Санкт-Петербургский государственный университет
Кафедра теории управления

Воробьёва Анна Алексеевна

Магистерская диссертация

Анализ устойчивости нелинейных многосвязных систем

Методы прикладной математики и информатики в задачах управления.
ВМ.5517.16

Научный руководитель,
доктор физ.-мат. наук,
профессор
Александров А. Ю.

Санкт-Петербург
2018

Содержание

1. Введение

В современной теории управления особую роль играет задача исследования устойчивости различных классов нелинейных систем [1]. Также, на сегодняшний день, одной из наиболее динамично развивающихся областей теории автоматического управления является сетевое управление [2].

Данная работа состоит из двух частей. Первая часть посвящена анализу устойчивости для некоторых классов нелинейных систем с запаздыванием. Во второй части рассматривается задача размещения агентов на отрезке. Предполагается, что взаимодействие между агентами осуществляется с запаздыванием. Анализ устойчивости положения равновесия производится на основе результатов, полученных в первой части исследования.

В первой части работы исследуются условия асимптотической устойчивости нулевого решения для некоторых классов систем с постоянным запаздыванием. Системы дифференциально – разностных уравнений с запаздыванием широко используются для моделирования различных динамических процессов [3]. Такие системы применяются в экологии, экономике, инженерии и многих других областях [3–5]. Применение систем с запаздыванием оправдано в том случае, когда динамика системы зависит не только от её положения в текущий момент времени, но и от её состояния в некоторый прошедший момент времени. Для изучения условий устойчивости систем с запаздыванием в данной работе применяется прямой метод Ляпунова и функционалы Ляпунова — Красовского [3].

Во второй части работы рассматривается специальная задача управления мультиагентной системой — задача размещения на отрезке нескольких идентичных агентов, что является частным случаем задачи управления формациями [6]. Такие задачи главным образом связаны с вопросами управления группами роботов, а также используются для моделирования биологических формаций [6]. В данном исследовании будем считать, что для каждого агента задаётся отношение, в котором он должен делить отрезок. Построенное управление должно стабилизировать заранее заданное положение для каждого агента. В рассмотренной задаче строится децентрализованное управление, основанное на получении сигналов от других агентов. Предполагается, что каждый агент может получать сигнал от других агентов с постоянным положительным запаздыванием. Управление строится таким образом, чтобы желаемое распределение агентов на отрезке было асимптотически устойчивым положением равновесия. Для анализа устойчивости используются результаты, полученные в первой части работы.

2. Основные понятия и определения

2.1. Системы с запаздыванием

В данном разделе приведены основные понятия и теоремы, которые будут использоваться в работе.

Определение 1 [7]. Постоянная квадратная матрица A называется метцлеровой, если все её внедиагональные элементы неотрицательны.

Определение 2 [5]. Матрица A называется устойчивой, если она является гурвицевой, то есть все её собственные числа имеют отрицательные вещественные части.

В данной работе будут рассматриваться системы с постоянным запаздыванием. Система с постоянным запаздыванием представима в виде функционального дифференциального уравнения

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t), x(t-\tau)). \tag{2.1}$$

Здесь $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ — n-мерный вектор состояния системы; вектор-функция $F(t, x, y)$ определена в области $t \geqslant 0$, $\|x\| < H$, $\|y\| < H$, $(0 < H \leqslant +\infty)$ непрерывна по x и y; τ — постоянное неотрицательное запаздывание [3]. Здесь и далее под нормой вектора будем понимать евклидову норму вектора.

Каждое решение $x(t, t_0, \varphi)$ системы (2.1) при $t \geqslant t_0$ определяется начальным моментом времени t_0 и начальной функцией $\varphi(\theta)$ [3].

Будем считать, что начальные функции принадлежат пространству $C([-\tau, 0], R^n)$ непрерывных вектор-функций $\varphi(\theta) : [-\tau, 0] \to R^n$ с равномерной нормой $\|\varphi\|_\tau = \max_{\theta \in [-\tau, 0]} \|\varphi(\theta)\|$ [3]. Через $x_t(t_0, \varphi)$ обозначим отрезок решения: $x_t(t_0, \varphi) : \theta \to x(t + \theta, t_0, \varphi)$, $\theta \in [-\tau, 0]$. Если начальный момент времени и начальная функция очевидны из контекста или несущественны, то аргументы t_0 и φ в данных обозначениях будем опускать.

Для исследования устойчивости нулевого решения систем типа (2.1) применяется прямой метод Ляпунова и функционалы Ляпунова — Красовского [3,8].

Определение 3 [9]. Функцией Хана называется непрерывная неубывающая функция $\chi(s)$, такая что $\chi(s) > 0$ при $s > 0$ и $\chi(0) = 0$.

Теорема Ляпунова — Красовского об асимптотической устойчивости [3]: *Если существует непрерывно дифференцируемый функционал $V(t, x_t) : R \times C \to R$, такой, что можно указать функции Хана $\chi_1(s)$, $\chi_2(s)$, $\chi_3(s)$, такие, что*

$$\chi_1(\|\varphi(0)\|) \leqslant V(t, \varphi) \leqslant \chi_2(\|\varphi\|_\tau), \qquad \dot{V}(x_t)\Big|_{(2.4)} \leqslant \chi_3(\|\varphi(0)\|)$$

при $t \geqslant 0$, $\|x_t\|_\tau < H$, то нулевое решение системы (2.1) асимптотически устойчиво.

2.2. Мультиагентные системы

В теории сетевого управления объект управления разбивается на отдельные подсистемы — агенты, которые принимают и реализуют решения самостоятельно на основе доступной информации. Алгоритмы управления при этом называются протоколами. Вся система называется мультиагентной [2].

Широкий класс мультиагентных систем описывается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = F_i(t, x_i, u_i) + \sum_{j=1}^{N} \alpha_{ij}(t)\varphi_{ij}(x_i, x_j), \quad y_i = h(x_i, u_i), \quad i = 1, \ldots, N$$

где N — число агентов в системе, $x_i(t)$ — векторы состояния агентов, $u_i(t)$ — управления, $y_i(t)$ — измеряемые переменные (выходы), функции $F_i(\cdot)$ характеризуют собственную динамику агентов, функции $\varphi_{ij}(\cdot)$ характеризуют взаимодействия между агентами, а числа α_{ij} задают граф связей в системе. Если зафиксировать заранее коэффициенты усиления α_{ij} и функции связей φ_{ij}, то будут исследоваться свойства сети, как динамической системы со входами $u_i(t)$ и выходами $y_i(t)$ [2].

Важнейшей задачей управления мультиагентной системой является синхронизация. Под синхронизацией понимается асимптотическое сближение состояний агентов $\|x_i(t) - x_j(t)\| \to 0$, либо наблюдаемых выходов $\|y_i(t) - y_j(t)\| \to 0$ при $t \to \infty$. Чтобы система могла быть синхронизирована, необходимо, чтобы динамическая система обладала свойством частичной устойчивости или устойчивости относительно функции [2].

К задачам синхронизации относятся задачи управления формациями [6], а также задачи достижения консенсуса [15,16] — требуется, чтобы состояния или выходы агентов сошлись к общему значению.

3. Обзор литературы

Основные понятия и методы теории устойчивости систем обыкновенных дифференциальных уравнений подробно рассматриваются в [1]. В [3] вводятся системы дифференциально-разностных уравнений с запаздыванием и рассматриваются базовые методы анализа устойчивости таких систем. Понятие диагональной устойчивости для линейных систем с запаздыванием вводится в [8]. Также, в статье [8] предлагается метод исследования устойчивости таких систем. В статье [10] получен критерий диагональной устойчивости для систем с запаздыванием, однако, в общем случае этот критерий оказывается трудно проверяемым и не даёт конструктивных условий устойчивости. Задача исследования диагональной устойчивости в экологических моделях типа Лотки — Вольтерры рассматривается в [5]. В статье [11] рассмотрен альтернативный подход к исследованию диагональной устойчивости для таких систем, он помогает расширить число классов систем, для которых можно получить конструктивно проверяемые условия устойчивости, однако в общем случае он является сложно применимым. Некоторые частные случаи систем с запаздыванием, для которых удалось установить конструктивно проверяемые условия устойчивости рассматриваются в работах [10–13].

В обзоре [2] рассмотрены основные направления развития теории сетевого управления. Приводятся наиболее важные задачи управления мультиагетными системами и методы их решения. Множество примеров мультиагентных и гибридных систем приведено в [14].

Задача распределения агентов на отрезке в случае, когда агенты могут взаимодействовать друг с другом без запаздывания, изучена в работе [6]. В этом исследовании строится протокол, решающий задачу управления и стабилизации мультиагентной системы для равномерного распределения агентов на отрезке. Мультиагентные системы с запаздываниями в связях рассматриваются в работах [15, 16].

4. Диагональная устойчивость систем с запаздыванием

4.1. Постановка задачи

Пусть задана система

$$\dot{x}(t) = Af(x(t)) + Bf(x(t-\tau)). \tag{4.1}$$

Здесь $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^T$ — n-мерный вектор состояния системы; A и B — постоянные матрицы; τ — постоянное неотрицательное запаздывание; $f(x) = (f_1(x_1), \ldots, f_n(x_n))^T$ — заданная и непрерывная при $\|x\| < H$ ($0 < H \leqslant +\infty$) векторная функция, скалярные функции $f_i(x_i)$ являются допустимыми нелинейностями.

Определение 4 [7]. Будем говорить, что скалярные функции $f_i(x_i)$ являются допустимыми, если они непрерывны при $|x_i| < H$ ($0 < H \leqslant +\infty$) и удовлетворяют условиям секторного типа, то есть $x_i f_i(x_i) > 0$ при $x_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Из свойств функций $f_1(x_1), \ldots, f_n(x_n)$ следует, что система (4.1) имеет нулевое решение. Уравнения такого вида широко используется для моделирования систем автоматического управления и нейронных сетей [15, 16].

Определение 5 [3]. Система (4.1) абсолютно устойчива, если ее нулевое решение асимптотически устойчиво при любом неотрицательном запаздывании, а также при любых допустимых нелинейностях.

Исследуем условия, при выполнении которых можно гарантировать абсолютную устойчивость системы (4.1).

Для решения поставленной задачи используется прямой метод Ляпунова. Пусть

$$V(x_t) = 2\sum_{i=1}^{n} p_i \int_0^{x_i(t)} f_i(u)du + \sum_{i=1}^{n} q_i \int_{t-\tau}^{t} f_i^2(x_i(\theta))d\theta, \tag{4.2}$$

где $p_1, \ldots, p_n$ и $q_1, \ldots, q_n$ — положительные коэффициенты.

