

Санкт-Петербургский государственный университет

Механика и математическое моделирование

Кафедра теоретической и прикладной механики

Кондрёнкина Владлена Эдуардовна

Неголономная модель движения фигуриста

Магистерская диссертация

Научный руководитель:

докт. физ.-мат. наук, проф. Юшков М.П.

Рецензент:

канд. физ.-мат. наук, доцент Диевский В.А.

Санкт-Петербург

2018

SAINT-PETERSBURG STATE UNIVERSITY

Mechanics and Mathematical Modeling

Department of theoretical and applied mechanics

Kondrenkina Vladlena

A non-holonomic model of the motion of a figure skater

Master's Thesis

Scientific supervisor:

Dr.S(Phys. and Math.), Prof. Yushkov M.P.

Reviewer:

Ph.D(Phys. and Math.), Docent Dievski V.A.

Saint-Petersburg

2018

## О Г Л А В Л Е Н И Е

<b>ВВЕДЕНИЕ</b> .....	4
<b>Глава I. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ НЕГОЛОНОМНЫХ СИСТЕМ</b> .....	5
§ I.1. Реакция неголономной связи.....	5
§ I.2. Векторное уравнение движения изображающей точки неголономной механической системы.....	9
§ I.3. Основные формы дифференциальных уравнений движения неголономной механической системы.....	13
<b>Глава II. ДВИЖЕНИЕ ФИГУРИСТА ПО ЛЬДУ КАК НЕГОЛОНОМНАЯ ЗАДАЧА МЕХАНИКИ</b> .....	20
§ II.1. Неголономная связь, накладываемая при движении фигуриста по льду.....	20
§ II.2. Уравнения Маджи движения фигуриста по льду.....	23
§ II.3. Нахождение кинетической энергии системы.....	24
§ II.4. Нахождение обобщенных сил.....	27
<b>Глава III. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ МАДЖИ</b> .....	28
§ III.1. Численное решение уравнений Маджи. Разбиение программы на блоки.....	28
§ III.2. Численное решение эталонной задачи.....	29
§ III.3. Общий случай скольжения фигуриста по льду.....	31
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ</b> .....	32
<b>ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА</b> .....	33

## В В Е Д Е Н И Е

Представляемая магистерская диссертация посвящена построению упрощенной математической модели движения фигуриста по льду. Работа состоит из Введения, трех глав, Приложения и списка Основной литературы.

В главе I "Уравнения движения неголономных систем" приводится основная терминология несвободного движения, строится вектор реакции неголономной связи, для чего используется обобщенный оператор Гамильтона, введенный в научный оборот Н.Н. Поляховым, выводятся уравнения движения неголономных систем в виде уравнений Маджи и уравнений Лагранжа второго рода с множителями.

Уравнения Маджи применяются для исследования движения фигуриста в главе II "Движение фигуриста по льду как неголономная задача механики". Составляется выражение кинетической энергии системы и выводятся формулы для подсчета обобщенных сил. Приводится аналитическая запись уравнений Маджи, которые должны решаться совместно с уравнением неголономной связи, наложенной на движение фигуриста при его скольжении по льду.

Глава III "Численное решение уравнений Маджи" посвящена использованию программы, построенной на основе пакета MAPLE, для решения исследуемой задачи.

В "Приложении" приводится сама программа расчета движения фигуриста по льду, использующая пакет MAPLE.

Список "Основной литературы" приведен в конце работы, ссылки на дополнительные источники содержатся в примечаниях внутри параграфов.

В каждом параграфе ведется своя нумерация формул, при этом первая цифра отражает номер параграфа в данной главе, а вторая – порядковый номер формулы в параграфе. Рисунки имеют нумерацию, соответствующую параграфу данной главы.

## Глава I

# УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ НЕГОЛОНОМНЫХ СИСТЕМ

Глава I начинается с краткого перечня основных терминов, применяемых при изучении несвободного движения точки. Затем обсуждается вектор реакции неголономной связи, наложенной на движение материальной точки, как частный случай рассматривается реакция голономной неидеальной связи. С помощью введения понятия изображающей точки получены основные виды уравнений движения неголономных систем, под которыми подразумеваются уравнения Маджи и уравнения Лагранжа второго рода с множителями.

### § I.1. Реакция неголономной связи

Движение материальной точки может быть названо движением свободной точки в том смысле, что для любых действующих сил, пользуясь произволом при выборе начальных условий, можно потребовать, чтобы в декартовой системе координат  $Ox_1x_2x_3$  точка в заданный момент времени  $t$  в заданном положении с координатами  $x_1, x_2, x_3$  имела заданную скорость с проекциями  $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3$ . Это ясно из того, что интегралы уравнений движения имеют вид

$$\Phi_j(t, x, \dot{x}) = C_j, \quad x = (x_1, x_2, x_3), \quad \dot{x} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3), \quad j = \overline{1, 6},$$

откуда следует, что для любых заданных  $t, x, \dot{x}$  можно найти соответствующие им  $C_j$ . Иначе говоря, на координаты и скорость свободной точки никакие дополнительные условия заранее не налагаются.

Считается, что точка является несвободной, если ее координаты и проекции скорости должны удовлетворять некоторым заранее заданным условиям. Например, точка должна все время находиться на поверхности или на линии, которую можно рассматривать как пересечение двух поверхностей. Такие условия называются связями, наложенными на точку. Они обычно выражаются в виде некоторых равенств или неравенств, то есть в виде соотношений

$$f_1(t, x, \dot{x}) \geq 0. \quad (1.1)$$

Здесь индекс "1" означает порядок высшей производной, входящей в уравнение связи. Для голономной связи используется значок "0".

Если во время движения выполняется равенство

$$f_1(t, x, \dot{x}) = 0, \quad (1.2)$$

то связь называют удерживающей и говорят, что точка во все моменты времени остается на связи. Если в некоторый момент равенство нарушается, то говорят, что точка покидает связь. В таком случае связь называют неудерживающей, или освобождающей. Происхождение этих терминов можно пояснить следующим примером.

Допустим, что точка находится на поверхности, задаваемой уравнением

$$f_0(t, x) = 0. \quad (1.3)$$

Тогда координаты ее должны удовлетворять уравнению поверхности, и можно сказать, что поверхность "удерживает" точку. Если для координат точки выполняется условие  $f_0(t, x) \geq 0$ , то это значит, что она может покинуть поверхность. Примером подобной связи является, в частности, обращенная выпуклостью вверх поверхность, у вершины которой свободно покоится тяжелый шарик (рис. I.1.1). При определенных значениях начальной скорости  $v_0$  и в зависимости от формы поверхности возможен случай, когда шарик сначала катится по поверхности, а затем в некоторый момент покидает ее. Точно так же выражения (1.1) и (1.2) можно рассматривать в шестимерном пространстве переменных  $(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)$  и пользоваться введенной терминологией.

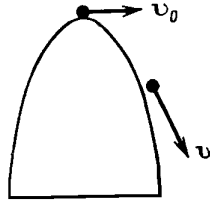


Рис. I.1.1. Движение по освобождающей голономной связи

Если время  $t$  входит явно в формулу (1.3), то связь называется нестационарной (или реономной). Ей соответствует образ деформирующейся и перемещающейся во времени поверхности. В противном случае связь называется стационарной (или склерономной).

Связи, выражаемые формулой (1.2), содержащей координаты и первые производные от них, являются дифференциальными связями первого порядка. Они могут быть интегрируемыми или неинтегрируемыми в том смысле, что могут или не могут быть приведены к уравнению, заданному в виде (1.3). Так, связь вида

$$a_1 \dot{x}_1 + a_2 \dot{x}_2 + a_3 \dot{x}_3 + a_0 = 0,$$

или в дифференциальной форме,

$$a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + a_3 dx_3 + a_0 dt = 0,$$

где  $a_i$  — функции координат  $x_i$  и времени  $t$ , может или не может быть приведена к полному дифференциалу в зависимости от того, удовлетворяют или не удовлетворяют функции  $a_i(t, x)$  некоторым условиям. Например, если

$$a_0 = \frac{\partial f_0(t, x)}{\partial t}, \quad a_1 = \frac{\partial f_0(t, x)}{\partial x_1}, \quad a_2 = \frac{\partial f_0(t, x)}{\partial x_2}, \quad a_3 = \frac{\partial f_0(t, x)}{\partial x_3},$$

то уравнение связи приобретает вид

$$\frac{\partial f_0(t, x)}{\partial t} dt + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial f_0(t, x)}{\partial x_j} dx_j = 0,$$

откуда имеем, что  $f_0(t, x) = \text{const}$ , то есть связь интегрируема. В дальнейшем будем пользоваться понятием "немого индекса", позволяющим не писать знака суммы.

Связи вида (1.3) называются геометрическими, конечными или голономными связями. Дифференциальные связи (1.2) в том случае, когда их нельзя проинтегрировать, то есть свести к связям вида (1.3), называются неголономными связями первого порядка. Неголономная связь называется линейной, если ее уравнение линейно зависит от скоростей. В общем случае уравнение связи (1.2) может нелинейно зависеть как от координат, так и от скоростей.

Если связь (1.2) неголономна, то любые два положения материальной точки можно соединить кусочно-гладкой кривой конечной длины, при движении по которой удовлетворяется уравнение связи<sup>1</sup>. В том случае, когда уравнение (1.2) получено посредством дифференцирования по времени выражения  $f_0(t, x) = \text{const}$ , тогда, не нарушая связи (1.2), из любой точки уже нельзя попасть в любую другую точку. Действительно, за счет выбора произвольной постоянной исходная точка может быть любой. Однако из нее можно попасть только в ту точку, которая удовлетворяет уравнению  $f_0(t, x) = \text{const}$ .

Очевидно, что всякая голономная связь, выражаемая дифференцируемой функцией, может быть представлена в дифференциальной форме

$$f_1(t, x, \dot{x}) \equiv \dot{f}_0 = \frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{\partial f_0}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial f_0}{\partial x_2} \dot{x}_2 + \frac{\partial f_0}{\partial x_3} \dot{x}_3 = 0, \quad (1.4)$$

или

$$f_1(t, x, \dot{x}) \equiv \frac{\partial f_0}{\partial t} + \nabla f_0 \cdot \mathbf{v} = 0.$$

В общем случае ускорение  $\mathbf{w}^*$ , которое сообщает исходной точке сила  $\mathbf{F}(t, x, \dot{x})$ , не совпадает с ускорением  $\mathbf{w}$ , которое получает точка под влиянием той же силы при наличии связи. Иначе говоря, связь действует на точку как некоторая сила, которая называется реакцией связи  $\mathbf{R}$ . Отсюда следует, что уравнение Ньютона для несвободной точки должно иметь вид

$$m \mathbf{w} = \mathbf{F} + \mathbf{R}. \quad (1.5)$$

Если предположить, что сила  $\mathbf{R}$  найдена, то движение несвободной точки должно совпасть с движением свободной точки, находящейся под действием заданных сил  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{R}$ . В этом и состоит содержание принципа освобождения от связи. Отметим, что для такого свободного движения уравнение связи является интегралом уравнений движения.

