

САНКТ–ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
КАФЕДРА ТЕОРИИ СИСТЕМ ЭЛЕКТРОФИЗИЧЕСКОЙ АППАРАТУРЫ

Винничек Никита Николаевич

Магистерская диссертация

**Численная устойчивость разделяющихся методов
решения систем обыкновенных
дифференциальных уравнений**

Направление 03.04.01

Прикладная математика и физика

Магистерская программа: «Математические и информационные технологии»

Научный руководитель,
кандидат физ.-мат. наук,
доцент кафедры
информационных систем
Еремин А.С.

Санкт-Петербург

2018

Содержание

Содержание	2
Введение	3
Постановка задачи	7
Обзор литературы	8
Глава 1. Устойчивость классических методов Рунге — Кутты	9
1.1. Тестовое уравнение Далквиста	10
1.2. Сведение системы к одному уравнению	11
1.3. Примеры функций устойчивости явных методов	13
Глава 2. Перекрёстная система	15
2.1. Уравнения второго порядка и устойчивость методов Рунге — Кутты — Нюстрёма	16
2.2. Равносильная перекрёстная система	17
2.2.1. Устойчивость при чисто мнимых λ	18
2.2.2. Альтернативный подход к определению устойчивости	25
2.3. Сведение к случаю равных элементов	29
2.4. Сведение блочно-перекрёстной системы к простейшей матрице	31
Глава 3. Система 0J	38
3.1. Простейшая система 0J	39
3.2. Сведение системы из двух уравнений к простейшей	41
3.3. Блочная система	43
Выводы	44
Заключение	45
Список литературы	47

Введение

В истории развития классических методов численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), таких как методы Рунге — Кутты (РК), экстраполяции, Адамса, изначально разработанных для ручного счета, наблюдается постоянное расширение классов решаемых задач, обусловленное технологическим развитием машинного счета. Мощности ЭВМ непрестанно росли, что давало ещё больше возможностей для решения более трудных и сложных задач. С новыми задачами стали появляться и новые трудности, связанные с аппроксимацией и устойчивостью более эффективных и надежных алгоритмов численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ).

Отсутствие однородности в реальных задачах, состоящее в том, что встречаются задачи не исключительно жесткого или нежесткого типов, а почти всегда их сочетание, явилось важным мотивом для усовершенствования и развития численных методов решения жестких и нежестких типов задач.

Классический подход к распространению методов решения скалярных уравнений на системы заключается в формальной подстановке векторов в расчётные схемы. Однако, возможен другой способ, при котором для разных компонентов вектора неизвестных функций применяются разные расчётные схемы. Такие методы, которые называют многосхемными, получили применение при решении так называемых разделяющихся СОДУ, в которых выделяют, например, жёсткую и нежёсткую части и решают их по-разному. В настоящее время многосхемные методы используют в том числе в построениях симплектических решателей, для решения уравнений в частных

производных, для лучшего отслеживания быстрых и медленных процессов в сложных системах и т. д.

В общем виде явный метод Рунге — Кутты численного интегрирования разделяющейся СОДУ

$$\begin{aligned} \frac{dy_s}{dx} &= f_s(x, y_0, \dots, y_n), \quad s = 0, 1, \dots, n, \\ y_s(x_0) &= y_{s0}, \quad s = 0, 1, \dots, n, \\ x &\in [X_0, X_k] \subset R, \quad y_s: [X_0, X_k] \rightarrow R, \\ f_s &: [X_0, X_k] \times R^{n+1} \rightarrow R, \quad s = 0, 1, \dots, n, \end{aligned}$$

выглядит следующим образом:

$$y_s(x+h) \approx z_s = y_s(x) + \sum_{\omega=1}^{m_s} b_{s\omega} k_{s\omega}(h), \quad s = 0, 1, \dots, n,$$

где функция $k_{s\omega} = k_{s\omega}(h)$ вычисляется по схеме

$$\begin{aligned} k_{s\omega} &= hf_s(x + c_{s\omega}h, y_0(x) + \sum_{g=1}^{\omega-1} a_{s\omega 0g} k_{0g}, \dots, y_n(x) + \sum_{g=1}^{\omega-1} a_{s\omega ng} k_{ng}), \\ c_{s1} &= 0, \quad a_{s\omega t1} = 0, \quad t = 0, 1, \dots, n, \end{aligned}$$

а $y_s(x+h), z_s$ — являются точным и приближенным значениями s -й компоненты в точке $x+h \in [X_0, X_k]$ соответственно, h — шаг метода.

Мы рассматриваем структурные методы [4] с целью минимизации числа этапов интегрирования, для повышения быстродействия, в случае, когда структурные особенности системы это позволяют. Во многих случаях при интегрировании СОДУ можно произвести разделение по структурным признакам. Так, например, один из вариантов такой структурной

классификации подразумевает выделение трёх классов разделенных структурно выраженных систем.

Класс $\mathfrak{A}(n)$ – системы разделяющихся ОДУ с перекрестной структурой связей:

$$y_1' = f_1(x, y_n),$$

$$y_j = f_j(x, y_{j-1}), \quad j = 2, \dots, n,$$

здесь y_s, f_s – функции размерности r_s . Необходимость в интегрировании систем класс $\mathfrak{A}(2) \equiv \mathfrak{A}(n)$, при $n = 2$

$$y_1' = f_1(x, y_2),$$

$$y_2' = f_2(x, y_1),$$

возникает достаточно часто в задачах моделирования механических и физических систем, управления и оптимизации. Так же, этому классу принадлежат и система ОДУ, полученная в результате сведения СДУ второго порядка, правая часть которых не зависит от первой производной. К примеру, задача небесной механики – задача двух тел. [4]

Системы класса $\mathfrak{A}(n)$, при $n \geq 3$, на практике встречаются реже. К примеру, задача классического оптимального линейного быстрогодействия или дифференциальное уравнение n – го порядка $y^n = f(x, y)$.

Второй класс – \mathfrak{B} (системы структурно разделяющихся ОДУ):

$$y_i' = f_i(x, y_1, \dots, y_{i-1}, y_{l+1}, \dots, y_n), \quad i = 1, \dots, l,$$

$$y_j' = f_j(x, y_1, \dots, y_{i-1}, y_{j-1}), \quad j = l + 1, \dots, n,$$

где y_s, f_s – функции размерности r_s .

Явный одношаговый метод типа Рунге — Кутты, ориентированный на интегрирование систем класса \mathfrak{B} , носит название метода класса \mathfrak{B} .

Последний класс – \mathfrak{C} (системы структурно разделяющихся ОДУ общего вида):

$$\begin{aligned}
 y'_0 &= f_0(x, y_0, y_1, \dots, y_n), \\
 y'_i &= f_i(x, y_1, \dots, y_{i-1}, y_{l+1}, \dots, y_n), \quad i = 1, \dots, l, \\
 y'_j &= f_j(x, y_1, \dots, y_{i-1}, y_{j-1}), \quad j = l + 1, \dots, n, \\
 l &\in \{0\} \cup N, n \in \{0\} \cup N, l \leq n, \\
 x &\in [X_0, X_k] \subset R, y_s: [X_0, X_k] \rightarrow R^{r_s}, \quad s = 0, 1, \dots, n, \\
 f_0: [X_0, X_k] \times R^r &\rightarrow R^{r_0}, \quad \sum_{s=0}^n r_s = r, \\
 f_i: [X_0, X_k] &\rightarrow R^{r - \sum_{g=i}^l r_g} \rightarrow R^{r_i}, \quad i = 1, \dots, l, \\
 f_j: [X_0, X_k] &\rightarrow R^{r - \sum_{g=j}^n r_g} \rightarrow R^{r_j}, \quad j = l + 1, \dots, n, \quad r_0 > 0.
 \end{aligned}$$

Необходимость в интегрировании систем класса \mathfrak{C} возникает, например, в задачах различных систем ускорения и транспортировки пучков заряженных частиц. [4]

Явный одношаговый метод типа Рунге — Кутты, ориентированный на интегрирование систем класса \mathfrak{C} , носит название метода класса \mathfrak{C} .

Стоит отметить, что любой из методов класса \mathfrak{C} может быть использован для интегрирования систем классов $\mathfrak{A}(n)$ и \mathfrak{B} , а любой из методов класса \mathfrak{B} – для интегрирования систем класса $\mathfrak{A}(n)$.

Постановка задачи

Эффективность специальных методов решения структурно разделённых систем обыкновенных дифференциальных уравнений, получивших название структурных методов, по критерию «вычислительные затраты/точность» была продемонстрирована на численных примерах и не вызывает сомнения [2] – [3]. Тем не менее остаётся актуальным вопрос о правомерности применения данных методов с точки зрения численной устойчивости получаемых решений.

Численный метод решения СОДУ, имеющей устойчивые точные решения, должен, хотя бы при некоторой длине шага интегрирования, давать устойчивое численное решение.

Необходимо понять, как исследовать устойчивость структурных методов и провести сравнительный анализ с классическими методами. Возможно, существуют способы найти такие методы, которые будут не только более экономичными, чем классические явные методы Рунге — Кутты, но и более устойчивыми. Особый интерес представляет рассмотрение устойчивости структурных методов на системах наиболее общего вида, содержащих так называемую общую группу уравнений, не обладающих структурными особенностями.

Обзор литературы

Во время научно-исследовательской работы, результаты которой описаны в данной диссертации, были использованы научная и учебно-методическая литература, монографии видных научных деятелей физико-математических наук, статьи студентов и выпускников факультета прикладной математики — процессов управления.

Основным источником, описывающим структурный методы и приводящим их расчетные схемы, является монография доктора физико-математических наук Олемского Игоря Владимировича [4]. В этом труде рассматриваются основные принципы использования структурных особенностей систем обыкновенных дифференциальных уравнений, представлена классификация структурных особенностей и выписаны методы интегрирования для каждого из выделенных в этой классификации типов.

Дж. Дорманд с соавторами в [10] рассмотрели устойчивость метода типа Ньюстрёма. Первые попытки подойти к изучению устойчивости структурных методов предприняты в работе [8] в рамках 42-й международной научной конференции аспирантов и студентов. Рассматривается только подход с согласованными начальными условиями для простейших систем. Позднее, автором в [1] был предложен альтернативный подход к исследованию устойчивости структурных методов. Рассматривались уже системы более общего вида. Полученные результаты, описанные в статье [1], дали мотивацию продолжить исследование по данной тематике. Исследования, приведенные в представленной магистерской диссертации, есть обобщение уже всех имеющихся данных и более детальные рассуждения на тему вопроса устойчивости структурных методов.