Нетрудно проверить, что при любых положительных значениях $p_1, \ldots, p_n$ и $q_1, \ldots, q_n$ существуют заданные при $s \in [0, H)$ функции Хана $\chi_1(s)$ и $\chi_2(s)$

такие, что

$$\chi_1(\|x(t)\|) \leqslant V(x_t) \leqslant \chi_2(\|x_t\|_\tau)$$

при $\|x_t\|_\tau < H$.

Продифференцируем функционал (4.2) в силу системы (4.1). Получим

$$\dot{V}(x_t) = \begin{pmatrix} f(x(t)) \\ f(x(t-\tau)) \end{pmatrix}^T S \begin{pmatrix} f(x(t)) \\ f(x(t-\tau)) \end{pmatrix}.$$

Здесь матрица

$$S = \begin{pmatrix} A^T P + PA + Q & PB \\ B^T P & -Q \end{pmatrix}, \tag{4.3}$$

а $P = \mathrm{diag}\{p_1, \ldots, p_n\}$, $Q = \mathrm{diag}\{q_1, \ldots, q_n\}$.

Определение 6 [8]. Система (4.1) диагонально устойчива, если существуют диагональные положительно-определённые матрицы $P = \mathrm{diag}\{p_1, \ldots, p_n\}$ и $Q = \mathrm{diag}\{q_1, \ldots, q_n\}$, при которых матрица S, заданная формулой (4.3), отрицательно определена.

Замечание 1: Известно (см. [8]), что условие отрицательной определённости матрицы S эквивалентно условию отрицательной определённости матрицы

$$R = A^T P + PA + Q + PBQ^{-1}B^T P. \tag{4.4}$$

Критерий диагональной устойчивости систем вида (4.1) установлен в работе [10]. Однако в общем случае проверка условий указанного критерия довольно затруднительна. Поэтому большой интерес представляет задача нахождения классов матриц A и B, для которых можно получить конструктивно проверяемые условия существования требуемых матриц P и Q.

Замечание 2: В работе [11] было показано, что условия диагональной устойчивости для системы (4.1) с матрицами A и B эквивалентны условиям диагональной устойчивости системы (4.1) с матрицами DAD и DBE соответственно, где $D = \mathrm{diag}\{d_1, \ldots, d_n\}$ и $E = \mathrm{diag}\{e_1, \ldots, e_n\}$ — диагональные матрицы, такие, что их элементы $|d_i| = |e_i| = 1$.

4.1.1. Условия диагональной устойчивости матриц третьего порядка со специальной структурой

Для начала рассмотрим систему третьего порядка вида (4.1) с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ c_1 & a_2 & 0 \\ 0 & c_2 & a_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.5}$$

где c_1, c_2, b_1, b_2 — произвольные, а $a_1, a_2, a_3 < 0$.

Теорема 1: *Система вида (4.1) с матрицами (4.5) диагонально устойчива тогда и только тогда, когда выполняются условия*

1) $|a_2 a_3| > |c_2 b_2|$;

2) $|a_1 a_2 a_3| > |c_2(c_1 b_1 - a_1 b_2)|$.

Доказательство: В данном случае матрицу R можно представить в форме $R = \widetilde{R} + \widetilde{Q}$, где

$$\widetilde{R} = \begin{pmatrix} 2p_1 a_1 + \dfrac{p_1^2 b_1^2}{q_3} & p_2 c_1 + \dfrac{b_1 b_2 p_1 p_2}{q_3} & 0 \\ p_2 c_1 + \dfrac{b_1 b_2 p_1 p_2}{q_3} & 2p_2 a_2 + \dfrac{p_2^2 b_2^2}{q_3} & p_3 c_2 \\ 0 & p_3 c_2 & 2p_3 a_3 + q_3 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{Q} = \begin{pmatrix} q_1 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получаем, что система (4.1) диагонально устойчива тогда и только тогда, когда существуют диагональная положительно-определённая матрица $P = \operatorname{diag}\{p_1, p_2, p_3\}$ и число $q_3 > 0$, при которых матрица $\widetilde{R}$ отрицательно определена.

Рассмотрим выполнение условий критерия Сильвестра для матрицы $\widetilde{R}$. Здесь и далее будем обозначать главный диагональный минор i-го порядка как Δ_i. Отметим, что от условия $\Delta_3 < 0$ можно перейти к условию

$$\frac{\Delta_3}{p_3^2} = \left(2\frac{a_3}{p_3} + \frac{q_3}{p_3^2}\right)\Delta_2 - c_2^2 \Delta_1 < 0.$$

Так как Δ_1 и Δ_2 от p_3 не зависят, для получения наиболее широкой области допустимых значений параметров следует выбирать p_3 таким образом, чтобы Δ_3/p_3^2 было минимальным, откуда следует, что

$$p_3 = -\frac{q_3}{a_3}.$$

Тогда для того чтобы существовали положительные числа p_1, p_2, p_3 и q_3, при которых матрица $\widetilde{R}$ будет отрицательно определённой, необходимо и достаточно, чтобы существовали положительные числа p_1, p_2 и q_3, при которых будет отрицательно определена матрица

$$\begin{pmatrix} 2p_1a_1 + \dfrac{p_1^2b_1^2}{q_3} & p_2c_1 + \dfrac{b_1b_2p_1p_2}{q_3} & 0 \\ p_2c_1 + \dfrac{b_1b_2p_1p_2}{q_3} & 2p_2a_2 + \dfrac{p_2^2b_2^2}{q_3} & c_2 \\ 0 & c_2 & -\dfrac{a_3^2}{q_3} \end{pmatrix}.$$

Теперь рассмотрим условие

$$\Delta_1 = 2p_1a_1 + \frac{p_1^2b_1^2}{q_3} < 0. \tag{4.6}$$

Если $b_1 = 0$, то неравенство (4.6) выполняется для любых $p_1 > 0$. Будем считать, что $b_2 \neq 0$, так как если $b_1, b_2 = 0$, то в системе отсутствует запаздывание. В этом случае для диагональной устойчивости системы (4.1) необходимо выбирать

$$p_2 = -k_1\frac{a_2}{b_2^2}q_3, \quad 0 < k_1 < 2,$$

$$p_1 = \frac{k_1k_2}{k_1 - 2}\frac{c_1^2}{2a_1b_2^2}q_3, \quad k_2 > 1.$$

Тогда $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0$ для любых параметров системы. Рассмотрим

$$\Delta_3 = -(k_2 - 1)k_1^2\frac{c_1^2a_2^2a_3^2}{b_2^4}q_3 - \frac{k_1k_2}{k_1 - 2}\frac{c_1^2c_2^2}{b_2^2}q_3 < 0,$$

очевидно, что следует выбирать $k_1 = 1$, а $k_2 > \dfrac{a_2^2a_3^2}{a_2^2a_3^2 - c_2^2b_2^2}$. Приходим к тому, что если $b_1 = 0$, то для диагональной устойчивости системы (4.1) с матрицами (4.5) необходимо и достаточно чтобы выполнялось неравенство $|a_2 a_3| > |c_2 b_2|$, что соответствует условиям теоремы.

Предположим, $b_1 \neq 0$, в таком случае

$$p_1 = -k_1 \frac{a_1}{b_1^2} q_3, \quad 0 < k_1 < 2.$$

Тогда

$$\Delta_1 = -k_1(2 - k_1) \frac{a_1^2}{b_1^2} q_3.$$

Рассмотрим неравенство

$$\Delta_2 = \left(2p_2 a_2 + \frac{p_2^2 b_2^2}{q_3}\right) \Delta_1 - \left(p_2 c_1 + \frac{b_1 b_2 p_1 p_2}{q_3}\right)^2 > 0.$$

Подставляя выражения, полученные для Δ_1 и p_1, приходим к условиям

$$-2a_2 k_1(2 - k_1) \frac{a_1^2}{b_1^2} q_3 - p_2 \left(k_1(2 - k_1) \frac{a_1^2 b_2^2}{b_1^2} + \left(c_1 - k_1 \frac{a_1 b_2}{b_1}\right)^2 \right) > 0,$$

$$\left(2k_1 \frac{a_1^2 b_2^2}{b_1^2} + c_1^2 - 2k_1 \frac{a_1 b_2 c_1}{b_1}\right) p_2 < -2k_1(2 - k_1) \frac{a_1^2 a_2}{b_1^2} q_3,$$

$$\left(2k_1 a_1^2 b_2^2 + c_1^2 b_1^2 - 2k_1 a_1 b_1 b_2 c_1\right) p_2 < -2k_1(2 - k_1) a_1^2 a_2 q_3,$$

$$p_2 = -\frac{k_1 k_2 (2 - k_1) a_1^2 a_2}{2k_1 a_1^2 b_2^2 + c_1^2 b_1^2 - 2k_1 a_1 b_1 b_2 c_1} q_3, \quad 0 < k_2 < 2.$$

Подставляя выражение для p_2 в Δ_2, получим

$$\Delta_2 = \frac{k_1^2 k_2 (2 - k_1)^2 (2 - k_2) a_1^4 a_2^2}{b_1^2 \left(2k_1 a_1^2 b_2^2 + c_1^2 b_1^2 - 2k_1 a_1 b_1 b_2 c_1\right)} q_3^2.$$

Теперь рассмотрим условие

$$\Delta_3 = -\frac{a_3^2}{q_3} \Delta_2 - c_2^2 \Delta_1 < 0,$$

которое эквивалентно неравенству

$$-\frac{k_1^2k_2(2-k_1)^2(2-k_2)a_1^4a_2^2a_3^2}{b_1^2\left(2k_1a_1^2b_2^2+c_1^2b_1^2-2k_1a_1b_1b_2c_1\right)}+k_1(2-k_1)\frac{a_1^2c_2^2}{b_1^2}<0,$$

откуда получаем

$$\frac{c_2^2}{a_1^2a_2^2a_3^2}<\frac{k_1k_2(2-k_1)(2-k_2)}{\left(2k_1a_1^2b_2^2+c_1^2b_1^2-2k_1a_1b_1b_2c_1\right)}.$$