Рассмотрим уравнение связи общего вида (1.2). Предполагая, что функция  $f_1(t, x, \dot{x})$  дифференцируема по всем аргументам, можно записать

$$\dot{f}_1 = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial x_j} \dot{x}_j + \frac{\partial f_1}{\partial \dot{x}_j} \ddot{x}_j = 0, \quad j = \overline{1, 3},$$

или

$$\nabla' f_1 \cdot \mathbf{w} = -\frac{\partial f_1}{\partial t} - \nabla f_1 \cdot \mathbf{v}, \quad (1.6)$$

<sup>1</sup>См. работы: *Л. Парс*. Аналитическая динамика. М.: Наука. 1971. С. 31-32; *П.К. Рахевский*. О соединении любых двух точек вполне неголономного пространства допустимой линией // Уч. зап. пед. ин-та им. Либкнехта. Сер. физ.-мат. наук. 1938. № 2. С. 83-94; *W.L. Chow*. Systeme von linearen partiellen differentialen Gleichungen erster Ordnung // Math. Ann. 1939. Bd. 117. S. 98-105. Отметим, что термины голономная и неголономная связи впервые были введены Г. Герцем.

где

$$\nabla' = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_j} \mathbf{i}_j, \quad j = \overline{1,3}.$$

Умножая уравнение (1.5) скалярно на  $\nabla' f_1$ , а уравнение (1.6) на  $m$ , получаем

$$m \mathbf{w} \cdot \nabla' f_1 = \mathbf{F} \cdot \nabla' f_1 + \mathbf{R} \cdot \nabla' f_1,$$

$$m \mathbf{w} \cdot \nabla' f_1 = -m \left( \frac{\partial f_1}{\partial t} + \nabla f_1 \cdot \mathbf{v} \right),$$

откуда

$$\mathbf{R} \cdot \nabla' f_1 = - \left( m \frac{\partial f_1}{\partial t} + m \nabla f_1 \cdot \mathbf{v} + \mathbf{F} \cdot \nabla' f_1 \right). \quad (1.7)$$

Решая это уравнение относительно  $\mathbf{R}$ , можно записать

$$\mathbf{R} = - \left( m \frac{\partial f_1}{\partial t} + m \nabla f_1 \cdot \mathbf{v} + \mathbf{F} \cdot \nabla' f_1 \right) \frac{\nabla' f_1}{|\nabla' f_1|^2} + \mathbf{R}_L,$$

где  $\mathbf{R}_L$  — произвольный вектор, ортогональный вектору  $\nabla' f_1$ . Эту формулу удобно также представить в виде

$$\mathbf{R} = \Lambda \nabla' f_1 + \mathbf{R}_L = \mathbf{N} + \mathbf{R}_L, \quad \mathbf{N} \cdot \mathbf{R}_L = 0.$$

Подставляя это выражение в уравнение (1.7) относительно вектора  $\mathbf{R}$ , видим, что вектор  $\mathbf{R}_L$  может быть исключен из него. Следовательно, связь (1.2) может быть удовлетворена при любом векторе  $\mathbf{R}_L$ . В частности, для решения задачи достаточно считать  $\mathbf{R}_L \equiv 0$ . Связи, обладающие этим свойством, называются идеальными связями. Однако физический способ реализации связи обычно приводит к появлению составляющей  $\mathbf{R}_L$ , которая в большинстве случаев существенно зависит от  $\mathbf{N}$ . Иначе говоря, физически осуществленная связь оказывается неидеальной, и для окончательного решения задачи, кроме уравнения связи, необходимо знать физический закон, формирующий задание вектора  $\mathbf{R}_L$ .

Рассмотрим частный случай голономной связи (1.3). Представим ее в виде (1.2):

$$f_1 \equiv \dot{f}_0 = \frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{\partial f_0}{\partial x_j} \dot{x}_j = 0.$$

Следовательно, в данном случае

$$\frac{\partial f_1}{\partial \dot{x}_j} = \frac{\partial f_0}{\partial x_j},$$

и поэтому для голономной связи (1.3) введенный выше вектор  $\nabla' f_1$  совпадает с обычным вектором  $\nabla f_0$ .<sup>2</sup> Теперь вектор  $\mathbf{N} = \Lambda \nabla f_0$  направлен по нормали к поверхности, задаваемой уравнением (1.3), а вектор  $\mathbf{R}_L$  (на рисунке он обозначен как  $\mathbf{T}_0$ ) лежит в касательной плоскости  $\pi$  к этой поверхности. Особенно наглядно это демонстрируется для стационарной связи (см. рис. I.1.2, пунктиром изображена траектория точки, лежащая на поверхности  $f_0(x) = 0$ ). В частности, если уравнением стационарной голономной связи задается некоторая материальная поверхность, по которой должна двигаться точка  $M$ , то при идеально отполированной поверхности имеем  $\mathbf{R}_L \equiv 0$ . В



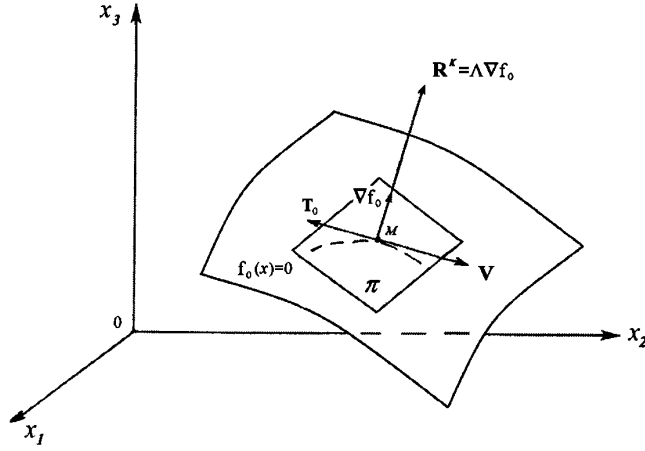


Рис. I.1.2. Движение по стационарной неидеальной голономной связи

противном случае приходится указывать правило формирования вектора  $\mathbf{R}_L$ , например, задавать закон трения Кулона.

## § I.2. Векторное уравнение движения изображающей точки неголономной механической системы

**Изображающая точка для свободной системы  $n$  материальных точек.** Множество взаимодействующих друг с другом материальных точек называется механической системой. Взаимодействие точек проявляется в изменении их движения по сравнению с тем, которое они совершали бы, будучи изолированными. Так как изменение движения происходит под влиянием сил, то следует допустить, что между точками системы действуют силы, которые называются внутренними силами.

Если координаты и скорости точек системы не связаны между собой какими-либо наперед заданными ограничениями, то система называется свободной. Так как положение каждой точки, принадлежащей свободной системе, определяется тремя независимыми координатами, то система, состоящая из  $n$  точек, характеризуется  $3n$  координатами. Свободной системой материальных точек является, например, Солнечная система.

Закон Ньютона для точки, принадлежащей системе, состоящей из  $n$  точек, имеет вид

$$m_\nu \ddot{\mathbf{r}}_\nu = \mathbf{F}_\nu, \quad \mathbf{F}_\nu = \mathbf{F}_\nu^{(i)} + \mathbf{F}_\nu^{(e)}, \quad \nu = \overline{1, n}, \quad (2.1)$$

где  $\nu$  — номер материальной точки,  $\mathbf{r}_\nu$  — ее радиус-вектор,  $\mathbf{F}_\nu^{(i)}$  — внутренняя сила, приложенная к ней, являющаяся равнодействующей всех сил взаимодействия рассматриваемой точки с остальными точками системы,  $\mathbf{F}_\nu^{(e)}$  — равнодействующая всех внешних сил. Будем считать, что силы  $\mathbf{F}_\nu^{(i)}$

<sup>2</sup>Использованный в данном параграфе вектор  $\nabla' f_1$  был введен Н.Н.Пóбляховым (см. статью [6]). Этот вектор можно назвать обобщенным оператором Гамильтона, так как из него, как было показано выше, в виде частного случая получается классический оператор Гамильтона (оператор "набла").

и  $\mathbf{F}_\nu^{(e)}$  являются функциями от  $t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n, \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2, \dots, \dot{\mathbf{r}}_n$ . Таким образом, дифференциальными уравнениями движения системы являются  $n$  векторных уравнений второго порядка, содержащих  $n$  неизвестных вектор-функций  $\mathbf{r}_\nu$ .

Уравнения (2.1) в проекциях на оси декартовых координат могут быть записаны в виде

$$m_\nu \ddot{x}_{\nu k} = X_{\nu k}(t, x, \dot{x}), \quad X_{\nu k}(t, x, \dot{x}) = X_{\nu k}^{(i)}(t, x, \dot{x}) + X_{\nu k}^{(e)}(t, x, \dot{x}), \quad (2.2)$$

$$\nu = \overline{1, n}, \quad k = 1, 2, 3,$$

где  $x_{\nu k}$ ,  $X_{\nu k}$ ,  $X_{\nu k}^{(i)}$ ,  $X_{\nu k}^{(e)}$  — проекции соответственно векторов  $\mathbf{r}_\nu$ ,  $\mathbf{F}_\nu$ ,  $\mathbf{F}_\nu^{(i)}$ ,  $\mathbf{F}_\nu^{(e)}$  на ось  $x_k$ . Здесь и далее при записи аргументов функции многих переменных буквой без индекса обозначена вся совокупность переменных введенных тем же символом с индексами.

Условимся в дальнейшем считать, что функции, стоящие в правой части дифференциальных уравнений, непрерывны в окрестности начальных значений  $x_{\nu k}(t_0)$ ,  $\dot{x}_{\nu k}(t_0)$  и имеют в указанной окрестности ограниченные по величине частные производные по  $x_{\nu k}$  и  $\dot{x}_{\nu k}$ . Эти условия, как доказывается в теории дифференциальных уравнений, являются достаточными для существования и единственности решения системы (2.2) при заданных начальных условиях.

Решениями системы дифференциальных уравнений (2.2) являются  $3n$  функций времени  $t$  и  $6n$  произвольных постоянных

$$x_{\nu k} = x_{\nu k}(t, C_1, C_2, \dots, C_{6n}),$$

причем для определения  $C_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, 6n$ , следует использовать начальные условия

$$x_{\nu k}(t_0) = x_{\nu k}(t_0, C_1, C_2, \dots, C_{6n}), \quad \dot{x}_{\nu k}(t_0) = \dot{x}_{\nu k}(t_0, C_1, C_2, \dots, C_{6n}),$$

позволяющие выразить  $C_j$  через начальные координаты  $x_{\nu k}(t_0)$  и начальные скорости  $\dot{x}_{\nu k}(t_0)$ .

