САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Кафедра математической теории моделирования систем управления

Реут Андрей Валерьевич

Выпускная квалификационная работа аспиранта

АППРОКСИМАЦИЯ ОПТИМАЛЬНОЙ ШКАЛЫ СРЕДНИХ СТАВОК ПОДОХОДНОГО НАЛОГА

Направление 02.06.01
«Компьютерные и информационные науки»
Программа подготовки «Математическая кибернетика»

Научный руководитель, Полякова Л.Н.
д.ф.-м. наук, профессор
Рецензент, Половко С.А.
канд. техн. наук, зам. главного конструктора

Санкт-Петербург — 2018

Содержание

1 Введение

В 1998 году было выпущено учебное пособие Чистякова С. В., Ишхановой М. В. «Математические модели выбора налоговых шкал» [1], в котором была **приведена модель**, являющаяся определённой модификацией и развитием вариационной модели [2], **построения** некоторой идеальной, **модельной шкалы** средних ставок подоходного налога и **поставлена задача о её приближении** непрерывной кусочно-гиперболической функцией с наличием нелинейных ограничений в метрике гильбертова пространства L_2 и равномерной (чебышёвской) метрике пространства C.

В данной работе рассматривается аппроксимация функции оптимальной шкалы средних ставок именно в равномерной метрике. Целью работы было разработать алгоритм построения наилучшего приближения аппроксимируемой функции без ограничений, найти аналитическое решение задачи аппроксимации с ограничениями, доказать совместность ограничений.

Актуальность работы состоит в том, что: во-первых, рассматривается задача в равномерной метрике, то есть мы минимизируем отклонение **самих ставок** аппроксимации от некоторых их идеальных значений, а не площадь разности некоторых модифицированных функций; во-вторых, приведён детальный анализ ограничений, накладываемых на аппроксимацию, что позволит проследить общую идею и последствия их добавления.

Данная задача о приближении состоит из двух подзадач: 1) найти оптимальное разбиение; 2) решить минимаксную задачу на каждом диапазоне разбиения. Общих алгоритмов для решения задачи не существует. Новизна работы заключается в разработке алгоритма нахождения непрерывной аппроксимации гладкой строго выпуклой или вогнутой функции и его обобщение на случай наличия излома функции. Заслуживает внимания и сам подход к решению, благодаря которому удалось решить эту частную задачу нелинейной чебышёвской аппроксимации.

Во втором параграфе приведена выдержка из статьи [14] о теоретико-игровой модели построения оптимальной шкалы.

Третий параграф – постановка задачи о приближении.

В четвёртом параграфе проведён анализ ограничений, накладываемых на аппроксимацию. Доказана теорема о существовании решения задачи с ограничениями. Доказаны леммы, существенно упрощающие нахождение решения исходной задачи.

В пятом параграфе приведён алгоритм нахождения непрерывной кусочно-степенной аппроксимации гладкой строго выпуклой или вогнутой функции, его обобщение на случай наличия излома аппроксимируемой функции. И описана схема алгоритма применительно к безусловной задаче приближения оптимальной шкалы.

Шестой параграф посвящён численной реализации вышеизложенных алгоритмов.

2 Описание используемой модели[1]

Рассмотрим предложенную в [1] теоретико-игровую модель выбора шкалы средних ставок налога. Данная модель представляет собой игру $\Gamma = \langle Y, F, S\rangle$ на минимакс-максимин функционала

$$S(y, f) = \int_{x_-}^{x_+} y(x)df(x), \tag{1}$$

в которой множество стратегий минимизирующего игрока – это некоторое множество F допустимых функций распределения доходов налогоплательщиков $(f = f(x))$, а множество стратегий максимизирующего игрока Y совпадает с множеством всех абсолютно непрерывных функций $y = y(x)$, удовлетворяющих таким условиям:

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{1-y}{x}, \tag{2}$$

$$u = u(x) \in [\delta, \sigma], \tag{3}$$

$$(0 < \delta < \sigma < 1),$$

$$y(x_-) = 0, \tag{4}$$

$$y(x_+) = y_+, \tag{5}$$

$$(0 < x_- < x_+, 0 < y_+ < 1).$$

В содержательном аспекте на заданном отрезке $[x_-, x_+]$ дифференциальное уравнение (2) вместе с ограничениями (3) и краевыми условиями (4),(5) описывает некоторый подкласс нормальных прогрессивных шкал средних ставок налога, которые по определению являются:

1. возрастающими функциями $y = y(x) \in (0, 1)$;
2. такими, что с увеличением дохода x гарантируют возрастание функции $D(x) = (1 - y(x))x$.