Если $c_2=0$, то это неравенство выполняется автоматически и система (4.1) является диагонально устойчивой при любых матрицах вида (4.5). Предположим, что $c_2\neq 0$, тогда для того чтобы область допустимых значений параметров системы была наиболее широкой, надо найти, при каких k_1, k_2 правая часть неравенства достигает своего максимума. Нетрудно видеть, что оптимальное значение $k_2=1$. Тогда

$$\frac{2k_1a_1^2b_2^2+c_1^2b_1^2-2k_1a_1b_1b_2c_1}{k_1(2-k_1)}<\frac{a_1^2a_2^2a_3^2}{c_2^2},$$

$$\frac{a_1^2b_2^2\left(k_1-\dfrac{c_1b_1}{a_1b_2}\right)^2}{k_1(2-k_1)}<\frac{a_1^2a_2^2a_3^2}{c_2^2}-a_1^2b_2^2,$$

$$\frac{\left(k_1-\dfrac{c_1b_1}{a_1b_2}\right)^2}{k_1(2-k_1)}<\frac{a_2^2a_3^2}{c_2^2b_2^2}-1. \tag{4.7}$$

Заметим, что если $0<\dfrac{c_1b_1}{a_1b_2}<2$, то наиболее широкая область допустимых значений параметров системы будет достигаться при $k_1=\dfrac{c_1b_1}{a_1b_2}$. При этом условие (4.7) может быть переписано в виде

$$\frac{a_2^2a_3^2}{c_2^2b_2^2}>1. \tag{4.8}$$

В случае, если $\dfrac{c_1b_1}{a_1b_2}=0$ или $\dfrac{c_1b_1}{a_1b_2}=2$, k_1 следует выбирать достаточно близким к 0 или 2 соответственно, что также приводит к условию (4.8). Отметим, что если параметры системы удовлетворяют неравенству $0 \leqslant \dfrac{c_1 b_1}{a_1 b_2} \leqslant 2$, то из условия (4.8) следует

$$a_1^2 a_2^2 a_3^2 > a_1^2 c_2^2 b_2^2 = c_2^2 \left(b_2 a_1 - c_1 b_1\right)^2 - c_2^2 c_1 b_1 a_1 b_2 \left(\frac{c_1 b_1}{a_1 b_2} - 2\right) > c_2^2 \left(b_2 a_1 - c_1 b_1\right)^2,$$

что может быть переписано в виде $|a_1 a_2 a_3| > \max\{|a_1 b_2 c_2|\,; |c_2(b_2 a_1 - c_1 b_1)|\}$.

Выясним, как выбирать k_1, если $\dfrac{c_1 b_1}{a_1 b_2} < 0$ или $\dfrac{c_1 b_1}{a_1 b_2} > 2$. Для этого исследуем левую часть неравенства (4.7). Имеем

$$\left(\frac{\left(k_1 - \dfrac{c_1 b_1}{a_1 b_2}\right)^2}{k_1(2-k_1)}\right)'_{k_1} = \frac{2k_1^2 - 2\dfrac{c_1 b_1}{a_1 b_2}k_1^2 + 2\dfrac{c_1^2 b_1^2}{a_1^2 b_2^2}k_1 - 2\dfrac{c_1^2 b_1^2}{a_1^2 b_2^2}}{k_1^2(2-k_1)^2} = 0,$$

$$\left(k_1 - \frac{c_1 b_1}{a_1 b_2}\right)\left(\left(1 - \frac{c_1 b_1}{a_1 b_2}\right)k_1 + \frac{c_1 b_1}{a_1 b_2}\right) = 0.$$

Нетрудно проверить, что если $\dfrac{c_1 b_1}{a_1 b_2} < 0$ или $\dfrac{c_1 b_1}{a_1 b_2} > 2$, то $0 < \dfrac{c_1 b_1}{c_1 b_1 - a_1 b_2} < 2$ и $k_1 = \dfrac{c_1 b_1}{c_1 b_1 - a_1 b_2}$ доставляет минимум левой части неравенства (4.7). Подставляя полученное выражение для k_1 в неравенство (4.7), получим

$$a_1^2 a_2^2 a_3^2 > c_2^2 \left(b_2 a_1 - c_1 b_1\right)^2 > c_2^2 \left(b_2 a_1 - c_1 b_1\right)^2 - c_2^2 c_1 b_1 a_1 b_2 \left(\frac{c_1 b_1}{a_1 b_2} - 2\right) = a_1^2 c_2^2 b_2^2,$$

что также может быть переписано в виде $|a_1 a_2 a_3| > \max\{|a_1 b_2 c_2|\,; |c_2(b_2 a_1 - c_1 b_1)|\}$. Теорема доказана.

Теперь рассмотрим систему третьего порядка с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ c_1 & c_2 & a_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.9}$$

где $a_1, a_2, a_3 < 0$.

Теорема 2: *Система (4.1) с матрицами (4.9) диагонально устойчива тогда и только тогда, когда выполняются условия*

1) $|a_1a_3| > |b_1c_1|$;

2) $|a_2a_3| > |b_2c_2|$;

3) $|a_1a_2a_3| > |a_2b_1c_1 + a_1b_2c_2|$.

Доказательство: В данном случае матрицу R можно представить в форме $R = \widetilde{R} + \widetilde{Q}$, где

$$\widetilde{R} = \begin{pmatrix} 2p_1a_1 + \dfrac{p_1^2b_1^2}{q_3} & \dfrac{b_1b_2p_1p_2}{q_3} & p_3c_1 \\ \dfrac{b_1b_2p_1p_2}{q_3} & 2p_2a_2 + \dfrac{p_2^2b_2^2}{q_3} & p_3c_2 \\ p_3c_1 & p_3c_2 & 2p_3a_3 + q_3 \end{pmatrix}, \ \widetilde{Q} = \begin{pmatrix} q_1 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получаем, что система (4.1) диагонально устойчива тогда и только тогда, когда существуют диагональная положительно-определённая матрица $P = \mathrm{diag}\{p_1, p_2, p_3\}$ и число $q_3 > 0$, при которых матрица $\widetilde{R}$ отрицательно определена.

Рассмотрим выполнение условий критерия Сильвестра для матрицы $\widetilde{R}$. Аналогично предыдущему случаю можем перейти от условия $\Delta_3 < 0$ к условию

$$\frac{\Delta_3}{p_3^2} = \left(2\frac{a_3}{p_3} + \frac{q_3}{p_3^2}\right)\Delta_2 - c_2^2\Delta_1 + 2c_1c_2\frac{b_1b_2p_1p_2}{q_3} - c_1^2\left(2p_2a_2 + \frac{p^2b^2}{q_3}\right) < 0,$$

где от p_3 зависит только $2\dfrac{a_3}{p_3} + \dfrac{q_3}{p_3^2}$. Для того чтобы область допустимых значений параметров системы была наиболее широкой, следует выбирать p_3 таким образом, чтобы минимизировать Δ_3/p_3^2, откуда следует, что

$$p_3 = -\frac{q_3}{a_3}.$$

Получим, что система (4.1) диагонально устойчива тогда и только тогда, когда существуют положительные числа p_1, p_2 и q_3, при которых отрицательно определена матрица

$$\begin{pmatrix} 2p_1a_1 + \dfrac{p_1^2 b_1^2}{q_3} & \dfrac{b_1 b_2 p_1 p_2}{q_3} & c_1 \\ \dfrac{b_1 b_2 p_1 p_2}{q_3} & 2p_2 a_2 + \dfrac{p_2^2 b_2^2}{q_3} & c_2 \\ c_1 & c_2 & -\dfrac{a_3^2}{q_3} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим условие

$$\Delta_1 = 2p_1a_1 + \frac{p_1^2 b_1^2}{q_3} < 0. \tag{4.10}$$

Если $b_1 = 0$, то неравенство (4.10) выполняется для любых $p_1 > 0$. Будем считать, что в этом случае $b_2 \neq 0$. Тогда следует выбирать $p_2 = -k_1 \dfrac{a_2}{b_2^2} q_3$, где $0 < k_1 < 2$. Рассмотрим

$$\Delta_3 = k_1(2-k_1)\frac{2a_1a_2^2a_3^2p_1 + a_2^2c_1^2q_3}{b_2^2} - 2a_1c_2^2p_1 < 0.$$

Нетрудно видеть, что оптимально выбирать $k_1 = 1$, тогда для диагональной устойчивости системы (4.1) необходимо и достаточно чтобы выполнялось неравенство

$$a_2^2a_3^2 - c_2^2b_2^2 > -\frac{a_2^2c_1^2}{2a_1}\frac{p_1}{q_3}.$$

За счет выбора p_1 и q_3 можно сделать правую часть этого неравенства достаточно близкой к нулю. Приходим к тому, что в данном случае критерием диагональной устойчивости системы (4.1) является выполнение неравенства $|a_2a_3| > |c_2b_2|$, что соответствует условиям теоремы.

Пусть $b_1 \neq 0$, тогда неравенство (4.10) выполняется, если

$$p_1 = -k_1\frac{a_1}{b_1^2}q_3, \quad 0 < k_1 < 2.$$

Тогда

$$\Delta_1 = -k_1(2-k_1)\frac{a_1^2}{b_1^2}q_3.$$

Теперь рассмотрим неравенство

$$\Delta_2 = (2p_2a_2 + \frac{p_2^2 b_2^2}{q_3})\Delta_1 - \frac{b_1^2 b_2^2 p_1^2 p_2^2}{q_3^2} > 0.$$

Если $b_2 = 0$, нетрудно проверить, что для диагональной устойчивости системы (4.1) необходимо и достаточно чтобы выполнялось неравенство $|a_1a_3| > |b_1c_1|$. Далее предположим, что $b_2 \neq 0$. Подставляя в Δ_2 выражения, найденные для Δ_1 и p_1, получаем

$$-2a_2k_1(2-k_1)\frac{a_1^2}{b_1^2}q_3 - 2k_1\frac{a_1^2 b_2^2}{b_1^2}p_2 > 0,$$

$$p_2 < -(2-k_1)\frac{a_2}{b_2^2}q_3,$$

$$p_2 = -k_2(2-k_1)\frac{a_2}{b_2^2}q_3, \quad 0 < k_2 < 1.$$

Используя полученное p_2, приходим к условию

$$\Delta_2 = k_1k_2\left(2-k_1\right)^2\left(1-k_2\right)\frac{a_1^2a_2^2}{b_1^2b_2^2}q_3^2 > 0.$$

Теперь рассмотрим условие

$$\Delta_3 = -\frac{a_3^2}{q_3}\Delta_2 - c_2^2\Delta_1 + 2c_1c_2\frac{b_1b_2p_1p_2}{q_3} - c_1^2\left(2p_2a_2 + \frac{b_2^2p_2^2}{q_3}\right) < 0.$$

Если $c_1 = 0$, нетрудно проверить, что для диагональной устойчивости системы (4.1) необходимо и достаточно чтобы выполнялось неравенство $|a_2a_3| > |b_2c_2|$.

