

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Бубнов Владислав Владимирович

Магистерская диссертация

**Реализация численных алгоритмов анализа методом
гармонического баланса**

Направление: 02.04.02

Фундаментальная информатика и информационные технологии

Магистерская программа: вычислительные технологии

Научный руководитель,
доктор технических наук,
профессор
Дегтярев А.Б.

Санкт-Петербург

2018

Содержание

Введение	3
Постановка задачи	4
Обзор литературы	7
Глава 1. Однотонновый гармонический баланс	8
1.1. Прямой метод	9
1.2. GMRES	9
1.3. GMRES с предобуславливанием	11
1.4. Заключение	15
Глава 2. Многотонновый гармонический баланс	16
2.1. Формулировка задачи	16
2.2. Искусственное отображение частот	17
2.4. Заключение	22
Глава 3. Реализация	23
3.1. Программная реализация алгоритма	23
3.2. Модификации алгоритма	28
3.3. Параллельные вычисления	32
3.4. Заключение	36
Глава 4. Эксперименты	37
4.1. Сравнение методов	37
4.2. Ускорение модификациями	38
4.3. Параллельные вычисления	39
Заключение	41
Список литературы	42

Введение

С быстрым распространением беспроводных технических устройств все более и более актуальной становилась задача анализа установившихся режимов нелинейных систем в симуляторах аналоговых схем. Существовавший ранее временной анализ периодических режимов (Periodic Steady State analysis - PSS) успешно справлялся с сильно нелинейными задачами. Тем не менее, этот метод оказалось сложно применять для моделирования радиочастотных схем, в которых обычно присутствует сильный разброс частот. Также подобные алгоритмы испытывают затруднения при наличии в схеме частотных компонентов, например фильтров, длинных линий, многополюсников. Для анализа таких систем был создан метод гармонического баланса.

Гармонический баланс (Harmonic Balance - HB) — нелинейный частотный метод для поиска установившихся режимов. Активно используется в анализе электрических (чаще радиотехнических и СВЧ) схем. Последнее десятилетие находит применение и в задачах аэро и гидродинамики для поиска периодических потоков и анализа турбулентности.

В данной работе представлены алгоритмы применения метода гармонического баланса к различным схемам, в том числе, и большой размерности. Будут предложены модификации для ускорения работы алгоритма, а также минимизации потребления памяти. В первой главе рассмотрены методы решения однотонного гармонического баланса. Во второй — сведение задачи многотонного гармонического баланса к однотонному. В третьей главе представлена реализация анализа с предложением модификаций для ускорения работы алгоритма, в том числе и с использованием параллельных вычислений. Результаты экспериментов на различных схемах показаны в четвертой главе.

Постановка задачи

Рассматривается электрическая цепь, описываемая системой из N нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d}{dt}q(v(t)) + i(v(t)) + \int_{-\infty}^t h(t - \tau)v(\tau)d\tau + u(t) = 0, \quad (1)$$

где $v(t) \in R^N$ — вектор напряжений на узлах, $q(v(t)) \in R^N$ — вектор электрических зарядов или потоков, $i(v(t)) \in R^N$ — вектор токов, $h(t) \in R^N$ — импульсные характеристики фильтров, $u(t) \in R^N$ — вектор источников.

Пусть на цепь подается одиночный периодический сигнал с периодом T . Требуется найти периодическое установившееся решение системы (1) $v(t) \in [0, T]$, чтобы выполнялось

$$v(T) - v(0) = 0. \quad (2)$$

Для решения этой задачи существуют два вида методов: временные [1, 2] и частотные (спектральные) [1–6].

Временные алгоритмы основаны на методе стрельб и конечных разностях. В методе стрельб задачу (1)-(2) можно представить в виде:

$$\phi(v(0), 0, T) - v(0) = 0, \quad (3)$$

где ϕ — функция перехода состояний.

С помощью метода Ньютона новое приближение к решению (3) находится по формуле:

$$v_0^j = v_0^{j-1} - [J_\phi(v_0^{j-1}, 0, T) - I]^{-1}[\phi(v_0^{j-1}, 0, T) - v_0^{j-1}], \quad (4)$$

где j — номер итерации, $v_0 = v(0)$, I — единичная матрица,

$$J_\phi(v(0), 0, T) = \frac{d}{dv(0)}(\phi(v(0), 0, T)) = \frac{dv(T)}{dv(0)}, \quad (5)$$

Временной алгоритм (PSS) полезен для использования на сильно нелинейных схемах. На каждой итерации j он проводит анализ переходных процессов, стартуя с начальных условий v_0^j . Существуют техники для более эффективного расчета матрицы Якоби (5) [2].

Тем не менее, для ряда задач появляется необходимость использовать спектральные методы, так как сам анализ переходных процессов становится слишком трудоемким и неточным. Проблемы появляются уже при наличии свертки в системе (1). Также задача может быть усложнена наличием входных сигналов с разными фундаментальными частотами (тонами). В подобных случаях приходится использовать частотные алгоритмы.

Спектральные методы аппроксимируют $v(t)$ взвешенными конечными суммами ортогональными, гладкими базисными функциями $\psi(t)$:

$$v(t) \approx \sum_{k=0}^{k=M-1} a_k \psi_k(t), \quad (6)$$

и решают относительно спектральных коэффициентов a_k . Так как граничные условия периодические, в качестве базиса предпочитают брать усеченный ряд Фурье, так как он автоматически удовлетворяет условиям:

$$v(t+T) \approx \sum_{k=-K}^{k=K} V_k e^{j2\pi k f(t+T)} = \sum_{k=-K}^{k=K} V_k e^{j2\pi k f t}, \quad (7)$$

где $2K+1=M$, $f = \frac{1}{T}$ и V_k — коэффициенты Фурье.

Особенностью данного преобразования также является представление производной по времени в виде произведения:

$$\frac{d}{dt}v(t) \approx \sum_{k=-K}^{k=K} j2\pi k V_k e^{j2\pi k f t}. \quad (8)$$

Главным спектральным методом решения задачи поиска установившегося режима является стандартный метод гармонического баланса (НВ). В НВ решение аппроксимируется усеченным рядом Фурье (7). А систему (1) необходимо решить в частотном виде:

$$F(V) = \Omega \Gamma q(\Gamma^{-1}V) + \Gamma i(\Gamma^{-1}V) + H(j2\pi f)V + \Gamma u = 0, \quad (9)$$

где

$$v(t) = \Gamma^{-1}V = \begin{bmatrix} v(t_1) \\ v(t_2) \\ \dots \\ v(t_m) \end{bmatrix}$$

$$\Gamma^{-1} = \begin{bmatrix} e^{j2\pi f(-K)t_1} I_n & \dots & e^{j2\pi f K t_1} I_n \\ \vdots & & \vdots \\ e^{j2\pi f(-K)t_m} I_n & \dots & e^{j2\pi f K t_m} I_n \end{bmatrix}$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} j2\pi f(-K)I_n & & & \\ & j2\pi f(-K+1)I_n & & \\ & & \dots & \\ & & & j2\pi f K I_n \end{bmatrix}$$

$H(j2\pi f)$ — матрица частотных элементов, K — число кратных частот, N — размер системы, M — число временных отчетов.

Таким образом интегро-дифференциальная система (1) из N уравнений сводится к алгебраической системе в частотной области (9) из NM уравнений. В данной работе задачей является анализ методов решения этой системы и модификации алгоритмов для случаев большой размерности.

Обзор литературы

Помимо стандартного гармонического баланса в литературе встречаются и другие вариации метода для решения поставленной задачи. В [7] представлен «временной» алгоритм гармонического баланса. Его особенностью является использование неравномерной сетки во временной области для более точного расчета негладких отрезков входного сигнала, что может быть полезным дополнением для схем с быстрыми переходами.

В литературе [8] также встречается дополнение, использующее ряды Вольтерра для поиска начального приближения в гармоническом балансе. В статье указано, что данная модификация применяется в ADS для ускорения работа анализа.

Для решения задачи поиска установившихся режимов также применяются методы, использующие ряды Вольтерра [9]. В [10, 11] показано преимущество гармонического баланса над этими методами. Тем не менее, эти методы также развиваются [12].

Для многотоннового анализа в литературе [13, 14] предлагаются способы по улучшению устойчивости на ряде сильно нелинейных схем. В первой статье [13] это достигается разделением процесса симуляции на два этапа. На первом решается сама нелинейная задача, а на втором гасятся слабые нелинейные возмущения, вызванные первым этапом. Подобные алгоритмы необходимы для анализа схем с осцилляторами. В [14] автор предлагает использовать технику «предиктор-корректор» для ускорения сходимости задачи.

Глава 1. Однотонновый гармонический баланс

В этой главе решается задача для однотонного гармонического баланса. На вход в систему (9) подаются сигналы на кратных частотах. Тогда все переменные можно разложить в ряд Фурье относительно общей базовой частоты f :

$$v(t) = \sum_{k=-K}^{k=K} V_k e^{j2\pi kft} \quad (10)$$

Система (9) размерностью NM решается методом Ньютона. Новое приближение получается из формулы:

$$J^{(l)}(V^{(l+1)} - V^{(l)}) = -F(V^{(l)}), \quad (11)$$

где l — номер итерации метода Ньютона, $J^{(l)}$ — матрица Якоби системы.

Для получения матрицы Якоби системы (9) необходимо взять матрицы производных из исходной системы (1), посчитанные в каждый момент времени из сетки $t_1 \dots t_m$:

$$C_j = \frac{dq(v(t_j))}{dv}, G_j = \frac{di(v(t_j))}{dv} \quad (12)$$

Матрицы (12) группируются на диагоналях соответствующих блочных матриц C, G размерности $NM \times NM$:

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & & & \\ & C_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & C_m \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} G_0 & & & \\ & G_1 & & \\ & & \dots & \\ & & & G_m \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Добавляя матрицы преобразования Фурье и матрицу частотных компонент, получаем матрицу Якоби размерностью $NM \times NM$:

$$J^{(l)} = \Omega \Gamma C^{(l)} \Gamma^{-1} + \Gamma G^{(l)} \Gamma^{-1} + H. \quad (14)$$

Матрицы C_j, G_j почти всегда имеют разреженный вид. Степень разреженности зависит от топологии цепи. В результате, матрица Якоби из (14) состоит из разреженных блоков. Для получения нового приближения в системе (11) используют различные прямые и итерационные методы, о

которых будет рассказано в этой главе.

1.1. Прямой метод

Для решения СЛАУ (11) можно применять различные точные методы в зависимости от размера системы и количества частот. Для решения систем малой размерности подходит LUP разложение. Однако, если размер матрицы Якоби достаточно велик, необходимо обратить внимание на более сложные блочные методы.

Основная задача блочных алгоритмов для разреженных матриц заключается в том, чтобы уменьшить добавление ненулевых элементов при разложении матрицы. Для этого существуют различные техники поиска опорного элемента при блочном разложении разреженной матрицы. В статье [17] представлен эвристический кластерный алгоритм для эффективного разложения крупномасштабных сетей, в котором вычислительное время ограничено $\mathcal{O}(nb)$, где n — число узлов и b — число ветвей.

Популярными также являются алгоритм KLU, основанный на разложении Гильберта-Пайерлса, и его блочная модификация BKLU [15, 16], использующая поиск в ширину.