Глава 1. Устойчивость классических методов Рунге — Кутты

В известной работе Куранта, Фридрихса и Леви (1928) впервые был выполнен анализ явлений неустойчивости и получены ограничения на длину шага для гиперболических уравнений. Позднее анализ устойчивости проводился многими авторами [7], очень часто независимо друг от друга, чтобы объяснить явления, которые встречаются в решениях систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Пусть $\varphi(x)$ – гладкое решение уравнения $y' = f(x, y)$. Линеаризуем f в его окрестности следующим образом:

$$y'(x) = f(x, \varphi(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))(y(x) - \varphi(x)) + \dots$$

и введем обозначение $y(x) - \varphi(x) = \bar{y}(x)$, тогда получим

$$\bar{y}'(x) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))\bar{y}(x) + \dots = J(x)\bar{y}(x) + \dots$$

В качестве первого приближения положим матрицу Якоби $J(x)$ постоянной и пренебрежем остаточными членами. Опуская черточки, придем к уравнению

$$y' = Jy. \quad (1.1)$$

Если теперь мы применим к (1.1), например, метод Эйлера, то получим

$$y_{m+1} = R(hJ)y_m, \quad (1.2)$$

где

$$R(z) = 1 + z.$$

Поведение (1.2) изучается с помощью приведения J к жордановой канонической форме. Предположим, что J может быть приведена к

диагональному виду с собственными векторами v_1, v_2, \dots, v_n , и запишем y_0 в этом базисе в виде

$$y_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i.$$

Подставив это в (1.2), получим

$$y_m = \sum_{i=1}^n (R(h\lambda_i))^m \alpha_i v_i,$$

где λ_i – соответствующие собственные значения. Ясно, что y_m остается ограниченным при $m \rightarrow \infty$, если для всех собственных значений комплексные числа $z = h\lambda_i$ лежат в области

$$S = \{z \in \mathbb{C}; |R(z)| \leq 1\} = \{z \in \mathbb{C}; |z - (-1)| \leq 1\},$$

которая представляет собой круг радиуса 1 с центром -1 .

1.1. Тестовое уравнение Далквиста

Явный метод Рунге — Кутты, примененный к (1.2) дает

$$g_i = y_m + hJ \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} g_j,$$

$$y_{m+1} = y_m + hJ \sum_{j=1}^s b_j g_j.$$

Последовательно подставляя g_j из первой строки во вторую, мы получим

$$y_{m+1} = R(hJ)y_m,$$

где $R(z)$ – многочлен степени $\leq s$:

$$R(z) = 1 + z \sum_j b_j + z^2 \sum_{j,k} b_j a_{jk} + z^3 \sum_{j,k,l} b_j a_{jk} a_{kl} + \dots$$

Определение [7]. Функция $R(z)$ называется *функцией устойчивости* данного метода. Она может быть интерпретирована как численное решение после одного шага для задачи

$$y' = \lambda y, \quad y_0 = 1, \quad z = h\lambda,$$

известной как *тестовое уравнение Далквиста*. Множество

$$S = \{z \in \mathbb{C}; |R(z)| \leq 1\}$$

называется *областью устойчивости* данного метода. Она показывает, как при фиксированном собственном числе λ ограничен обеспечивающий устойчивость метода шаг h . Как правило, интерес представляет левая полуплоскость, соответствующая при $h > 0$ собственному числу λ с неположительной действительной частью, т. е. устойчивому решению.

1.2. Сведение системы к одному уравнению

В случае же рассмотрения системы нелинейных уравнений

$$y' = Ay \tag{1.3}$$

и её линеаризации, можем применить такой же подход. Уравнение Далквиста содержит всего одну λ , однако здесь система линейных уравнений. Для того чтобы проанализировать устойчивость работы методов Рунге — Кутты для такой системы, отметим, что её точным решением, как нам известно, является

$$y(t) = e^{At}y_0.$$

Соответственно, при приведении матрицы A из (1.3) путём невырожденного преобразования к форме Жордана этой матрицы

$$S^{-1}AS = J, \quad A = S^{-1}JS, \tag{1.4}$$

решение будет выглядеть следующим образом:

$$y(t) = S^{-1}e^{Jt}Sy_0. \quad (1.5)$$

Что в свою очередь, при домножении обеих частей равенства (1.5) на S слева, даёт нам возможность сделать следующую замену:

$$z(t) = e^{Jt}z_0.$$

При этом, e^{Jt} представляет собой диагональную матрицу

$$e^{Jt} = \text{diag}(e^{\lambda_i t}).$$

Таким образом, приведение матрицы A к форме Жордана даёт нам возможность рассматривать систему (1.3) как независимую. Тем самым показывая, что точная устойчивость зависит только от собственных чисел матрицы A .

При исследовании структурных методов интегрирования СОДУ на тестовой системе Далквиста, когда вместо $y' = \lambda y$ рассматривается система $y' = Ay$, справедливо

$$y_1 = R(Ah)y_0.$$

Поскольку R представляет собой для, по крайней мере, явных методов отрезок ряда Тейлора, т. е. R – это степенной ряд

$$R(Ah) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i (Ah)^i,$$

при преобразовании (1.4) получаем

$$R(Ah) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i (S^{-1}JS)^i = S^{-1} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i J^i \right) S = S^{-1}R(hJ)S.$$

Вынесение S^{-1} и S за пределы оператора суммы возможно, т. к. при возведении $S^{-1}JS$ в степень S^{-1} и S будут сокращаться при перемножении друг на друга. Таким образом, поскольку J – блочнодиагональная матрица,

применение к ней полиномиальных преобразований даёт нам разве что блочнодиагональную матрицу. Причём, все её блоки являются строго верхнетреугольными матрицами, а значит на диагоналях у этих блоков будут стоять исключительно степени тех же самых собственных чисел. Т. е. рассмотрения для одного блока Жордана и для скалярного уравнения равносильны. Блоки являются независимыми. Значит условие $|R(hJ)| \leq 1$ равносильно условию $|R(h\lambda_i)| \leq 1, i = 0, 1, \dots$.

Основываясь на приведённых рассуждениях можно сказать, что анализ для системы уравнений анализ устойчивости методов интегрирования равносильен анализу для одного уравнения. Просто для каждого из собственных чисел рассматриваемой системы необходимо удовлетворить условие области устойчивости.

1.3. Примеры функций устойчивости явных методов

Если метод Рунге — Кутты имеет порядок p , то

$$R(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^p}{p!} + O(z^{p+1}).$$

Как следствие, все явные методы РК с $p = s$ обладают функцией устойчивости

$$R(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^s}{s!}.$$

Соответствующие области устойчивости для методов Рунге — Кутты 2-го, 3-го, 4-го порядков представлены на рис. 1.1.

Метод Дорманда и Принса имеет порядок 5 с $s = 6$ (7-я стадия служит только для оценки погрешности). Прямыми вычислениями получается следующий результат:

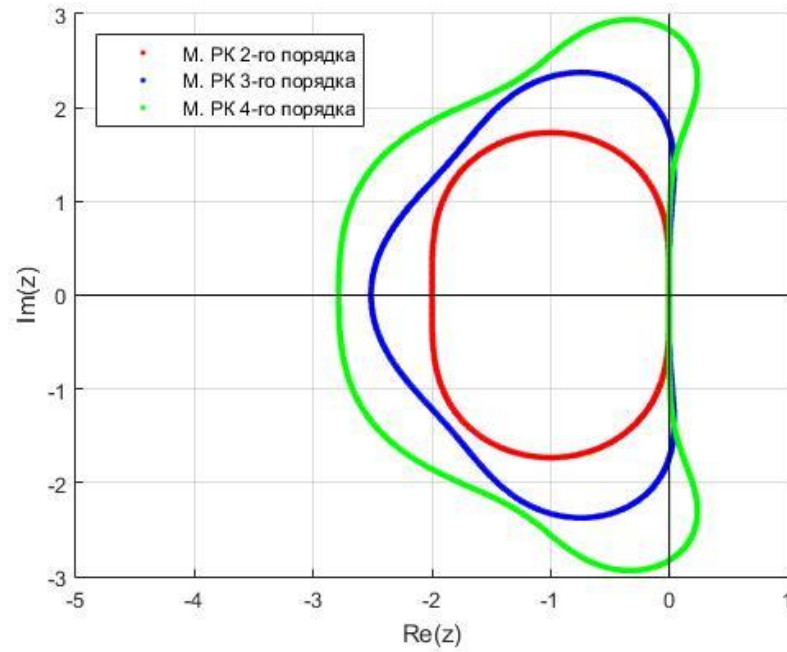


Рис. 1.1.

$$R(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + \frac{z^5}{120} + \frac{z^6}{600}.$$

Области устойчивости для методов Дорманда — Принса [9] 5-го и 6-го порядка представлены на рис. 1.2.

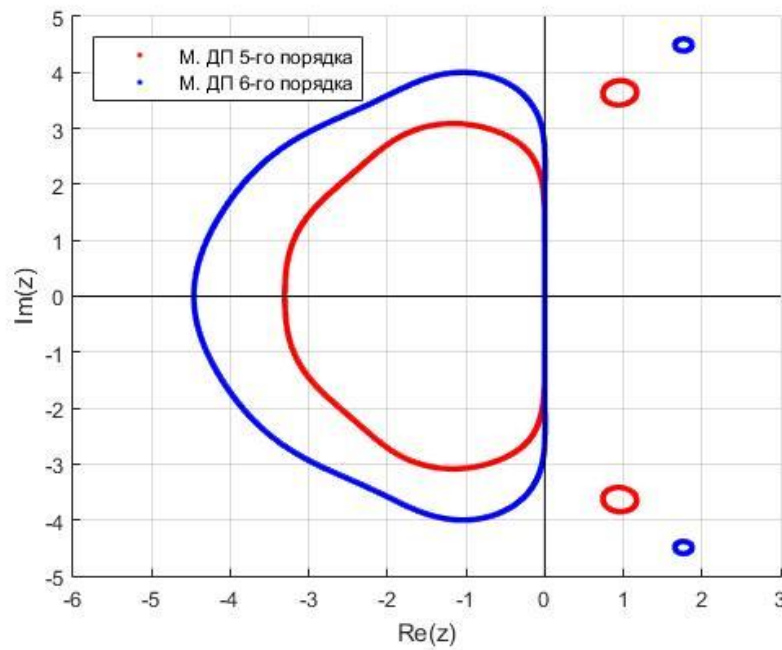


Рис. 1.2.