Далее будем считать, что $c_1 \neq 0$. Введем обозначения

$$\eta = -\frac{a_1b_2c_2}{a_2b_1c_1}, \quad \theta = \frac{a_1^2a_3^2}{b_1^2c_1^2},$$

тогда должно выполняться

$$k_1\frac{(k_2-\eta)^2}{k_2(1-k_2)} < 2k_1\theta(2-k_1) - 2. \tag{4.11}$$

Для того чтобы область допустимых значений параметров была наиболее широкой, следует выбирать k_2 таким образом, чтобы минимизировать левую часть неравенства (4.11). Если $0 < \eta < 1$, следует выбирать $k_2 = \eta$, тогда условие (4.11) примет вид

$$\theta > 1. \tag{4.12}$$

В случае, если $\eta = 0$ или $\eta = 1$, следует выбрать коэффициент k_2 достаточно близким к 0 или к 1 соответственно, что также приводит нас к условию (4.12). При таких параметрах системы выполняется

$$|a_1 b_2 c_2| \leqslant |a_2 b_1 c_1| < |a_1 a_2 a_3|\,,$$

кроме того, если $\eta > 0$, то

$$|a_1 b_2 c_2 + a_2 b_1 c_1| < |a_1 b_2 c_2| < |a_1 a_2 a_3|\,.$$

Таким образом, приходим к тому, что если $0 \leqslant \eta \leqslant 1$, то для того чтобы система (4.1) с матрицами (4.9) была диагонально устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$|a_1 a_2 a_3| > \max\{|a_1 b_2 c_2|\,; |a_2 b_1 c_1|\,; |a_1 b_2 c_2 + a_2 b_1 c_1|\}.$$

Далее рассмотрим случай, когда $\eta < 0$ или $\eta > 1$. Нетрудно видеть, что тогда выполняется неравенство

$$0 < \frac{\eta}{2\eta - 1} < 1$$

и следует выбирать

$$k_2 = \frac{\eta}{2\eta - 1}.$$

Подставим выражение для k_2 в условие (4.11), получим

$$\theta > \frac{2\eta(\eta - 1)k_1 + 1}{k_1(2k_1 - 1)}. \tag{4.14}$$

Выбирая $k_1 \in (0, 2)$ таким образом, чтобы минимизировать правую часть неравенства (4.14), получим

$$k_1 = \frac{|2\eta - 1| - 1}{2\eta(\eta - 1)}.$$

Приходим к тому, что если $\eta < 0$, то $\theta > (\eta - 1)^2$. Нетрудно убедиться, что в этом случае выполняются неравенства

$$|a_1 a_2 a_3| > |a_1 b_2 c_2 + a_2 b_1 c_1| > \max\{|a_1 b_2 c_2|\,; |a_2 b_1 c_1|\}.$$

Если же $\eta > 1$, то $\theta > \eta^2$, из чего следует выполнение неравенств $|a_1 a_3| > |b_1 c_1|\,;\ |a_2 a_3| > |b_2 c_2|$. Приходим к тому, что в этом случае также критерием диагональной устойчивости системы (4.1) будет выполнение неравенства

$$|a_1 a_2 a_3| > \max\{|a_1 b_2 c_2|\,; |a_2 b_1 c_1|\,; |a_1 b_2 c_2 + a_2 b_1 c_1|\}.$$

Теорема доказана.

4.1.2. Условия диагональной устойчивости для сложных систем

Далее рассматривается случай, когда

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

Здесь n — произвольное чётное число. Будем считать, что $a_{ii} < 0$, $i = 1, \dots, n$, что является необходимым условием диагональной устойчивости рассматриваемой системы. Такая система с запаздыванием представляет собой сложную систему, описывающую взаимодействие двумерных блоков, с запаздыванием в связях между ними. В таком случае, матрица B характеризует связи между двумерными блоками.

В дальнейшем будут использоваться вспомогательные матрицы $\widetilde{A}$ и $\widehat{B}$. Эти матрицы имеют такую же структуру, как и матрицы A и B соответственно, а их элементы вычисляются по формулам

$$\widetilde{a}_{ii} = a_{ii},$$

$$\widetilde{a}_{ij} = |a_{ij}|\,, \quad \text{если} \quad a_{ij}a_{ji} > 0, \quad i \neq j,$$
$$\widetilde{a}_{ij} = 0, \quad \text{если} \quad a_{ij}a_{ji} \leqslant 0, \quad i \neq j,$$
$$\widehat{b}_{ij} = |b_{ij}|\,.$$

Для начала рассматривается случай, когда

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_3 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_4 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_5 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.16}$$

Такая система может быть проиллюстрирована следующим образом

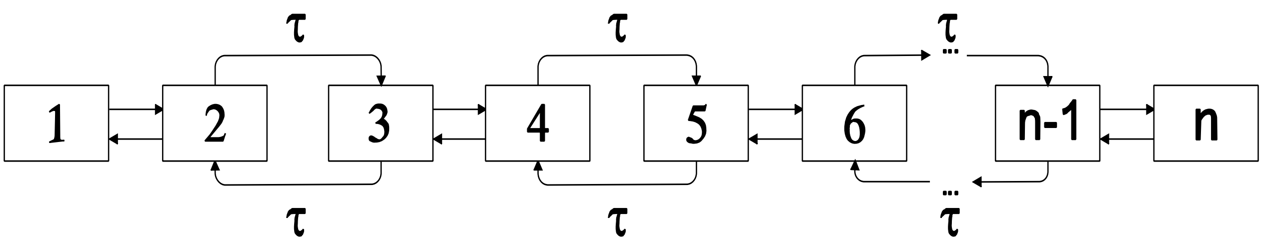

Рис. 1. Схема системы с последовательным соединением двумерных блоков.

В соответствии с замечанием 2 рассмотрим

$$DAD = \begin{pmatrix} a_{11}d_1^2 & a_{12}d_1d_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21}d_1d_2 & a_{22}d_2^2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}d_3^2 & a_{34}d_3d_4 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43}d_3d_4 & a_{44}d_4^2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1n-1}d_{n-1}^2 & a_{n-1n}d_{n-1}d_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn-1}d_{n-1}d_n & a_{nn}d_n^2 \end{pmatrix},$$

$$
DBE = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & b_2d_2e_3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & b_3d_3e_2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & b_4d_4e_5 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & b_5d_5e_4 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & b_{n-2}d_{n-2}e_{n-1} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-1}d_{n-1}e_{n-2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix},
$$

где $D = \operatorname{diag}\{d_1, \dots, d_n\}$ и $E = \operatorname{diag}\{e_1, \dots, e_n\}$ — диагональные матрицы, такие, что их элементы $|d_i| = |e_i| = 1, i = 1, \dots, n$. Нетрудно видеть, что, не умаляя общности, можно считать, что матрица B неотрицательная (за счёт выбора E). Более того, если

$$
a_{ii+1}a_{i+1i} \geqslant 0, \quad i = 2k-1, \quad k = 1, \dots \frac{n}{2}, \tag{4.17}
$$

то за счёт выбора D можно свести рассматриваемый случай к случаю, когда A является метцелеровой. Для таких типов систем ранее [10] были получены необходимые и достаточные условия диагональной устойчивости. Далее рассмотрим случай, когда найдется i такое, что $a_{ii+1}a_{i+1i} < 0$.

Теорема 3: *Для того чтобы система (4.1) с матрицами (4.15),(4.16) была диагонально устойчива, необходимо и достаточно, чтобы матрица $\Omega = \widetilde{A} + \widehat{B}$ была матрицей Гурвица.*

Доказательство: В соответствии с замечанием 1, рассмотрим матрицу R, заданную формулой (4.4). В данном случае матрица R является блочно-диагональной и может быть представлена в виде $R = \widetilde{R} + \widetilde{Q}$:

$$
R = \begin{pmatrix}
R_1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & R_2 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & R_{n/2}
\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}
\widetilde{Q}_1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & \widetilde{Q}_{n/2}
\end{pmatrix},
$$

где

$$R_1 = \begin{pmatrix} 2a_{11}p_1 & a_{12}p_1 + a_{21}p_2 \\ a_{12}p_1 + a_{21}p_2 & 2a_{22}p_2 + q_2 + \dfrac{p_2^2 b_2^2}{q_3} \end{pmatrix},$$

$$R_k = \begin{pmatrix} 2a_{ii}p_i + q_i + \dfrac{p_i^2 b_i^2}{q_{i-1}} & a_{ii+1}p_i + a_{i+1i}p_{i+1} \\ a_{ii+1}p_i + a_{i+1i}p_{i+1} & 2a_{i+1i+1}p_{i+1} + q_{i+1} + \dfrac{p_{i+1}^2 b_{i+1}^2}{q_{i+2}} \end{pmatrix},$$

$$i = 2k-1, \quad k = 2, \dots, \frac{n}{2} - 1,$$

$$R_{n/2} = \begin{pmatrix} 2a_{n-1n-1}p_{n-1} + q_{n-1} + \dfrac{p_{n-1}^2 b_{n-1}^2}{q_{n-2}} & a_{n-1n}p_{n-1} + a_{nn-1}p_n \\ a_{n-1n}p_{n-1} + a_{nn-1}p_n & 2a_{nn}p_n \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{Q}_1 = \begin{pmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{Q}_{n/2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & q_n \end{pmatrix}.$$

Для того, чтобы матрица R была отрицательно определённой, необходимо и достаточно, чтобы все диагональные блоки R_k были отрицательно определёнными, $k = 2i-1, i = 1, \dots, \dfrac{n+1}{2}$.