Систему  $3n$  дифференциальных уравнений (2.2) удобно также записывать в виде, содержащем сквозную нумерацию координат, осуществляемую следующим образом. Обозначим  $x_{\nu k} = x_\mu$ , где  $\mu = 3(\nu - 1) + k$ ,  $\nu = \overline{1, n}$ ,  $k = 1, 2, 3$ . Тогда получаем соответствие

$$\begin{aligned} x_{11} = x_1, \quad x_{12} = x_2, \quad x_{13} = x_3, \\ x_{21} = x_4, \quad x_{22} = x_5, \quad x_{23} = x_6, \\ \dots\dots\dots \\ x_{n1} = x_{3n-2}, \quad x_{n2} = x_{3n-1}, \quad x_{n3} = x_{3n}. \end{aligned}$$

Эту же операцию можно выполнить и над величинами  $X_{\nu k}$ . Следовательно, систему (2.2) можно записать в виде

$$m_\mu \ddot{x}_\mu = X_\mu, \quad \mu = \overline{1, 3n}. \quad (2.3)$$

Так как в системе (2.2) одна и та же масса  $m_\nu$  умножается последовательно на  $\ddot{x}_{\nu k}$ ,  $k = 1, 2, 3$ , то в системе (2.3) массу  $m_\mu$  полагаем равной  $m_\nu$  при  $\mu = 3\nu - 2, 3\nu - 1, 3\nu$ .

Введем  $3n$ -мерные векторы  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_{3n})$  и  $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_{3n})$  такие, что

$$y_\mu = x_\mu \sqrt{\tilde{m}_\mu}, \quad Y_\mu = \frac{X_\mu}{\sqrt{\tilde{m}_\mu}}, \quad (2.4)$$

где

$$\tilde{m}_\mu = \frac{m_\mu}{M}, \quad M = \sum_{\nu=1}^n m_\nu. \quad (2.5)$$

Под длиной вектора  $\mathbf{y}$  условимся понимать

$$|\mathbf{y}| = \sqrt{\sum_{\mu=1}^{3n} y_\mu^2} = \sqrt{\sum_{\mu=1}^{3n} m_\mu x_\mu^2},$$

а направление его будем характеризовать с помощью величин  $\cos \alpha_\mu = y_\mu / |\mathbf{y}|$ . Аналогично поступаем и с вектором  $\mathbf{Y}$ .

Если ввести единичные векторы  $\mathbf{j}_\mu$ , соответствующие  $3n$ -мерной ортогональной системе декартовых координат  $y_\mu$ , то векторы  $\mathbf{y}$  и  $\mathbf{Y}$  представим в виде

$$\mathbf{y} = y_\mu \mathbf{j}_\mu, \quad \mathbf{Y} = Y_\mu \mathbf{j}_\mu.$$

На основании сказанного система дифференциальных уравнений (2.3), которая в новых координатах имеет форму

$$M\ddot{y}_\mu = Y_\mu, \quad \mu = \overline{1, 3n},$$

может быть записана в виде векторного уравнения для одной точки с массой  $M$ , движущейся в  $3n$ -мерном евклидовом пространстве. Эта точка называется изображающей точкой по Герцу. Уравнение ее движения имеет вид

$$M\ddot{\mathbf{y}} = \mathbf{Y}, \quad \text{или} \quad M\mathbf{W} = \mathbf{Y}, \quad \text{где} \quad \mathbf{W} = \dot{\mathbf{V}} = \ddot{\mathbf{y}} = \ddot{y}_\mu \mathbf{i}_\mu. \quad (2.6)$$

Отметим, что если кинетическую энергию системы определить как сумму кинетических энергий ее точек, то нетрудно убедиться, что эта энергия равна кинетической энергии изображающей точки. Действительно, согласно определению

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^n m_\nu v_\nu^2 = \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^{3n} m_\mu \dot{x}_\mu^2 = \frac{M}{2} \sum_{\mu=1}^{3n} \tilde{m}_\mu \dot{x}_\mu^2 = \frac{M}{2} \sum_{\mu=1}^{3n} \dot{y}_\mu^2 = \frac{MV^2}{2}. \quad (2.7)$$

Если вместо декартовых координат  $y_\mu$  ввести криволинейные координаты  $q^\sigma$  с базисными векторами  $\mathbf{e}_\sigma = \partial \mathbf{y}(t, q) / \partial q^\sigma$ ,  $\sigma = \overline{1, 3n}$ , то вектор скорости изображающей точки можно представить в виде

$$\mathbf{V} = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial q^\sigma} \dot{q}^\sigma = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial q^\alpha} \dot{q}^\alpha, \quad \alpha = \overline{0, 3n}, \quad q^0 = t. \quad (2.8)$$

Сравнивая это выражение с выражением для скорости материальной точки при нестационарном базисе, замечаем, что отличие состоит только в том, что суммирование ведется не до  $3$ , а до  $3n$ . Это же утверждение, очевидно, относится и к ускорению  $\mathbf{W}$  изображающей точки, сравниваемому с ускорением  $\mathbf{w}$  материальной. Отсюда следует, что формулы, характеризующие кинематику точки в произвольных криволинейных координатах, могут быть использованы при исследовании движения изображающей точки. Основное векторное уравнение движения изображающей точки (2.6) и ее кинетическая энергия (2.7) полностью аналогичны соответствующим выражениям для одной свободной материальной точки, и поэтому все результаты и формулы, полученные для одной точки,

обобщаются на случай изображающей точки. Для этого массу  $m$  следует заменить массой системы  $M$ , а векторы  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{F}$  — соответственно векторами  $\mathbf{y}$  и  $\mathbf{Y}$  и считать, что суммирование по дважды встречающимся индексам ведется до  $3n$ .

**Движение изображающей точки при наличии неголономных связей.** Если координаты и скорости точек механической системы помимо дифференциальных уравнений движения должны удовлетворять дополнительным равенствам или неравенствам вида

$$f_1^\kappa(t, x, \dot{x}) \geq 0, \quad \kappa = \overline{1, k},$$

то такая система называется несвободной. Здесь под  $x = (x_1, \dots, x_{3n})$  опять понимаем совокупность координат  $n$  точек системы.

Очевидно, что отдельная точка, принадлежащая несвободной системе, является несвободной, поэтому дифференциальное уравнение ее движения должно быть записано в виде

$$m_\nu \ddot{\mathbf{r}}_\nu = \mathbf{F}_\nu + \mathbf{R}'_\nu, \quad (2.9)$$

где  $\nu$  — номер точки,  $\nu = \overline{1, n}$ ,  $\mathbf{F}_\nu$  — равнодействующая всех внешних и внутренних сил, приложенных к точке,  $\mathbf{R}'_\nu$  — равнодействующая реакций связей для данной точки. Вводя обозначения

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_\nu &= x_{3\nu-2} \mathbf{i}_1 + x_{3\nu-1} \mathbf{i}_2 + x_{3\nu} \mathbf{i}_3, \\ \mathbf{F}_\nu &= X_{3\nu-2} \mathbf{i}_1 + X_{3\nu-1} \mathbf{i}_2 + X_{3\nu} \mathbf{i}_3, \\ \mathbf{R}'_\nu &= R'_{3\nu-2} \mathbf{i}_1 + R'_{3\nu-1} \mathbf{i}_2 + R'_{3\nu} \mathbf{i}_3, \\ m_\mu &= m_\nu \quad \text{при} \quad \mu = 3\nu - 2, 3\nu - 1, 3\nu, \end{aligned}$$

представляем систему (2.9) в виде  $3n$  скалярных уравнений:

$$m_\mu \ddot{x}_\mu = X_\mu + R'_\mu, \quad \mu = \overline{1, 3n}. \quad (2.10)$$

По аналогии с предыдущим пунктом для того, чтобы воспользоваться при анализе несвободного движения системы аналитическим аппаратом, развитым применительно к несвободному движению одной точки, введем в  $3n$ -мерном евклидовом пространстве декартовую систему координат  $Oy_1 \dots y_{3n}$  с осями  $\mathbf{j}_1, \dots, \mathbf{j}_{3n}$ . В этой декартовой системе можно ввести изображающую точку с координатами

$$y_\mu = \sqrt{\tilde{m}_\mu} x_\mu, \quad \tilde{m}_\mu = \frac{m_\mu}{M}, \quad M = \sum_{\nu=1}^n m_\nu \equiv \frac{1}{3} \sum_{\mu=1}^{3n} m_\mu, \quad \mu = \overline{1, 3n}.$$

Сопоставив силам  $\mathbf{F}_\nu$  и реакциям  $\mathbf{R}'_\nu$  многомерные векторы

$$\mathbf{Y} = Y_\mu \mathbf{j}_\mu, \quad Y_\mu = X_\mu / \sqrt{\tilde{m}_\mu}, \quad \mathbf{R} = R_\mu \mathbf{j}_\mu, \quad R_\mu = R'_\mu / \sqrt{\tilde{m}_\mu}, \quad \mu = \overline{1, 3n},$$

получим возможность записать систему скалярных уравнений (2.10) в виде одного векторного уравнения:

$$M\mathbf{W} = \mathbf{Y} + \mathbf{R}, \quad \mathbf{W} = \dot{\mathbf{V}} = \dot{\mathbf{y}} = \ddot{y}_\mu \mathbf{j}_\mu. \quad (2.11)$$

Если связи выражаются уравнениями

$$f_1^\kappa(t, y, \dot{y}) = 0, \quad \kappa = \overline{1, k}, \quad k < 3n, \quad (2.12)$$

то, рассуждая, как и в случае одной точки, получаем

$$\mathbf{R} = \Lambda_{\varkappa} \nabla' f_1^{\varkappa} + \mathbf{R}_L = \mathbf{N} + \mathbf{R}_L,$$

где  $\nabla' = \frac{\partial}{\partial y_{\mu}} \mathbf{j}_{\mu}$ ,  $\mathbf{N} = \Lambda_{\varkappa} \nabla' f_1^{\varkappa}$ ,  $\mathbf{R}_L$  — произвольный вектор, ортогональный вектору  $\mathbf{N}$ . На основании сказанного уравнение (2.11) можно записать в виде

$$M\mathbf{W} = \mathbf{Y} + \mathbf{N} + \mathbf{R}_L. \quad (2.13)$$

Оно вместе с уравнениями связей (2.12) образует систему  $3n + k$  скалярных дифференциальных уравнений, из которых нужно определить  $3n + k$  неизвестных  $y_1, y_2, \dots, y_{3n}, \Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_k$ .

Вектор  $\mathbf{R}_L$  невозможно найти по виду уравнений связей. Для получения его следует дополнительно задать функциональную зависимость этого вектора, исходя из физической реализации связей. Наиболее простым случаем является случай, когда  $\mathbf{R}_L \equiv 0$ , которому соответствуют идеальные связи. Но физическая реализация таких связей не всегда возможна. Так, например, интегрируемые дифференциальные связи, реализуемые с помощью контакта, всегда обладают трением. Однако некоторые связи, встречающиеся в электромеханических системах, рассматриваются как идеальные.