Глава 2. Перекрёстная система

Методы класса $\mathfrak{A}(2)$, предназначенные для интегрирования систем с перекрёстной системой связей

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_2), \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1), \end{cases} \quad (2.1)$$

$$y_s(X_0) = y_{s0}, \quad s = 1, 2, \quad x \in [X_0, X_1] \subset R, \quad (2.2)$$

актуальны, и необходимость их применения возникает в задачах оптимального управления, небесной механики, физики высоких энергий. Например, при анализе динамики частиц в линейном ускорителе представляет большой интерес зависимость энергии частиц от пройденного расстояния.

С учётом структурных особенностей метод интегрирования систем (2.1) представим в виде

$$y_s(x+h) \approx z_s = y_s(x) + \sum_{v=1}^{m_s} b_{sv} k_{sv}(h), \quad s = 1, 2, \quad (2.3)$$

где функции $k_{sv} \equiv k_{sv}(h)$ вычисляем в строгой последовательности: $k_{11}, k_{21}, k_{12}, k_{22}, \dots$, по схеме

$$k_{1v} = \begin{cases} hf_1(x, y_2(x)), & v = 1, \\ hf_1(x + c_{1v}h, y_2(x) + \sum_{\eta=1}^{v-1} a_{1v\eta} k_{2\eta}), & v > 1, \end{cases} \quad (2.4)$$

$$k_{2v} = hf_2(x + c_{2v}h, y_1(x) + \sum_{\eta=1}^v a_{2v\eta} k_{1\eta}), \quad c_{21} \neq 0. \quad (2.5)$$

Здесь m_s – число этапов (количество вычислений v -й правой части системы (2.1) на шаге интегрирования), причем $m_1 \geq m_2$; $b_{sv}, c_{sv}, a_{sv\eta}$ – параметры метода (2.3)-(2.5); h – шаг метода. Каждому такому методу соответствует компактное представление в виде табл. 2.1 (подтабл. 2.1[1] и подтабл. 2.1[2] – по каждой из компонент).

Таблица 2.1[1]

$c_{1\eta}$	$a_{1\eta v}$			$b_{1\eta}$
c_{11}				b_{11}
c_{11}	a_{121}			b_{12}
....
c_{1,m_1}	$a_{1,m_1,1}$	a_{1,m_1,m_1-1}	b_{1m_1}

Таблица 2.1[2]

$c_{2\eta}$	$a_{2\eta v}$			$b_{2\eta}$
c_{21}	a_{211}			b_{21}
c_{21}	a_{121}			b_{22}
....
c_{2,m_2}	$a_{2,m_2,1}$	a_{2,m_2,m_2}	b_{2m_2}

2.1. Уравнения второго порядка и устойчивость методов Рунге — Кутты — Нюстрёма

Дж. Дорманд с соавторами [10] рассмотрел устойчивость метода типа Нюстрёма на примере уравнения

$$y''(x) = \lambda^2 y(x). \quad (2.6)$$

При этом, начальные условия выбраны так, что решение не содержит одновременно компонентов, соответствующих обоим собственным числам $\pm\lambda$ [12]. Тогда и $y_1(x) = R(z)y_0(x)$ и $y'_1(x) = \bar{R}(z)y_0(x)$. Расчёт устойчивости метода при таком предположении дал результаты, полностью совпадающие с результатами Дж. Дорманда.

Стоит отметить, что уравнение (2.6) легко сводится к системе первого порядка

$$\begin{cases} y'_1(x) = y_2(x), \\ y'_2(x) = \lambda^2 y_1(x), \end{cases}$$

которая равносильна системе

$$\begin{cases} y'_1(x) = \lambda_1 y_2(x), \\ y'_2(x) = \lambda_2 y_1(x). \end{cases}$$

Общее решение такой системы не бывает устойчивым и притягивающим. Поскольку для таких систем y'_i не зависит от y_i , диагональ матрицы A (A – матрица СОДУ) состоит из нулей. Отсюда следует, что $tr(A) = 0$ и, поскольку след любой матрицы равен сумме её собственных чисел, то $\sum \lambda_i = 0$. Поэтому либо существует собственное число λ_k такое, что $Re(\lambda_k) > 0$, либо все собственные числа являются мнимыми. В силу сказанного, интерес представляет исследование устойчивости для такой системы при чисто мнимых λ .

2.2. Равносильная перекрёстная система

Будем рассматривать систему

$$\begin{cases} y'_1(x) = \lambda y_2(x), \\ y'_2(x) = \lambda y_1(x). \end{cases} \quad (2.7)$$

Её аналитическая устойчивость равносильна уравнению второго порядка $y''(x) = \lambda^2 y(x)$. Т. к. такое уравнение само по себе неустойчивое, кроме случая чисто мнимой λ , исследуем устойчивость численного применения классических методов Рунге — Кутты при $Re(\lambda) = 0$.

2.2.1. Устойчивость при чисто мнимых λ

Для метода Рунге — Кутты второго порядка при чисто мнимых λ область устойчивости является пустой, значит сразу можно заявить, что применение этого метода для решения такой задачи не целесообразно.

Для метода Рунге — Кутты третьего порядка появляется область устойчивости вдоль мнимой оси и расширяется для четвёртого порядка метода. Соответствующие области устойчивости представлены на рис. 2.1.

Методы Рунге — Кутты — Нюстрёма для системы (2.7) уже не работают, однако, как раз можно использовать структурные методы. Рассмотрим применение таких методов разных порядков для определения устойчивости решения (2.7).

Рассматриваем метод класса $\mathcal{A}(2)$ второго порядка. Построим матрицу перехода $R(h\lambda)$. Расчетная схема для такого метода имеет вид:

$$\begin{aligned}y_1(x+h) &= y_1(x) + \frac{1}{2}k_{11} + \frac{1}{2}k_{12} + O(h^3), \\y_2(x+h) &= y_2(x) + k_{21} + O(h^3),\end{aligned}$$

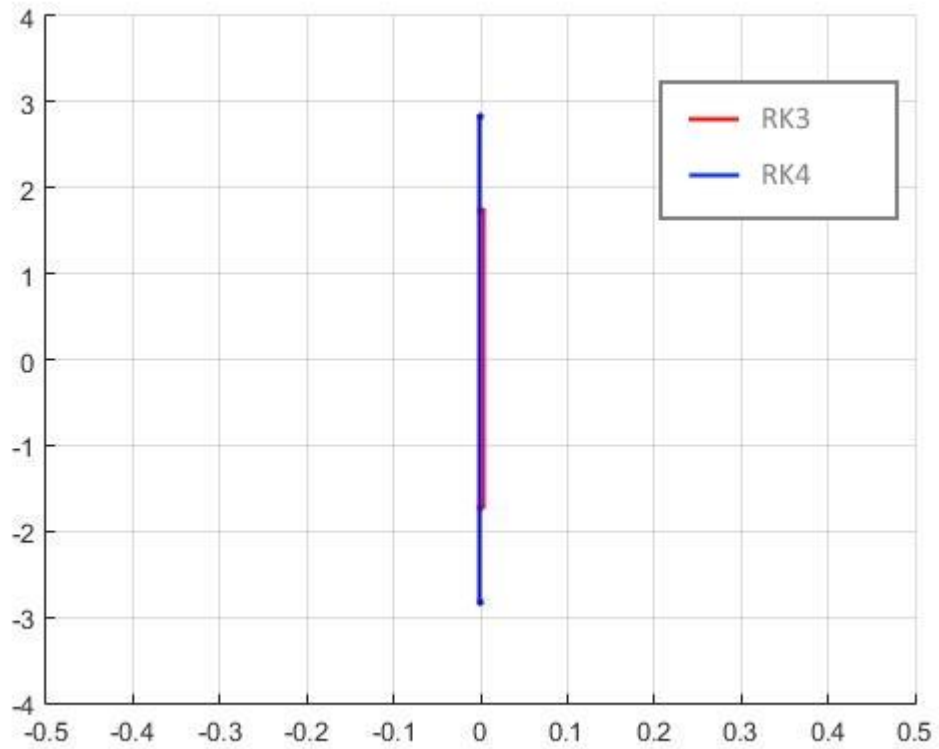


Рис. 2.1.

где k_{ij} вычисляются последовательно:

$$k_{11} = hf_1(x, y_2(x)),$$

$$k_{21} = hf_2\left(x + \frac{1}{2}h, y_1(x) + \frac{1}{2}k_{11}\right),$$

$$k_{12} = hf_1\left(x + \frac{1}{2}h, y_2(x) + k_{21}\right).$$

Расчётная схема имеет табличное представление (табл. 2.2).

Таблица 2.2[1]

$c_{1\eta}$	$a_{1\eta\nu}$	$b_{1\eta}$
0	0	$\frac{1}{2}$
1	1 0	$\frac{1}{2}$

Таблица 2.2[2]

$c_{2\eta}$	$a_{2\eta\nu}$	$b_{2\eta}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

Матрица перехода $R(h\lambda)$ будет выглядеть следующим образом:

$$R(z) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{z^2}{2} & z + \frac{z^3}{4} \\ z & 1 + \frac{z^2}{2} \end{pmatrix},$$

где $z = h\lambda$. Найдя собственные числа, проверяем, при каких чисто мнимых λ $|R(z)| \leq 1$, что соответствует устойчивому решению. Область устойчивости представлены на рис. 2.2.

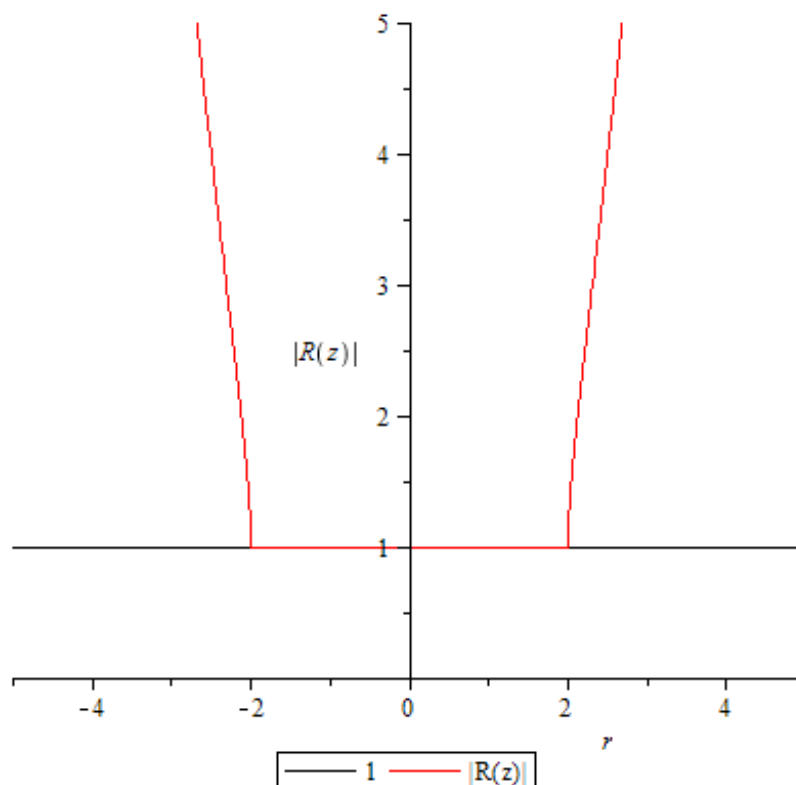


Рис. 2.2.