Рассмотрим условие отрицательной определённости блока R_1. Оно выполняется, тогда и только тогда, когда

$$2a_{11}\left(2a_{22}p_2 + q_2 + \frac{p_2^2 b_2^2}{q_3}\right) > \frac{(a_{12}p_1 + a_{21}p_2)^2}{p_1}. \tag{4.18}$$

Параметр p_1 входит только в правую часть неравенства (4.18) и не входит в блоки $R_k,\ k \neq 1$, следовательно, для того чтобы получить наиболее широкие ограничения на параметры q_2, q_3, p_2, надо выбирать p_1 таким образом, чтобы минимизировать правую часть неравенства (4.18). Предположим, что $a_{12} \neq 0$, так как в противном случае, p_1 можно выбрать произвольным положительным числом. Таким образом $p_{1onm} = \left|\dfrac{a_{21}}{a_{12}}\right| p_2$. Далее подставим в неравенство (4.18) p_{1onm} и разделим левую и правую части неравенства на p_2, получим

$$2a_{11}\left|\frac{a_{21}}{a_{12}}\right|\left(2a_{22} + \frac{q_2}{p_2} + \frac{p_2 b_2^2}{q_3}\right) > c_1, \tag{4.19}$$

где введено обозначение $c_1 = (\mathrm{sign}(a_{12})\,|a_{21}| + a_{21})^2$. Параметр p_2 также входит только в неравенство (4.19) и не входит в блоки $R_k, k \neq 1$, поэтому найдем $p_{2опт}$, такое, при котором левая часть неравенства (4.19) будет максимальной. Если $b_2 = 0$, то левая часть неравенства (4.19) неограниченно возрастает по p_2, и для любых параметров системы, найдется $p_2 > 0$, такое, что первый блок системы будет отрицательно определённым. Пусть $b_2 \neq 0$, получим $p_{2опт} = \dfrac{\sqrt{q_2 q_3}}{b_2}$. Тогда для того, чтобы выполнялось условие отрицательной определённости блока R_1, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$q_2 < \left(\frac{c_1}{4a_{11}b_2}\left|\frac{a_{21}}{a_{12}}\right| - \frac{a_{22}}{b_2}\right)^2 q_3 \Longleftrightarrow$$

$$q_2 = k_1 c_2 q_3, \quad 0 < k_1 < 1, \quad c_2 = \left(\frac{c_1}{4a_{11}b_2}\left|\frac{a_{21}}{a_{12}}\right| - \frac{a_{22}}{b_2}\right)^2. \tag{4.20}$$

Далее перейдем к рассмотрению условия отрицательной определённости блока R_2. С учетом (4.20) оно выполняется тогда и только тогда, когда

$$\left(2a_{33}p_3 + q_3 + \frac{p_3^2 b_3^2}{k_1 c_2 q_3}\right)\left(2a_{44}p_4 + q_4 + \frac{p_4^2 b_4^2}{q_5}\right) > (a_{34}p_3 + a_{43}p_4)^2. \tag{4.21}$$

Параметры k_1 и q_3 входят только в левую часть неравенства (4.21), и их выбор не влияет на остальные условия диагональной устойчивости, поэтому будем выбирать их так, чтобы максимизировать правую часть неравенства (4.21). Таким образом

$$q_{3опт} = \frac{b_3}{\sqrt{c_2}} p_3, \quad k_1 = 1.$$

Подставим полученное выражение в (4.21) и разделим на p_3, получим

$$2c_3\left(2a_{44}p_4 + q_4 + \frac{p_4^2 b_4^2}{q_5}\right) > \frac{(a_{34}p_3 + a_{43}p_4)^2}{p_3}, \tag{4.22}$$

где $c_3 = a_{33} + \dfrac{b_3}{\sqrt{c_2}}$. Отметим, что неравенства (4.18) и (4.22) эквивалентны с точностью до обозначений. Далее применяем предыдущие рассуждения ко всем блокам матрицы R. Нетрудно видеть, что для тех блоков, в которых выполняется неравенство $a_{ii+1}a_{i+1i} < 0$, параметр p_i выбирается таким образом, что $a_{ii+1}p_i + a_{i+1i}p_{i+1} = 0$, а те блоки, в которых $a_{ii+1}a_{i+1i} > 0$, можно привести к виду, когда $a_{ii+1} > 0, a_{i+1i} > 0$. Тогда условия диагональной устойчивости системы (4.1) с матрицами (4.15), (4.16) совпадают с условиями диагональной устойчивости для системы (4.1) с матрицами $\widetilde{A}, \widehat{B}$. Отметим, что $\widetilde{A}$ — метцелерова, а $\widehat{B}$ — неотрицательная. Известно, что для диагональной устойчивости таких систем необходимо и достаточно, чтобы матрица $\Omega = \widetilde{A} + \widehat{B}$ была Гурвицевой. Таким образом теорема доказана.

Замечание 3 [17]: В свою очередь, условие гурвицевости матрицы Ω эквивалентно выполнению условий Севастьянова — Котелянского.

Замечание 4 [18]: Так как матрица $\Omega = \widetilde{A} + \widehat{B} = \{\omega_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ — является матрицей Якоби, то ее миноры могут быть вычислены по рекуррентной формуле

$$\Delta_j = \omega_{jj}\Delta_{j-1} - \omega_{jj-1}\omega_{j-1j}\Delta_{j-2}, \quad j = 3, \ldots, n,$$

Причём $\Delta_1 = \omega_{11}, \Delta_2 = \omega_{11}\omega_{22} - \omega_{12}\omega_{21}$.

Следствие: Если для всех $i = 2k+1, k = 0, \ldots, \dfrac{n}{2} - 1$ выполняется $a_{ii+1}a_{i+1i} \leqslant 0$, то для того чтобы система (4.1) с матрицами (4.15), (4.16) была диагонально устойчива, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$a_{ii}a_{i+1i+1} > |b_i b_{i+1}|, \quad i = 2k, \quad k = 1, \ldots, \frac{n-2}{2}.$$

Доказательство: В данном случае матрица $\widetilde{A}$ — диагональная (по построению). Тогда

$$\Omega = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & |b_2| & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & |b_3| & a_{33} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & |b_4| & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |b_5| & a_{55} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Для того чтобы Ω была матрицей Гурвица, необходимо и достаточно выполнение неравенств

$$a_{ii}a_{i+1i+1} > |b_i b_{i+1}|, \quad i = 2k, \quad k = 1, \ldots, \frac{n-2}{2},$$

что и требовалось доказать.

Далее рассмотрим случай, когда

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 & b_{24} & 0 & \dots & b_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{42} & 0 & b_{44} & 0 & \dots & b_{4n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{n2} & 0 & b_{n4} & 0 & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}, \tag{4.23}$$

где $n = 2k$.

Матрицы такого типа широко используются для моделирования биологических сообществ [4].

Теорема 4: *Пусть A и B задаются формулами (4.15) и (4.23) соответственно. Тогда для диагональной устойчивости системы (4.1) с матрицами A и B необходимо и достаточно, чтобы была диагонально устойчивой система (4.1) с матрицами $\widetilde{A}$ и B.*

Доказательство: Для рассматриваемой системы матрица (4.3) представима в виде $R = \widehat{R} + \widetilde{R} + \widetilde{R}'$, где $\widehat{R} = \mathrm{diag}\{q_1, 0, q_3, 0, \dots, q_{n-1}, 0\}$,

$$\widetilde{R} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ r_{12} & r_{22} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_{33} & r_{34} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_{34} & r_{44} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & r_{n-1n-1} & r_{n-1n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & r_{n-1n} & r_{nn} \end{pmatrix}, \widetilde{R}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r'_{24} & 0 & \dots & r'_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r'_{24} & 0 & 0 & 0 & \dots & r'_{4n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & r'_{2n} & 0 & r'_{4n} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь

$$r_{2s-1\,2s-1} = 2a_{2s-1\,2s-1}p_{2s-1}, \quad r_{2s-1\,2s} = a_{2s-1\,2s}p_{2s-1} + a_{2s\,2s-1}p_{2s}, \quad s = 1, \dots, k,$$

$$r_{2l\,2l} = 2a_{2l\,2l}p_{2l} + q_{2l} + \sum_{s=1}^{k} \frac{b_{2l\,2s}^2}{q_{2s}} p_{2l}^2, \quad l = 1, \dots, k,$$

$$r'_{2l\,2m} = \sum_{s=1}^{k} \frac{b_{2l\,2s} b_{2m\,2s}}{q_{2s}} p_{2l} p_{2m}, \quad l = 1, \ldots, k-1, \quad l < m \leqslant k.$$

Пусть $\Delta_j, \quad j = 1, \ldots n,$ — главный диагональный минор j-ого порядка матрицы $\widetilde{R} + \widetilde{R}'$, а

$$\widetilde{\Delta}_{2s-1\,2s} = r_{2s-1\,2s-1} r_{2s\,2s} - r^2_{2s-1\,2s}, \quad s = 1, \ldots, k.$$

Нетрудно видеть, что система (4.1) диагонально устойчива тогда и только тогда, когда существуют положительные числа $p_1, \ldots p_n$, $q_2, q_4, \ldots, q_n$, при которых выполнены неравенства $\widetilde{\Delta}_{2s-1\,2s} > 0$, $\Delta_{2s} > 0$, $s = 1, \ldots, k$.

Выберем некоторое значение $m \in \{1, \ldots, k\}$. Соответствующий параметр p_{2m-1} входит в условия $\widetilde{\Delta}_{2m-1\,2m} > 0$,

$$\Delta_{2s} > 0, \qquad s = m, \ldots, k. \tag{4.24}$$

Для каждого $s \in \{m, \ldots, k\}$ разложим определитель Δ_{2s} по столбцам с номерами $2m-1$, $2m$. Имеем

$$\Delta_{2s} = \omega'_s \widetilde{\Delta}_{2m-1\,2m} + 2a_{2m-1\,2m-1} p_{2m-1} \omega''_s,$$

где ω'_s, ω''_s — некоторые выражения, не зависящие от p_{2m-1}, причём $\omega'_s > 0$, $s = m, \ldots, k$.

Записывая соотношения (4.24) в виде

$$\omega'_s \frac{\widetilde{\Delta}_{2m-1\,2m}}{p_{2m-1}} + 2a_{2m-1\,2m-1} \omega''_s > 0, \quad s = m, \ldots, k,$$

приходим к выводу, что для получения наиболее широкой области значений элементов матриц A и B, при которых гарантируется диагональная устойчивость, нужно максимизировать выражение $\widetilde{\Delta}_{2m-1\,2m}/p_{2m-1}$. Таким образом, как и при доказательстве теоремы 3, убеждаемся, что условия диагональной устойчивости системы (4.1) с матрицами A и B, заданными по формулам (4.15) и (4.23) соответственно, совпадают с условиями диагональной устойчивости системы (4.1) с матрицами $\widetilde{A}$ и B. Теорема доказана.

Полученные в теореме 4 условия упрощают задачу исследования устойчивости системы (4.1), однако всё ещё не являются конструктивно проверяемыми. Если же B — неотрицательная, то, как известно можно получить конструктивно проверяемые условия диагональной устойчивости.

Следствие: Пусть A и B задаются формулами (4.15) и (4.23) соответственно и B — неотрицательная. Тогда для диагональной устойчивости системы (4.1), необходимо и достаточно, чтобы матрица $\widetilde{A} + B$ была гурвицевой.

Возникает вопрос, при каких условиях задача диагональной устойчивости такой системы вида (4.1) эквивалентна аналогичной задаче для систем с парой матриц $\widetilde{A}$ и $\widehat{B}$.

Замечание 5: Задача нахождения условий, при которых существуют диагональные матрицы D и E такие, что DBE — неотрицательная матрица, эквивалентна аналогичной задаче, где вместо матрицы B рассматривается матрица B', полученная путем вычёркивания нулевых строк и столбцов.