Входные параметры модели:

x_- – необлагаемый минимум;

[1]данный параграф повторяет изложение соответствующего пункта статьи [14]

y_+ – максимальная ставка шкалы;

x_+ – пороговый уровень дохода, начиная с которого налог взимается по максимальной средней ставке y_+;

δ и σ – некоторые экзогенно заданные параметры.

Из результатов исследования игры $\Gamma = \langle Y, F, S \rangle$ [1] следует, что при выполнении следующих естественных предположений:

$$0 < x_- < x_+, \tag{6}$$

$$0 < y_+ < 1, \tag{7}$$

$$0 < \delta < \sigma < 1, \tag{8}$$

$$\left(\frac{x_-}{x_+}\right)^{\sigma} < 1 - y_+ < \left(\frac{x_-}{x_+}\right)^{\delta} \tag{9}$$

под оптимальной шкалой средних ставок подоходного налога следует понимать функцию

$$y^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < x_-; \\ 1 - \left(\dfrac{x_-}{x}\right)^{\sigma}, & \text{если } x_- \le x < x_0; \\ 1 - (1 - y_+)\left(\dfrac{x_+}{x}\right)^{\delta}, & \text{если } x_0 \le x \le x_+; \\ y_+, & \text{если } x > x_+; \end{cases} \tag{10}$$

где

$$x_0 = \left((1 - y_+)\frac{x_+^{\delta}}{x_-^{\sigma}}\right)^{\dfrac{1}{\delta - \sigma}},$$

при этом оказывается, что (см. [1])

$$0 < x_- < x_0 < x_+, \tag{11}$$

$$0 < y_0 := y^*(x_0) < y_+ < 1. \tag{12}$$

3 Постановка задачи

Зафиксируем натуральное число $m \geq 2$. Прогрессивная шкала предельных ставок налога представлена в таб. 1.

Границы диапазонов	*Предельная ставка налога*	*Сумма налога* $T(x,H,A)$
$0 < x \leqslant a_0$	$\eta_0 := 0$	0
$a_0 < x \leqslant a_1$	η_1	$\eta_1(x-a_0)$
$a_1 < x \leqslant a_2$	η_2	$\eta_2(x-a_1)+\eta_1(a_1-a_0)$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$a_{k-1} < x \leqslant a_k$	η_k	$\eta_k(x-a_{k-1})+\sum\limits_{j=1}^{k-1}\eta_j(a_j-a_{j-1})$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$a_{m-2} < x \leqslant a_{m-1}$	η_{m-1}	$\eta_{m-1}(x-a_{m-2})+\sum\limits_{j=1}^{m-2}\eta_j(a_j-a_{j-1})$
$x > a_{m-1}$	η_m	$\eta_m x$

Таблица 1: Шкала маргинальных ставок

Введём векторы $H = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m)$, $A = (a_0, a_1, \ldots, a_{m-1})$. Обозначим за H_k и A_{k-1} векторы, компонентами которых являются первые k элементов векторов H и A соответственно, $k \in 1 : m-1$.

Функция *средних ставок подоходного налога* определяется по формуле [1]

$$y(x,H,A) = \frac{T(x,H,A)}{x}, \tag{13}$$

где $T(x,H,A)$ — *сумма налога.*

Введём функции, определённые на интервале $(0,+\infty)$,

$$y_k(x,H_k,A_{k-1}) = \eta_k - \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} a_{i-1}(\eta_i - \eta_{i-1})}{x}, \qquad k \in 1 : m-1. \tag{14}$$

Тогда, используя таблицу 1 и формулы (13)–(14), получаем

$$y(x, H, A) = \begin{cases} y_1(x, H_1, A_0), & \text{если } a_0 < x \leqslant a_1; \\ y_2(x, H_2, A_1), & \text{если } a_1 < x \leqslant a_2; \\ \dots & \\ y_k(x, H_k, A_{k-1}), & \text{если } a_{k-1} < x \leqslant a_k; \\ \dots & \\ y_{m-1}(x, H_{m-1}, A_{m-2}), & \text{если } a_{m-2} < x \leqslant a_{m-1}; \\ \eta_m, & \text{если } x > a_{m-1}. \end{cases} \tag{15}$$

При фиксированных векторах H и A обозначим функцию (15), как $y(x)$; аналогично функции вида (14) — $y_k(x)$.