Как видно, область устойчивости для структурного метода второго порядка уже не является пустой, и такой метод смело можно применять на практике, в то время как о методе Рунге — Кутты второго порядка подобного сказать нельзя.

Аналогичным образом рассмотрим области устойчивости для структурных методов более высокого порядка. Расчетная схема для метода третьего порядка на базе квадратурных формул Гаусса — Лагранжа имеет вид:

$$\begin{aligned}
 y_1(x+h) &= y_1(x) + \frac{9-\sqrt{3}}{52}k_{11} + \frac{13+7\sqrt{3}}{44}k_{12} + \\
 &+ \frac{76-20\sqrt{3}}{143}k_{13} + O(h^4), \\
 y_2(x+h) &= y_2(x) + \frac{1}{2}(k_{21} + k_{22}) + O(h^4),
 \end{aligned}$$

где k_{ij} вычисляются последовательно:

$$\begin{aligned}
 k_{11} &= hf_1(x, y_2(x)), \\
 k_{21} &= hf_2\left(x + \frac{3-\sqrt{3}}{6}h, y_1(x) + \frac{3-\sqrt{3}}{6}k_{11}\right), \\
 k_{12} &= hf_1\left(x + \frac{3-\sqrt{3}}{3}h, y_2(x) + \frac{3-\sqrt{3}}{3}k_{21}\right), \\
 k_{22} &= hf_2\left(x + \frac{3+\sqrt{3}}{6}h, y_1(x) + \frac{3+\sqrt{3}}{6}k_{12}\right), \\
 k_{13} &= hf_1\left(x + \frac{9+\sqrt{3}}{12}h, y_2(x) + \frac{5+2\sqrt{3}}{16}k_{21} + \frac{21-2\sqrt{3}}{48}k_{22}\right).
 \end{aligned}$$

Расчётная схема имеет табличное представление (табл. 2.3). Матрица перехода $R(z)$ будет выглядеть следующим образом:

$$R(z) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{z^2}{2} + \frac{(3 + \sqrt{3})z^4}{36} & z + \frac{z^3}{6} + \frac{(2 - \sqrt{3})z^5}{36} \\ z + \frac{z^3}{6} & 1 + \frac{z^2}{2} + \frac{(3 - \sqrt{3})z^4}{36} \end{pmatrix}.$$

Таблица 2.3[1]

$c_{1\eta}$	$a_{1\eta\nu}$		$b_{1\eta}$
0			$\frac{9 - \sqrt{3}}{52}$
$\frac{3 - \sqrt{3}}{3}$	$\frac{3 - \sqrt{3}}{3}$		$\frac{13 + 7\sqrt{3}}{44}$
$\frac{9 + \sqrt{3}}{12}$	$\frac{5 + 2\sqrt{3}}{16}$	$\frac{21 - 2\sqrt{3}}{48}$	$\frac{76 - 20\sqrt{3}}{143}$

Таблица 2.3[2]

$c_{2\eta}$	$a_{2\eta\nu}$		$b_{2\eta}$
$\frac{3 - \sqrt{3}}{6}$	$\frac{3 - \sqrt{3}}{6}$		$\frac{1}{2}$
$\frac{3 + \sqrt{3}}{6}$	0	$\frac{3 + \sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{2}$

Область устойчивости представлена на рис. 2.3.

Область устойчивости для структурного метода третьего порядка ещё шире, чем для структурного метода второго порядка, более того, шире, чем для метода Рунге — Кутты того же порядка. Это говорит о том, что в некоторых случаях структурные метода не только экономичнее, но и более устойчивы.

Область устойчивости для третьего порядка с двухэтапной расчетной схемой, имеющей табличное представление (табл. 2.4), представлена на рис. 2.4. Для повышения эффективности метода вводится такое условие, что

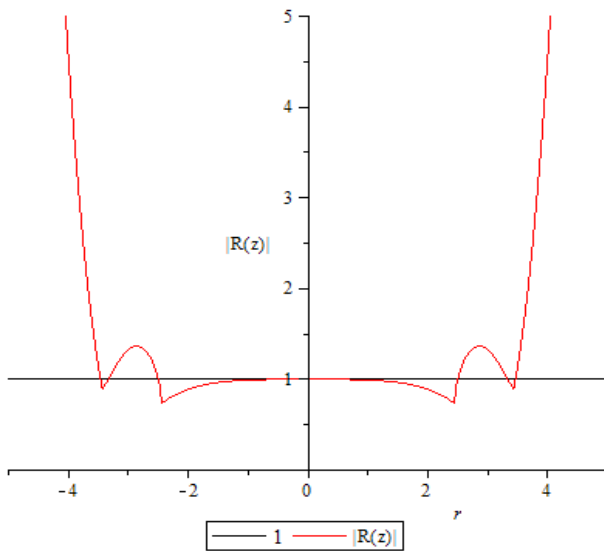


Рис. 2.3.

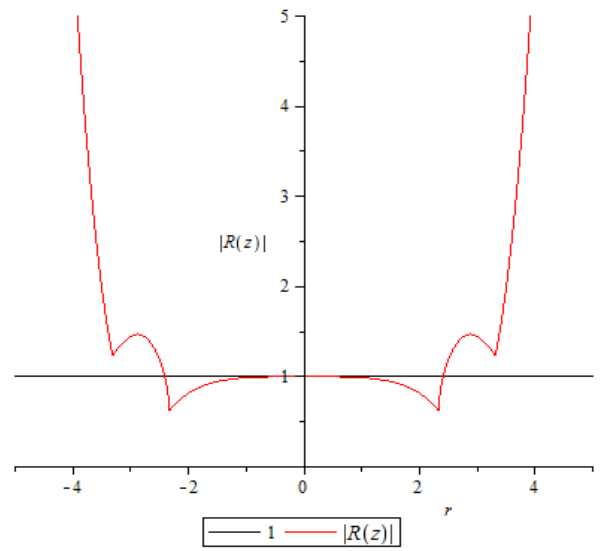


Рис. 2.4.

последнее вычисление корректирующей функции k_{13} , на текущем шаге было первым на следующем. Устойчивость такого метода будет чуть хуже, чем устойчивость метода на базе квадратурных формул Гаусса — Лагранжа, но всё ещё лучше устойчивости метода Рунге — Кутты.

Таблица 2.4[1]

$c_{1\eta}$	$a_{1\eta\nu}$		$b_{1\eta}$
0			$\frac{3 - \sqrt{3}}{12}$
$\frac{3 - \sqrt{3}}{3}$	$\frac{3 - \sqrt{3}}{3}$		$\frac{1 + \sqrt{3}}{4}$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3 - \sqrt{3}}{6}$

Таблица 2.4[2]

$c_{2\eta}$	$a_{2\eta\nu}$		$b_{2\eta}$
$\frac{3 - \sqrt{3}}{6}$	$\frac{3 - \sqrt{3}}{6}$		$\frac{1}{2}$
$\frac{3 + \sqrt{3}}{6}$	0	$\frac{3 + \sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{2}$

Область устойчивости для метода четвёртого порядка с вычислительной схемой на базе трёхточечного квадратурного правила Гаусса–Лежандра, имеющей табличное представление (табл. 2.5), представлена на рис. 2.5. Устойчивость такого метода всё ещё будет лучше устойчивости метода Рунге — Кутты соответствующего порядка.

Таблица 2.5[1]

$c_{1\eta}$	$a_{1\eta\nu}$			$b_{1\eta}$	
0				$\frac{335}{2772} - \frac{41\sqrt{15}}{2772}$	
$1 - \frac{\sqrt{15}}{5}$	$1 - \frac{\sqrt{15}}{5}$			$\frac{45}{308} + \frac{17\sqrt{15}}{308}$	
$\frac{9}{8} - \frac{\sqrt{15}}{8}$	$\frac{25}{32} - \frac{\sqrt{15}}{8}$	$\frac{11}{32}$			$\frac{448}{1683} + \frac{64\sqrt{15}}{1683}$
$\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{15}}{20}$	$\frac{111}{848} + \frac{71\sqrt{15}}{2120}$	$\frac{77}{212} + \frac{7\sqrt{15}}{212}$	$\frac{217}{848} - \frac{7\sqrt{15}}{424}$	$\frac{500}{1071} - \frac{4\sqrt{15}}{51}$	

Таблица 2.5[2]

$c_{2\eta}$	$a_{2\eta\nu}$			$b_{2\eta}$	
$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{10}$	$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{10}$			$\frac{5}{18}$	
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{16} - \frac{\sqrt{15}}{16}$	$\frac{5}{16} + \frac{\sqrt{15}}{16}$			$\frac{8}{18}$
$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{10}$	$\frac{83}{440} + \frac{7\sqrt{15}}{264}$	$-\frac{1}{8} + \frac{\sqrt{15}}{40}$	$\frac{24}{55} + \frac{8\sqrt{15}}{165}$	$\frac{5}{18}$	

Динамику увеличения области устойчивости с повышением порядка метода можно увидеть на рис. 2.6.

