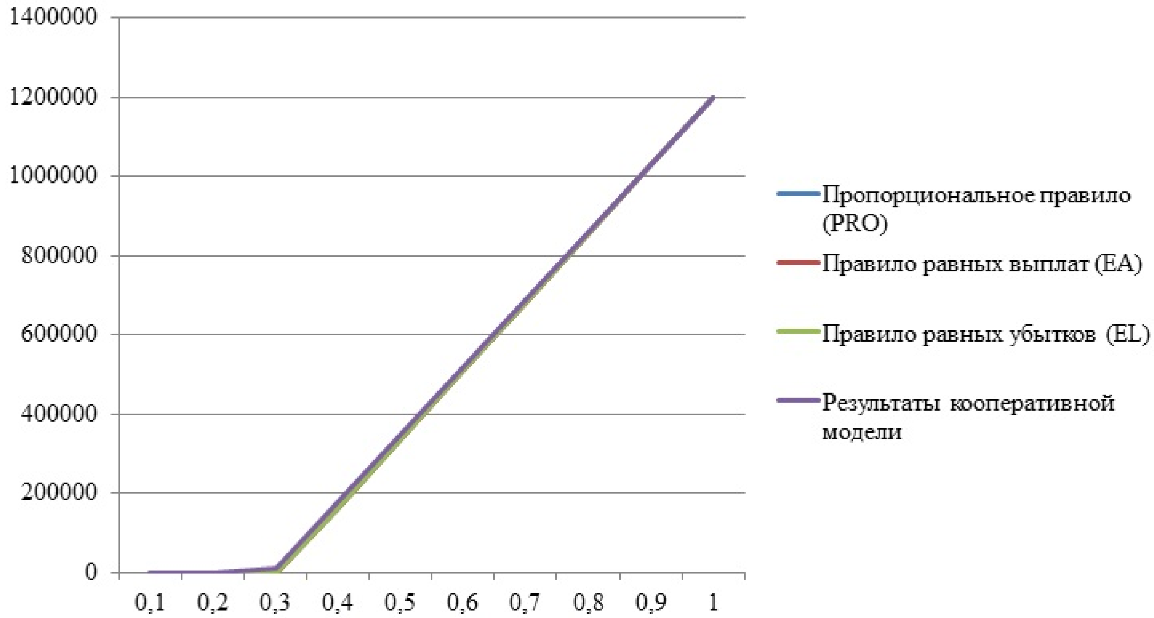

Рис. 2. Прибыль инвестора 2 при различном распределении вероятности

Для инвестора 3, очевидно, большие суммы дает правило равных убытков.