Большинство блочных методов ставят задачу сведения матрицы к диагональной матрице с двумя границами:

$$\begin{bmatrix} A_1 & & & C_1 \\ & A_2 & & C_2 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & A_m & C_m \\ B_1 & B_2 & \dots & B_m & H \end{bmatrix},$$

где блоки A_i независимы, и их можно раскладывать параллельно.

1.2. GMRES

Наиболее популярным в методе гармонического баланса итерационным алгоритмом является generalized minimal residual method (GMRES) [18, 19], основанный на подпространствах Крылова. Он сводит решение СЛАУ к умножению матрицы на вектор. Ниже представлен GMRES алгоритм для решения $Ax = b$:

Инициализация:

$$p^0 = r^0 = b - Ax^0;$$

$k = 1;$

while $k < MAX_ITER$ **do**

 Расчет нового направления, $p^k = Ap^{k-1};$

 Ортогонализация, $p^k = p^k - \sum_{j=0}^{k-1} \beta_{k,j} p^j;$

 Поиск α_k из $x^k = x^{k-1} + \alpha_k p^k$, минимизирующего $\|r^k\| = \|b - Ax^k\|;$

if $\|r^k\| < tol$ **then**

 | return $x^k;$

else

 | $k += 1;$

end

end

Для построения ортонормированного базиса используются итерации Арнольди. Часть алгоритма требует решения задачи минимизации. Обычно GMRES использует метод QR-разложение с методом вращений.

Итерация n минимизирует невязку в подпространстве Крылова K_n . Так как каждое следующее подпространство содержится в предыдущем, невязка не увеличивается. После m итераций, где m — размерность A , K_m соответствует всему пространству R^m и поэтому GMRES сходится к точному решению. Однако, идея в том, что после нескольких итераций (значительно меньше m) вектор x_n уже достаточно точно аппроксимирует точное решение.

Чтобы избежать хранения огромного ортонормированного базиса и ускорить сходимость алгоритма, используют GMRES с перезапусками, в которых итерации Арнольди ограничены неким максимальным числом $k \ll MAX_ITER$, после которого происходит перезапуск алгоритма с начальным приближением, полученным с последней итерации.

Дополнительной важной особенностью метода GMRES является отсутствие необходимости в явном формировании матрицы Якоби. Для получения нового направления можно воспользоваться прямой формулой:

$$p^k = \Omega \Gamma \Gamma^{-1} p^{k-1} + \Gamma \Gamma^{-1} p^{k-1} + H p^{k-1} \quad (15)$$

Обычно для сходимости метода Ньютона достаточно брать точность

GMRES алгоритма равной 0.01.

1.3. GMRES с предобуславливанием

Для значительного ускорения GMRES на практике необходимо использовать предобуславливатели. Предобуславливание позволяет уменьшить число обусловленности системы. Левое предобуславливание преобразует систему (11) в систему:

$$M^{-1}J^{(l)}(V^{(l+1)} - V^{(l)}) = M^{-1}(-F(V^{(l)})), \quad (16)$$

где M — предобуславливатель матрицы Якоби $J^{(l)}$.

Наилучшим предобуславливателем является сама матрица Якоби, наилучшим — единичная матрица. Однако, использования самой матрицы Якоби в качестве предобуславливателя сводит решение итерационным методом к прямому методу. Поэтому необходимо искать другую матрицу, которая опишет «проблемы» матрицы Якоби, но обратное вычисление которой не является трудоемкой задачей в сравнении с исходной системой.

Эта проблема поиска предобуславливателя является открытой для инженеров. Наиболее известными являются статичные частотный и временной предобуславливатели, которые рассматриваются далее.

1.3.1 Частотный предобуславливатель

Частотный предобуславливатель наиболее известный, популярный и простой предобуславливатель для гармонического баланса [2–6]. Он представляет собой диагональные блоки матрицы Якоби и показывает уверенную сходимость на большинстве средне нелинейных схемах. Частотный предобуславливатель определяется ниже:

$$M_f = \begin{bmatrix} j2\pi(-K)f\bar{C}_0 + \bar{G}_0 & & & \\ & j2\pi(-K+1)f\bar{C}_0 + \bar{G}_0 & & \\ & & \dots & \\ & & & j2\pi(K)f\bar{C}_0 + \bar{G}_0 \end{bmatrix}, \quad (17)$$

где блоки \bar{C}_0, \bar{G}_0 — матрицы, полученные по постоянному току (DC).

Для большего ускорения сходимости можно попробовать использовать динамический частотный предобуславливатель, то есть обновлять M_f

через несколько итераций метода Ньютона. Подобный подход позволяет более точно соответствовать изменениям матрицы Якоби.

1.3.2 Временной предобуславливатель

Временные предобуславливатели [20, 21] для гармонического баланса представляются в виде:

$$M_t = \Gamma(DC + G)\Gamma^{-1}. \quad (18)$$

Основная проблема при конструировании временного предобуславливателя заключается в эффективной аппроксимации матрицы производных. Наиболее простой и часто использующийся метод — формулы дифференцирования назад (BDF). Тогда матрицу D из (18) можно представить в виде:

$$D = \begin{bmatrix} \frac{I}{\Delta t_1} & & & & -\frac{I}{\Delta t_1} \\ -\frac{I}{\Delta t_2} & \frac{I}{\Delta t_2} & & & \\ & -\frac{I}{\Delta t_3} & \frac{I}{\Delta t_3} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -\frac{I}{\Delta t_n} & \frac{I}{\Delta t_n} \end{bmatrix}, \quad (19)$$

где Δt_k — шаг дискретизации, обычно константный. Из-за блока в правом верхнем углу обращение матрицы D становится дорогой процедурой, поэтому в статье [21] его рекомендуют опустить. Тогда матрица из (19)

последовательно:

$$\begin{bmatrix} G_1 + \frac{C_1}{\Delta t} & & & & \\ & G_2 + \frac{C_2}{\Delta t} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & G_n + \frac{C_n}{\Delta t} & \\ & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \\ \vdots \\ \tilde{z}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 + \frac{C_1}{\Delta t} \tilde{z}_1 \\ \vdots \\ \tilde{v}_n + \frac{C_{n-1}}{\Delta t} \tilde{z}_{n-1} \end{bmatrix} \quad (25)$$

В статье [20] объясняют недостатки упущения блока в (19)-(20) и рекомендуют учитывать его в вычислениях. Также там объясняют преимущества неявного метода Эйлера BDF над BDF-2 в данной задаче. Обращение блока временного предобуславливателя занимает меньше времени, чем частотного, так как его размерность вдвое меньше. Но следует учесть, что количество таких блоков, как минимум, вдвое больше (по теореме Котельникова). В литературе [20, 21] также утверждается, что временной предобуславливатель лучше описывает нелинейность схемы.

1.3.3 Смешанные предобуславливатели

У частотных и временных предобуславливателей есть свои преимущества по отношению к решаемым задачам. Первые лучше оперируют с периодичностью и линейной поведением схемы, когда вторые более точно обрабатывают нелинейности. В связи с этим в литературе [21] рекомендуют одновременно использовать оба вида предобуславливателей для ускорения сходимости GMRES. Так как GMRES подразумевает использование лишь определенного предобуславливателя, были разработаны его модификации FGMRES [22] и GMRESR [23].

Для использования смешанных предобуславливателей используют две стратегии. Первый алгоритм заключается в переключении между M_f и M_t на каждой итерации GMRES. Утверждается, что подобное переключение достаточно устойчиво для сходимости.

Вторая стратегия предлагает использовать два предобуславливателя одновременно на каждой итерации и считать их взвешенное среднее значение:

$$z = wz_t + (1 - w)z_f = (wM_t^{-1} + (1 - w)M_f^{-1})v, \quad (26)$$

где w — весовой коэффициент. Особенность второй стратегии в том, что предобуславливатель не меняется на протяжении алгоритма, а, значит, можно использовать обычный GMRES.

Смешанные предобуславливатели при правильном использовании могут значительно улучшить сходимость алгоритма. Но на схемах большой размерности одновременное хранение и расчет M_t и M_f может оказаться весьма затратным.

1.4. Заключение

Выше рассмотрены наиболее популярные методы решения задачи однотоннового гармонического баланса. Проблема точности и сходимости алгоритма остается актуальной по сей день, мотивируя ученых изобретать новые методы, в том числе и специализированные под конкретные схемы.

На практике для решения множества схем приходится применять дополнительные программные модификации к алгоритму, которые будут рассмотрены в третьей главе.

Глава 2. Многотонновый гармонический баланс

Однотонновый гармонический баланс успешно решает ряд задач. Тем не менее, основная особенность метода проявляется при наличии нескольких некрatных фундаментальных частот (тонов) у входных сигналов схемы. В общем случае термин «некрatность» не совсем корректен, так как любую многотонновую задачу можно свести однотонновой, вычислив у нескольких тонов наименьшее общий делитель:

$$f_0 = GCD(f_1, f_2, \dots, f_n), \quad (27)$$

где f_1, \dots, f_n — фундаментальные частоты входных сигналов, f_0 — их НОД.

Взяв необходимое число частот K частоты f_0 , чтобы остальные частоты являлись кратностями f_0 , получается явное сведение многотонновой задачи к однотонновой:

$$f_1 = k_1 f_0, \quad f_2 = k_2 f_0, \quad \dots \quad f_n = k_n f_0, \quad k_i < K, \quad \forall i = 1..n \quad (28)$$

На практике такой метод не применим. К примеру, пусть $f_1 = 1000\text{Hz}$ и $f_2 = 1007\text{Hz}$. Хотя частоты и расположены достаточно близко друг к другу, их НОД равен 1. Следовательно, для расчета схемы с такими входными сигналами по методу выше необходимо брать, как минимум $K = 1007$. Но f_1, f_2 — лишь фундаментальные частоты, а, значит, придется учитывать и их какие-то кратности K_1, K_2 . В результате, K может еще в разы увеличиться для учета K_1 и K_2 .

Пример выше показывает необходимость перформулировать задачу для многотоннового гармонического баланса и искать новые методы ее решения.

2.1. Формулировка задачи

Пусть на электрическую цепь, описываемую системой (1), подаются входные сигналы $u_1(t), u_2(t), \dots, u_M(t)$ с фундаментальными частотами

f_1, f_2, \dots, f_M :

$$\begin{aligned} u(t) &= u_1(t) + u_2(t) + \dots + u_M(t) = \\ &= \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} U_{k_1}^1 e^{j2\pi k_1 f_1 t} + \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} U_{k_2}^2 e^{j2\pi k_2 f_2 t} + \dots + \sum_{k_m=-\infty}^{\infty} U_{k_m}^m e^{j2\pi k_m f_m t}, \end{aligned} \quad (29)$$

где $U_{k_j}^j$ — коэффициенты Фурье для $u_j(t)$.