Если связи идеальны, то  $\mathbf{R}_L \equiv 0$ . В этом случае трехмерные реакции  $\mathbf{R}'_{\nu}$ , которым соответствует многомерный вектор  $\mathbf{R} = \mathbf{N}$ , имеют составляющие

$$R'_{\nu k} \equiv R'_{\mu} = \sqrt{\tilde{m}_{\mu}} R_{\mu} = \Lambda_{\varkappa} \sqrt{\tilde{m}_{\mu}} \frac{\partial f_1^{\varkappa}}{\partial(\sqrt{\tilde{m}_{\mu}} \dot{x}_{\mu})} = \Lambda_{\varkappa} \frac{\partial f_1^{\varkappa}}{\partial \dot{x}_{\mu}},$$

$$\mu = 3(\nu - 1) + k, \quad k = 1, 2, 3, \quad \nu = \overline{1, n},$$

или

$$R'_{\nu k} = \Lambda_{\varkappa} \frac{\partial f_1^{\varkappa}}{\partial \dot{x}_{\nu k}}, \quad x_{\nu k} = x_{\mu}.$$

### § 1.3. Основные формы дифференциальных уравнений движения неголономной механической системы

**Квазискорости. Неголономные базисы. Идеальность неголономных связей.** Введение обобщенных лагранжевых координат удобно как в практическом, так и в теоретическом отношении. Оно позволяет подойти к описанию силового воздействия на систему материальных точек с общей точки зрения и в соответствии с этим записать второй закон Ньютона в наиболее совершенной аналитической форме — форме уравнений Лагранжа второго рода, которые были выведены для механических систем с голономными связями. Переходя теперь к системам материальных точек с неголономными связями, будем пользоваться также обобщенными координатами.

Пусть положение механической системы, состоящей из  $n$  материальных точек, однозначно может быть определено заданием обобщенных координат  $q^1, q^2, \dots, q^{3n}$ . Отметим, что их можно рассматривать как криволинейные координаты изображающей точки. Число обобщенных координат, равное в данном случае  $3n$ , обозначим через  $s$ .

Наложим на движение системы  $k$  связей, которые в обобщенных координатах выражаются уравнениями

$$f_1^{\varkappa}(t, q, \dot{q}) = 0, \quad \varkappa = \overline{1, k}. \quad (3.1)$$

Будем считать эту систему связей неголономной, то есть будем предполагать, что уравнения (3.1) нельзя проинтегрировать ни по отдельности, ни в целом. В этом случае любые два положения механической системы можно соединить кусочно-гладкой кривой конечной длины, при движении по которой удовлетворяются уравнения связей. Эта теорема<sup>3</sup> позволяет дифференциальные связи первого порядка, заданные в общем случае в виде (3.1), различать по тому признаку, уменьшается или не уменьшается при их наличии размерность множества тех положений, в которые система может перейти из данного положения. Если все связи (3.1) голономны, то размерность этого множества уменьшается на  $k$  единиц по сравнению со случаем, когда связи отсутствуют. В отличие от этого связи (3.1) являются неголономными, если эта размерность не изменяется. Термин "голономный", введенный, как указывалось выше, Г. Герцем, происходит от греческих слов  $\sigma\lambda\omicron\zeta$  (целый, что здесь по смыслу означает интегрируемый) и  $\nu\sigma\mu\omicron\zeta$  (закон). Применение этого термина к соотношениям (3.1) в голономном случае указывает на то обстоятельство, что тогда дифференциальные законы (3.1) приводят к уменьшению числа независимых параметров, однозначно определяющих положение механической системы, на  $k$  единиц.

Предположим, что неголономные связи (3.1) являются идеальными. Тогда, как было показано, уравнение движения изображающей точки в векторной форме имеет вид

$$M\mathbf{W} = \mathbf{Y} + \Lambda_{\mathcal{X}} \nabla' f_1^{\mathcal{X}}, \quad \nabla' f_1^{\mathcal{X}} = (\partial f_1^{\mathcal{X}} / \partial \dot{q}^{\sigma}) \mathbf{e}^{\sigma}. \quad (3.2)$$

Введем функции

$$v_*^{\rho} = v_*^{\rho}(t, q, \dot{q}), \quad \rho = \overline{1, s}, \quad (3.3)$$

и будем рассматривать значения  $v_*^{\rho}$  как новые переменные относительно переменных  $\dot{q}^{\sigma}$ , считая переменные  $t$  и  $q$  параметрами. Предполагая, что условия разрешимости выполнены, получаем

$$\dot{q}^{\sigma} = \dot{q}^{\sigma}(t, q, v_*), \quad v_* = (v_*^1, v_*^2, \dots, v_*^s). \quad (3.4)$$

Таким образом, наряду с обобщенными скоростями  $\dot{q} = (\dot{q}^1, \dots, \dot{q}^s)$  введены новые переменные  $v_* = (v_*^1, \dots, v_*^s)$ , имеющие смысл новых обобщенных скоростей. Однако, если обобщенным скоростям  $\dot{q}^{\sigma}$ ,  $\sigma = \overline{1, s}$ , соответствовали обобщенные координаты  $q^{\sigma}$ ,  $\sigma = \overline{1, s}$ , то новым переменным  $v_*^{\rho}$ ,  $\rho = \overline{1, s}$ , могут не соответствовать какие-либо новые обобщенные координаты. Поэтому  $v_*^{\rho}$ ,  $\rho = \overline{1, s}$ , называются квазискоростями (псевдоскоростями). Например, при изучении вращения твердого тела вокруг неподвижной точки удобно ввести углы Эйлера  $\psi, \theta, \varphi$ , являющиеся обобщенными координатами для задания положения твердого тела. Этим обобщенным координатам соответствуют обобщенные скорости  $\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}$ . Но, с другой стороны, для задания угловой скорости вращения твердого тела  $\boldsymbol{\omega}$  можно ввести проекции этого вектора  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  на подвижные оси. Однако этим величинам нельзя сопоставить производные от некоторых углов поворота. Поэтому введенные характеристики скорости вращения  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  приходится называть не обобщенными скоростями, а квазискоростями, или псевдоскоростями. Разница в этих наименованиях обусловлена использованием в первом случае латинского языка, а во втором – греческого.

Вычисляя частные дифференциалы этих функций при фиксированных  $t$  и  $q^{\sigma}$ , находим

$$\delta' v_*^{\rho} = \frac{\partial v_*^{\rho}(t, q, \dot{q})}{\partial \dot{q}^{\sigma}} \delta' \dot{q}^{\sigma}, \quad \delta' \dot{q}^{\sigma} = \frac{\partial \dot{q}^{\sigma}(t, q, v_*)}{\partial v_*^{\tau}} \delta' v_*^{\tau},$$

$$\rho, \sigma, \tau = \overline{1, s},$$

<sup>3</sup>См. сноску "1", приведенную в § I.1.

откуда

$$\delta' v_*^\rho = \frac{\partial v_*^\rho}{\partial \dot{q}^\sigma} \frac{\partial \dot{q}^\sigma}{\partial v_*^\tau} \delta' v_*^\tau = \delta_\tau^\rho \delta' v_*^\tau,$$

где

$$\delta_\tau^\rho = \frac{\partial v_*^\rho}{\partial \dot{q}^\sigma} \frac{\partial \dot{q}^\sigma}{\partial v_*^\tau} = \begin{cases} 1, & \rho = \tau, \\ 0, & \rho \neq \tau. \end{cases} \quad (3.5)$$

Предположение о том, что функции (3.3), (3.4) имеют непрерывные частные производные, позволяет ввести две системы линейно независимых векторов

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\tau = \frac{\partial \dot{q}^\sigma}{\partial v_*^\tau} \mathbf{e}_\sigma, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^\rho = \frac{\partial v_*^\rho}{\partial \dot{q}^\tau} \mathbf{e}^\tau, \quad \rho, \sigma, \tau = \overline{1, s}. \quad (3.6)$$

Первая система вводится с помощью основного базиса, а вторая — с помощью взаимного базиса исходной криволинейной системы координат  $q^\sigma$ .

Напомним, что векторы  $\mathbf{e}_\sigma$  и  $\mathbf{e}^\tau$  для изображающей точки задаются формулами

$$\mathbf{e}_\sigma = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial q^\sigma} = \frac{\partial y_\mu}{\partial q^\sigma} \mathbf{i}_\mu, \quad g_{\sigma\tau} = \mathbf{e}_\sigma \cdot \mathbf{e}_\tau, \quad \mathbf{e}^\tau = g^{\tau\sigma} \mathbf{e}_\sigma,$$

которые полностью аналогичны формулам, применяемым в кинематике одной точки. Скалярное произведение векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , представленных соответственно через ковариантные и контравариантные составляющие  $\mathbf{a} = a_\tau \mathbf{e}^\tau$ ,  $\mathbf{b} = b^\sigma \mathbf{e}_\sigma$ , имеет вид

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_\sigma b^\sigma. \quad (3.7)$$

Учитывая эту формулу, а также соотношения (3.5), (3.6), получаем

$$\boldsymbol{\varepsilon}^\rho \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_\tau = \delta_\tau^\rho = \begin{cases} 1, & \rho = \tau, \\ 0, & \rho \neq \tau. \end{cases}$$

Отсюда следует, что систему векторов  $\boldsymbol{\varepsilon}^\rho$  можно рассматривать как взаимный базис относительно базиса, задаваемого векторами  $\boldsymbol{\varepsilon}_\tau$ . Векторы (3.6) называются векторами неголономных базисов.

Пользуясь произволом в выборе функций  $v_*^\rho(t, q, \dot{q})$ , берем за переменные  $v_*^{l+\varkappa}$  функции связей  $f_1^\varkappa(t, q, \dot{q})$ , то есть полагаем

$$v_*^{l+\varkappa} = f_1^\varkappa(t, q, \dot{q}), \quad l = s - k, \quad \varkappa = \overline{1, k}.$$

В данном случае в соответствии с формулами (3.6) имеем

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{l+\varkappa} = \frac{\partial f_1^\varkappa}{\partial \dot{q}^\tau} \mathbf{e}^\tau = \nabla' f_1^\varkappa, \quad \varkappa = \overline{1, k}. \quad (3.8)$$

Дифференцируя уравнения связей (3.1), находим

$$\frac{\partial f_1^\varkappa}{\partial t} + \frac{\partial f_1^\varkappa}{\partial q^\sigma} \dot{q}^\sigma + \frac{\partial f_1^\varkappa}{\partial \dot{q}^\sigma} \ddot{q}^\sigma = 0, \quad \varkappa = \overline{1, k}. \quad (3.9)$$

Как известно, вектор ускорения  $\mathbf{W}$  в контравариантном представлении имеет вид

$$\mathbf{W} = (\ddot{q}^\sigma + \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta) \mathbf{e}_\sigma, \quad \sigma = \overline{1, s}, \quad \alpha, \beta = \overline{0, s}, \quad (3.10)$$

где  $\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma = g^{\sigma\tau} \Gamma_{\tau, \alpha\beta}$ ,  $q^0 = t$ . Из соотношений (3.7), (3.8), (3.10) следует, что

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{l+\varkappa} \cdot \mathbf{W} = \frac{\partial f_1^\varkappa}{\partial \dot{q}^\sigma} (\ddot{q}^\sigma + \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta), \quad \varkappa = \overline{1, k}.$$