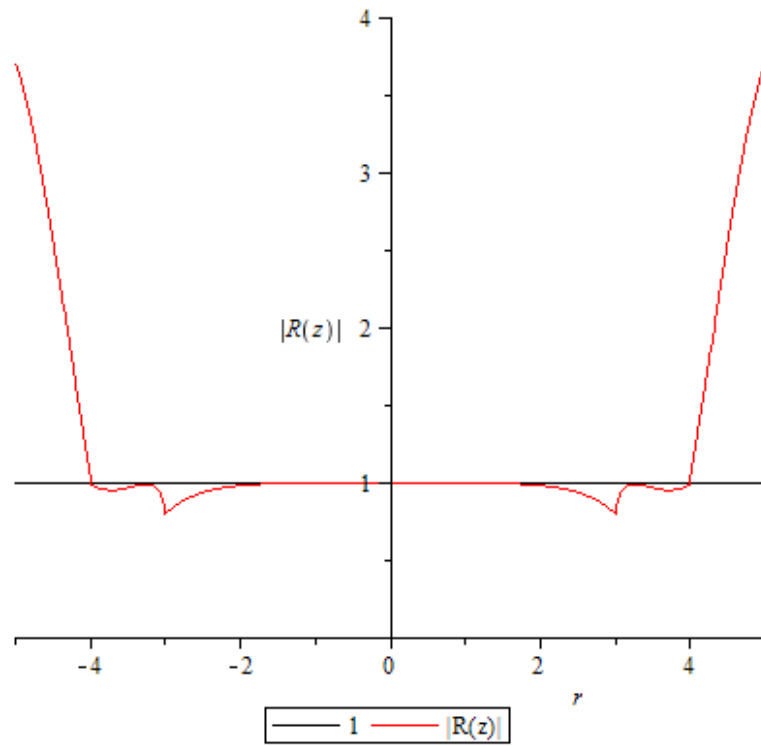


Рис. 2.5.

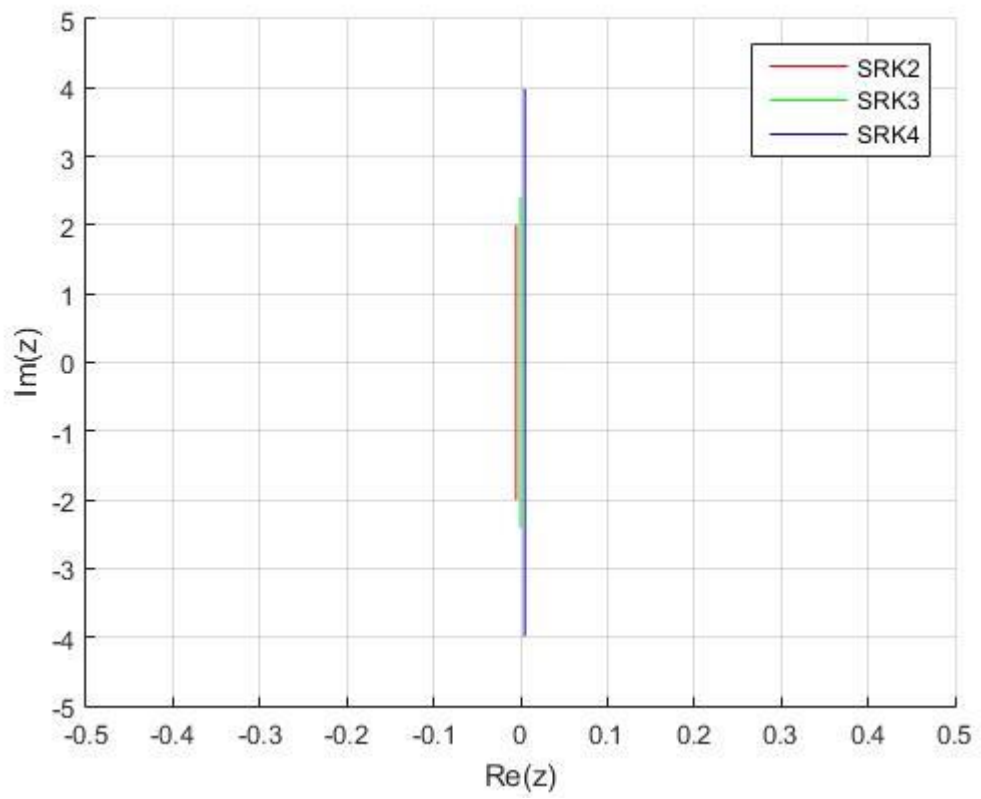


Рис. 2.6.

2.2.2. Альтернативный подход к определению устойчивости

Можно воспользоваться альтернативным подходом, который в настоящее время был применен для анализа устойчивости методов Ньюстрёма в [10], а такие методы, как уже было сказано, равносильных структурным методам решения системы (2.7). При предположении Дж. Дормандом о согласованности начальных условий системы (2.7) таким образом, что неустойчивая компонента аналитического решения исчезает [12], возможно исследование устойчивости структурных методов альтернативным способом. Для каждого из уравнений системы (2.7) находится своя функция устойчивости $R_i(z)$, $i = 1, 2$ (для методов Ньюстрёма соответственно для y и для y'). Пересечение областей устойчивости для каждой из функции – есть область устойчивости всей схемы. Можно проверить это численно. Рассмотрим методы порядков со второго по четвёртый применительно к системе (2.7).

Поскольку интегрирование уравнений системы (2.7) структурным методом ведётся по-разному, то логично ожидать получение разных функций устойчивости для первого и для второго уравнений. Любой явный метод Рунге — Кутты s -го порядка обладает функцией устойчивости

$$R(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^s}{s!}.$$

Выполнив соответствующие построения, находятся функции устойчивости структурного метода для обоих уравнений системы, для методов второго порядка они выглядят следующим образом:

$$R_1(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{4},$$
$$R_2(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2}.$$

В то время как функция устойчивости классического двухэтапного метода Рунге — Кутты второго порядка просто

$$R_K(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2}.$$

Сравнение областей устойчивости представлено на рис. 2.7. Степень функции устойчивости R_1 оказывается выше классической. Это связано с тем, что из-за особенностей структурного метода число «эффективных этапов» (число этапов в равносильной схеме, построенной по классическому образцу) для второго уравнения равно двум, а для первого – трём (реально же схема содержит два этапа по первому уравнению и один по второму).

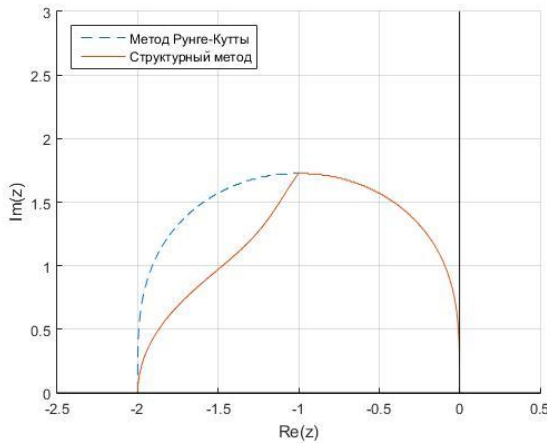


Рис. 2.7. Области устойчивости методов 2-го порядка для системы (2.7)

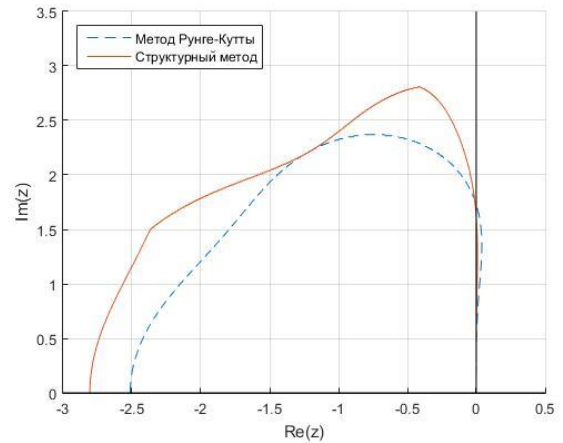


Рис. 2.8. Области устойчивости методов 3-го порядка для системы (2.7)

Функции устойчивости структурного метода третьего порядка, имеющего три этапа по первому уравнению и два для второго уравнения системы (2.7), принимают вид:

$$R_1(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{5z^4}{168} + \frac{5z^5}{672},$$

$$R_2(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{5z^3}{28} + \frac{5z^4}{112}.$$

Классическому трёхэтапному методу типа Рунге — Кутты третьего порядка соответствует функция устойчивости

$$R_K(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6}.$$

Сравнение областей устойчивости представлено на рис. 2.8. Отметим, что степени полученных областей устойчивости вновь соответствуют числу «эффективных этапов»: пять по первому и четыре по второму. Это даёт основания полагать, что в методах более высоких порядков [5] – [6] степень функций устойчивости превзойдёт классическую ещё больше, что и подтверждается нижеследующими результатами.

Структурный метод четвёртого порядка с вычислительной схемой на базе трёхточечного квадратурного правила Гаусса — Лежандрас расчетной схемой табл. 2.5 требует совершить по четыре этапа по первому уравнению и три этапа по второму уравнению системы (2.7). Число эффективных этапов составляет семь по первому и шесть по второму уравнению. В этом случае, справедливо ожидать значительное превосходство степеней обеих функций устойчивости в сравнении с классической, соответствующей четырёхэтапному методу четвёртого порядка

$$R_K(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24}.$$

Действительно,

$$R_1(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{(25 + \sqrt{15})z^4}{720} + \frac{(9 - \sqrt{15})z^5}{720} + \frac{(7.5 - \sqrt{15})z^6}{4320} + \frac{(7 - 1.666\sqrt{15})z^7}{5760},$$

$$R_2(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{(8 + \sqrt{15})z^3}{72} + \frac{z^4}{24} + \frac{(9 + \sqrt{15})z^5}{1728} + \frac{(7.5 - \sqrt{15})z^6}{4320}.$$

Пересечение полученных областей устойчивости для структурного метода полностью и значительно покрывает область устойчивости классического метода (рис. 2.9).