Обозначим через T совокупность разбиений τ отрезка $[x_-, x_+]$ на $m-1$ часть, $\tau = \{a_0, a_1, \dots, a_{m-1}\}, \quad x_- = a_0 < a_1 < \dots < a_{m-1} = x_+$.

Требуется решить задачу

$$\max_{i \in 1:m-1} \min_{H_i} \sup_{x \in (a_{i-1}, a_i]} |y^*(x) - y_i(x, H_i, A_{i-1})| \to \inf_{\tau \in T}, \tag{16}$$

при наличии ограничений

$$a_0 = x_-, \quad a_0 < a_1 < \dots < a_{m-1}, \quad a_{m-1} = x_+, \tag{17}$$

$$\eta_0 := 0, \quad \eta_0 \leqslant \eta_1 \leqslant \dots \leqslant \eta_{m-1}, \quad \eta_m = y_+, \tag{18}$$

$$\sum_{i=1}^{k} a_{i-1}(\eta_i - \eta_{i-1}) \leqslant \left[(1 - \eta_k) a_{k-1} + \sum_{i=1}^{k} a_{i-1}(\eta_i - \eta_{i-1}) \right] \sigma, \tag{19}$$

$$\sum_{i=1}^{k} a_{i-1}(\eta_i - \eta_{i-1}) \geqslant \left[(1 - \eta_k) a_k \quad + \sum_{i=1}^{k} a_{i-1}(\eta_i - \eta_{i-1}) \right] \delta, \tag{20}$$

$$k \in 1 : m-1,$$

$$a_{m-1}(\eta_m - \eta_{m-1}) + \sum_{i=1}^{m-1} a_{i-1}(\eta_i - \eta_{i-1}) = 0. \tag{21}$$

4 Решение задачи с ограничениями

В этом параграфе рассматривается задача о приближении функции $y^*(x)$ (10) непрерывной кусочно-гиперболической функцией $y(x)$ (15) с ограничениями (17)–(21). Прежде всего проведём анализ нелинейных ограничений, накладываемых на аппроксимацию.

4.1 Анализ нелинейных ограничений

При моделировании оптимальной шкалы [1] рассматриваем некоторый подкласс нормальных прогрессивных шкал. Напомним, что нормальные прогрессивные шкалы характеризуются следующим неравенством:

$$0 < \frac{dy}{dx} < \frac{1-y}{x}. \tag{22}$$

Далее вместо (22) будем рассматривать более сильное (в области $y \in (0,1)$, $x > 0$) условие

$$\delta \frac{1-y}{x} \le \frac{dy}{dx} \le \sigma \frac{1-y}{x} \tag{23}$$
$$(0 < \delta < \sigma < 1).$$

Оказывается (см. [4]), что в области $y \in (0,1), x > 0$, множество всех абсолютно непрерывных решений неравенств (23) совпадает с множеством абсолютно непрерывных решений дифференциального уравнения (2), которые соответствуют всевозможным измеримым по Лебегу функциям $u = u(x)$, удовлетворяющим при почти всех x условию (3).

Именно благодаря, во-первых, сужению класса допустимых нормальных прогрессивных шкал, то есть переходу от неравенств (22) к (23), во-вторых, переходу от неравенств (23) к дифференциальному уравнению (2), удалось получить необходимое и достаточное условие (9) существования допустимого управления в задаче (1)–(5).

Получается, при моделировании оптимальной шкалы условие (23) было условием существования решения. И предлагается [1, 3] это же самое условие наложить на аппроксимацию. Ограничения (23) можно записать [1, 3] как две группы неравенств (19), (20).