Отсюда, учитывая равенства (3.9), получаем

$$\mathbf{W} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{l+\varkappa} = \chi^{l+\varkappa}(t, q, \dot{q}), \quad \varkappa = \overline{1, k}, \quad (3.11)$$

где

$$\chi^{l+\varkappa}(t, q, \dot{q}) = -\frac{\partial f_1^\varkappa}{\partial t} - \frac{\partial f_1^\varkappa}{\partial q^\sigma} \dot{q}^\sigma + \frac{\partial f_1^\varkappa}{\partial \dot{q}^\sigma} \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta.$$

Совокупность  $k$  скалярных величин  $\chi^{l+\varkappa}$  определяет в подпространстве с базисом  $\{\boldsymbol{\varepsilon}^{l+1}, \boldsymbol{\varepsilon}^{l+2}, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}^{l+k}\}$  некоторый вектор  $\mathbf{W}^K$ . Разлагая полное ускорение  $\mathbf{W}$  на вектор  $\mathbf{W}^K$  и ортогональный ему вектор  $\mathbf{W}_L$ , можно записать

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}_L + \mathbf{W}^K, \quad \mathbf{W}_L \cdot \mathbf{W}^K = 0, \quad (3.12)$$

где  $\mathbf{W}_L = \widetilde{W}_L^\lambda \boldsymbol{\varepsilon}_\lambda$ ,  $\lambda = \overline{1, l}$ ,  $\mathbf{W}^K = \widetilde{W}_{l+\varkappa}^K \boldsymbol{\varepsilon}^{l+\varkappa}$ ,  $\varkappa = \overline{1, k}$ . Здесь значок "волна" подчеркивает, что компоненты вектора ускорения вычисляются для неголономных базисов. Данное разложение вектора  $\mathbf{W}$  условно может быть проиллюстрировано рис. I.3.1. Индексы  $L$  и  $K$  векторов  $\mathbf{W}_L$  и  $\mathbf{W}^K$  указывают соответственно на размерность  $l$  и  $k$  подпространств, которым они принадлежат.

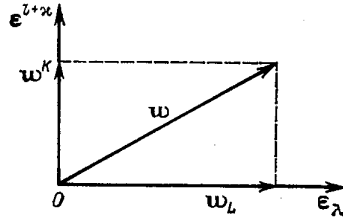


Рис. I.3.1. Разложение ускорения по векторам неголономных базисов

Для вычисления величин  $\widetilde{W}_L^\lambda$  умножим левую и правую части равенства (3.12) скалярно на  $\boldsymbol{\varepsilon}_\mu$ ,  $\mu = \overline{1, l}$ . При этом получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\widetilde{W}_L^\lambda \boldsymbol{\varepsilon}_\lambda \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_\mu = \mathbf{W} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_\mu, \quad \lambda, \mu = \overline{1, l},$$

относительно неизвестных  $\widetilde{W}_L^\lambda$ . Применяя к решению этой системы формулы Крамера, выражаем величины  $\widetilde{W}_L^\lambda$  через скалярные произведения  $\mathbf{W} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_\mu$ ,  $\mu = \overline{1, l}$ . Отсюда следует принципиально важное для наших рассуждений утверждение, что вектор  $\mathbf{W}_L$  полностью определяется набором величин  $\mathbf{W} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_\mu$ ,  $\mu = \overline{1, l}$ . Аналогично показываем, что вектор  $\mathbf{W}^K$  определяется совокупностью



величин  $\mathbf{W} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{l+\varkappa}$ ,  $\varkappa = \overline{1, k}$ . Значения же  $\mathbf{W} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{l+\varkappa}$ , как следует из обозначения функций  $\chi^{l+\varkappa}(t, q, \dot{q})$ ,  $\varkappa = \overline{1, k}$ , при заданных  $t, q^\sigma, \dot{q}^\sigma$  находим с помощью коэффициентов  $\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma$ , которые вычисляются через элементы  $g_{\alpha\beta}$ , и уравнений связей. На основании этого можно сказать, что вектор  $\mathbf{W}^K$  принадлежит тому подпространству, где вектор ускорения как функция времени, положения системы и ее скоростей полностью определяется коэффициентами  $g_{\alpha\beta}$  и уравнениями связей. В то же время ничего определенного о влиянии связей на вектор  $\mathbf{W}_L$  сказать нельзя, так как его можно исключить из соотношений (3.11) и записать последние в виде

$$\mathbf{W}^K \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{l+\varkappa} = \chi^{l+\varkappa}(t, q, \dot{q}), \quad \varkappa = \overline{1, k}.$$

Рассмотрим закон Ньютона применительно к вектору  $\mathbf{W}^K$ :

$$M\mathbf{W}^K = \mathbf{Y}^K + \mathbf{R}^K. \quad (3.13)$$

Здесь

$$\mathbf{Y}^K = \tilde{Y}_{l+\varkappa}^K \boldsymbol{\varepsilon}^{l+\varkappa}, \quad \mathbf{R}^K = \tilde{R}_{l+\varkappa}^K \boldsymbol{\varepsilon}^{l+\varkappa}.$$

Вектор  $\mathbf{R}^K$  добавляем к активной силе  $\mathbf{Y}^K$  для того, чтобы получить в сумме вектор  $M\mathbf{W}^K$ , который полностью задается уравнениями связей.

Ускорению  $\mathbf{W}_L$ , вообще говоря, соответствует уравнение Ньютона

$$M\mathbf{W}_L = \mathbf{Y}_L + \mathbf{R}_L, \quad (3.14)$$

где

$$\mathbf{Y}_L = \tilde{Y}_L^\lambda \boldsymbol{\varepsilon}_\lambda, \quad \mathbf{R}_L = \tilde{R}_L^\lambda \boldsymbol{\varepsilon}_\lambda, \quad \lambda = \overline{1, l}.$$

Поскольку влияние связей на вектор  $\mathbf{W}_L$  с помощью лишь математического задания их уравнений определено быть не может, так как вектор  $\mathbf{W}_L$ , как было показано выше, можно исключить из уравнений (3.11), то уравнение (3.14) выполняется при любом  $\mathbf{R}_L$ , и, в частности, при  $\mathbf{R}_L \equiv 0$ . Тогда вектор  $\mathbf{W}_L$ , перпендикулярный вектору  $\mathbf{W}^K$ , не зависит от связей, и закон Ньютона в соответствующем подпространстве имеет вид

$$M\mathbf{W}_L = \mathbf{Y}_L. \quad (3.15)$$

Связи, не влияющие на вектор  $\mathbf{W}_L$ , называются идеальными. Они вполне определяются своими аналитическими представлениями и позволяют записать второй закон Ньютона в том же виде (3.15), что и для свободной системы. При этом, однако, существенно, что этот закон записывается применительно к подпространству, ортогональному подпространству реакций, в котором ускорение полностью определяется уравнениями связей.

Складывая уравнения (3.13) и (3.15), получаем

$$M\mathbf{W} = \mathbf{Y} + \mathbf{R}^K.$$

Сравнивая уравнение в этой форме с уравнением (3.2), видим, что при идеальных неголономных связях

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}^K = \Lambda_{\varkappa} \nabla' f_1^{\varkappa}.$$

**Уравнения движения неголономных систем. Уравнения Маджи.** Вернемся к векторному равенству (3.15). Так как составляющая  $\mathbf{a}_L = a_L^\lambda \boldsymbol{\varepsilon}_\lambda$  произвольного вектора  $\mathbf{a}$  полностью задается набором величин  $\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_\lambda$ ,  $\lambda = \overline{1, l}$ , то одно уравнение (3.15) эквивалентно системе  $l$  уравнений

$$(\mathbf{M}\mathbf{W} - \mathbf{Y}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_\lambda = 0, \quad \lambda = \overline{1, l}. \quad (3.16)$$

Эти уравнения, являющиеся скалярной формой выражения второго закона Ньютона (3.15), будем называть уравнениями динамики при несвободном движении. Подставляя в уравнения (3.16) векторы  $\boldsymbol{\varepsilon}_\lambda$ , выраженные через векторы  $\mathbf{e}_\sigma$  основного базиса по формулам (3.6), с учетом (3.7) записываем

$$(MW_\sigma - Q_\sigma) \frac{\partial \dot{q}^\sigma}{\partial v_*^\lambda} = 0, \quad \lambda = \overline{1, l}. \quad (3.17)$$

Полученные уравнения движения (3.17) называются уравнениями Маджи<sup>4</sup>.

Как было показано, при идеальных связях имеем

$$\mathbf{M}\mathbf{W} - \mathbf{Y} = \mathbf{R} = \mathbf{R}^K = \Lambda_\varkappa \nabla' f_1^\varkappa = \Lambda_\varkappa \boldsymbol{\varepsilon}^{l+\varkappa}.$$

Отсюда следует, что

$$(\mathbf{M}\mathbf{W} - \mathbf{Y}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{l+\varkappa} = \Lambda_\varkappa, \quad \varkappa = \overline{1, k}.$$

Учитывая соотношения (3.6), (3.7), эти уравнения можно записать в виде

$$(MW_\sigma - Q_\sigma) \frac{\partial \dot{q}^\sigma}{\partial v_*^{l+\varkappa}} = \Lambda_\varkappa, \quad \varkappa = \overline{1, k}. \quad (3.18)$$

Напомним, что здесь выражения  $MW_\sigma$  можно представить в виде

$$MW_\sigma = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\sigma} - \frac{\partial T}{\partial q^\sigma} \equiv M(g_{\sigma\tau} \ddot{q}^\tau + \Gamma_{\sigma, \alpha\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta),$$

$$\sigma, \tau = \overline{1, s}, \quad \alpha, \beta = \overline{0, s}.$$

В  $l$  уравнений (3.17) войдут, вообще говоря, все обобщенные координаты  $q^1, \dots, q^s$ , поэтому их интегрировать приходится совместно с уравнениями связей (3.1). Для численного интегрирования последние удобно продифференцировать по времени. После задания начальных условий может быть получено решение этой замкнутой системы дифференциальных уравнений

$$q^\sigma = q^\sigma(t), \quad \sigma = \overline{1, s}. \quad (3.19)$$

Подставляя решение (3.19) в формулы (3.18), найдём изменение обобщенных реакций

$$\Lambda_\varkappa = \Lambda_\varkappa(t), \quad \varkappa = \overline{1, k}.$$

По этим формулам, в частности, можно находить условия освобождения от связей (3.1).

<sup>4</sup>Уравнения в этой форме были получены Маджи в 1896 г. для случая линейных неголономных связей первого порядка при помощи обобщенного принципа Даламбера–Лагранжа. В 1931 г. эти уравнения были получены А. Пшеборским для случая нелинейных связей первого порядка и линейных связей второго порядка при помощи того же обобщенного принципа.

Подчеркнём, что как следует из изложенного, при движении неголономных систем число  $l = s - k$  не является количеством степеней свободы механической системы. В зависимости от задания начальных условий интегрированием уравнений Маджи (3.17) совместно с уравнениями связей (3.1) механическая система для заданного момента времени  $t$  может занять любое положение  $q^1, \dots, q^s$ . Поэтому для неголономных систем число степеней свободы равно  $s$ , а  $l$  определяет количество независимых квазискоростей  $v_*^1, \dots, v_*^l$ .