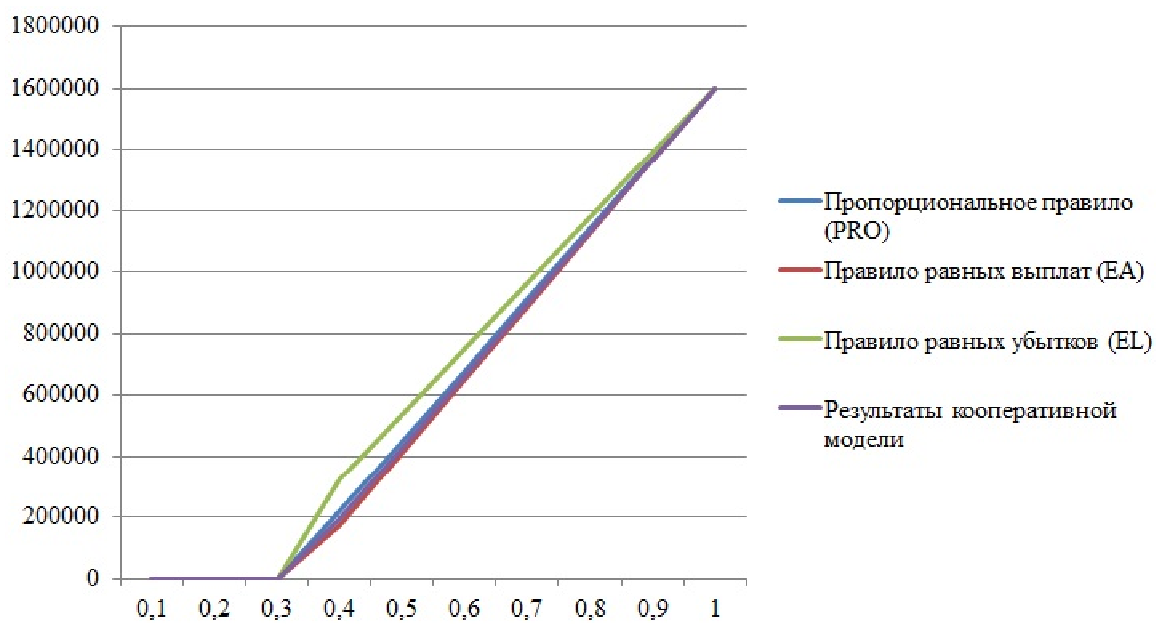

Рис. 3. Прибыль инвестора 3 при различном распределении вероятности

Результаты игровой модели более высокие в сравнении с пропорциональным правилом для рассматриваемого инвестора. А правило равных выплат даёт наименьший ожидаемый доход.

Итак, на данном примере продемонстрировано ещё одно преимущество многошаговой модели банкротства предприятия. Распределение денежных средств в ситуации несостоятельности фирмы-участника инвестиционного процесса по алгоритму модели даёт неплохие результаты. В реальной жизни правила равных выплат и равных убытков используют крайне редко, в основном применяют пропорциональное правило. Но оно дает выплаты меньшие, чем динамическая игровая модель банкротства в инвестиционном процессе. Поэтому есть смысл обращаться к теории кооперативных игр.

§2.3. Влияние правил банкротства на объём инвестиций

Изучим теперь влияние различных правил распределения долгов на общий объём инвестиций. Для каждого из правил банкротства мы построим простую игру инвестиций среди n инвесторов, которые одновременно выбирают суммы вложений. Проанализируем равновесия всех этих игр, и сравним с результатами при использовании многошагового метода.

В нашей модели агенты имеют постоянные абсолютные предпочтения неприятия к риску. Они не сталкиваются с ограничениями ликвидности и таким образом, уровень их доходов не имеет значения. Неприятие риска- это параметр, прикрепленный к каждому инвестиционному фонду, который представляет собой тип этого фонда. Поскольку мы не ограничиваем возможные конфигурации риска, наша модель может быть использована для сравнения общества с различными доходами.

Модель

Имеется множество ивесторов $N = \{1, ..., n\}$. Функция неприятия риска $u_i : R_+ \to R$ с использованием денежных ресурсов: $u_i(x) = -e^{-a_i x}$.

Инвестор $i \in N$ вносит капитал $s_i \in R_+$ в фонд. После того, как все участники внесли свою часть, общее сбережение составляет $\sum_N s_i$. С успешной вероятностью $p \in (0, 1)$ капитал увеличивается до суммы $(1+r) \sum_N s_i$, где $r \in (0, 1]$- это доля прибыли. В случае банкротства, с вероятностью $(1 - p)$ капитал уменьшается до значения $\beta \sum_N s_i$, где β - это доля, которая переживает банкротство. Эта сумма распределяется между инвесторами в соответствии с заранее определенным правилом банкротства.

Для каждого правила банкротства G мы анализируем следующую инвестиционную игру. Каждый инвестор имеет множество стратегий S_i, из которого он выбирает сумму ивестиции s_i. Пусть $S = \prod\limits_N S_i$. Для выбранной стратегии s_i инвестора соответствует прибыль $(1 + r)s_i - s_i = rs_i$ и потеря $G_i(s) - s_i$.

Игрок i получает выигрыш, соответствующий стратегии s_i:

$$U_i^G(s) = pu_i(rs_i) + (1 - p)u_i(G_i(s) - s_i)).$$

Пусть $U^G = (U_1^G, U_2^G, ..., U_n^G)$. Тогда инвестиционной игрой для правила банкротства G назовём пару $\Gamma^G = (S, U^G)$.

Перейдём к анализу равновесий Нэша и доминирующих стратегических равновесий каждой игры.