Тогда вектор $v(t)$ можно представить в виде усеченного многомерного ряда Фурье:

$$v(t) = \sum_{k_1=-K_1}^{K_1} \dots \sum_{k_M=-K_M}^{K_M} V_{k_1 \dots k_M} e^{j2\pi(k_1 f_1 + \dots + k_M f_M)t}. \quad (30)$$

Система (1) преобразуется в вид [14]:

$$\begin{aligned} \sum_{k_1=-K_1}^{K_1} \dots \sum_{k_M=-K_M}^{K_M} e^{j2\pi(k_1 f_1 + \dots + k_M f_M)t} [j2\pi(k_1 f_1 + \dots + k_M f_M) Q_{k_1 \dots k_M} + \\ + I_{k_1 \dots k_M} + H_{k_1 \dots k_M} V_{k_1 \dots k_M} + U_{k_1 \dots k_M}] = 0, \end{aligned} \quad (31)$$

где $U_{k_j}^j = U_{0, \dots, 0, k_j, 0, \dots, 0}$.

Существуют два метода решения (31): многомерное преобразование Фурье [24, 25] и искусственное отображение частот (Artificial Frequency Mapping) [26–30]. Многомерное преобразование Фурье является более точным методом, но имеет ряд сильных ограничений из-за сложности вычисления на количество размерность задачи (количество тонов, их кратности и размерность системы), поэтому не используется в современных симуляторах. Искусственное отображение частот — более гибкая и быстрая техника, которая позволяет свести задачу многотоннового гармонического баланса к однотонновой с некоторыми допущениями. Этот метод будет рассмотрен далее.

2.2. Искусственное отображение частот

Метод отображения частот наиболее эффективен и популярен для многотоннового гармонического баланса [26–30]. Эта техника базируется на двух основных условиях. Во-первых, в анализе нам необходимо считать лишь спектр нелинейного вектора $i(v(t))$ с помощью спектра $v(t)$, то

есть само представление $v(t), i(v(t))$ во временной области неважно, кроме, разве что, конца симуляции, когда решение уже найдено. Во-вторых, коэффициенты Фурье вектора $i(v(t))$ не зависят от самих частот вектора $v(t)$.

Второе условия хорошо иллюстрирует пример из [30]. Пусть вектор $i(v(t))$ имеет вид:

$$i(v(t)) = v(t) + v^2(t), \quad (32)$$

а вектор переменных зависит от двух базовых частот:

$$v(t) = a_1 \cos(\omega_1 t) + a_2 \cos(\omega_2 t). \quad (33)$$

Подстановка (33) в (32) дает:

$$\begin{aligned} i(v(t)) = & \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2) + a_1 \cos(\omega_1 t) + a_2 \cos(\omega_2 t) + \frac{a_1^2}{2} \cos(2\omega_1 t) + \\ & + \frac{a_2^2}{2} \cos(2\omega_2 t) + a_1 a_2 \cos((\omega_1 + \omega_2)t) + a_1 a_2 \cos((\omega_1 - \omega_2)t) \end{aligned} \quad (34)$$

Тогда множество частот Λ , на которых следует вести расчет:

$$\Lambda = \{\omega_1, \omega_2, |\omega_1 - \omega_2|, \omega_1 + \omega_2, 2\omega_1, 2\omega_2\}, \quad (35)$$

Как видно из (34), компоненты Фурье вектора $i(v(t))$ не зависят от ω_1, ω_2 , а зависят лишь от коэффициентов вектора $v(t)$. Это значит, что изменение ω_1, ω_2 не повлияет на коэффициенты Фурье $i(t)$. Единственное, что изменится при этом, — сам вид сигналов $v(t)$ и $i(v(t))$. В этом случае, можно заменить ω_1, ω_2 на:

$$\omega_1 \rightarrow 2\lambda_0, \quad \omega_2 \rightarrow 3\lambda_0, \quad (36)$$

где $\lambda_0 > 0$ — искусственная частота.

Тогда вектор $i(v(t))$ из (34) будет иметь те же коэффициенты, но зависеть от одной базовой частоты:

$$\begin{aligned} \bar{i}(v(t)) = & \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2) + a_1 \cos(2\lambda_0 t) + a_2 \cos(3\lambda_0 t) + \frac{a_1^2}{2} \cos(4\lambda_0 t) + \\ & + \frac{a_2^2}{2} \cos(6\lambda_0 t) + a_1 a_2 \cos(5\lambda_0 t) + a_1 a_2 \cos(\lambda_0 t) \end{aligned} \quad (35)$$

Подобная техника позволяет использовать алгоритм однотонного гармонического баланса из Главы 1 с небольшими изменениями. Изменения касаются матрицы Ω из системы (9). Так как она относится к вектору зарядов $q(v(t))$, ей необходимо зависеть от исходных частот. Следовательно, если даны две фундаментальные частоты ω_1, ω_2 с кратностями K_1, K_2 , то Ω принимает вид:

$$\Omega = \begin{bmatrix} j2\pi((-K_1)f_1 + (-K_2)f_2)I_n & & \\ & \ddots & \\ & & j2\pi(K_1f_1 + K_2f_2)I_n \end{bmatrix}. \quad (36)$$

Для использования этого метода следует определить функцию отображения исходных частот в искусственные. Для этого необходимо сначала определить усеченную дискретизацию исходного спектра, так как расчет теперь ведется на нескольких тонах [30, 31]. Далее будут рассмотрены две популярных техники усеченной дискретизации спектра: прямоугольная и алмазная.

2.2.1. Прямоугольная дискретизация частот

Прямоугольное усечение — более простая техника дискретизации. В двумерном случае ее схема представляется частотами λ :

$$\lambda = |k_1\omega_1 + k_2\omega_2|, \quad (37)$$

где k_1 и k_2 удовлетворяют условиям:

$$(0 \leq k_1 \leq K_1, |k_2| \leq K_2), \quad (k_1 \neq 0 \text{ if } k_2 < 0), \quad (38)$$

Формально множество из усеченных частот Λ_M можно представить из (37)-(38) (Рис. 1):

$$\Lambda_M = \{\lambda : \lambda = |k_1\omega_1 + k_2\omega_2| \quad k_1, k_2 \in Z \\ (0 \leq k_1 \leq K_1, |k_2| \leq K_2), \quad (k_1 \neq 0 \text{ if } k_2 < 0)\}, \quad (39)$$

где M — число ненулевых частот, можно вычислить по формуле:

$$M = \frac{1}{2}((2K_1 + 1)(2K_2 + 1) - 1). \quad (40)$$

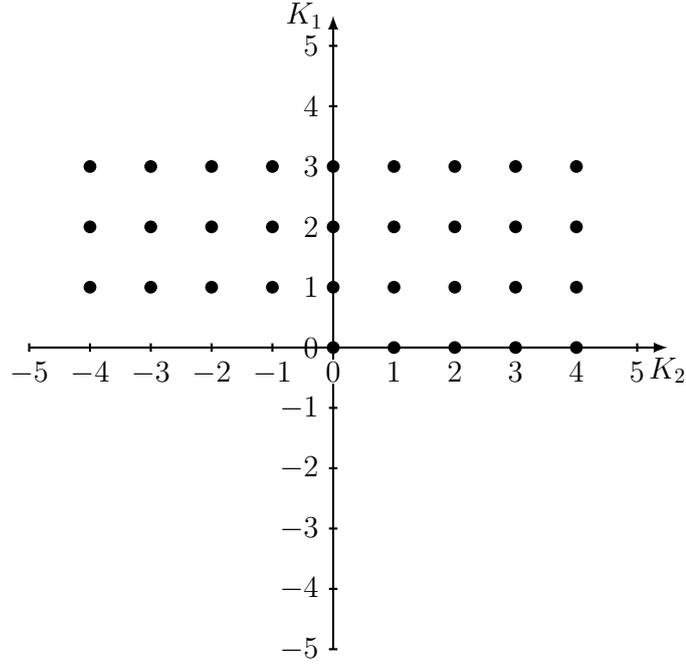


Рис. 1: Прямоугольное усечение с $K_1 = 3, K_2 = 4$

Преобразование этого спектра в искусственный спектр с базовой частотой λ_0 . Для двумерного случая формулы примут вид:

$$\omega_1 \rightarrow \lambda_0, \quad \omega_2 \rightarrow (1 + 2K_1)\lambda_0. \quad (41)$$

Таким образом, остальные элементы из (39) будут представлены в виде:

$$|k_1\omega_1 + k_2\omega_2| \rightarrow |k_1 + k_2(1 + 2K_1)|\lambda_0. \quad (42)$$

Особенность этой техники в том, что она также просто распространяется на многомерный случай. Пусть имеется d базовых частот $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_d$ с кратностями K_1, K_2, \dots, K_d . Тогда отображение можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \omega_1 &\rightarrow \lambda_1 \\ \omega_2 &\rightarrow \lambda_2 \\ &\vdots \\ \omega_d &\rightarrow \lambda_d \end{aligned}, \quad (43)$$

где λ_1 — искусственная частота, а λ_i определяются:

$$\begin{aligned}\lambda_2 &\rightarrow (1 + 2K_1)\lambda_1 \\ \lambda_3 &\rightarrow (1 + 2K_2)\lambda_2 \\ &\vdots \\ \lambda_d &\rightarrow (1 + 2K_{d-1})\lambda_{d-1}\end{aligned}, \quad (44)$$

Отношения между исходным и новым спектром определяются по формуле:

$$k = \frac{1}{\lambda_1} \left| \sum_{l=1}^d k_l \omega_l \right| \quad (45)$$

2.2.2. Алмазная дискретизация частот

Алмазное усечение предоставляет лучший выбор смешанных частот. Оно определяется установкой максимального числа интермодуляции K . Для двумерного случая алмазная дискретизация принимает вид (Рис. 2):

$$\begin{aligned}\Lambda_M = \{ \lambda : \lambda = |k_1\omega_1 + k_2\omega_2| \quad k_1, k_2 \in Z \\ (0 \leq |k_1| + |k_2| \leq K_2, k_1 \geq 0), \quad (k_1 \neq 0 \quad \text{if} \quad k_2 < 0) \},\end{aligned} \quad (46)$$

где M определяется по формуле:

$$M = K^2 + K. \quad (47)$$

Преобразование этого спектра в искусственный с базовой частотой λ_0 принимает вид :

$$\omega_1 \rightarrow K\lambda_0, \quad \omega_2 \rightarrow (K + 1)\lambda_0. \quad (48)$$

Преобразование остальных частот спектра можно получить по формуле:

$$|k_1\omega_1 + k_2\omega_2| \rightarrow |k_1K + k_2(K + 1)|\lambda_0. \quad (49)$$

Важный недостаток этой дискретизации в том, что так и не было построено явной формулы для отображения множества с тремя и более базовыми частотами [26, 30].