**Уравнения движения неголономных систем. Уравнения Лагранжа второго рода с множителями.** Перейдем к получению второй важнейшей формы скалярных уравнений движения неголономных систем. Вывод других распространенных форм уравнений движения из уравнений Маджи приведен в учебнике [7, 2000] в § 10 главы III.

Перепишем теперь векторное уравнение движения при использовании формул (3.8) в виде

$$M\mathbf{W} = \mathbf{Y} + \Lambda_{\varkappa} \frac{\partial f_1^{\varkappa}}{\partial \dot{q}^{\tau}} \mathbf{e}^{\tau}.$$

Умножая его на векторы  $\mathbf{e}_{\sigma}$ ,  $\sigma = \overline{1, s}$ , получим уравнения Лагранжа второго рода с множителями для неголономных систем [2, 5]:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^{\sigma}} - \frac{\partial T}{\partial q^{\sigma}} = Q_{\sigma} + \Lambda_{\varkappa} \frac{\partial f_1^{\varkappa}}{\partial \dot{q}^{\sigma}}, \quad \sigma = \overline{1, s}. \quad (3.20)$$

Обратим внимание на то, что эти уравнения приходится интегрировать совместно с уравнениями связей (3.1), что является характерным для уравнений Лагранжа первого рода. Более того, если составляются уравнения (3.20) для случая движения изображающей точки, отражающей движение  $n$  материальных точек, то оператор Лагранжа, стоящий в левых частях этих уравнений, даст выражения  $M\ddot{y}_{\mu}$ , и уравнения (3.20) примут стандартный вид уравнений Лагранжа первого рода. Поэтому уравнения (3.20) в общем случае можно называть уравнениями Лагранжа первого рода в криволинейных координатах для неголономных систем [1, 3, 7].

Уравнения (3.20) при практическом использовании неудобны тем, что в них неизвестные обобщенные реакции  $\Lambda_{\varkappa}$ ,  $\varkappa = \overline{1, k}$ , входят наряду с производными от неизвестных обобщенных координат  $q^{\sigma}$ ,  $\sigma = \overline{1, s}$ .

## Глава II

### ДВИЖЕНИЕ ФИГУРИСТА ПО ЛЬДУ КАК НЕГОЛОНОМНАЯ ЗАДАЧА МЕХАНИКИ

Глава II посвящена изучению скольжения фигуриста по льду. Двумя способами строится классическая формула неголономной связи, отражающей отсутствие скольжения конька в направлении, перпендикулярном лезвию. Выводятся уравнения Лагранжа движения фигуриста. Эти уравнения приходится интегрировать совместно с уравнением неголономной связи, наложенной на движение спортсмена. Уравнение связи дифференцируется по времени, после чего находится совместная система дифференциальных уравнений, разрешенных относительно обобщенных ускорений.

#### § II.1. Неголономная связь, накладываемая при движении фигуриста по льду

**Первый способ вывода уравнения неголономной связи.** На рис. II.1.1 указано расположение скорости  $\mathbf{v}$  точки касания  $A$  конька со льдом. Конек изображен в виде жирной стрелки. Скорость направлена вдоль конька, в этой точке с фигуристом жестко связаны оси  $Ax$ , идущая вдоль конька, и  $Ay$ , направленная в перпендикулярном направлении. Эта скорость имеет составляющую  $\dot{\xi} \mathbf{i}_1$  вдоль оси  $O\xi$  и составляющую  $\dot{\eta} \mathbf{j}_1$  вдоль оси  $O\eta$ . Положение фигуриста на плоскости  $O\xi\eta$  (как твердого тела) характеризуется обобщенными координатами (точка  $A$  выбирается за полюс)

$$q^1 = \xi, \quad q^2 = \theta, \quad q^3 = \eta. \quad (1.1)$$

При скольжении спортсмена на фигурном коньке скорость  $\mathbf{v}$  может быть направлена только вдоль лезвия конька (в этом направлении идет ось  $Ax$  связанной системы координат). Поэтому при движении должна отсутствовать скорость точки  $A$  в перпендикулярном направлении по отношению к направлению конька, то есть должно быть

$$v_y = 0. \quad (1.2)$$

Пользуясь рисунком II.1.1, составим развернутую запись условия (1.2)

$$v_y = \dot{\eta} \cos \theta - \dot{\xi} \sin \theta = 0,$$

или

$$f_1(q, \dot{q}) \equiv \dot{\eta} - \dot{\xi} \operatorname{tg} \theta = 0. \quad (1.3)$$

**Второй способ вывода уравнения неголономной связи.** Как отмечалось в предыдущем пункте этого параграфа, скорость  $\mathbf{v}$  точки  $A$  (то есть нижней точки полоза конька) должна быть

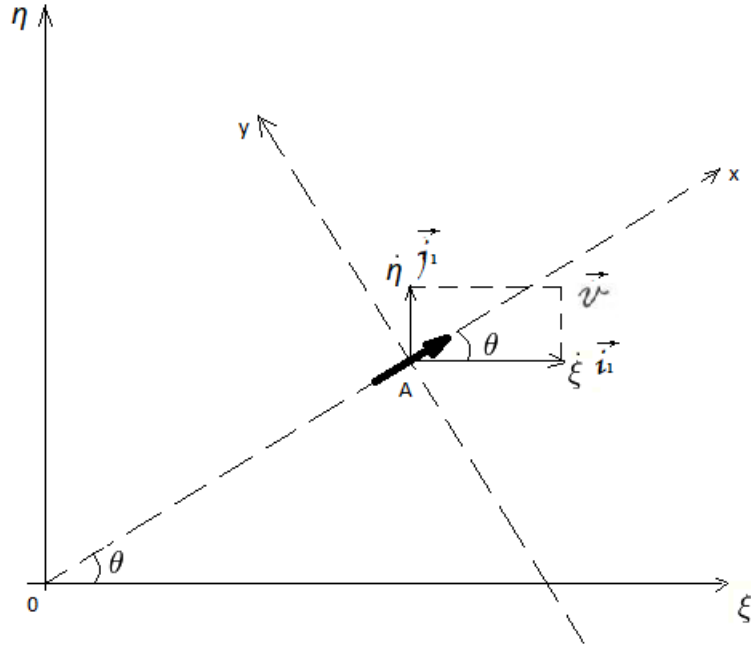


Рис. П.1.1 Расположение скоростей для первого вывода уравнения неголономной связи

направлена перпендикулярно прямой  $A_1A_2$  (см. рис. П.3.1), поэтому ее проекция на  $\overrightarrow{A_1A_2}$  будет равна нулю. Но тогда равны нулю и проекции  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_2$  точек  $A_1$  и  $A_2$  на то же направление. Поэтому выделенные на рис. П.1.2 треугольники при векторах  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{v}_2$  (их катеты на рисунке нанесены штрихованными отрезками) должны быть подобными. Из подобия верхнего и среднего треугольников имеем

$$\frac{\dot{\xi}_1}{\dot{\xi}} = \frac{\dot{\eta}_1}{\dot{\eta}}. \quad (1.4)$$

Но координаты точки  $A_1$  можно предствить следующим образом:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \xi + l \sin \theta, \\ \eta_1 &= \eta - l \cos \theta. \end{aligned}$$

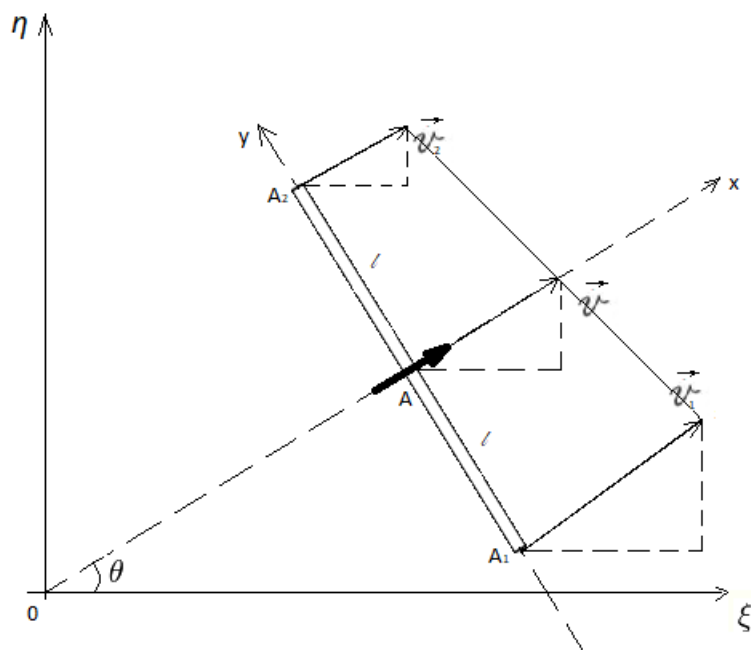


Рис. П.1.2 Расположение скоростей для второго вывода уравнения неголономной связи

Отсюда

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= \dot{\xi} + \dot{\theta} l \cos \theta, \\ \dot{\eta}_1 &= \dot{\eta} + \dot{\theta} l \sin \theta,\end{aligned}$$

поэтому формула (1.4) переписывается в виде

$$f_1(q, \dot{q}) \equiv \dot{\theta} (\dot{\eta} \cos \theta - \dot{\xi} \sin \theta) = 0. \quad (1.5)$$

Связи (1.5) соответствуют два уравнения:

$$\dot{\theta} = 0, \quad (1.6)$$

$$\dot{\eta} - \dot{\xi} \operatorname{tg} \theta = 0. \quad (1.7)$$

При выполнении условия (1.6) движение происходит по прямой, задаваемой постоянным углом  $\theta$ , этому соответствует движение конькобежца на беговых коньках. При условии (1.7), совпадающим с (1.3), как было показано выше, конек фигуриста не имеет движения в перпендикулярном направлении к лезвию, хотя при этом фигурист может свободно вращаться вокруг своей оси  $Az$ .

Но важно обратить внимание на следующее: хотя во втором способе вывода уравнения неголономной связи и получено формально нелинейное относительно обобщенных скоростей уравнение (1.5), но фактически нелинейным оно не является, так как условие (1.6) выполняется и при использовании уравнения (1.7). На это следует обратить внимание при чтении статьи [2], в которой и другие примеры по той же причине нельзя рассматривать как задание нелинейных неголономных связей.