Пропорциональное правило (PRO)

Утверждение 1. Если $ln\ \frac{(pr)}{(1-p)(1-\beta)} \leq 0$, то инвестиционная игра имеет оптимальную доминирующую стратегию равновесия (0,0,0,...,0). В противном случае, игра имеет оптимальную ситуацию s^*, где каждый игрок i выбирает положительную величину ивестиции

$$s_i^* = \frac{1}{a_i(r+1-\beta)} ln \frac{(pr)}{(1-p)(1-\beta)}$$

Никаких других равновесий по Нэшу не существует.

Правило равных выплат (EA)

Утверждение 2. Если $ln \frac{npr}{(1-p)(n-\beta)} \leq 0$, то инвестиционная игра имеет равновесие по Нэшу (0,0,0,...,0). Иначе, каждый игрок выбирает оптимальную величину инвестиции

$$s_i^* = \frac{n(1+r-\beta)+\beta+\beta a_i \sum_{N\notin i} \frac{1}{a_j}}{a_i n(1+r-\beta)(1+r)}$$

Никаких других равновесий по Нэшу не существует.

Правило равных убытков (EL)

Утверждение 3. Если $ln \frac{npr}{(1-\beta)(1-p)} \leq 0$, то инвестиционная игра имеет равновесие по Нэшу (0,0,0,...,0). В противном случае, существует такой номер $k < n$, что ситуация равновесия по Нэшу имеет вид $s^* = (s_1^*, s_2^*, ..., s_k^*, 0, 0, ..., 0)$, где ненулевые компоненты равны

$$s_i^* = (\frac{1}{a_i} - \frac{1-\beta}{(1-\beta)k+nr} \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{a_j}) \frac{ln \frac{npr}{(1-\beta)(1-p)}}{r}.$$

Проверим индивидуальные уровни инвестиций в числовом примере для двух инвесторов. Пусть $r = 0.3$, $p = 0.8$, $\beta = 0.7$ и $a_1 = 1$. Рассмотрим s_1^* и s_2^* как функции от a_2 для трех экстремальных правил: PRO, EL, EA.

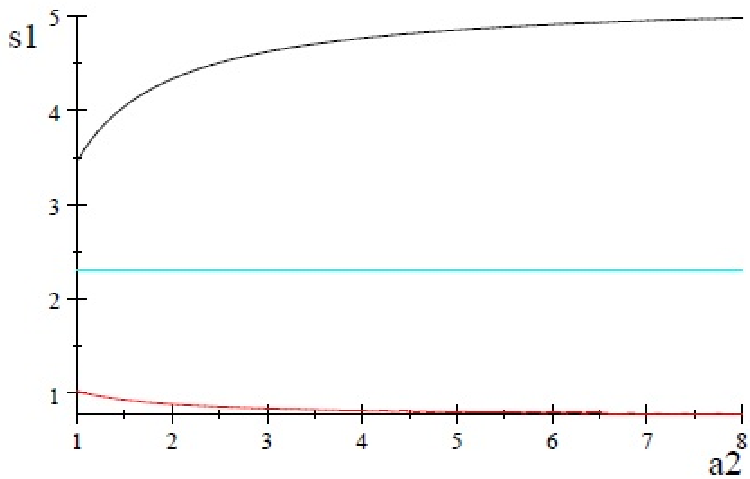

Рис. 4. Равновесие для инвестора 1: EA(красный) PRO(зелёный) EL(черный)

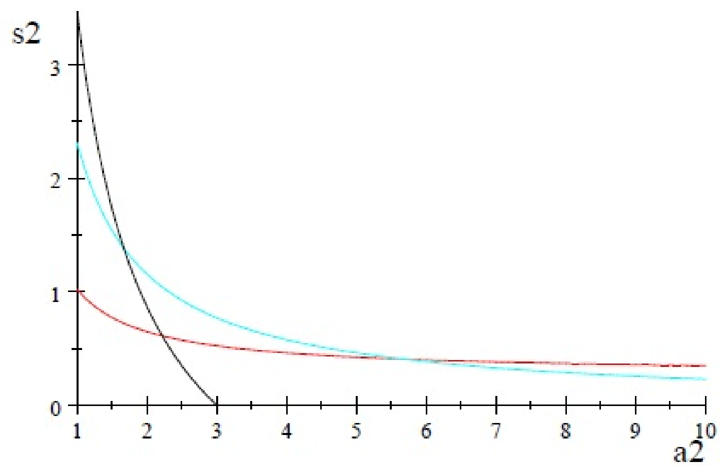

Рис. 5. Равновесие для инвестора 2: EA(красный) PRO(зелёный) EL(черный)