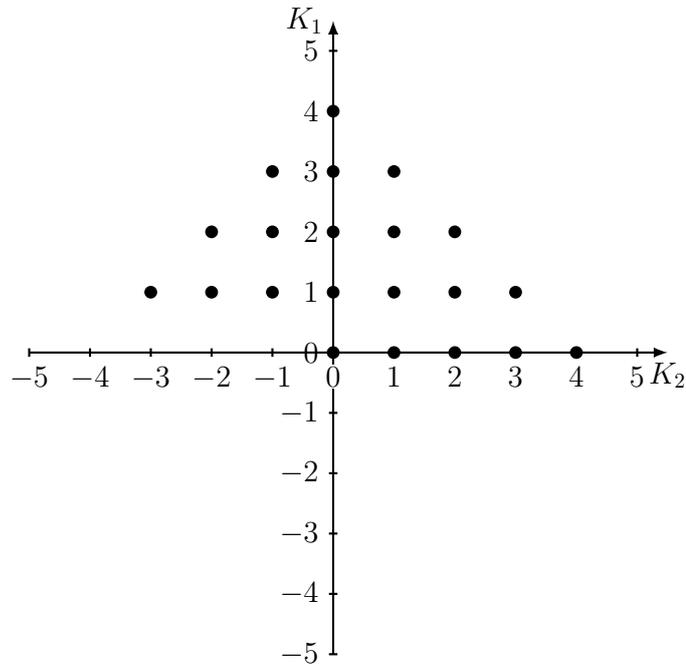


Рис. 2: Алмазное усечение с $K = 4$

2.4. Заключение

Сведение многотоннового гармонического баланса к однитонновому позволяет использовать уже готовый программный аппарат для работы с разными схемами без значительных изменений. Техника искусственного отображения частот предлагает устойчивый алгоритм в случае выполнения необходимых условий. Так как выбор искусственной частоты λ_0 произвольный, в большинстве вычислений его можно принять $\lambda_0 = 1$. Выбор дискретизации обычно предоставляется инженеру.

Глава 3. Реализация

В предыдущих главах рассказана теоретическая часть гармонического баланса, как метода нахождения установившихся режимов. В этой главе рассмотрена возможная реализация этого алгоритма. С помощью блок-схем показан порядок вызовов функций-этапов метода, а также разные возможные пути действий на тех или иных шагах.

К сожалению, зачастую недостаточно «книжного» алгоритма для решения реальных задач. Поэтому приходится изучать и использовать дополнительные техники для ускорения не только сходимости метода, но и самих итераций. Это часто приводит к появлению десятков дополнительных параметров анализа, поэкспериментировав с которыми, можно из быстро расходящегося процесса получить столь же уверенно и точно считающий алгоритм. В этой главе также рассмотрены практические модификации исходного метода.

3.1. Программная реализация алгоритма

В данной работе реализация алгоритма рассматривается, как добавление инструмента в состав схемотехнического комплекса моделирования. То есть учитывается наличие необходимых математических библиотек для расчетов, транслирование схем в уравнения, а также дополнительных анализов (DC/Transient) для поиска начального приближения.

На Рис. 3 изображена общая блок-схема гармонического баланса. Она представляет собой адаптацию метода Ньютона для решения системы нелинейных уравнений. Начинается алгоритм с инициализации. На этом этапе в алгоритм поступает начальное приближение $V^{(0)}$ и невязка по начальному приближению $F(0)$. Шаг инициализации подробнее будет рассмотрен ниже.

Далее начинаются итерации метода Ньютона. На итерации необходимо вычислить матрицы производных системы C, G , так как из них в дальнейшем будет формироваться частотная матрица J для поиска нового приближения. Расчет решения $V^{(l)}$ на итерации l может проводиться любым методом, описанным в предыдущих главах. После получения нового приближения $V^{(l)}$ проводится расчет невязки $F^{(l)}$, и, исходя из величины ее нормы, решается о дальнейшем продолжении алгоритма. Ниже каждый

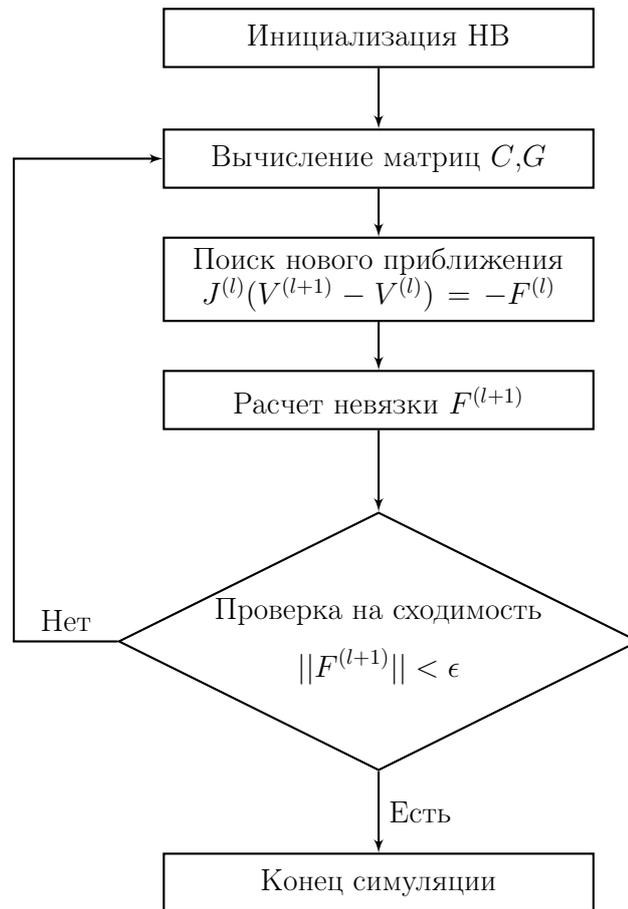


Рис. 3: Алгоритм НВ

этап алгоритма рассмотрится более подробно.

Важную роль в сходимости метода Ньютона играет выбор начального приближения. При неправильном выборе V_0 вероятность сходимости итераций может быть малой. В задачах схемотехнического моделирования начальное приближение для гармонического баланса обычно вычисляется из анализа постоянного тока (DC), либо из анализа переходных процессов (Transient). DC анализ занимает меньше времени и памяти, но полученное приближение будет иметь инициализированные значения лишь на нулевой частоте.

Выполнение анализа переходных процессов является первой итерацией PSS, временного метода поиска установившихся режимов. Результат этой итерации можно использовать и в качестве начального приближения для гармонического баланса, предварительно преобразовав приближение в частотный вектор. Тем не менее, сам расчет переходного процесса может оказаться весьма трудоемким, а, в случае наличия частотных компонентов, еще и достаточно неточным. Но на сильно нелинейных схемах его результаты могут существенно приблизить начальное приближение к решению.

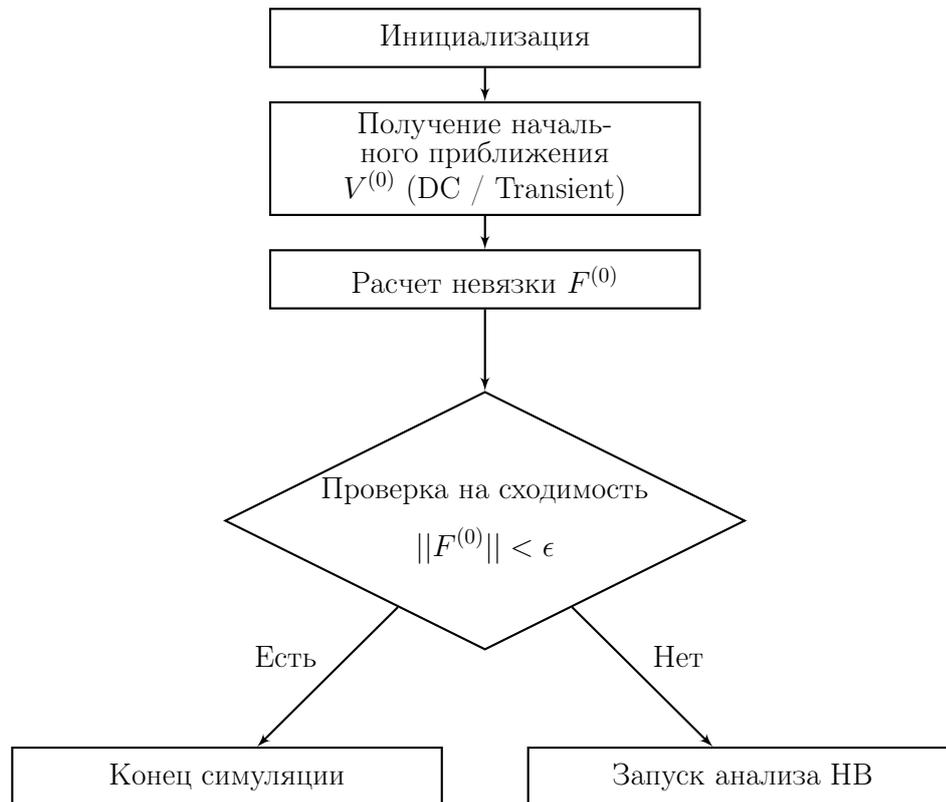


Рис. 4: Инициализация НВ

Гармонический баланс с использованием транзиента называется Transient Assisted Harmonic Balance (ТАНД) и используется в программных пакетах ADS, MWO.

После получения начального приближения каким-либо из перечисленных выше методов имеет смысл вычислить невязку системы (9) гармонического баланса и проверить, не является ли этот вектор $V^{(0)}$ искомым решением. Если начальный вектор вычислялся через анализ переходных процессов, то при незначительном переходном процессе этот вектор и может оказаться достаточно точным приближением к решению при преобразовании его в частотную область. В этом случае нет надобности в запуске самого гармонического баланса.

Блок-схема на Рис. 4 иллюстрирует описанные выше действия перед итерациями Ньютона в гармоническом балансе. Здесь под «инициализацией» понимается выполнение всех необходимых операций при транслировании схемы в уравнения и передачи настроек анализа в расчетный алгоритм.

При расчете невязки Рис. 5 необходимо конвертировать приближение $V^{(l)}$ во временную область. Переходы в частотную область (и обратно) могут быть сделаны с помощью прямого (обратного) преобразования

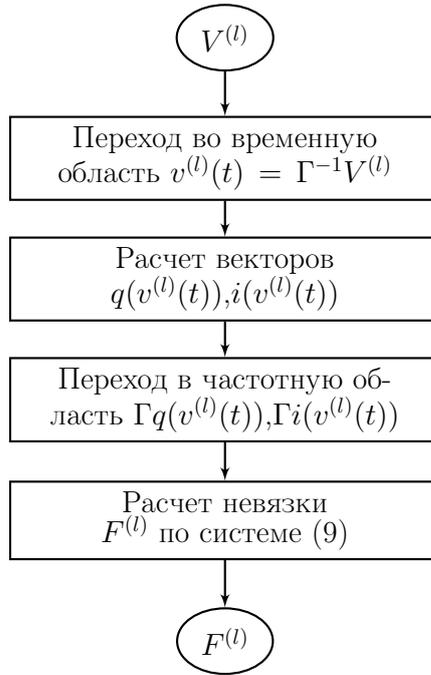


Рис. 5: Расчет невязки

Фурье или (обратного) быстрого преобразования Фурье. Затем, получив временной вектор $v^{(l)}(t_m)$ для определенных моментов времени t_m , рассчитываются вектора зарядов $q(v(t))$ и токов $i(v(t))$. Временные матрицы производных $C(v(t))$, $G(v(t))$ имеет смысл вычислить здесь же. Затем вектора q_m, i_m отображаются в частотную область, где и происходит расчет вектора невязки $F^{(l)}$ с использованием вектора входных сигналов $\Gamma u(t)$ и произведения $HV^{(l)}$ при наличии частотных компонент в схеме.