Замечание 6: Задача нахождения условий, при которых существуют диагональные матрицы D и E такие, что DBE — неотрицательная матрица, эквивалентна аналогичной задаче, где вместо матрицы B рассматривается соответствующая ей матрица знаков $\mathrm{Sign}\ B = \{\mathrm{sign}\ b_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$.

Определение 7. Специальной матрицей знаков для матрицы $C = \{c_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ будем называть матрицу $\overline{C} = \{\overline{c}_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$, где $\overline{c}_{ij} = \mathrm{sign}\ c_{ij}$ при $c_{ij} \neq 0$ и $|\overline{c}_{ij}| = 1$, если соответствующий элемент $c_{ij} = 0$.

Лемма 1: Для того чтобы нашлись диагональные матрицы $D = \mathrm{diag}\{d_1, \ldots, d_n\}$ и $E = \mathrm{diag}\{e_1, \ldots, e_n\}$ — такие, что их элементы $|d_i| = |e_i| = 1, i = 1, \ldots, n$, при которых DBE — неотрицательная матрица, необходимо и достаточно, чтобы нашлась специальная матрица знаков $\overline{B}$ такая, что $\mathrm{rank}\ \overline{B} = 1$.

Доказательство: В соответствии с замечанием 6, будем считать, что $b_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$.

Необходимость. Пусть нашлись такие диагональные матрицы D и E, что $\widehat{B} = DBE$ неотрицательная матрица, то есть $d_i e_j b_{ij} \geqslant 0$. Рассмотрим специальную матрицу знаков $\overline{B}$ и $D\overline{B}E$. В соответствии с определением 7 $d_i e_j \overline{b}_{ij} = 1$, если $b_{ij} \neq 0$. Если же $b_{ij} = 0$ будем выбирать $\overline{b}_{ij} = d_i e_j$. Получим, что $D\overline{B}E = 1_{n\times n}$ — матрица, состоящая из единиц. Следовательно, $\mathrm{rank}\ \overline{B} = 1$.

Достаточность. Пусть $\mathrm{rank}\ \overline{B} = 1$. Следовательно $\mathrm{rank}\ D\overline{B} = 1$ для любых допустимых матриц D. Выберем D таким образом, чтобы $d_i\overline{b}_{i1} = 1$, то есть первый столбец матрицы $D\overline{B}$ состоит из единиц. Так как $\operatorname{rank} D\overline{B} = 1$, то все столбцы матрицы $D\overline{B}$ линейно зависимы и значит найдется E, такая, что $D\overline{B}E = 1_{n\times n}$. Нетрудно видеть, что для найденных D и E матрица DBE будет неотрицательной. Что и требовалось доказать.

Используя теорему 4, замечания 5-6 и лемму 1, приходим к следующей теореме.

Теорема 5: *Пусть A и B задаются формулами (4.15) и (4.23) соответственно и для матрицы B', полученной путем вычёркивания из матрицы B нулевых строк и столбцов, существует специальная матрица знаков $\overline{B'}$ такая, что* $\operatorname{rank} \overline{B'} = 1$. *Тогда для диагональной устойчивости системы (4.1) необходимо и достаточно, чтобы матрица $\widetilde{A} + \widehat{B}$ была гурвицевой.*

Замечание 7: В данном случае, выбор матрицы D, обеспечивающий неотрицательность матрице DBE, не повлияет на изменение условий для A, так как B имеет сетчатую структуру, и для обеспечения неотрицательности её элементам требуется выбрать только элементы $d_{2k},\ k = 1, \ldots, \dfrac{n}{2}$. В свою очередь, матрица A имеет блочную структуру, как и матрица DAD. Кроме того, если $\operatorname{sign}(a_{2k2k-1}a_{2k-12k}) = d_{2k-1}^2 d_{2k}^2 \operatorname{sign}(a_{2k2k-1}a_{2k-12k}) = -1$,то можно считать, что $a_{2k2k-1} = a_{2k-12k} = 0$. Если же $\operatorname{sign}(a_{2k2k-1}) = \operatorname{sign}(a_{2k-12k})$, то за счёт выбора $d_{2k-1} = \operatorname{sign}(d_{2k}a_{2k2k-1})$ можно привести матрицу A к виду $\widetilde{A}$.

Пример 1: Рассмотрим

$$\operatorname{Sign} B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}, \quad b \in \{-1, 1\}.$$

Для того чтобы построить специальную матрицу знаков, сравним два столбца матрицы $\operatorname{Sign} B$, в которых меньше всего нулей. В нашей матрице это первый и второй столбец. Сравним их ненулевые элементы стоящие в одной строке. В нашем случае это элементы третьей строки. Они имеют разные знаки, поэтому предполагаем, что столбец $b_1 = -b_2$. В соответствии с этим предположением, заполним нулевые элементы первого и второго столбца.

$$\begin{pmatrix} -\mathbf{1} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\mathbf{1} & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\mathbf{1} & 0 & b \end{pmatrix}$$

Далее, сравнивая оставшиеся столбцы с первым, заполним все нулевые элементы. Таким образом мы получили алгоритм построения специальной матрицы знаков.

$$\overline{B} = \begin{pmatrix} -\mathbf{1} & 1 & -\mathbf{1} & \mathbf{1} \\ 1 & -\mathbf{1} & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -\mathbf{1} & \mathbf{1} \\ 1 & -\mathbf{1} & \mathbf{1} & b \end{pmatrix}$$

В этом примере, если параметр $b = -1$, то $\operatorname{rank} \overline{B} = 1$, а если $b = 1$, то не существует специальной матрицы знаков, удовлетворяющей лемме 1.

5. Управление мультиагентными системами с запаздыванием

5.1. Постановка задачи

В этой главе рассматривается задача распределения нескольких идентичных объектов на прямой. Предполагается, что сигнал от соседних агентов может быть получен с задержкой. Частным случаем такой задачи является хорошо известная задача «выравнивания в ряд», когда все агенты должны быть распределены на отрезке равномерно. Задача управления формациями в первую очередь связана с управлением мобильными объектами и моделированием биологических формаций [6].

В работе [6] рассмотрена подобная задача без запаздывания, а именно, предполагается, что необходимо построить протокол, обеспечивающий равномерное распределение агентов на отрезке. Рассматривается группа из $n \geqslant 1$ подвижных агентов, пронумерованных от 1 до n, и двумя статичными агентами с индексами 0 и $n+1$ соответственно. Строится управление вида

$$u_j(t) = \frac{1}{2}\left(x_{j-1}(t) - x_j(t)\right) + \frac{1}{2}\left(x_{j+1}(t) - x_j(t)\right), \quad j = 1, \ldots, N,$$

здесь $x_j(t)$ — положение j-го агента в момент времени t, $x_0(t) \equiv x_0$ и $x_{N+1}(t) \equiv x_{N+1}$ — координаты концов отрезка. В данном случае агенты используют только относительные измерения и не имеют полной информации о группе. Было показано, что такой протокол обеспечивает равномерное расположение агентов на отрезке независимо от начальных условий. Положение равновесия здесь является экспоненциально устойчивым.

В данной работе предполагается, что $x_0 = 0, x_{n+1} = \widehat{x}$. Основная задача — построить управление, которое будет обеспечивать размещение агентов таким образом, чтобы они делили отрезок $[0, \widehat{x}]$ в заранее заданных отношениях: $x_i = k_i\widehat{x}, i = 1, \ldots n, 0 < k_1 < \ldots < k_n < 1$. Предполагается, что каждый агент может использовать для достижения цели относительную информацию о своем положении, притом информация о соседних агентах поступает с некоторой постоянной задержкой τ.

Рассматривается задача стабилизации агентов. Будем считать, что агент имеет модель первого порядка

$$\dot{x}_j(t) = u_j(t) \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{5.1}$$

В соответствии с вышеуказанными предположениями, для решения задачи расположения агентов на отрезке предлагается протокол вида

$$u_j(t) = c'_j \left(x_i(t-\tau) - x_j(t)\right) + c''_j \left(x_k(t-\tau) - x_j(t)\right), \quad 0 \leqslant i < j < k \leqslant n+1. \tag{5.2}$$

То есть агент с номером j получает информацию о своем расстоянии до некоторого агента i, который находится слева от агента j и до некоторого агента k, находящегося справа от него. Сигналы от всех соседних агентов доходят с запаздыванием. Введём вектор состояния системы $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^T$. Тогда динамика системы может быть записана в матричной форме

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-\tau) + C. \tag{5.3}$$

Требуется выяснить, при каких параметрах системы может быть решена задача стабилизации агентов.

5.2. Подключение к ближайшим соседям

Пусть каждый агент для стабилизации использует своё положение относительно ближайших левого и правого соседей. Тогда управление строится следующим образом

$$u_1 = c'_1 \left(-x_i(t)\right) + c_1 \left(x_2(t-\tau) - x_1(t)\right),$$

$$u_j = c'_j \left(x_{j-1}(t-\tau) - x_j(t)\right) + c_j \left(x_{j+1}(t-\tau) - x_j(t)\right), \quad j = 2, \ldots, n-1,$$

$$u_n = c'_n \left(x_{n-1}(t-\tau)) - x_n(t)\right) + c_n \left(\widehat{x} - x_n(t)\right).$$

Будем считать, что $c'_j = 1, \quad j = 1, \ldots, n.$

Таким образом, получим

$$A = \begin{pmatrix} -1-c_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1-c_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1-c_n \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & c_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & c_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ c_n\widehat{x} \end{pmatrix}.$$

Выясним, как надо выбирать параметры c_i, $i = 1, \dots, n$, чтобы $\widetilde{X} = (k_1\widehat{x}, \dots, k_n\widehat{x})^T$ было положением равновесия. Получим

$$c_1 = \frac{k_1}{k_2 - k_1},$$

$$c_i = \frac{k_i - k_{i-1}}{k_{i+1} - k_i}, \quad i = 2, \dots, n-1,$$

$$c_n = \frac{k_n - k_{n-1}}{1 - k_n}.$$

Следовательно, матрица B — неотрицательная, а A — метцелерова. Исследуем это положение равновесия на асимптотическую устойчивость. Для этого достаточно проверить, выполняются ли условия Севостьянова — Котелянского для матрицы $A+B$. Так как $A+B$ — матрица Якоби, миноры могут быть вычислены по рекуррентным формулам

$$\Delta_1 = -\frac{k_2}{k_2 - k_1} < 0,$$

$$\Delta_2 = \frac{k_2(k_3 - k_1)}{(k_2 - k_1)(k_3 - k_2)} - \frac{k_1}{k_2 - k_1} = \frac{k_3}{k_3 - k_2} > 0,$$

$$\Delta_3 = -\frac{k_3(k_4 - k_2)}{(k_3 - k_2)(k_4 - k_3)} + \frac{k_2}{k_3 - k_2} = -\frac{k_4}{k_4 - k_3} < 0,$$

$$\Delta_i = -\frac{k_{i+1}-k_{i-1}}{k_{i+1}-k_i}\Delta_{i-1} - \frac{k_{i-1}-k_{i-2}}{k_i-k_{i-1}}\Delta_{i-2} \quad i=3,\dots,n.$$

Нетрудно убедиться, что

$$(-1)^i\Delta_i = \frac{(k_{i+1}-k_{i-1})k_i}{(k_{i+1}-k_i)(k_i-k_{i-1})} - \frac{k_{i-1}}{k_i-k_{i-1}} = \frac{k_{i+1}}{k_{i+1}-k_i} > 0, \quad i=1,\dots,n-1,$$

$$(-1)^n\det(A+B) = \frac{1}{1-k_n} > 0.$$

Приходим к выводу, что в случае, когда все агенты получают информацию с постоянным запаздыванием от своих ближайших соседей, а крайние агенты получают информацию от ближайших концов отрезка, любое заранее заданное расположение агентов внутри фиксированного отрезка можно сделать асимптотически устойчивым положением равновесия.