Изучив отдельные уровни инвестиций, не наблюдается четкого упорядочения трех правил. Тем не менее, со стороны исследования объема инвестиций, мы получаем сильный результат. С точки зрения общего объема инвестиций, правила располагаются в следующем порядке:

$$EL > PRO > EA.$$

Это говорит о том, что правило равных убытков приводит к увеличению общей суммы вложенных инвестиций, в сравнении с пропорциональным правилом.

Сравним теперь применение одношагового и многошагового подходов. Исследуем равновесие для первого инвестора из примера 4. Поставим в сравнение правило пропорциональности, результаты которого совпадают с одношаговым игровым процессом, и динамическую модель банкротства.

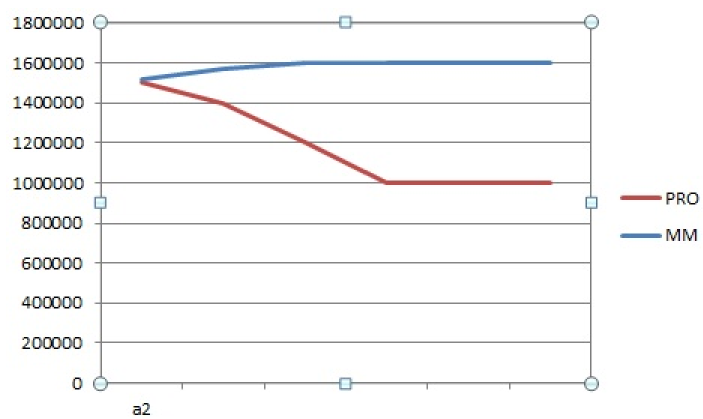

Рис. 6. Равновесие для инвестора 1

Получаем что, многошаговая кооперативная модель для данного примера даёт наилучший результат. Следовательно, имеет место применение таких методологий в практических задачах.

Таким образом, не всегда правило пропорциональности, которое чаще всего используется в жизни, даёт наиболее высокий индивидуальный доход и наибольший объём инвестиций в инвестиционном процессе.

Заключение

На основании проделанной работы мы можем сделать следующие выводы:

Проблема распределения долгов кредиторам является актуальной и активно обсуждается в научной литературе. Существует много методов возврата задолженностей для задачи банкротства предприятия. Одним из таких методов является кооперативная теория игр. Мы построили динамическую модель несостоятельности фирмы, которая учитывает распределение долгов во времени. Данная модель основывается на принципе оптимальности-векторе Шепли. Работа методологии продемонстрирована на реальных жизненных примерах. Результаты решения игры отличаются от распределения по трём стандартным правилам банкротства: пропорционального правила, правила равных выплат и правила равных убытков. Таким образом, получен новый результат. Для облегчения вычислений шагов игры построен программный алгоритм (см. Приложение).

Кроме того, было выявлено, что вышеуказанные теоретические правила распределения долгов и многие игровые модели не учитывают приоритет заявителей при погашении задолженностей. Они берут во внимание только лишь количественные меры требований кредиторов. Хотя в каждой стране существует свой порядок выплат. Так, в России выделяют три основные очереди кредиторов. Денежные средства каждой следующей очереди не могут быть выплачены, пока не погашены заявки предыдущей очереди. Поэтому мы ввели в нашу многошаговую модель соответствующие ограничения. На каждом шаге мы заранее расчитываем выплаты приоритетных игроков, вычитаем их из общих сумм, а остальные заявители разыгрывают оставшиеся деньги по старому алгоритму. Решение такой игры не противоречит законам. Мы имеем полноценную картину выплат всем игрокам в каждый момент времени рассматриваемого промежутка. Получаем, что эта методология применима в реальной жизни.