Решение СЛАУ точным методом требует явного построения матрицы Якоби системы. Так как матрицы производных C , G к этому моменту уже должны быть рассчитаны, то на этом шаге алгоритма остается по системе (14) с учетом (36) для многотоннового анализа вычислить матрицу $J^{(l)}$. Матрицу Якоби удобно строить поблочно, так как произведение $\Gamma C \Gamma^{-1}$ представляет собой матрицу суммы блоков с соответствующими комплексными коэффициентами. Стоит отметить, что диагональные блоки $J^{(l)}$ отличаются лишь частью $\Omega \Gamma C \Gamma^{-1}$, то есть засчет коэффициента Ω_j , то есть можно избежать пересуммирования блоков. Затем идет разложение матрицы $J^{(l)}$ (LU, KLU или другим методом), используя которое, и решается линейная система. Блок-схема на Рис. 6 иллюстрирует порядок решения точными методами.

На Рис. 7 показан порядок решения СЛАУ с GMRES и предобуславливанием. Если используется динамический предобуславливатель M , то

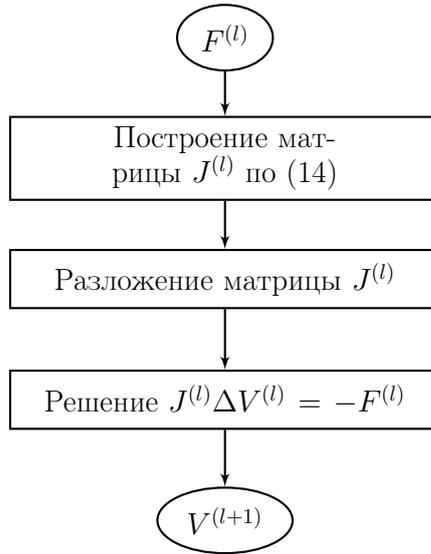


Рис. 6: Расчет прямым методом

перед началом расчета, его следует обновить на основе уже посчитанных матриц производных C, G . Затем правая часть уравнения умножается на M^{-1} и подается в алгоритм GMRES.

Справа на Рис. 7 показан шаг GMRES, на котором вычисляется новое направление $p^{(l,k+1)}$. Вычисление происходит по формуле (15), где необходимо использовать отображение вектора $p^{(l,k)}$ во временной области. Затем полученный вектор умножается на M^{-1} и результат отправляется возвращается GMRES. Так происходит до сих пор, пока алгоритм не сойдется или выдаст ошибку из-за превышения числа итераций (повторов).

После получения нового приближения вычисляется новая невязка. Если ее норма не превышает заданной точности, то алгоритм сошелся, и

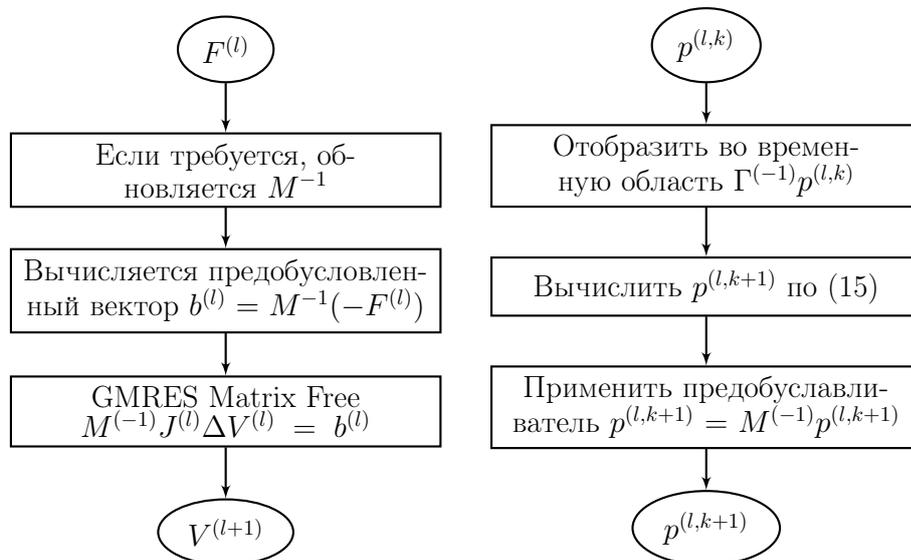


Рис. 7: Расчет с GMRES слева, умножение матрицы на вектор $M^{(-1)}J^{(l)}p^{(l,k)}$ справа

последнее полученное приближение считается решением задачи.

3.2. Модификации алгоритма

В предыдущем пункте рассмотрена реализация стандартного гармонического баланса. К сожалению, подобная имплементация метода требует небольших, но значимых улучшений для работы с сильно нелинейными компонентами. Ниже предложены модификации гармонического баланса, необходимые для построения более быстрого и устойчивого алгоритма. Значимость этих дополнений проверена на практике на ряде нелинейных систем, а также схем большой размерности. Результаты использования некоторых модификаций показаны в четвертой главе.

3.2.1 Улучшение сходимости

Сходимость метода Ньютона является основной алгоритмической задачей в гармоническом балансе. Нахождение этим методом решения сильно нелинейных систем остается актуальной проблемой для разных прикладных задач. При поиске установившихся режимов гармоническим балансом на многих схемах метод Ньютона может разлететься уже на первых итерациях после включения нелинейных элементов. Из-за сильных погрешностей и фактически бесконечной невязки вероятность вернуться к сходимости близка к нулю.

Для решения этой проблемы можно использовать модификацию метода Ньютона, в которой новое приближение получается путем неполного добавления полученного из (11) шага:

$$V^{(l+1)} = V^{(l)} + \lambda^k \Delta V^{(l)}, \quad (50)$$

где $\lambda \in (0; 1]$ — коэффициент скорости, k — степень уменьшения скорости.

Уменьшение скорости выполняется при условии, что норма полученной невязки больше предыдущей:

$$\|F^{(l+1)}\| > \|F^{(l)}\|. \quad (51)$$

На Рис. 8 представлена блок-схема алгоритма с модифицированным методом Ньютона. Это модификация позволяет методу Ньютона на каждой новой итерации получать невязку меньше предыдущей, что и свиде-

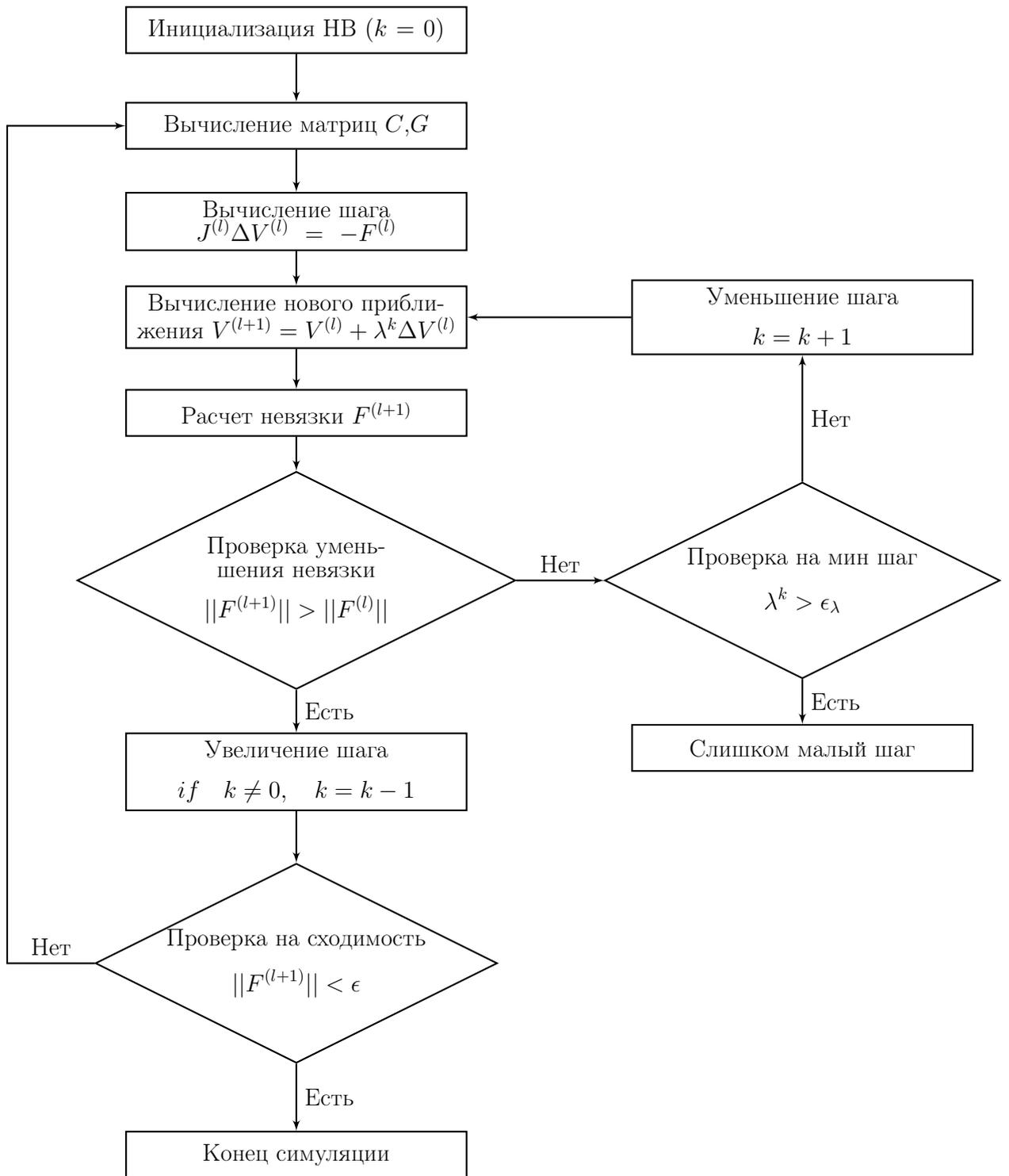


Рис. 8: Алгоритм НВ с модифицированным методом Ньютона

тельствует о сходимости. Но стоит учитывать, что скорость сходимости может сильно уменьшиться при неправильном выборе λ . По результатам экспериментов предлагается использовать значения в промежутке $[0.2, 0.5]$. Также необходимо определить величину наименьшего шага ϵ_λ , прохождения $\lambda^k < \epsilon_\lambda$ которого будет свидетельствовать о невозможности дальнейшего уменьшения невязки. В этом случае придется применять другие мо-

дификации.

3.2.2 Переиспользование матрицы Якоби

Ускорение сходимости метода Ньютона — безусловно важная задача. Однако, не стоит забывать, что скорость работы алгоритма определяется не одним числом итераций, а также и количеством операций на каждой итерации. При поиске решения с использованием точных методов наиболее затратными шагами являются построение матрицы Якоби и ее разложение $\mathcal{O}(NM^3)$. Чтобы попытаться уменьшить число затратных разложений, предлагается на некоторых итерациях не пересчитывать матрицу Якоби.

Правило переиспользования матрицы должно основываться на задаче сходимости метода Ньютона. Пусть новый параметр $\epsilon_J \in (0, 1)$ означает порог минимального относительного изменения нормы новой невязки по отношению к предыдущей. Тогда для переиспользования матрицы Якоби должно выполняться правило:

$$\frac{\|F^{(l)}\| - \|F^{(l+1)}\|}{\|F^{(l)}\|} > \epsilon_J. \quad (52)$$

Выполнение (52) означает удовлетворительную скорость изменения нормы от итерации к итерации. При нарушении этого условия матрица Якоби переформируется и заново вычисляется приближение и соответствующая ему невязка.