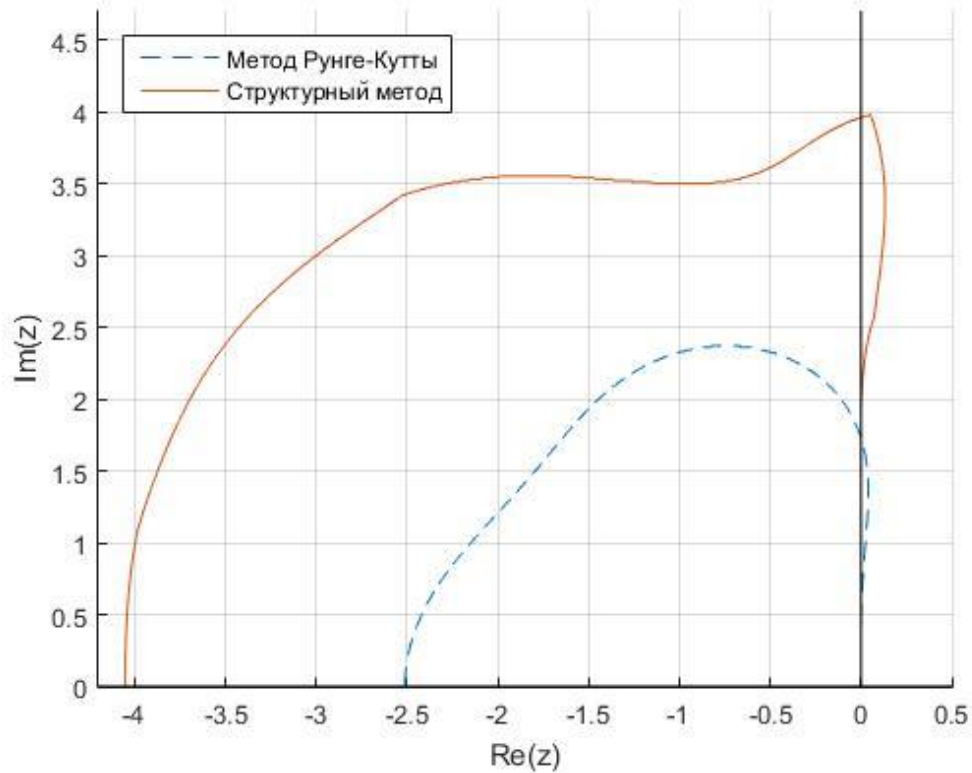


Рис. 2.9. Области устойчивости методов 4-го порядка для системы (2.7)

2.3. Сведение к случаю равных элементов

Анализ устойчивости более общей перекрёстной системы $y' = Ay$ с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & 0 \end{pmatrix}$$

легко можно свести к анализу системы с матрицей

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix},$$

рассматриваемой в предыдущем параграфе. Для это представим матрицу A следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \\ \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} \end{pmatrix}.$$

Точным решением для общей перекрёстной системы является

$$y(t) = e^{At} y_0,$$

а значит справедливо

$$e^{At} = S^{-1} e^{A_0 t} S,$$

где

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} \end{pmatrix}.$$

и решение будет:

$$y(t) = S^{-1} e^{A_0 t} S y_0.$$

Таким образом, возможно найти точную устойчивость по матрице A_0 , а при применении к такой системе структурного метода для нахождения устойчивости

$$R(\lambda_1, \lambda_2) = S^{-1} R_0(\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}) S.$$

И тем самым, устойчивость численная также обеспечивается исключительно матрицей A_0 и её собственными числами, т. к. собственные числа матриц A и A_0 будут равны друг другу, при условии, что $\lambda = \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}$.

Поэтому, для облегчения расчётов, мы можем изучать только устойчивость системы

$$y' = Ay, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}.$$

2.4. Сведение блочно-перекрёстной системы к простейшей матрице

Расширим вышеприведенные рассуждения на общий случай систем с простейшими матрицами. Рассматриваем систему

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix} y, \quad (2.8)$$

где A, B – верхнетреугольные матрицы и $diag(A)$ и $diag(B)$ содержат одинаковые числа λ_1 и λ_2 соответственно:

$$AB = BA = \begin{pmatrix} \lambda_1 \lambda_2 & 1 & & 0 \\ & \lambda_1 \lambda_2 & 1 & \\ & 0 & \dots & \\ & & & \lambda_1 \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Вид таких матриц ещё не в полной мере соответствует виду клеток Жордана, но уже очень похожи. Причём, точное решение в этом случае содержит компоненты $e^{\pm\sqrt{\lambda_1\lambda_2}t}$, $te^{\pm\sqrt{\lambda_1\lambda_2}t}$, $t^2e^{\pm\sqrt{\lambda_1\lambda_2}t}$, ..., $t^{n-1}e^{\pm\sqrt{\lambda_1\lambda_2}t}$ (при условии, что матрица BA имеет размерность $2n \times 2n$). Соответственно, устойчивой такая система будет только если $\pm\sqrt{\lambda_1\lambda_2}$ – чисто мнимые числа (в нашем случае, λ_1 и λ_2 можно заменить на просто λ , согласно рассуждениям в предыдущем параграфе), т.е. $\pm\lambda$ – чисто мнимые числа. Очевидно, что если λ не чисто мнимая, то существует уходящий в бесконечность компонент экспоненты. В противном случае, полином, представляющий собой аналитическое решение системы, будет расходиться. Т. е. устойчивым решение будет только при условии, что $n = 1$ и $\lambda = ai$, $a \in R$. Делаем вывод, что если необходимо оценить точную устойчивость исследуемого численного метода, не используя подход с согласованными начальными

условиями, необходимо рассматривать системы размерности 2×2 . Если же рассматривать задачу с согласованными начальными условиями, то эти условия достигаются тем, что $y_{110} = y_{120}, y_{120} = y_{220} \dots$. Т. е. решение может быть устойчивым при определенном выборе начальных условий, таких что при каждой из пар $e^{\pm\lambda t}, te^{\pm\lambda t}, t^2e^{\pm\lambda t}, \dots, t^{n-1}e^{\pm\lambda t}$ будут равны друг другу начальные условия. В такой ситуации клетки Жордана могут быть большего размера, но начальные условия согласуются друг с другом так, что в решении сокращаются все отрицательные или все положительные компоненты решения. Тогда, устойчивость будет наблюдаться в том случае, если $Re(\lambda) < 0$.

Дополнительно рассмотрим случай, когда одна из матриц A, B строго верхнетреугольная или обе из них могут не быть верхнетреугольными, но пусть выполняется условие, что AB и BA – строго верхнетреугольные матрицы, т. е. все собственные числа системы (2.8) являются нулями. Решение такой системы содержит компоненты $1, t, t^2, \dots, t^{r-1}$ ($r = \text{rank} \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$). Точно устойчивой такая система будет только в том случае, если компоненты t, t^2, \dots, t^{r-1} будут отсутствовать, т. е. $\text{rank} \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix} \leq 1$. При согласованных начальных условиях может быть решение не содержащее компоненты t, t^2, \dots, t^r . Это условие означает, что A (или B) тождественно равны нулю, а B (или A) имеет ранг ≤ 1 . Пусть $y'_i = ky_j$, где $n + 1 \leq i \leq 2n$, а $1 \leq j \leq n$. В этих условиях устойчивое решение будет при тождественном равенстве нулю y_j и, следовательно, постоянного значения y_i . Производные всех остальных компонент $= 0$, следовательно, их значения не меняются во времени и не влияют на устойчивость. В этом случае система такая, что численный метод всегда будет давать приращение 0. Таким образом, эта ситуация не влияет на устойчивость и можно исключить из рассмотрения блоки, которые имеют

чисто нулевые собственные значения AB и BA , поскольку собственные числа системы (2.8) есть решение уравнения

$$\det(\lambda^2 E - AB) = \det(\lambda^2 E - BA).$$

Интерес представляют собственные числа AB , которые определяют устойчивость системы (2.8).

Применение численного метода к исходной системе даёт матрицу перехода следующего вида:

$$R = \begin{pmatrix} E + ABh^2 k_{12} + (AB)^2 h^4 k_{14} + \dots & Ah(E + BAh^2 k_{13} + \dots) \\ Bh(E + ABh^2 k_{23} + \dots) & E + BAh^2 k_{22} + (BA)^2 h^4 k_{24} + \dots \end{pmatrix}.$$

Все блоки R это верхнетреугольные матрицы, а по диагоналям у них стоят одни и те же значения. Чтобы найти собственные числа такой матрицы, возьмём определитель и начнём раскладывать его по последней строке.

$$\begin{aligned} & m_{2n,2n} \begin{vmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{vmatrix} - m_{2n,n} \begin{vmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{vmatrix} = \\ & m_{2n,2n} m_{n,n} \begin{vmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{vmatrix} + m_{2n,n} m_{n,2n} \begin{vmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{vmatrix} = \\ & (m_{2n,2n} m_{n,n} + m_{2n,n} m_{n,2n}) \begin{vmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{vmatrix} = \\ & \prod_{k=1}^n (m_{k,k} m_{k+n,k+n} + m_{k,k+n} m_{k+n,k}) = (m_{11} m_{22} + m_{12} m_{21})^n. \end{aligned}$$

Отсюда делаем вывод, что собственные числа такой матрицы представляют собой повторы собственных чисел исходной системы. Таким образом, устойчивость имеет смысл рассматривать на системе 2×2 при чисто мнимых λ . При использовании согласованных начальных условий говорим о λ_i находящихся в левой полуплоскости, и для разностная система точно также будет себя вести как и основная.

Если AB и BA – одинаковые клетки Жордана с каким-нибудь ненулевым собственным числом или клетки Жордана с нулевым

собственным числом (даже достаточно лишь знать, что они строго верхнетреугольные) приведем исходную систему (2.8) с произвольными матрицами A и B к равносильной системе, которая будет иметь блочнодиагональный вид, где каждый из блок рассмотрен выше.