Вторая часть нашего исследования посвящена влиянию различных правил выплат долгов на инвестиционные процессы. Фирмы, в которые вкладывают денежные средства ивесторы, заранее в договоре определяют метод выплат в случае банкротства. Им нужно выбрать оптимальное правило, для того чтобы привлечь больше инвесторов и повысить общий инвестиционный капитал. Поэтому сравнение применения различных правил актуально в настоящее время. В работе сравниваются средний ожидаемый доход отдельных инвесторов и общий объём инвестиций при использовании трех стандартных правил банкротства (PRO, EA, EL) и многошаговой кооперативный модели из главы 1.

При изучении личного дохода инвесторов было показано, что многошаговая модель даёт более высокие результаты, чем пропорциональное правило. Правила равных выплат и равных убытков в отдельных ситуациях дают более высокие уровни дохода. Но они на практике используются довольно редко, так как многие считают, что данные алгоритмы несправедливы. Поэтому применение динамической кооперативной модели, на мой взгляд, является выигрышным для таких ситуаций.

Далее, мы исследовали инвестиционное поведение в стране различными способами. Мы построили некооперативную игру инвестиции для каждого правила банкротства, где стратегия каждого игрока - это сумма денежного взноса. В нашей модели агенты имеют постоянные абсолютные предпочтения отвращения к риску и упорядочены по степени неприятия риска. Мы интерпретируем уровни неприязни игроков к риску, как убывающую функцию уровней дохода. Нашли соответствующие равновесия для всех игр, и сравнили полученные результаты. Получили что, правило равных убытков и многошаговая модель чаще всего дают наиболее высокий общий объём инвестиции, чем правило пропорциональности, которое в большей степени используется на практике.

В заключении, нельзя однозначно определить, какой из возможных методов является более справедливым, так как увеление выплат одних кредиторов осуществляется за счет увеличения потерь других. Но, как показывает наше исследование, применение кооперативной игровой методологии может быть полезно в реальной жизни. Так как решение таких моделей дает неплохие результаты. Стоит обратить внимание на динамачиское моделирование. Банкротство предприятия - это длительный процесс, а заявителей волнует распределение их долгов во времени. Применение таких моделей может помочь избежать ряд конфликтов.

Список литературы

1. Aumann R., Maschler M. E. Game theoretic analysis of a bankruptcy problem from the Talmud. // Journal of Economic Theory, 1985.Vol. 36, No 1.P. 195 – 213.
2. Herrero C., Villar A. The three musketeers: four classical solutions to bankruptcy problems. // Mathematical Social Sciences, 2001. Vol. 39, No 3. P. 307 – 328.
3. Thomson W. Axiomatic and Game-theoretic Analysis of Bankruptcy and Taxation Problems.// Mathematical Social Sciences, 2003. Vol. 45, No 3. P. 249 – 280.
4. Петросян Л. А., Зенкевич Н. А., Шевкопляс Е. В. Теория игр.М.:БХВ-Петербург, 2014.- 423 с.
5. O'Neill A problem of rights arbitration from the Talmud //Mathematical Social Sciences , 2011. No 2. P. 345 – 371.
6. Guiasu S. Three ancient problems solved by using the game theory logic based on the Shapley value.//Knowledge, Rationlity and Action, 2011. Vol. 181, No 1. P. 65 – 79.
7. Грузинов В. П., Экономика предприятия: Учеб. для вузов. - М.: Банки и биржи: ЮНИТИ, 1999.- 535 с.
8. Ковалёв А. П. Диагностика банкротства. – М.: АО «Финстатинформ», 1995. – 96 с.

9. Yeung D. W. K., Petrosjan L. A. Cooperative Stochastic Differential Games. New-York, Heidelberg, London: Springer, 2006. 242 P.

10. Закон Российской Федерации от 19 ноября 1992 № 3929-1 “О несостоятельности (банкротстве) предприятий” //Российская газета от 30.12.92

11. Kibris A., Kibris O. On the investment implications of bankruptcy laws //Games and Economic Behavior. 2013. Vol. 80, No 1. P. 85 - 99.