3.2.3 Блочно-диагональная матрица Якоби

Аналогичный алгоритм можно применить и для использования блочно-диагональной матрицы Якоби. Особенность этой техники заключается в том, что задача поиска нового приближения разбивается по независимым блокам матрицы $J^{(l)}$, что позволяет избежать формирования матрицы и решать системы отдельно друг от друга.

Если полученное решение удовлетворяет (52), то можно дальше использовать диагональную матрицу. Иначе, необходимо пересчитать полную матрицу $J^{(l)}$ и получить новое приближение. Подобная модификация подходит для решения на слабо нелинейной системе. На линейной системе GMRES с частотным предобуславливателем (17) полностью сводится к этому дополнению.

3.2.4. Пошаговое изменение источников

Пошаговое изменение источников применяется в том случае, когда гармонический баланс с модификациями, описанными выше, не способен найти установившийся режим с нужной точностью. Смысл этой техники заключается в постепенном уменьшении влияния входных сигналов на схему. Если алгоритм сходится на более слабых сигналах, то полученное приближение можно использовать в качестве начального приближения в исходной задаче.

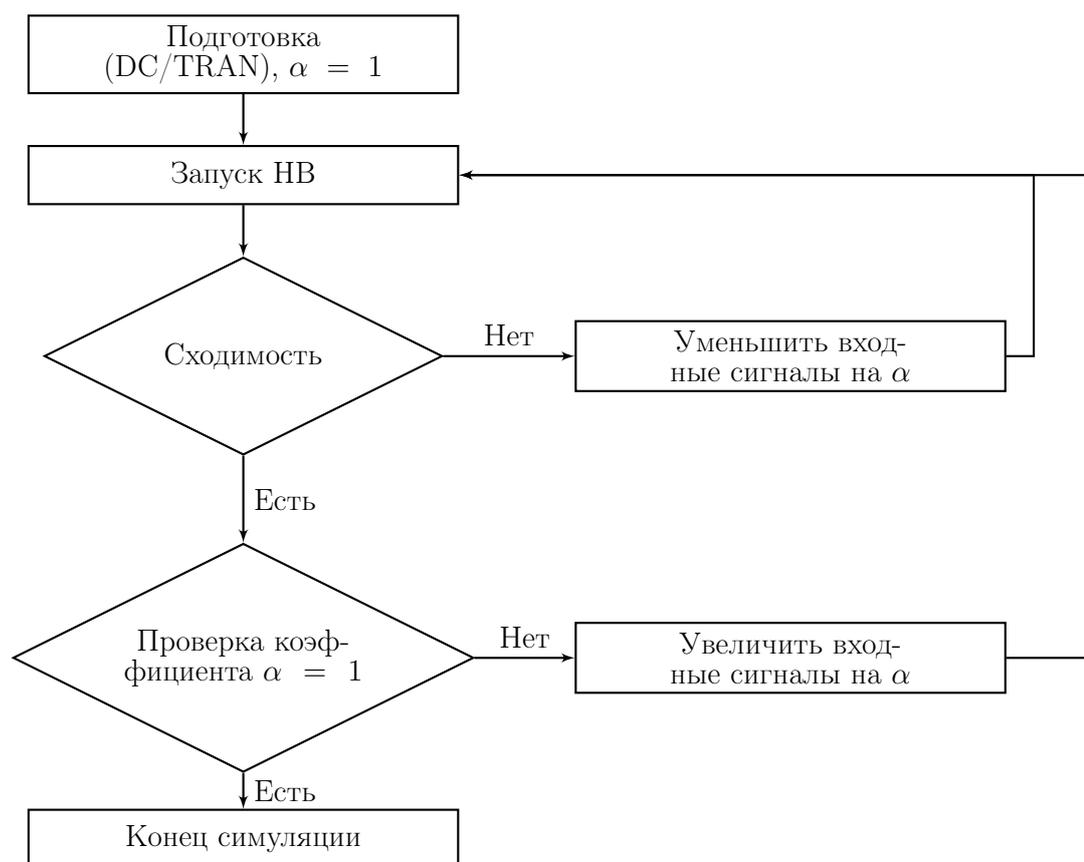


Рис. 9: Пошаговое изменение источников

На Рис. 9 показана блок-схема использования пошагового изменения источников. Изменять коэффициент α можно по-разному. Рекомендуется определить шаг h и уменьшать коэффициент $\alpha = \alpha - h$. Если на каком-то шаге $\bar{\alpha}$ алгоритм смог сойтись, но на $\bar{\alpha} + h$ ответ не найден, то можно уменьшить шаг вдвое и попытаться искать решение на шаге с коэффициентом $\bar{\alpha} + \frac{h}{2}$. Этот процесс можно продолжать, пока шаг изменения коэффициента не станет слишком малым. Даже если алгоритм не сходится, подобная информация также может помочь при анализе схемы.

3.2.5. Передискретизация

Данная техника позволяет получить более подробную информацию о схеме во временной области. Ее суть заключается в использовании большего количества временных отсчетов, чем необходимых для проведения преобразования Фурье.

Пусть в гармоническом балансе число запрашиваемых частот $K = 5$ с учетом ДС. Для получения информации по ним достаточно брать число временных отсчетов $M = 8$. Но если входной сигнал, к примеру, имеет пульсирующую форму, то может понадобиться больше точек для получения достаточно подробной информации об его воздействии на схему, не увеличивая при этом сложность задачи. В этом случае, можно попробовать работать с $M = 16$ и тем же числом частот $K = 5$. Тогда при обратном преобразовании Фурье во временную область часть временных отсчетов будут интерполированы.

Подобная техника может быть полезна в случае, когда запрашиваемое число частот K слишком мало, а на вход подаются сигналы сложной формы.

3.3. Параллельные вычисления

Гармонический баланс увеличивает размерность исходной системы в $2K$ раз, где K — число частот. С учетом передискретизации построение матрицы для точного метода или прямое использование матриц производных (C_i, G_i) для GMRES сложность системы увеличивается в M раз, где M — число временных отсчетов. Это мотивирует использовать параллельные или распределенные вычисления для решения задачи гармонического баланса [32–36].

Основные рассмотренные в первой главе методы для решения СЛАУ позволяют проводить часть вычислений независимо: у блочных точных методов — разложение диагональных блоков, у GMRES — операции умножений блоков на вектора и сложение векторов. Для реализации этих возможностей были использованы две технологии: OpenMP и CUDA. Результаты их применения на схемах представлены в четвертой главе.

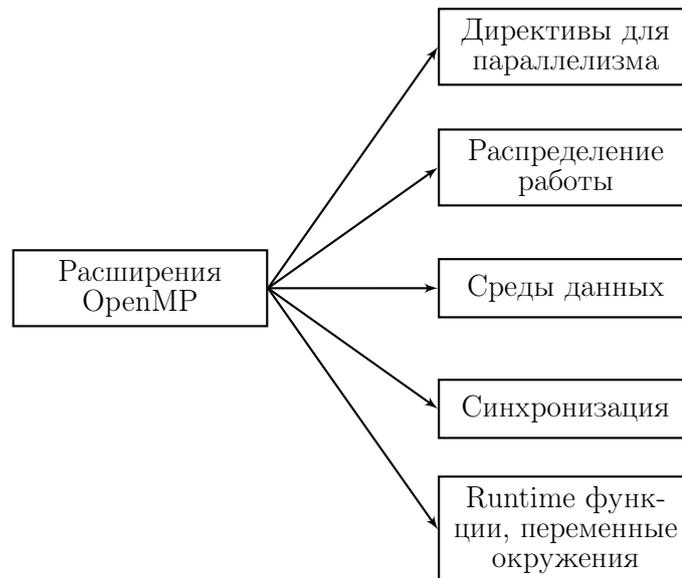


Рис. 10: Расширения OpenMP

3.3.1. OpenMP

OpenMP — стандарт для распараллеливания программ на C, C++, Fortran. Предназначен для программирования многопоточных приложений на многопроцессорных системах с общей памятью. Основная особенность OpenMP заключается в том, что реализация многопоточности проходит с помощью директив компилятора, что позволяет быстро распараллеливать уже написанный однопоточный рабочий код без изменений его структуры.

OpenMP предоставляет набор инструментов для создания потоков, распределения работы и данных между ними, синхронизации и изменения параметров параллелизма в процессе выполнения программы (Рис. 10). Также у него есть свой планировщик, отслеживающий и распределяющий нагрузку по потокам.

В алгоритме гармонического баланса OpenMP можно использовать для трех часто встречающихся операций среди всех методов: разложение диагональных блоков матрицы Якоби, умножение временных матриц C_i , G_i на вектора и сложения векторов. OpenMP полезен при большом числе запрашиваемых коэффициентов и временных отсчетов M . Однако, при работе на схемах с исходными матрицами системы большой размерности более значительное ускорение можно получить, используя графические процессоры.

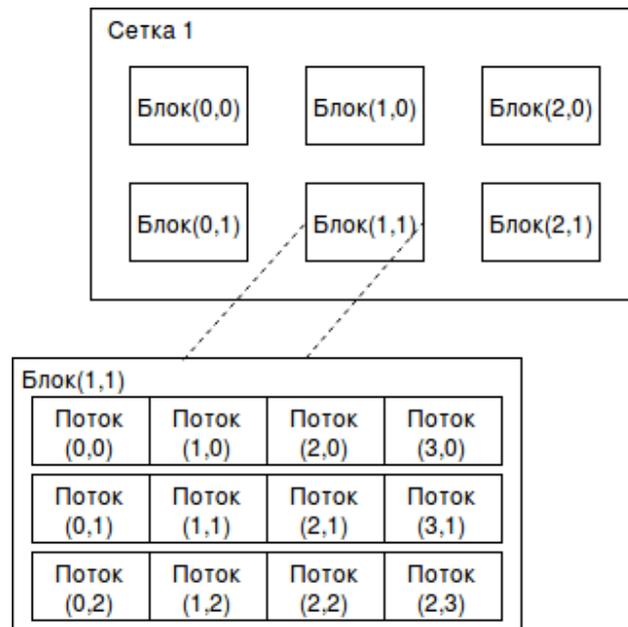


Рис. 11: Программная модель CUDA

3.3.2. CUDA

CUDA — это программно-аппаратная архитектура параллельных вычислений от NVIDIA для увеличения производительности с помощью графических процессоров. CUDA API основан на Си с некоторыми ограничениями. Поддержка таких операций, как создание потоков и аллокация памяти, позволяет разработчикам использовать все возможности параллелизма на видеокартах.

В программной модели CUDA потоки сгруппированы в блоки, а блоки — в сетки (Рис. 11). Разные распределения нагрузки на эту структуру дают разную производительность. CUDA предполагает, что CPU и GPU имеют разделенную память. Для каждого блока разделяемая память является доступной всем потокам из этого блока, а глобальная память доступна всем потокам из всех блоков.

В CUDA большинство аппаратных функций вызываются хостом асинхронно. Поэтому введены потоки задач, позволяющие разделять алгоритм на независимые подалгоритмы, и методы синхронизации, как между потоками, так и между GPU и хостом.