## § II.2. Уравнения Маджи движения фигуриста по льду

**Неголономные переменные.** Изучаем движение механической системы в криволинейных координатах (1.1):

$$q^1 = \xi, \quad q^2 = \theta, \quad q^3 = \eta. \quad (2.1)$$

При исследовании движения неголономных систем, как известно, недостаточно перейти от системы координат  $q = (q^1, q^2, q^3)$  к новой криволинейной системе координат  $q = (q_*^1, q_*^2, q_*^3)$ . Теперь требуется связывать обобщенные скорости  $\dot{q} = (\dot{q}^1, \dot{q}^2, \dot{q}^3)$  с новой системой скоростей  $v = (v_*^1, v_*^2, v_*^3)$ , часть из которых (или все они) могут быть квазискоростями (псевдоскоростями). Зададим формулы перехода в виде, учитывающим уравнение связи

$$v_*^1 = \dot{q}^1 \equiv \dot{\xi}, \quad v_*^2 = \dot{q}^2 \equiv \dot{\theta}, \quad v_*^3 = \dot{\xi} \cos \theta - \dot{\eta} \sin \theta. \quad (2.2)$$

Преобразованию (2.2) соответствует обратное преобразование

$$\dot{\xi} \equiv \dot{q}^1 = v_*^1, \quad \dot{\theta} \equiv \dot{q}^2 = v_*^2, \quad \dot{\eta} \equiv \dot{q}^3 = \frac{v_*^1 \cos \theta - v_*^3}{\sin \theta}. \quad (2.3)$$

По преобразованию (2.2) можно составить производные

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{q}^1}{\partial v_*^1} &= 1, & \frac{\partial \dot{q}^2}{\partial v_*^1} &= 0, & \frac{\partial \dot{q}^3}{\partial v_*^1} &= \operatorname{ctg} \theta, \\ \frac{\partial \dot{q}^1}{\partial v_*^2} &= 0, & \frac{\partial \dot{q}^2}{\partial v_*^2} &= 1, & \frac{\partial \dot{q}^3}{\partial v_*^2} &= 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

**Составление уравнений Маджи.** Теперь уравнения Маджи (3.17) в нашем случае записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} (MW_1 - Q_1) \frac{\partial \dot{q}^1}{\partial v_*^1} + (MW_2 - Q_2) \frac{\partial \dot{q}^2}{\partial v_*^1} + (MW_3 - Q_3) \frac{\partial \dot{q}^3}{\partial v_*^1} &= 0, \\ (MW_1 - Q_1) \frac{\partial \dot{q}^1}{\partial v_*^2} + (MW_2 - Q_2) \frac{\partial \dot{q}^2}{\partial v_*^2} + (MW_3 - Q_3) \frac{\partial \dot{q}^3}{\partial v_*^2} &= 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Коэффициенты в уравнениях (2.5) имеют вид (2.4), вычислению обобщенных сил  $Q_\sigma$  и выражений  $MW_\sigma$ ,  $\sigma = 1, 2, 3$ , будут посвящены два следующих параграфов.

Два дифференциальных уравнения Маджи (2.5) содержат все три неизвестные обобщенные координаты  $\xi$ ,  $\theta$ ,  $\eta$ . Доопределять эту систему будем за счет присоединения к ней уравнения связи

$$\dot{\xi} \cos \theta - \dot{\eta} \sin \theta = 0.$$

Для удобства продифференцируем его по времени

$$\ddot{\xi} \cos \theta - \dot{\xi} \dot{\theta} \sin \theta - \ddot{\eta} \sin \theta - \dot{\eta} \dot{\theta} \cos \theta = 0. \quad (2.6)$$

Рассматривая систему уравнений (2.5), (2.6) как линейную алгебраическую систему уравнений относительно  $\ddot{\xi}$ ,  $\ddot{\theta}$ ,  $\ddot{\eta}$  и решая эту систему, представим нашу систему дифференциальных уравнений разрешенной относительно обобщенных ускорений:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} &= F_1(\xi, \theta, \eta, \dot{\xi}, \dot{\theta}, \dot{\eta}), \\ \ddot{\theta} &= F_2(\xi, \theta, \eta, \dot{\xi}, \dot{\theta}, \dot{\eta}), \\ \ddot{\eta} &= F_3(\xi, \theta, \eta, \dot{\xi}, \dot{\theta}, \dot{\eta}). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Правые части этих уравнений являются известными функциями своих переменных, а так как система (2.7) разрешена относительно старших производных, то она оказывается подготовленной к численному решению, которое в дальнейшем будем производить с помощью пакета MAPLE.

### § II.3. Вычисление кинетической энергии системы

**Математическая модель движения фигуриста.** Будем строить математическую модель фигуриста при скольжении по льду в виде движения корпуса, представляемого тонкой однородной вертикальной пластиной массы  $m_0$  и шириной  $2l$ , к которой в верхних точках шарнирно прикреплены тонкие однородные стержни (руки) масс  $m_1 = m_2$  и длин  $l_1 = l_2$ , а к нижней стороне пластины на расстояниях  $l/2$  от краев шарнирно прикреплены тонкие однородные стержни (ноги) с массами  $m_3 = m_4$  и с длинами  $l_3 = l_4$ . Стержни могут поворачиваться только в плоскости пластины. Расположение стержней характеризуются углами  $\alpha_j$ ,  $j = \overline{1, 4}$ , отсчитываемыми от вертикалей, проведенных через шарниры стержней.

На рис. II.3.1 изображен вид сверху на модель движения фигуриста. Введены неподвижная система координат  $O\xi\eta$ , полуподвижная система координат  $A\xi'\eta'$  и связанная система координат  $Axy$ . Точка  $A$  является нижней точкой конька, расположенного перпендикулярно пластине под центром ее нижнего края. Через точки  $A_1$  и  $A_2$  обозначены верхние края пластины.

**Составление кинетической энергии системы.** Как и ранее, положение пластины будем характеризовать координатами

$$\xi, \quad \theta, \quad \eta.$$

Требуется составить кинетическую энергию системы

$$T = T^{m_0} + T^{m_1} + T^{m_2} + T^{m_3} + T^{m_4}. \quad (3.1)$$



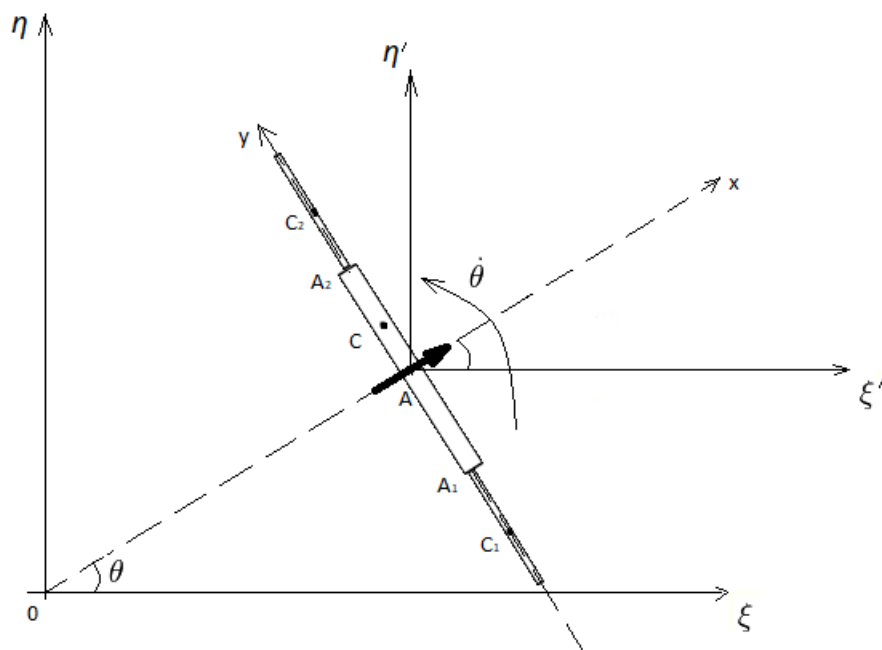


Рис. П.3.1 Вид сверху на модель фигуриста

Будем рассматривать движение фигуриста как последовательность отдельных скольжений спортсмена с неизменным распределением масс на каждом этапе. В начале каждого этапа фигурист задает это распределение и создает начальные условия для движения на рассматриваемом промежутке времени.

Для составления кинетической энергии воспользуемся теоремой Кёнига:

$$T = \frac{Mv_C^2}{2} + T_{rC}, \quad (3.2)$$

где

$$M = \sum_{k=0}^4 m_k,$$

$v_C$  является величиной скорости центра масс фигуриста, а  $T_{rC}$  является кинетической энергией всех частей тела фигуриста в относительном движении относительно системы координат  $C\xi'\eta'\zeta'$ .

**Нахождение скорости центра масс системы.** В нашей модели центры масс отдельных частей системы могут перемещаться только в плоскости, совпадающей с плоскостью введенной тонкой пластины. Найдем ординату центра масс всей системы:

$$y_C = \frac{\sum_{k=0}^4 m_k y_k}{M}. \quad (3.3)$$

На рис. П.3.1 точкой  $C$  помечена проекция центра масс фигуриста на горизонтальную плоскость.

Принимая точку  $A$ , имеющую скорость  $\mathbf{v}$ , за полюс, вычислим скорость центра масс по формуле

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v} + \dot{\theta} \mathbf{k} \times \overline{AC}, \quad (3.4)$$

где  $\mathbf{k}$  — орт оси  $Az$ . Применяя формулу (3.4), получим проекции вектора  $\mathbf{v}_C$  на неподвижные оси:

$$pr_{i1} \mathbf{v}_C = \dot{\xi} - \dot{\theta} y_C \cos \theta,$$

$$pr_{j1} \mathbf{v}_C = \dot{\eta} - \dot{\theta} y_C \sin \theta,$$

поэтому

$$v_C^2 = (\dot{\xi} - \dot{\theta} y_C \cos \theta)^2 + (\dot{\eta} - \dot{\theta} y_C \sin \theta)^2. \quad (3.5)$$

**Вычисление кинетической энергии при движении относительно центра масс системы.** В этом пункте мы должны составить кинетическую энергию всех частей тела фигуриста в относительном движении относительно системы, движущейся с центром масс поступательно, то есть относительно системы  $C\xi'\eta'\zeta'$ . В этой системе все части совершают вращения с угловой скоростью  $\dot{\theta} \mathbf{k}$  относительно оси  $C\zeta'$ , с которой совпадает ось  $Cz$ . Поэтому кинетические энергии будут равны

$$T_{rC}^{m_k} = \frac{J_{zC}^{m_k} \dot{\theta}^2}{2}, \quad k = \overline{0,4}. \quad (3.6)$$

Для подсчета осевого момента части тела с массой  $m_k$  относительно оси вращения  $Cz$  воспользуемся теоремой Гюйгенса–Штейнера

$$J_{zC}^{m_k} = J_{zC_k}^{m_k} + M(\widetilde{C_k C})^2, \quad k = \overline{0,4}, \quad (3.7)$$

где через  $\widetilde{C_k C}$  обозначено расстояние между осями  $C_k z$  и  $Cz$ . В свою очередь, имеем для пластины

$$J_{zC_0}^{m_0} = \frac{m_0 l^2}{3}, \quad (3.8)$$

и для стержней

$$J_{zC_j}^{m_j} = \frac{m_j l_j^2 \sin^2 \alpha_j}{12}, \quad j = \overline{1,4}. \quad (3.9)$$

#### § II.4. Вычисление обобщенных сил

**Силы и моменты, действующие на фигуриста.** Будем считать, что при движении фигуриста в горизонтальной плоскости на него действуют силы и моменты сопротивления  $\mathbf{F}_1$ ,  $\mathbf{L}_2$ ,  $\mathbf{F}_3$ ,  $\mathbf{L}_4$  и управляющий момент  $\mathbf{L}_5$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_1 &= -\kappa_1 \mathbf{v}, & \mathbf{L}_2 &= -\kappa_2 \boldsymbol{\omega}, & \mathbf{F}_3 &= -\kappa_3 \mathbf{v}, \\ \mathbf{L}_4 &= -\kappa_4 \boldsymbol{\omega}, & \mathbf{L}_5 &= L_{5z} \mathbf{k}.\end{aligned}\tag{3.10}$$

**Вычисление обобщенных сил.** Для получения выражений обобщенных сил будем пользоваться известной формулой для подсчета элементарной работы на возможном перемещении системы:

$$\delta A = Q_\sigma \delta q^\sigma.\tag{3.11}$$

Использовать формулу (3.11) будем при специальных выборах возможных перемещений.