12. Karagozoglu E. A noncooperative approach to bankruptcy problems with an endogenous estate.// Annals of Operations Research 2014. Vol. 217, No 1. P. 299 - 318.

13. Eraslan H. K., Yilmaz B. Deliberation and Security Design in Bankruptcy.//Rice Economics Home 2014. Vol. 15, No 1. P. 14 - 29.

Приложение

Программная реализация для примера 2. Построение двух кооперативных игр трёх лиц. Вычисление для них соответствующих характеристических функций, векторов Шепли.

```
v2=0;
v3=0;
v4=500000-100000-200000;
v23=0;
v24=500000-200000;
v34=500000-100000;
v234=500000;
Sh21=1/3*(-v34)+1/6*(-v4)+1/6*(v24)+1/3*(v234);
Sh31=1/3*(-v24)+1/6*(-v4)+1/6*(v34)+1/3*(v234);
Sh41=1/3*(v4)+1/6*(v34)+1/6*(v24)+1/3*(v234);
syms x2 x3 x4
w2=0;
w3=0;
w4=187500-(100000-x2)-(200000-x3)
w23=0;
w24=187500-(200000-x3);
w34=187500-(100000-x2);
w234=187500;
Sh22=1/3*(-w34)+1/6*(-w4)+1/6*(w24)+1/3*(w234);
Sh32=1/3*(-w24)+1/6*(-w4)+1/6*(w34)+1/3*(w234);
Sh42=1/3*(w4)+1/6*(w34)+1/6*(w24)+1/3*(w234);
A=[Sh21-Sh22-x2;Sh31-Sh32-x3;Sh41-Sh42-x4]
f=[0;0;0]
x=gauss(A,f)
```

Метод Гаусса для решения n линейных уравнений с n неизвестными.

```
function gauss(A,B)
r=size(A,1);
c=size(A,2);
obrA=inv(A);
ravno=obrA*B;
disp('Матричный метод');
```

```
disp(ravno);
AB=[A,B];
    if (rank(A)==rank(AB))

        if (rank(A)==c)
                disp('Одно решение(совместна и определена)');
            %прямой ход
            k=1;
            while k<=r
                if(AB(k,k)~=0)
                    AB(k,:)=AB(k,:)/AB(k,k);
                    for i=k+1:r
                        AB(i,:)=AB(i,:)-AB(k,:)*AB(i,k);
                    end
                    k=k+1;
                else
                    temp=AB(k,:);
                    AB(k,:)=[];
                    AB=[AB;temp];
                end
            end
            %обратный ход
            for i=r-1:-1:1
                for k=i+1:c
                    AB(i,:)= AB(i,:)-AB(k,:)*AB(i,k);
                end
            end
            disp (AB(:,end));
        else disp('Система имеет больше одного решения(совместна, но неопределена');
        end
    else
        disp('Нет решений(несовместна)');
    end

end
```

Вычисление сумм выплат при использовании многошаговой модели для примера 4.

```

v1=0;
v2=0;
v3=0;
v12=0;
v23=0;
```

```
v13=0;
v123=300000;
Sh11=1/3*(v123);
Sh21=1/3*(v123);
Sh31=1/3*(v123);
syms x1 x2 x3
w1=max(375000-750000+x2-10^6+x3,0);
w2=max(375000-500000+x1-10^6+x3,0);
w3=max(375000-500000+x1-750000+x2,0);
w12=max(375000-10^6+x3);
w13=max(375000-750000+x2,0);
w23=max(375000-500000+x1,0);
w123=375000;
Sh22=1/3*(-w34)+1/6*(-w4)+1/6*(w24)+1/3*(w234);
Sh32=1/3*(-w24)+1/6*(-w4)+1/6*(w34)+1/3*(w234);
Sh42=1/3*(w4)+1/6*(w34)+1/6*(w24)+1/3*(w234);
A=[Sh21-Sh22-x2;Sh31-Sh32-x3;Sh41-Sh42-x4]
f=[0;0;0]
x=gauss(A,f)
```