В данной работе CUDA использовалась для ускорения операций умножения матрицы на вектор и сложения векторов с умножением на комплексный коэффициент. Данные операции необходимы для нахождения нового направления в GMRES и являются основными в гармоническом балансе

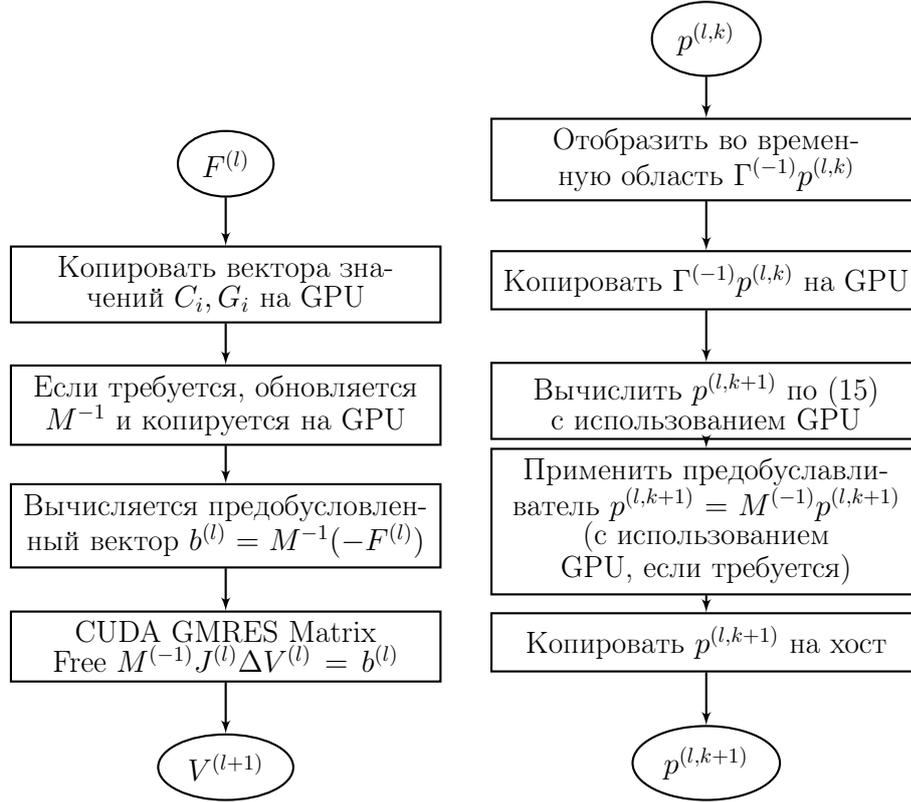


Рис. 12: Расчет с GMRES+CUDA слева, умножение матрицы на вектор $M^{(-1)}J^{(l)}p^{(l,k)}$ справа

при решении с помощью итерационного алгоритма.

Для реализации операции умножения матрицы на вектор использовалась библиотека `cusparse`. На Рис. 12 показан вариант реализации GMRES с использованием CUDA. Значения временных матриц производных C_i, G_i копируются на GPU перед очередным использованием GMRES для решения СЛАУ. Так как структуры матриц $C_i, i \in [1, M]$ и $G_i, i \in [1, M]$ имеют одинаковые формы, то вне зависимости от выбранного хранения разреженных матриц отдельно хранятся лишь вектора ненулевых значений матриц, тогда как вектора, определяющие структуры матриц, общие для всех матриц C_i и всех матриц G_i соответственно. Операцию умножения вектора на разложение блоков предобуславливателя можно также перенести на GPU, так как она тоже используется при каждом вычислении нового направления. Однако, в этом случае надо учитывать память видеокарты, так как при плохом разложении эти блоки могут иметь достаточно большое число ненулевых элементов.

Вариантов реализации GMRES на CUDA для гармонического баланса может быть много. При этом надо учитывать технические параметры используемых видеокарт и размерность схем, на которых они будут при-

меняться. На задачах малой размерности использование видеокарт может не принести прироста производительности, а в некоторых случаях и значительно замедлить программу. Тем не менее, при моделировании масштабных электросетей использование видеокарт и сопроцессоров может принести многократный прирост в скорости работы алгоритма.

3.4. Заключение

В этой главе с помощью блок-схем была описана возможная реализация гармонического баланса. Затем был предложен ряд модификаций, только с использованием которых этот алгоритм будет приносить результат при решении реальных прикладных задач. Подобные модификации значительно ускоряют работу алгоритма в целом и обеспечивают ему большую устойчивость. Существуют также часть специализированных методов для улучшения сходимости, основанных на физическом понимании самой схемы, но в данной работе они не рассматриваются.

Дополнения параллелизма могут быть полезны, как на схемах средней размерности (OpenMP), так и на огромных системах (OpenMP + CUDA). Для работы с масштабными электросетями также можно использовать и кластерные возможности [33, 34] при наличии доступа к подобным аппаратам. Для работы с ними пригодятся как рассмотренные технологии, так и другие, например, MPI для передачи данных между нодами кластера и OpenACC для использования кода как центральным, так и графическим процессором [35, 36].

Количество ресурсов необходимых для наиболее эффективного расчета гармонического баланса зависит от размера задачи и сложности схемы, поэтому обычно определяется самим пользователем.

Глава 4. Эксперименты

В этой главе рассказано о проведенных экспериментах с алгоритмами, описанными в предыдущих главах. Целью этих экспериментов является проверка значимости модификаций алгоритма для ускорения работы гармонического баланса.

4.1. Сравнение методов

В таблице 1 показано сравнение методов решения СЛАУ на нелинейной схеме небольшой размерности $N = 16$ при большом числе частот $K = 61$. В этом эксперименте не используются никакие рассмотренные ускорения для метода Ньютона с прямым методом. Вычисления всеми методами однопоточные.

метод	время	N итер.
LU	68.04	58
GMRES	11.54	12
GMRES + M_f	0.225	12
GMRES + M_t	0.3	12

Таблица 1: Диодная схема. Размерность 16, число частот 61.

Наблюдается значительное преимущество GMRES с предобуславливанием. Сами предобуславливатели M_f и M_t показывают на этой схеме примерно одинаковые результаты. Для этого эксперимента использовались постоянные предобуславливатели. По результатам эксперимента можно предположить, что при большом числе частот на небольших схемах GMRES работает эффективнее, чем базовый LU алгоритм. Также показывается значительный прирост скорости в сходимости GMRES при использовании предобуславливателей.

К сожалению, для схем большой размерности большую трудность составляет правильный подбор параметров алгоритма GMRES (размер подпространств Крылова и точность вычислений). В некоторых случаях их легче решить с помощью прямых блочных алгоритмов. Поэтому ускорение прямых методов является весьма важной задачей.

4.2. Ускорение модификациями

Переиспользование матрицы Якоби является весьма важным дополнением к гармоническому балансу. В таблице 2 приведены примеры значительного ускорения на реальных схемах с использованием данного алгоритма.

тип схемы	размерность	время	№ итер.
diode mixer	33 * 25	24.395 / 5.114	57 / 163
diode mixer	27 * 61	31.726 / 6.626	67 / 120
npr mixer	38 * 25	66.1398 / 17.811	122 / 171

Таблица 2: Решение прямым методом: без переиспользования матрицы Якоби / с переиспользованием.

Как видно по таблице, эта модификация существенно увеличивает число итераций метода Ньютона. Тем не менее, большинство этих итераций не пересчитывают матрицу Якоби и, следовательно, не проводят разложение матрицы.

Использование диагональной матрицы Якоби особенно полезно, если система имеет слабую нелинейность. При построение полной матрицы Якоби на линейной схеме могут добавиться ненулевые элементы ввиду вычислительной погрешности. Так как отсутствие нелинейных компонент схемы можно увидеть еще на этапе трансляции схемы в уравнения, то такие случаи можно автоматически обрабатывать, используя диагональную матрицу Якоби в качестве прямого метода решения. Более того, такую матрицу не надо явно строить, а блоки можно раскладывать независимо друг от друга, что позволяет существенно сократить затраты на время и память, при этом увеличив точность вычислений.

В таблице 3 показано значение проверки линейности системы для использования диагональной матрицы.

метод	время	№ итер.
BLU	15.32	1
BLU + Diag J	1.04	1

Таблица 3: Линия передачи. Размерность 6004, число частот 15.

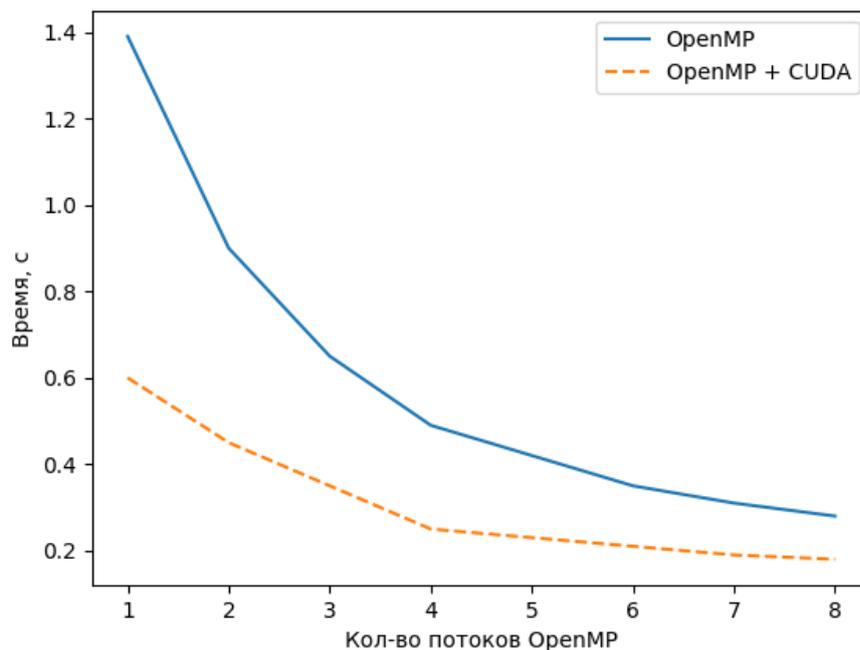


Рис. 13: Поиск нового направления в GMRES: $N = 44923$, $K = 64$

4.3. Параллельные вычисления

На схемах большой размерности проводились эксперименты с параллельными вычислениями. OpenMP тестировался на процессоре Intel(R) Xeon(R) CPU E5-2690 v4 @ 2.60GHz. В качестве GPU для CUDA использовалась NVIDIA Quadro P6000.

Большой интерес при анализе гигантских схем вызывает итерационный алгоритм GMRES, так как он предоставляет большой контроль над потреблением памяти, что является важным свойством в этой задаче.

На рис. 13 представлены результаты проведения экспериментов по ускорению операции вычисления нового приближения (15) в алгоритме GMRES для системы размерности $N = 44923$ и числа частот $K = 64$. На восьми потоках OpenMP получено пятикратное ускорение этой операции. Использование CUDA без OpenMP дало 2.5x ускорение. Потоки OpenMP занимались накидыванием задач в асинхронные CUDA streams. При использовании восьми потоков задач CUDA на данной схеме получено 3.1x ускорение по отношению к GPU с одним CUDA stream. Увеличение скорости при увеличении потоков задач свидетельствует о недостаточной нагрузке видеокарты одной задачей.

Эксперименты со схемой с размерностью $N = 127565$ и числом частот

$K = 64$ показаны на рис. 14. С помощью восьми потоков OpenMP получено 5.2x ускорение. Использование CUDA и восьми потоков задач дало более чем восьми кратное ускорение по отношению к версии без ускорений.