При  $\delta\xi \neq 0$ ,  $\delta\theta = 0$ ,  $\delta\eta = 0$  имеем

$$\delta A_\xi = Q_\xi \delta\xi \equiv -\kappa_1 \dot{\xi} \delta\xi - \kappa_3 \dot{\xi} \delta\xi,$$

поэтому

$$Q_\xi = -(\kappa_1 + \kappa_3) \dot{\xi}.\tag{3.12}$$

При  $\delta\xi = 0$ ,  $\delta\theta \neq 0$ ,  $\delta\eta = 0$  имеем

$$\delta A_\theta = Q_\theta \delta\theta \equiv -\kappa_2 \dot{\theta} \delta\theta - \kappa_4 \dot{\theta} \delta\theta + L_{5z} \delta\theta,$$

поэтому

$$Q_\theta = -(\kappa_2 + \kappa_4) \dot{\theta} + L_{5z}.\tag{3.13}$$

При  $\delta\xi = 0$ ,  $\delta\theta = 0$ ,  $\delta\eta \neq 0$  имеем

$$\delta A_\eta = Q_\eta \delta\eta \equiv -\kappa_1 \dot{\eta} \delta\eta - \kappa_3 \dot{\eta} \delta\eta,$$

поэтому

$$Q_\eta = -(\kappa_1 + \kappa_3) \dot{\eta}.\tag{3.14}$$

## Г л а в а III

### ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ МАДЖИ

*Глава III посвящена численному решению уравнений Маджи. В первом параграфе объясняется алгоритм построения программы решения полученной системы дифференциальных уравнений численным методом путем использования пакета MAPLE. Во втором параграфе численно решается некоторая эталонная задача, являющаяся частным случаем задачи, исследуемой в данной работе. Третий параграф посвящен общему случаю скольжения фигуриста по льду.*

#### § III.1. Численное решение уравнений Маджи.

##### Разбиение программы на блоки

Для численного решения изучаемой задачи используется пакет MAPLE. Алгоритм решения разбит на последовательность блоков.

**Блок первый: "Ввод данных"**. Для численного решения задачи требуется ввести данные, характеризующие исследуемый процесс:

Массовые характеристики системы:

$$m_0, \quad m_k, \quad k = \overline{1,4}. \quad (1.1a)$$

Геометрические характеристики системы:

$$l, \quad l_k, \quad k = \overline{1,4}. \quad (1.1b)$$

Конфигурация системы:

$$\alpha_k, \quad k = \overline{1,4}. \quad (1.1c)$$

Характеристика сил и моментов, действующих на фигуриста:

$$\kappa_j, \quad j = \overline{1,4}. \quad (1.1d)$$

**Блок второй: "Введение неголономных переменных"**. Согласно обратному преобразованию неголономных переменных (2.3) производится вычисление производных по формулам (2.4).

**Блок третий: "Вычисление кинетической энергии"**.

Вычисление ординаты центра масс в связанной системе координат по формуле (3.3).

Вычисление квадрата скорости центра масс по формуле (3.5).

Вычисление моментов инерции стержней относительно вертикальных осей  $zC_k$ ,  $k = \overline{0,4}$ , проходящих через их центры инерции, по формулам (3.8) и (3.9).

Вычисление моментов инерции относительно вертикальной оси, проходящей через центр масс системы, по формулам (3.7).

Вычисление кинетической энергии системы по формуле (3.2).

**Блок четвертый: "Вычисление обобщенных сил".**

Вычисление обобщенных сил по формулам (3.12)–(3.14).

**Блок пятый: "Составление уравнений Маджи".**

Составление уравнений Маджи по формулам (2.5).

Запись неголономной связи в виде (2.6).

**Блок шестой: "Запись уравнений движения в виде, подготовленном для численного интегрирования".**

Запись уравнений движения в виде, подготовленном для численного интегрирования, с использованием формул (2.7).

**Блок седьмой: "Численное интегрирование и построение графиков".**

Численное интегрирование системы (2.7) и построение графиков.

### § III.2. Численное решение эталонной задачи

**Постановка эталонной задачи.** В монографии [3] рассматривалась задача о плоском движении двухмассовой системы, соединенной невесомым стержнем, в середине которого перпендикулярно стержню прикреплен конек фигуриста. Эта задача была навеяна обсуждением статьи Д. Зековича [2].

Сформулированная задача является частным случаем задачи, поставленной в представленной выпускной работе. Будем рассматривать ее как некоторую эталонную задачу, с решением которой, представленным в монографии [3], интересно сравнить результат, полученный с помощью расчета, выполненного на основе программы, составленной в магистерской диссертации.

**Решение эталонной задачи.** Решаемая в данной работе задача не имеет сосредоточенных масс, поэтому подобные массы будем представлять в виде двух коротких стержней:

$$l_1 = l_2 = 0.01 \text{ м}, \quad m_1 = m_2 = 7 \text{ кг}.$$

Помимо этого для эталонной задачи в формулах (1.1a)–(1.1c) зададим

$$m_0 = 0, \quad m_3 = m_4 = 0,$$

$$l = 1 \text{ м}, \quad l_3 = l_4 = 0,$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \pi/2, \quad \alpha_3 = \alpha_4 = 0.$$

Пусть, кроме того,

$$\kappa_1 = 0.6 \text{ Н} \cdot \text{с/м}, \quad \kappa_2 = \kappa_3 = \kappa_4 = 0.$$

Введем следующие начальные условия:

$$\xi_1(0) = \xi_2(0) = 0, \quad \dot{\xi}_1(0) = \dot{\xi}_2(0) = 7 \text{ м/с}, \quad \dot{\eta}_2(0) = \dot{\eta}_2(0) = 0.$$

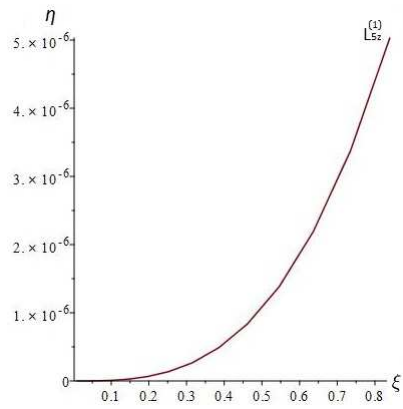


Рис. III.2.1 Движение фигуриста в эталонной задаче при  $L_{5z}^{(1)} = 1 \text{ Н} \cdot \text{м}$ .

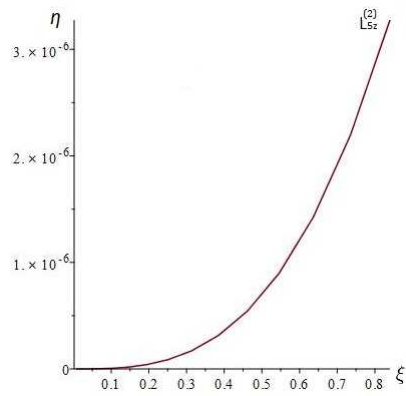


Рис. III.2.2 Движение фигуриста в эталонной задаче при  $L_{5z}^{(2)} = 0.65 \text{ Н} \cdot \text{м}$ .

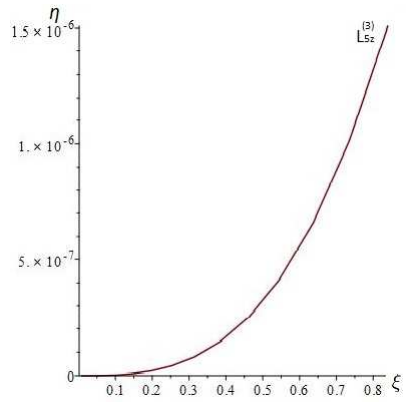


Рис. III.2.3 Движение фигуриста в эталонной задаче при  $L_{5z}^{(3)} = 0.3 \text{ Н} \cdot \text{м}$ .

Рассмотрим управляющие моменты:  $L_{5z}^{(1)} = 1 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$ ,  $L_{5z}^{(2)} = 0.65 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$ ,  $L_{5z}^{(3)} = 0.3 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$ . Тогда получим траекторию точки  $A$ , представленную на рис. III.2.1, III.2.2, III.2.3. Эти кривые при  $t < 15$  сек весьма близки к траектории точки касания конька фигуриста, имеющейся в монографии [3]. Это сравнение подтверждает правильность составленной программы.

### **§ III.3. Общий случай скольжения фигуриста по льду**

В данном параграфе предполагалось решить задачу скольжения фигуриста по льду в виде последовательного движения на отдельных этапах. В начале этапа фигурист задает конфигурацию своего тела и начальные условия, обусловленные его движением перед этим этапом. Параграф предполагалось закончить анимацией движения конька при изучаемой последовательности этапов движения фигуриста.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

*В Приложении будет приведена программа, составленная на языке пакета MAPLE, для численного решения уравнений Маджи, выведенных в главе II.*

Программа является довольно громоздкой, поэтому в данном варианте работы не приводится.



## ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Бутенин Н.В., Фуфаев Н.А.* Введение в аналитическую механику. М.: Наука. 1991. 256 с.
2. *Зекович Д.* Примеры нелинейных неголономных связей в классической механике // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1991. № 1. С. 100-103.
3. *Зегжда С.А., Солтаханов Ш.Х., Юшков М.П.* Уравнения движения неголономных систем и вариационные принципы механики. СПб: Изд-во С.-Петербур. ун-та. 2002. 276 с.
4. *Поляхов Н.Н.* Канонические уравнения для неголономных систем // Вестн. Ленингр. ун-та. 1970. Вып. 1. № 1. С. 120-122.
5. *Поляхов Н.Н.* Уравнения движения механических систем при нелинейных, неголономных связях в общем случае // Вестн. Ленингр. ун-та. 1972. Вып. 1. № 1. С. 124-132.
6. *Поляхов Н.Н.* О дифференциальных принципах механики, получаемых из уравнений движения неголономных систем // Вестн. Ленингр. ун-та. 1974. Вып. 3. № 13. С. 106-116.
7. *Поляхов Н.Н., Зегжда С.А., Юшков М.П.* Теоретическая механика. М.: Изд-во Юрайт. 2015. 592 с.