Пример 2: Рассмотрим систему из четырёх агентов. Пусть $\tau = 0.1$, $\widehat{x} = 1$, $k_1 = \frac{1}{5}$, $k_2 = \frac{1}{4}$, $k_3 = \frac{1}{3}$, $k_4 = \frac{1}{2}$. Предположим, что $x_i(0) = 1, i = 1,\dots,4$.

Тогда, учитывая вышеуказанные рассуждения,

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{8}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x(t-0.1) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Решим такую систему с запаздыванием в среде Matlab и построим графики, описывающие расположение агентов в зависимости от времени.

Как видно по графику, агенты приближаются к заданным расположениям.

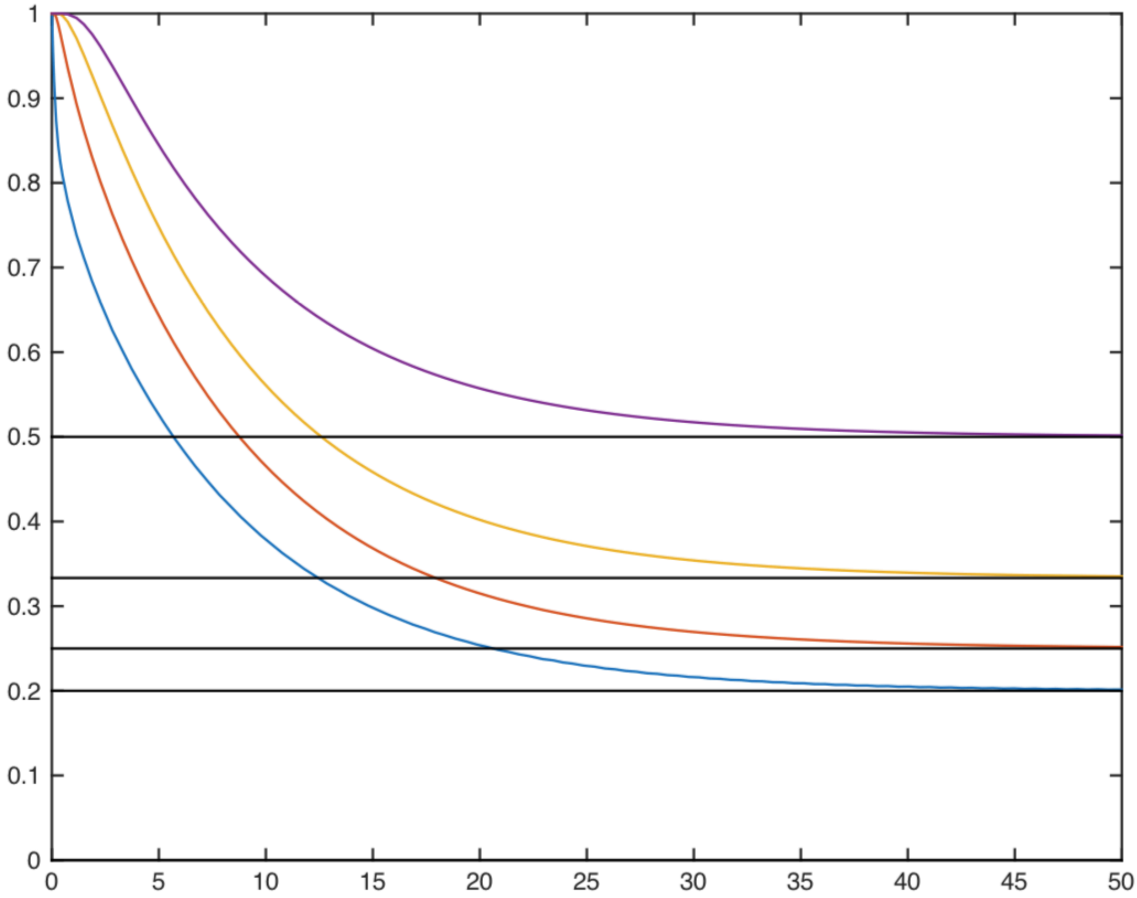

Рис. 2. Расположение четырёх агентов в случае подключения к ближайшим соседям.

5.3. Подключение к крайним агентам

Далее предполагается, что сигналы могут посылать не все агенты, а только крайние (агенты с номерами 1 и n). Соответственно, управление строится следующим образом

$$u_1 = c_1(k_1\widehat{x} - x_1(t)), \quad u_n = c_n(k_n\widehat{x} - x_n(t)),$$

$$u_j = c'_j\left(x_1(t-\tau) - x_j(t)\right) + c_j\left(x_n(t-\tau) - x_j(t)\right), j = 2, \ldots, n-1.$$

Также как и в предыдущем случае, допустим, что $c'_i = 1, \quad i = 1, \ldots n.$

Получим
$$A = \begin{pmatrix} -c_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1-c_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -c_n \end{pmatrix},$$
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 k_1 \widehat{x} \\ 0 \\ \vdots \\ c_n k_n \widehat{x} \end{pmatrix}.$$
Выясним, как надо выбирать параметры c_i, $i = 1, \dots, n$, чтобы $\widetilde{X} = (k_1\widehat{x}, \dots, k_n\widehat{x})^T$ было положением равновесия. Получим
$$c_1, c_n > 0,$$
$$c_i = \frac{k_i - k_1}{k_n - k_i}, \quad i = 2, \dots, n-1.$$
Будем считать, что $c_1 = c_n = 1$. Следовательно, матрица B — неотрицательная, а A — метцелерова. Исследуем это положение равновесия на асимптотическую устойчивость. Для этого достаточно проверить, выполняются ли условия Севастьяного — Котелянского для матрицы $A+B$. Нетрудно видеть, что в данном случае выполняется
$$\Delta_1 = -1 < 0, \quad (-1)^n \det(A+B) = \prod_{i=2}^{n-1}(1+c_i) > 0,$$
$$(-1)^j \Delta_j = \prod_{i=2}^{j}(1+c_i) > 0, \quad j = 2, \dots, n-1.$$
Приходим к выводу, что в случае, когда все агенты получают информацию с постоянным запаздыванием от агентов с номерами 1 и n, любое заранее заданное расположение агентов внутри фиксированного отрезка можно сделать асимптотически устойчивым положением равновесия.

Пример 3: Рассмотрим систему из четырёх агентов. Пусть также как и в примере 2 $\tau = 0.1$, $\widehat{x} = 1$, $k_1 = \dfrac{1}{5}$, $k_2 = \dfrac{1}{4}$, $k_3 = \dfrac{1}{3}$, $k_4 = \dfrac{1}{2}$, $x_i(0) = 1, i = 1, \ldots, 4$.

Тогда, для протокола из этого параграфа,

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0.2 \\ 1 & 0 & 0 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x(t-0.1) + \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0 \\ 0 \\ 0.5 \end{pmatrix}.$$

Решим такую систему с запаздыванием в среде Matlab и построим графики, описывающие расположение агентов в зависимости от времени.

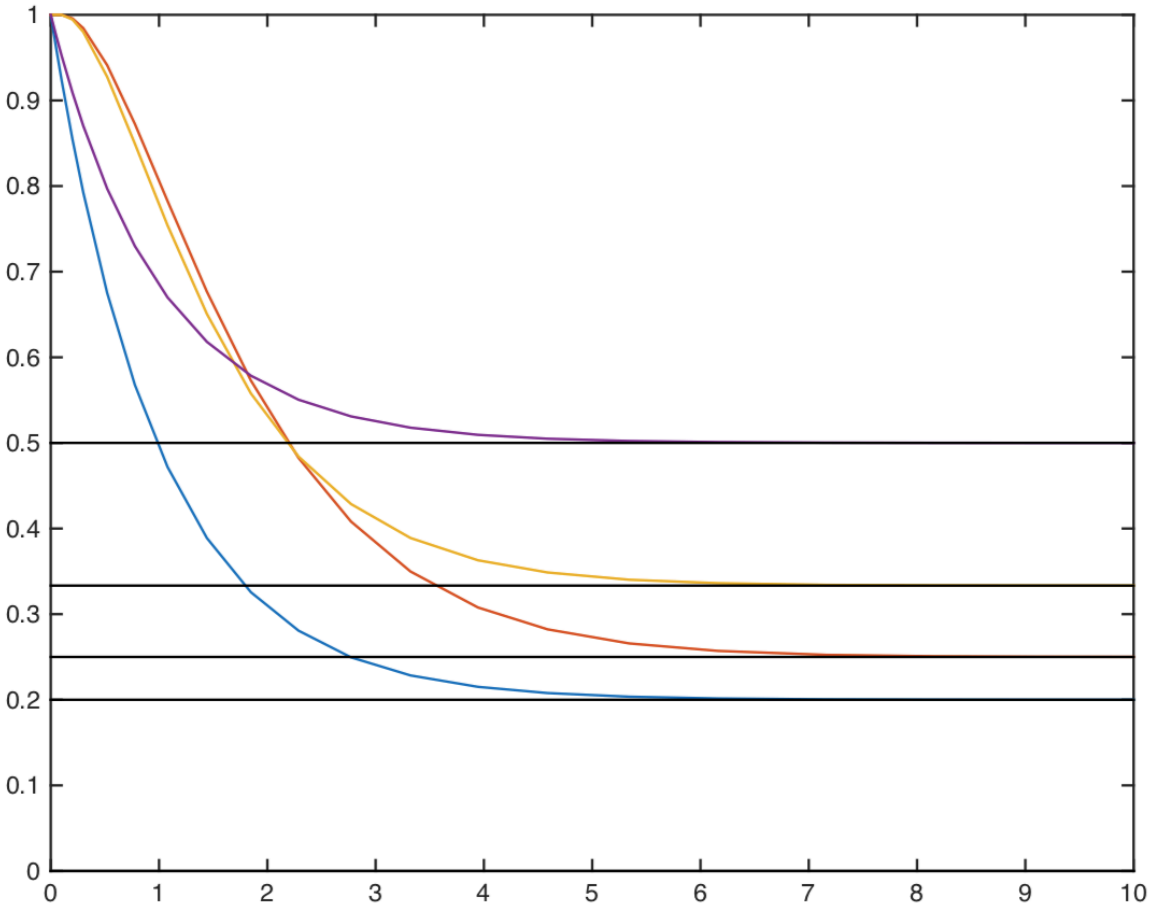

Рис. 3. Расположение четырех агентов в случае подключения к крайним агентам.