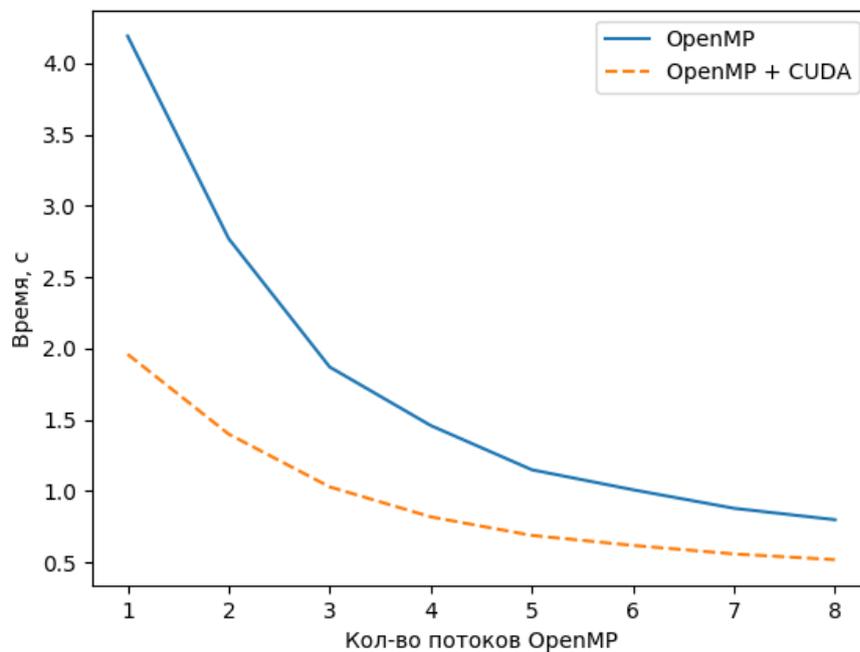


Рис. 14: Поиск нового направления в GMRES: $N = 127565$, $K = 64$

Заключение

В данной работе проведено научное исследование для реализации анализа электрических схем методом многотоннового гармонического баланса как инструмента пакета схемотехнического моделирования. Для решения задачи использовались как прямые, так и итерационные алгоритмы. Проведен анализ предобуславливателей для ускорения сходимости алгоритма GMRES. Показано сведение задачи многотоннового гармонического баланса к однитонновому. Предложены модификации стандартного алгоритма для создания более гибкого и быстрого инструмента анализа схем. Проведены эксперименты с технологиями параллельных вычислений для ускорения работы метода гармонического баланса на схемах большой размерности. Проведены эксперименты, показывающие значимость подобных дополнений.

В анализе методом гармонического баланса все еще есть множество проблем и предметов для исследования. На практике встречаются схемы, из-за плохой обусловленности которых разложение блоков предобуславливателей, представленных в статье, добавляет большую погрешность при поиске нового приближения итерационным алгоритмом. Алгоритм требует дополнений и улучшений для работы с осцилляторами. Также тяжелой задачей является правильный подбор параметров метода гармонического баланса для устойчивой сходимости метода Ньютона, эффективного разложения матриц прямыми методами и быстрой сходимости итерационных алгоритмов.

Все эти проблемы оставляют метод гармонического баланса актуальной задачей и порождают дальнейшие исследования в этой предметной области.

Список литературы

- [1] K.S. Kundert, J. White, A. Sangiovanni-Vincentelli, "Steady-State methods for simulation analog and microwave circuits," Kluwer Academic Publishers, 1990
- [2] K.S. Kundert, "Introduction to RF simulation and its application," IEEE J. Solid-State Circuits, vol. 34, no. 9, pp. 1298–1319, Sept. 1999
- [3] J. Gilmore, Rowan & B. Steer, Michael, "Nonlinear circuit analysis using the method of harmonic balance—a review of the art. II. Advanced concepts," International Journal of Microwave and Millimeter-Wave Computer-Aided Engineering. 1. 159 - 180. 1991
- [4] K.S. Kundert, G.B. Sorkin, A. Sangiovanni-Vincentelli, "Applying harmonic balance to almost-periodic circuits," IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol. 36, issue 2, pp. 366–378, Feb. 1988
- [5] O. Nastov, "Spectral methods for circuit analysis," Ph.D. thesis, Massachusetts Institute of Technology, Dept. of Electrical Engineering and Computer Science, USA, 1999.
- [6] O. Nastov, R. Telichevsky, K. Kundert and J. White, "Fundamentals of fast simulation algorithms for RF circuits," IEEE Proc., vol. 95, no. 3, pp. 600–621, March 2007
- [7] O. J. Nastov and J. K. White, "Time-mapped harmonic balance," Proceedings 1999 Design Automation Conference (Cat. No. 99CH36361), New Orleans, LA, pp. 641-646, 1999
- [8] A. R. Farsaei and R. Safian, "A novel method for calculating initial condition in harmonic balance analysis exploiting Volterra series," 2009 International Conference on Advances in Computational Tools for Engineering Applications, Zouk Mosbeh, 2009, pp. 324-328.
- [9] M. Schetzen, "The Volterra and Wiener Theories of Nonlinear Systems," New York, John Wiley & Sons, 1980.
- [10] J. Kawata, T. Yousuke, M. Oda, Y. Yamagami, Y. Nishio, A. Ushida, "Spice-Oriented Frequency-Domain Analysis of Nonlinear Electronic Circuits," IEICE Transactions, vol 90-A, pp. 406-410, Feb. 2007

- [11] T. Kinouchi, Y. Yamagami, Y. Nishio, A. Ushida, "Spice-Oriented Harmonic Balance and Volterra Series Methods," 2007
- [12] H. Liu and N. Wong, "Autonomous Volterra Algorithm for Steady-State Analysis of Nonlinear Circuits," *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, vol. 32, no. 6, pp. 858-868, June 2013
- [13] Y. Thodesen and K. Kundert, "Parametric harmonic balance," 1996 *IEEE MTT-S International Microwave Symposium Digest*, San Francisco, CA, USA, vol.3., pp. 1361-1364,1996
- [14] Suihua Lu, A. Narayan and A. Mehrotra, "Continuation method in multitone harmonic balance," 2004 *IEEE International Symposium on Circuits and Systems (IEEE Cat. No.04CH37512)*, 2004, pp. V-520-V-523 Vol.5.
- [15] G.W. Somers, "Acceleration of Block-Aware Matrix Factorization on Heterogeneous Platforms," 2016
- [16] B. Bandali, E. Gad and M. Bolic, "Accelerated Harmonic-Balance Analysis Using a Graphical Processing Unit Platform," *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, vol. 33, no. 7, pp. 1017-1030, July 2014.
- [17] A. Sangiovanni-Vincentelli, Li-Kuan Chen and L. Chua, "An efficient heuristic cluster algorithm for tearing large-scale networks," *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 24, no. 12, pp. 709-717, December 1977.
- [18] Y. Saad and M.H. Schultz, "GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems," *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 7:856–869, 1986
- [19] Y. Saad, "Iterative methods for sparse linear systems," *Soc Ind Appl Math* 1996, p. 447.
- [20] F. Veerse, "Efficient iterative time preconditioners for harmonic balance RF circuit simulation," *Proc 2003 IEEE/ACM Int Conf Compu Aided Des*, Washington, DC, USA, 2003. *IEEE Comput Soc*, pp. 251–254, 2003.

- [21] M. Honkala, V. Karanko, "Mixed preconditioners for harmonic balance Jacobians," *International Journal of RF and Microwave Computer-Aided Engineering* 19. pp. 211-217, 2009.
- [22] Y. Saad, "A Flexible inner-outer preconditioned GMRES algorithm," *SIAM J Sci Comput* 14, 461–469, 1993.
- [23] H.A. van der Vorst and C. Vuik, "GMRESR: A family of nested GMRES methods," *Numer Lin Algebra Appl* 1 (1994), 369–386.
- [24] V. Rizzoli, C. Cecchetti and A. Lipparini, "A General-Purpose Program for the Analysis of Nonlinear Microwave Circuits under Multitone Excitation by Multidimensional Fourier Transform 17th European Microwave Conf. Proc., pp.635-640, Rome, Sept. 1987.
- [25] V. Rizzoli, C. Cecchetti, A. Lipparini and F. Mastri, "General-Purpose Harmonic Balance Analysis of Nonlinear Microwave Circuits Under Multitone Excitation," *IEEE Trans. on Microwave Theory and Tech.*, vol. MTT-36, pp.1650-1659, Dec. 1988.
- [26] N. B. De Carvalho and J. C. Pedro, "Multitone frequency-domain simulation of nonlinear circuits in large- and small-signal regimes," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 46, no. 12, pp. 2016-2024, Dec 1998.
- [27] J. C. Pedro and N. B. Carvalho, "Efficient Harmonic Balance Computation of Microwave Circuits Response to Multi-Tone Spectra 29th European Microwave Conference Proc., vol. I, pp.103-106, Munich, Oct. 1999.
- [28] D. Hente and R. H. Jansen, "Frequency Domain Continuation Method for the Analysis and Stability Investigation of Nonlinear Microwave Circuits *IEE Proceedings Pt. H*, vol. 133, pp.351-362, 1986.
- [29] P. J. Rodrigues, "A General Mapping Technique for Fourier Transform Computation in Nonlinear Circuit Analysis *Microwave and Guided Wave Letters*, vol. 11, pp.374-376, Nov. 1997.
- [30] E. Gad, "Simulation of RF integrated circuits," 2007
- [31] A.A. Amini and P. Gunupudi, "Self-Consistent Steady-State Simulation of Microwave Photonic Systems Using Harmonic Balance," *IEEE*

Transactions on Components, Packaging and Manufacturing Technology, vol. 4, no. 3, pp. 472-479, March 2014.

- [32] X.X. Liu, H. Yu and S.X.D. Tan, "A GPU-Accelerated Parallel Shooting Algorithm for Analysis of Radio Frequency and Microwave Integrated Circuits," in IEEE Transactions on Very Large Scale Integration (VLSI) Systems, vol. 23, no. 3, pp. 480-492, March 2015
- [33] J.M. Bahi, R. Couturier, L. Z. Khodja. "Parallel GMRES implementation for solving sparse linear systems on GPU clusters," In Proceedings of the 19th High Performance Computing Symposia (HPC '11). Society for Computer Simulation International, San Diego, CA, USA, 12-19, 2011.
- [34] P. Li and W. Dong, "Parallel Preconditioned Hierarchical Harmonic Balance for Analog and RF Circuit Simulation," Advances in Analog Circuits Esteban Tlelo-Cuautle, IntechOpen, Feb. 2011.
- [35] J. Meng, Q. Zhu, Y. Pang, X. Lai, X. Zhang and Y. Zhu, "Multi-core accelerated harmonic balance method for multi-tone full chip RFIC simulation," 2011 IEEE MTT-S International Microwave Symposium, Baltimore, MD, pp. 1-4, 2011.
- [36] W. Dong and P. Li, "Accelerating Harmonic Balance Simulation Using Efficient Parallelizable Hierarchical Preconditioning," 2007 44th ACM/IEEE Design Automation Conference, San Diego, CA, pp. 436-439, 2007.