Пусть матрица P – это матрица, которая приводит матрицу AB к форме Жордана

$$P^{-1}ABP = J_{AB}. \quad (2.9.1)$$

Q – матрица приводящая матрицу BA к форме Жордана

$$Q^{-1}BAQ = J_{BA}. \quad (2.9.2)$$

Известно, что $J_{BA} = J_{AB}$ с точностью до блоков с нулевыми собственными числами [11]. Q и P – невырожденные, иначе они не имели бы обратных матриц. Справедливы следующие преобразования для (2.9.1) – (2.9.2):

$$\begin{aligned} BAQ &= QJ_{BA}, & ABP &= PJ_{AB}, \\ BA(BP) &= (BP)J_{AB}. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим блок в J_{AB} с ненулевым λ_i , идущим от i до $i + k$ столбца. Его размерность $k + 1$.

$$\begin{aligned} BA(BP)_i &= \lambda_i(BP)_i, \\ BA(BP)_{i+1} &= \lambda_i(BP)_{i+1} + (BP)_i, \\ &\dots, \\ BA(BP)_{i+k} &= \lambda_i(BP)_{i+k} + (BP)_{i+k-1}. \end{aligned} \quad (2.10.1)$$

$(BP)_i$ – собственный вектор с числом λ_i . А т. к. Q это матрица приводящая к форме Жордана состоящая из собственных векторов и дополнений к ним, то для (2.9.2) можем выписать такую систему:

$$\begin{aligned}
BAQ_i &= \lambda_i Q_i, \\
BAQ_{i+1} &= \lambda_i Q_{i+1} + Q_i, \\
&\dots, \\
AQ_{i+k} &= \lambda_i Q_{i+k} + Q_{i+k-1}.
\end{aligned}
\tag{2.10.2}$$

Т. к. собственные вектора определяются с точностью до константы, и если домножить Q_i на любую константу, то результатом будет тоже собственный вектор. Можем записать:

$$(BP)_i = \mu_{i0} Q_i.$$

Тогда, если из второго уравнения (2.10.1) вычесть второе уравнение (2.10.2) домноженное на μ_{i0} получаем

$$BA((BP)_{i+1} - \mu_{i0} Q_{i+1}) = \lambda_i ((BP)_{i+1} - \mu_{i0} Q_{i+1}).$$

Получается, что $((BP)_{i+1} - \mu_{i0} Q_{i+1})$ тоже собственный вектор матрицы BA с тем же самым собственным числом λ_i , относящимся к той же самой клетке Жордана, а значит

$$(BP)_{i+1} = \mu_{i1} Q_i + \mu_{i0} Q_{i+1}.$$

Абсолютно аналогично повторяем эти рассуждения для всех уравнений (2.10.1) – (2.10.2) и получаем:

$$(BP)_{i+k} = \sum_{j=0}^k \mu_{ij} Q_{k-j}.$$

Отсюда

$$Q^{-1}(BP)_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \mu_{i0} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q^{-1}(BP)_{i+} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \mu_{i1} \\ \mu_{i0} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots,$$

$$Q^{-1}(BP)_{i+k} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \mu_{ik} \\ \vdots \\ \mu_{i0} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Общий вид

$$Q^{-1}(BP)_{i,i+k} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_{i0}\mu_{i1}\dots & \mu_{ik} \\ 0 & \mu_{i0}\dots\mu_{ik-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_{i0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Это матрица с ненулевым квадратным блоком, являющимся верхнетреугольной матрицей очень удобного вида, такой что, она является перестановочной с другой такой же матрицей.

Поскольку $J_{AB} = J_{BA}$, Жордановы формы произведения матриц в произвольном порядке для всех ненулевых собственных чисел имеют абсолютно одинаковые Жордановы блоки, а для нулевых собственных чисел могут иметь блоки разной размерности, поэтому J_{AB} это блоки с какими-то ненулевыми собственными числами и блок с нулевыми собственными числами, о котором нам не всё известно. Но мы можем быть уверены, что

$$Q^{-1}BP = \begin{pmatrix} B_i & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \overline{B_0} \end{pmatrix},$$

где B_i – это верхнетреугольные блоки тех же самых размерностей, что Жордановы клетки J_{AB} , $\overline{B_0}$ – какой-то блок произвольного вида. Абсолютно аналогично

$$P^{-1}AQ = \begin{pmatrix} A_i & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \overline{A_0} \end{pmatrix}.$$

И можем сказать, что

$$A_i B_i = B_i A_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

Жорданова клетка размерности $k_i + 1$, а $\overline{A_0 B_0}$ и $\overline{B_0 A_0}$ - объединение клеток Жордановых с собственными числами 0, возможно не совпадающими, их наличие не влияет на устойчивость. Устойчивость общей система, получаемой преобразованием:

$$\begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & P^{-1}AQ \\ Q^{-1}BP & 0 \end{pmatrix}$$

равносильна устойчивости системы (2.8).

В результате делаем вывод, что можно рассматривать блоки независимо друг от друга. Исследование устойчивости системы с произвольной матрицей равносильно независимой устойчивости для каждой из систем A_i, B_i . Получается, что достаточно рассмотреть простые случаи, а для большой системы взять наименьшую из длин шагов, обеспечивающих устойчивость для каждой из частичных систем.

Глава 3. Система 0J

В этой главе рассматривается устойчивость методов класса \mathfrak{C} , явный одношаговый общий метод типа Рунге — Кутты интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dy_0}{dx} = f_0(x, y_0, y_1, \dots, y_n), \quad (3.1.1)$$

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \dots, y_{i-1}, y_{l+1}, \dots, y_n), \quad i = 1, \dots, l, \quad (3.1.2)$$

$$\frac{dy_j}{dx} = f_j(x, y_1, \dots, y_{i-1}, y_{j-1}), \quad j = l + 1, \dots, n, \quad (3.1.3)$$

$$l \in \{0\} \cup N, n \in \{0\} \cup N, l \leq n,$$

$$x \in [X_0, X_k] \subset R, y_s: [X_0, X_k] \rightarrow R^{r_s}, \quad s = 0, 1, \dots, n,$$

$$f_0: [X_0, X_k] \times R^r \rightarrow R^{r_0}, \quad \sum_{s=0}^n r_s = r,$$

$$f_i: [X_0, X_k] \rightarrow R^{r - \sum_{g=i}^l r_g} \rightarrow R^{r_i}, \quad i = 1, \dots, l,$$

$$f_j: [X_0, X_k] \rightarrow R^{r - \sum_{g=j}^n r_g} \rightarrow R^{r_j}, \quad j = l + 1, \dots, n, \quad r_0 > 0.$$

Где y_s, f_s – функции размерности r_s . Причём в рассматриваемой системе может отсутствовать как общая группа уравнений (3.1.1) ($r_0 = 0$), так и группа уравнений (3.1.2) ($l = 0, n \in N$). Необходимость в интегрировании систем вида (3.1.1) - (3.1.3) на практике возникает довольно часто. Например, в задачах оптимизации пучка электронов в ускорителе на бегущей волне. Вычислительная схема численного метода интегрирования системы (3.1.1) – (3.1.3) использует структурные особенности на уровне алгоритма. Приближение z_s к точному решению $y_s(x + h)$, $s = 0, 1, \dots, n$ в точке $x + h \in [X_0, X_k]$ ищем в виде

$$y_s(x+h) \approx z_s = y_s(x) + \sum_{\omega=1}^{m_s} b_{s\omega} k_{s\omega}(h), \quad s = 0, 1, \dots, n,$$

причем $k_{s\omega} = k_{s\omega}(h)$ вычисляются в строгой последовательности

$$k_{01}, k_{11}, \dots, k_{n1}, k_{02}, k_{12}, \dots, k_{n2}, k_{03}, k_{13}, \dots$$

по схеме

$$\begin{aligned} k_{0\omega} &= hf_0(T_{0,\omega}, Y_{0,\omega,0}, Y_{0,\omega,1}, \dots, Y_{0,\omega,n}), \\ k_{i\omega} &= hf_i(T_{i,\omega}, Y_{i,\omega,0}, \dots, Y_{i,\omega,i-1}, Y_{i,\omega,l+1}, \dots, Y_{i,\omega,n}), \quad i = 1, \dots, l, \\ k_{j\omega} &= hf_j(T_{j,\omega}, Y_{j,\omega,0}, Y_{0,\omega,1}, \dots, Y_{j,\omega,j-1}), \quad j = l+1, \dots, n, \end{aligned}$$

где

$$T_{s,\omega} = \begin{cases} x, & \text{если } \{(\omega = 1) \wedge (s \leq l)\}, \\ x + c_{s\omega}h, & \text{если } \{(\omega = 1) \wedge (s > l) \vee (\omega > 1)\}, \end{cases}$$

$$Y_{s,\omega,\nu} = \begin{cases} y_\nu(x), & \{(\omega = 1) \wedge (s \leq l)\}, \\ y_\nu(x) + \sum_{\mu=1}^{\omega-1} a_{s\omega\nu\mu} k_{\nu\mu}, & \{(\omega > 1) \wedge (s \leq \nu)\}, \\ y_\nu(x) + \sum_{\mu=1}^{\omega} a_{s\omega\nu\mu} k_{\nu\mu}, & \{(\omega > 1) \wedge (s > \nu)\} \vee \{(\omega = 1) \wedge (s > l)\}. \end{cases}$$

Здесь $b_{s\omega}, c_{s\omega}, a_{s\omega\nu\mu}$ – параметры численного метода, h – шаг метода.

3.1. Простейшая система 0J

Простейшая система путём замены переменных может быть приведена к виду

$$\begin{cases} y'_1(x) = (\lambda_1 + \lambda_2)y_1(x) + \lambda_1 y_2(x), \\ y'_2(x) = -\lambda_2 y_1(x), \end{cases} \quad (3.2)$$

причём λ_1 и λ_2 в (3.2) будут являться собственными числами. В этом случае $\tilde{y} = R(h\lambda_1, h\lambda_2)y$, где R – матрица размерности (2×2) . Областью

устойчивости назовём множество, в котором $R(h\lambda_1, h\lambda_2) = R(z_1, z_2)$ является сжимающим оператором. Аналитическая устойчивость там, где оба собственных числа лежат в левой полуплоскости или на мнимой оси, если они различны.

Рассмотрим метод класса \mathfrak{C} второго порядка. Построим матрицу перехода $R(h\lambda_1, h\lambda_2)$. Расчетная схема для такого метода имеет вид:

$$\begin{aligned} y_1(x+h) &= y_1(x) + \frac{1}{2}k_{11} + \frac{1}{2}k_{12} + O(h^3), \\ y_2(x+h) &= y_2(x) + k_{21} + O(h^3), \end{aligned}$$

где k_{ij} вычисляются последовательно:

$$\begin{aligned} k_{11} &= hf_1(x, y_1(x), y_2(x)), \\ k_{21} &= hf_2\left(x + \frac{1}{2}h, y_1(x) + \frac{1}{2}k_{11}\right), \\ k_{12} &= hf_1\left(x + \frac{1}{2}h, y_1(x) + k_{11}, y_2(x) + k_{21}\right). \end{aligned}$$

Матрица перехода $R(h\lambda_1, h\lambda_2)$ будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} R(z) &= \begin{pmatrix} 1 + z_1 + z_2 + \frac{z_1^2}{2} + \frac{z_2 z_1}{2} + \frac{z_2^2}{2} - \frac{z_2 z_1^2}{4} - \frac{z_1 z_2^2}{4} & z_1 + \frac{z_1^2}{2} + \frac{z_2 z_1}{2} - \frac{z_2 z_1^2}{4} \\ -z_2 - \frac{z_2 z_1}{2} - \frac{z_2^2}{2} & 1 - \frac{z_2 z_1}{2} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где $z_1 = h\lambda_1, z_2 = h\lambda_2$. Найдя собственные числа, проверяем, при каких λ_1, λ_2 , имеющих, для начала, только вещественную часть, $|R(z)| \leq 1$, что соответствует устойчивому решению. Область устойчивости представлены на рис. 3.1.