В данном случае все агенты также приближаются к желаемым положениям, при том быстрее чем в примере 2.

5.4. Последовательная стабилизация агентов

Далее будем рассматривать случай, когда первый агент для стабилизации получает информацию от левого конца отрезка, а каждый последующий агент получает информацию от своего ближайшего левого соседа. В соответствии со сделанными предположениями, управление строится следующим образом

$$u_1 = c_1(k_1\widehat{x} - x_1(t)),$$

$$u_j = c_j\left(k_j\widehat{x} + (x_{j-1}(t-\tau) - x_j(t)) - k_{j-1}\widehat{x}\right), \quad j = 1, \ldots, n.$$

В данном случае

$$A = \mathrm{diag}\{-c_1, \ldots, -c_n\},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & c_n & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1k_1\widehat{x} \\ c_2(k_2 - k_1)\widehat{x} \\ \vdots \\ c_n(k_n - k_{n-1})\widehat{x} \end{pmatrix}.$$

Нетрудно убедиться, что положение $\widetilde{X} = (k_1\widehat{x}, \ldots, k_n\widehat{x})^T$ является положением равновесия для любых $c_j, \quad j = 1, \ldots, n$. Будем считать, что $c_j > 0, j = 1, \ldots, n$. Тогда матрица A — метцелерова, B — неотрицательная, а $A + B$ — гурвицева. Соответственно, любое заранее заданное расположение агентов внутри фиксированного отрезка можно сделать асимптотически устойчивым положением равновесия.

Пример 4: Рассмотрим систему из четырёх агентов. Пусть также как и в ранее рассмотренных примерах $\tau = 0.1,\ \widehat{x} = 1,\ k_1 = \frac{1}{5},\ k_2 = \frac{1}{4},\ k_3 = \frac{1}{3},\ k_4 = \frac{1}{2}$, $x_i(0) = 1, i = 1, \ldots, 4$.

Тогда, для протокола из этого параграфа,

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x(t-0.1) + \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{1}{20} \\ \frac{1}{12} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Решим такую систему с запаздыванием в среде Matlab и построим графики, описывающие расположение агентов в зависимости от времени.

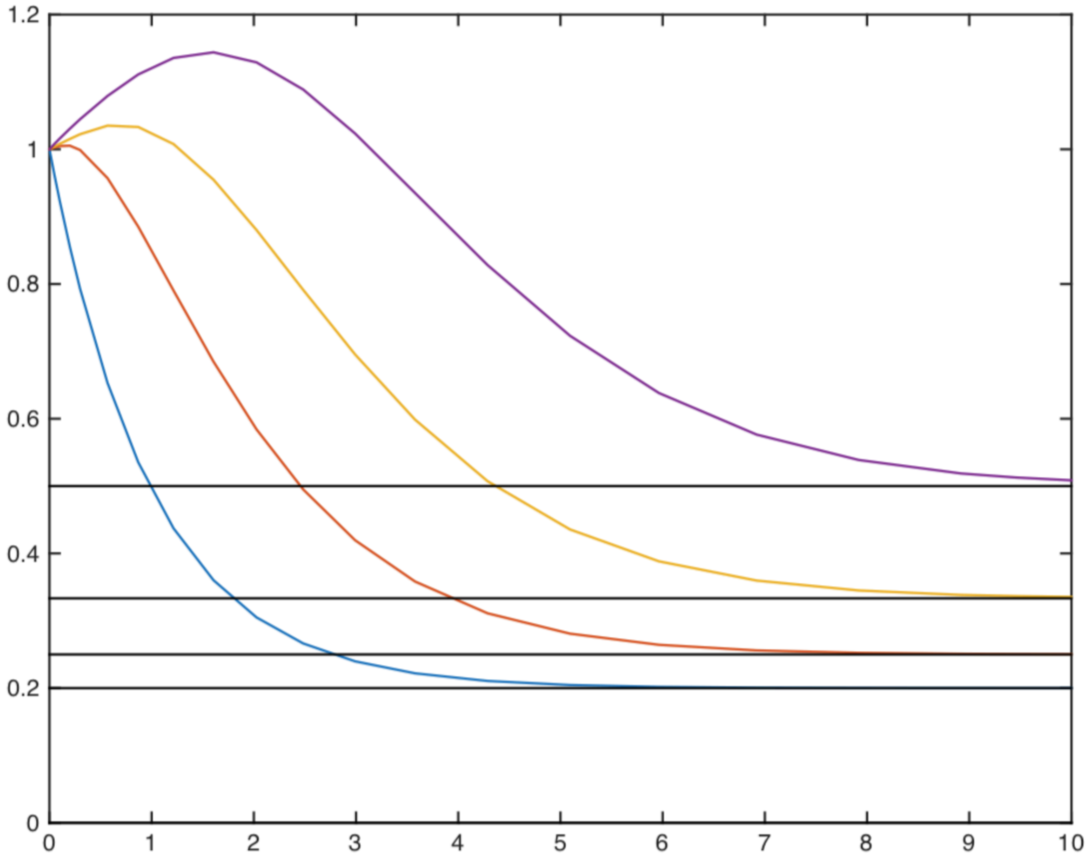

Рис. 4. Расположение четырех агентов в случае последовательной стабилизации.

В данном примере все агенты также приближаются к желаемым положениям, однако в начале стабилизации выходят за границы отрезка.

6. Заключение

В данной работе были получены необходимые и достаточные условия диагональной устойчивости для некоторых классов нелинейных систем с запаздыванием. Рассмотрены два специальных случая систем третьего порядка, а также изучены две сложные системы, описывающие взаимодействие систем, состоящих из двумерных блоков. Все полученные условия являются конструктивно проверяемыми и их выполнение гарантирует асимптотическую устойчивость нулевого решения рассмотренных систем.

Кроме того, была исследована задача распределения нескольких идентичных агентов на отрезке, в случае, когда взаимодействие между агентами происходит с запаздыванием. Были построены несколько различных протоколов, обеспечивающих стабилизацию мультиагентной системы в заранее заданном положении.

Частично результаты магистерской диссертации были представлены на международной конференции "Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий. ПМТУКТ-2016". По результатам конференции была опубликована статья [13]. Также часть результатов была представлена на международной конференции "Процессы управления и устойчивость. Control Processes and Stability. CPS'18". Материалы доклада приняты к печати. Помимо этого, некоторые результаты работы были опубликованы в статье [11].

Список литературы

[1] Воронов А. А. Основы теории автоматического управления: Автомат. регулирование непрерыв. линейн. систем. М.: Энергия, 1980. 309 с.

[2] Проскурников А. В., Фрадков А. Л. Задачи и методы сетевого управления // Автоматика и телемеханика. 2016. № 10. С. 3–39.

[3] Gu K., Kharitonov V. L., Chen J. Stability of Time-Delay Systems. Boston, MA: Birkhauser, 2003. 343 p.

[4] Свирежев Ю. М., Логофет Д. О. Устойчивость биологических сообществ. М.: Наука, 1978. 352 с.

[5] Александров А. Ю., Платонов А. В., Старков В. Н., Степенко Н. А. Математическое моделирование и исследование устойчивости биологических сообществ. СПб.: ООО "СОЛО", 2006. 186 с.

[6] Проскурников А. В., Парсегов С. Э. Задача равномерного размещения на отрезке для агентов с моделью второго порядка // Автоматика и телемеханика. 2016. № 10. С. 152–165.

[7] Александров А. Ю., Платонов А. В. Метод сравнения и устойчивости движений нелинейных систем. СПб.: Издательство Санкт-Петербургского униветситета, 2012. 263 с.

[8] Mason O. Diagonal Riccati stability and positive time-delay systems // Systems and Control Letters. 2012. Vol. 61, No 1. P. 6–10.

[9] Руш Н., Абетс П., Лалуа М. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980. 300 с.

[10] Aleksandrov A. Yu., Mason O. Diagonal Riccati stability and applications // Linear Algebra and its Applications. 2016. Vol. 492. P. 38–51.

[11] Aleksandrov A. Yu., Mason O., Vorob'eva A. A. Diagonal Riccati stability and the Hadamard product // Linear Algebra and its Applications. 2017. Vol. 534. P. 158–173.

[12] Александров А. Ю., Воробьёва А. А. Построение функционалов Ляпунова — Красовского для одного класса нелинейных систем с запаздыванием // Процессы управления и устойчивость. 2015. Т. 2. № 1 С. 17–22.

[13] Александров А. Ю., Воробьёва А. А. Критерии диагональной устойчивости некоторых классов нелинейных дифференциально-разностных систем // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий. 2016. С. 22–23.

[14] John Lygeros, Shankar Sastry. Hybrid systems: Modeling analysis and control. Technical Report UCB/ERL M99/34 Electronic Research Laboratory, University of California Berkeley, 1999.

[15] Olfati-Saber R., Murray R.M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays // Automatic Control, IEEE Transactions on. — 2004. — Vol. 49, no. 9. — P. 1520–1533.

[16] Parsegov S. E., Polyakov A. E., Sherbakov P. S. Fixed-time Consensus Algorithm for Multi-agent Systems with Integrator Dynamics // IFAC Proceedings Volumes. 2013. Vol. 46. P. 110–115.

[17] Метод векторных функций Ляпунова в теории устойчивости / под ред. А.А. Воронова и В.М. Матросова. М.: Наука, 1987. 312 с.

[18] Мишина А. П., Проскуряков И. В. Высшая алгебра. М.: Наука, 1965. 300 с.