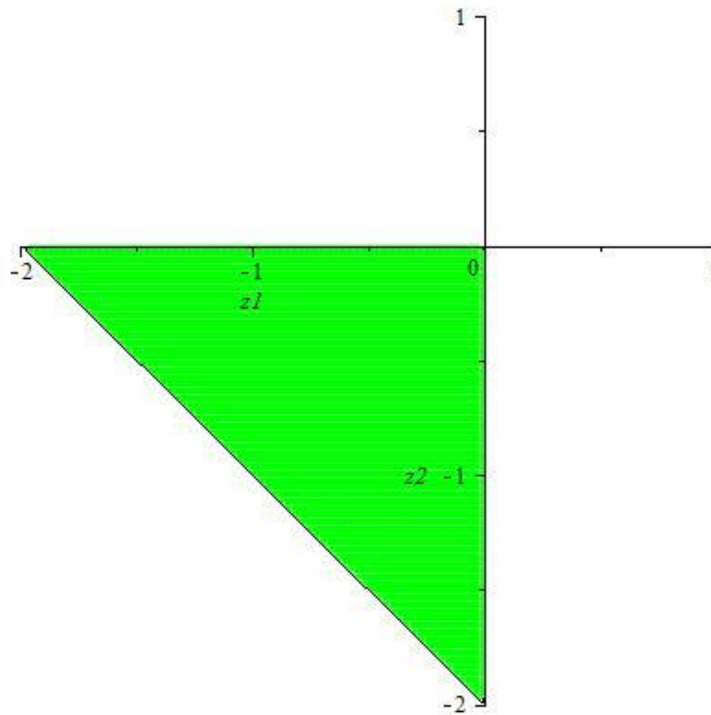


Рис. 3.1.

Область устойчивости для только вещественных собственных чисел уже является не пустой и, при добавлении мнимой части к ним, будет только расширяться.

3.2. Сведение системы из двух уравнений к простейшей

Анализ устойчивости более общей системы с общей группой уравнений $y' = Ay$ с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

легко можно свести к анализу системы с матрицей

$$A_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 & \lambda_1 \\ -\lambda_2 & 0 \end{pmatrix},$$

рассматриваемой в предыдущем параграфе. Для это представим матрицу A следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} a & \frac{(a + \sqrt{a^2 + 4abc})}{2} \\ -\frac{(a - \sqrt{a^2 + 4abc})}{2} & 0 \end{pmatrix} S,$$

где

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{b(a - \sqrt{a^2 + 4abc})}{2}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{c(a + \sqrt{a^2 + 4abc})}{2}} \end{pmatrix},$$

$$S = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{b(a - \sqrt{a^2 + 4abc})}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{c(a + \sqrt{a^2 + 4abc})}} \end{pmatrix}.$$

Точным решением для общей перекрёстной системы является

$$y(t) = e^{At} y_0,$$

а значит справедливо

$$e^{At} = S^{-1} e^{A_0 t} S,$$

и решение будет:

$$y(t) = S^{-1} e^{A_0 t} S y_0.$$

Таким образом, возможно найти точную устойчивость по матрице A_0 , а при применении к такой системе структурного метода для нахождения устойчивости

$$R(a, b, c) = S^{-1} R(h\lambda_1, h\lambda_2) S.$$

И тем самым, устойчивость численная также обеспечивается исключительно матрицей A_0 и её собственными числами, т. к. собственные числа матриц A и A_0 будут равны друг другу, при условии, что $\lambda_1 = \frac{(a+\sqrt{a^2+4abc})}{2}$, $\lambda_2 = \frac{(a-\sqrt{a^2+4abc})}{2}$. Поэтому, для облегчения расчётов, мы можем изучать только устойчивость системы с матрицей A_0 .

3.3. Блочная система

Расширить вышеприведенные рассуждения на общий случай систем с простейшими матрицами

$$y' = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & 0 \end{pmatrix} y$$

не представляется возможным. Матрицы A_1, A_2, A_3 одновременно не приводятся к верхнетреугольной Жордановой форме

$$\begin{pmatrix} J_1 & J_2 \\ J_3 & 0 \end{pmatrix},$$

а значит, невозможно разбить определитель всей системы на определители более простых матриц меньшей размерности подходящего (удобного для исследований) вида.

К сожалению, в данном случае при применении структурного метода в матрице $R(A_1, A_2, A_3)$ не просто встречаются произведения $A_1 A_2 A_1 A_2 \dots$ и хватает двух матриц, а уже в первом блоке оказываются степени только A_1 и степени $A_3 A_2$ и произведения последних на первые. Уже для первого уравнения необходимо иметь такую матрицу Q , что $S_1^{-1} A_3 Q = J_3$ и $Q^{-1} A_2 S_1 = J_2$ где $S^{-1} A_1 S_1 = J_2$. Самой собой, в общем случае это невозможно, так как Q однозначно определяется из каждого из двух уравнений. Поэтому придется обойтись рассмотрением простейшего случая.

Выводы

Основываясь на приведённых результатах, рано говорить о худшей или лучшей устойчивости структурных методов в сравнении с классическими. Так, например, методы класса $\mathcal{A}(2)$, предназначенные для интегрирования систем с перекрёстной системой связей являются более устойчивыми, чем классические. Однако, применяются такие методы к системам не имеющих общей группы, а в соответствующих задачах проблема линейной устойчивости не вполне корректна в силу неустойчивости точного решения линейной СОДУ. Общие решения линейных однородных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, интегрируемых методами \mathcal{A} и \mathcal{B} , не бывают устойчивыми или притягивающими, а значит исследование устойчивости носит лишь частичный характер. Тем не менее результаты примененных подходов, исследования устойчивости для чисто мнимых собственных чисел и при согласованных условиях, дают основания полагать, что рассматриваемые методы не только экономичнее, но и более устойчивы. А применение структурных методов к системам большей размерности сводится к рассмотрению простейших случаев независимо друг от друга для каждого из них, тем самым распространяя рассуждения и на общий случай.

Для систем уравнений с общей группой приходится обходиться рассмотрением простейшего случая, т. к. непонятно каким образом приводить общую систему к виду, позволяющему провести анализ устойчивости. Возможно, существуют способы приведения системы к простейшей матрицы, позволяющие найти такие методы, которые будут не только более экономичные, чем классические явные методы Рунге — Кутты, но и более устойчивыми. Возможно дальнейшее изучение задачи устойчивости структурных методов и рассмотрение на примере реальных задач.

Заключение

Цель данной работы заключается в нахождении подхода к задаче исследования устойчивости структурных методов и проведении сравнительного анализа с классическими методами. В ходе работы было предложено применение тестовой системы Далквиста для определения численной устойчивости и неустойчивости методов решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Подвергается сомнению правомочность подхода к исследованию устойчивости, использованному М. Хорн, и позднее Дж. Дормандом и П. Принсом. Действительно, неясно, правомерно ли исследование устойчивости метода типа Нюстрёма на примере, имеющем заведомо неустойчивое решение. Полагаемся на авторитет авторов и принимаем за действительность их исследования.

Исследована устойчивость структурных методов класса $\mathcal{A}(2)$ при чисто мнимых собственных числах рассматриваемой системы, и выявлено её превосходство по сравнению с классическими методами Рунге — Кутты. Применён подход с согласованными начальными условиями для этих методов. Построены области устойчивости для соответствующих методов разного порядка. С повышением порядка методов область устойчивости структурного метода полностью покрывает область устойчивости классического метода. Рассмотрен случай сведения системы к простейшей матрице и доказано, что исследование устойчивости общего случая системы с матрицей, удовлетворяющей структурным особенностям, равносильно независимой устойчивости простых случаев, а для всей системы берётся наименьшая из длин шагов, обеспечивающих устойчивость для каждой из частичных систем.

Для системы 0J рассмотрен простейший случай и показано сведение системы из двух уравнений к простейшей. В общем же виде составляющие матрицы одновременно не приводятся к верхнетреугольной форме, а значит, невозможно разбить определитель всей системы на определители поменьше подходящего вида.

Список литературы

1. Винничек Н. Н., Коврижных Н. А. Исследование устойчивости структурных методов интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Процессы управления и устойчивость. СПб.: Издат. Смирнов Н. В., 2017. С. 149-153.
2. Еремин А. С. Вложенный метод типа Дормана – Принса для структурно разделенных систем // Процессы управления и устойчивость: Труды 40-й международной научной конференции аспирантов и студентов / Под ред. Н. В. Смирнова, Г. Ш. Тама- сяна. СПб: Издат. Дом С.-Петербур. гос. ун-та, 2009. С. 160–165.
3. Еремин А. С., Олемской И. В. Вложенный метод интегрирования систем структурно разделённых обыкновенных дифференциальных уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2010. Т. 50, № 3. С. 434–448.
4. Олемской И. В. Метода интегрирования систем структурно разделенных дифференциальных уравнений. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2009. 180 с.
5. Олемской И. В. Вложенные методы пятого порядка // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2004. №2. С. 82-93.
6. Олемской И. В. Четырехэтапный метод пятого порядка точности численного интегрирования систем специального вида // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2002. Т. 42, №8. С. 1179-1190.
7. Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Т.2: Жёсткие и дифференциально-алгебраические задачи / пер. с англ Е.Л. Старостина, И. А. Кульчицкой, А. В. Тыглияна и С. С. Филлипова под ред. С. С. Филлипова. М.: Мир, 1999. 685 с.

8. Целищев С. О., Еремин А. С. Об устойчивости структурного метода решения систем ОДУ // Процессы управления и устойчивость: Труды 42-й международной научной конференции аспирантов и студентов / под ред. А. С. Ерёмкина, Н. В. Смирнова. СПб.: Издат. Дом С.-Петерб. гос. ун-та, 2011. С. 207–212.
9. Calvo M., Montijano J. I., Randez L. A new embedded pair of Runge–Kutta formulas of orders 5 and 6 // *Comp. Math. Applic.* 1990. Vol. 20, No 1. P. 15–24.
10. Dormand J.R., El-Mikkaway M.E.A., Prince P.J. High-order embedded Runge–Kutta–Nyström formulae // *IMA Journal of Numerical Analysis*, 1987. Vol. 7. P. 423–430.
11. Harley Flanders. Elementary divisors of AB and BA. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2(6):871–874, 1951.
12. Horn, M. K. 1977 Developments in high order Runge-Kutta-Nystrom formulas. Dissertation: The University of Texas at Austin.