Лемма 4.1. Если выполнены неравенства

$$0 < a_0 < a_1 < \ldots < a_{m-1},$$

то неравенства (19) представимы в виде

$$\eta_1 \leqslant \sigma, \tag{24}$$

$$\eta_k \leqslant \overline{\eta}_k(\eta_1, \ldots, \eta_{k-1}, a_0, \ldots, a_{k-1}), \quad k \in 2 : m-1, \tag{25}$$

где

$$\overline{\eta}_k = \sigma + (1-\sigma)\left[\eta_{k-1} - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{a_{i-1}(\eta_i - \eta_{i-1})}{a_{k-1}}\right].$$

Доказательство. Докажем неравенство (24). При $k = 1$ из (19) имеем

$$a_0\eta_1 \leqslant [(1-\eta_1)a_0 + a_0\eta_1]\sigma,$$

$$a_0\eta_1 \leqslant a_0\sigma,$$

$$\eta_1 \leqslant \sigma.$$

Неравенство (25) следует из (19) при $k \in 2 : m-1$. Действительно,

$$\sum_{i=1}^{k} a_{i-1}(\eta_i - \eta_{i-1}) \leq \left[(1-\eta_k)a_{k-1} + \sum_{i=1}^{k} a_{i-1}(\eta_i - \eta_{i-1})\right]\sigma,$$

$$a_{k-1}(\eta_k - \eta_{k-1}) + \sum_{i=1}^{k-1} a_{i-1}(\eta_i - \eta_{i-1}) \leq$$

$$\leq \left[(1-\eta_k)a_{k-1} + a_{k-1}(\eta_k - \eta_{k-1}) + \sum_{i=1}^{k-1} a_{i-1}(\eta_i - \eta_{i-1})\right]\sigma =$$

$$= \left[a_{k-1} - a_{k-1}\eta_{k-1} + \sum_{i=1}^{k-1} a_{i-1}(\eta_i - \eta_{i-1})\right]\sigma \Bigg| : a_{k-1},$$

$$\eta_k - \left[\eta_{k-1} - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{a_{i-1}(\eta_i - \eta_{i-1})}{a_{k-1}}\right] \leq$$

$$\leq \sigma - \sigma\left[\eta_{k-1} - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{a_{i-1}(\eta_i - \eta_{i-1})}{a_{k-1}}\right],$$

$$\eta_k \leq \sigma + (1-\sigma)\left[\eta_{k-1} - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{a_{i-1}(\eta_i - \eta_{i-1})}{a_{k-1}}\right].$$

$\blacksquare$

`Замечание`. Так как (см. (14))

$$y_{k-1}(a_{k-1}) = \eta_{k-1} - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{a_{i-1}(\eta_i - \eta_{i-1})}{a_{k-1}},$$

то

$$\overline{\eta}_k = \sigma + (1-\sigma) y_{k-1}(a_{k-1}).$$

В частности, если положить $\eta_k := \overline{\eta}_k$, то

$$\eta_k = \eta_k(a_0, a_1, ..., a_{k-1}), \quad k \in 2 : m-1.$$

Лемма 4.2. Если выполнены неравенства

$$0 =: \eta_0 < \eta_1 \leqslant \ldots \leqslant \eta_{m-1} < 1,$$

то неравенства (20) представимы в виде

$$a_k \leqslant \overline{a}_k(\eta_1, \ldots, \eta_k, a_0, \ldots, a_{k-1}), \quad k \in 1 : m-1, \tag{26}$$

где

$$\overline{a}_k = \frac{1-\delta}{\delta} \sum_{i=1}^{k} a_{i-1} \frac{\eta_i - \eta_{i-1}}{1 - \eta_k}.$$

Доказательство. Для любого $k \in 1 : m-1$ справедливо

$$\sum_{i=1}^{k} a_{i-1}(\eta_i - \eta_{i-1}) \geqslant \left[(1-\eta_k) a_k + \sum_{i=1}^{k} a_{i-1}(\eta_i - \eta_{i-1}) \right] \delta,$$

$$(1-\delta) \sum_{i=1}^{k} a_{i-1}(\eta_i - \eta_{i-1}) \geqslant \delta (1-\eta_k) a_k,$$

$$a_k \leqslant \frac{1-\delta}{\delta} \sum_{i=1}^{k} a_{i-1} \frac{\eta_i - \eta_{i-1}}{1-\eta_k}.$$

■

Значение функции $y(x)$ и её производной $\dfrac{dy(x)}{dx}$ связаны равенствами

$$y(x) = \eta_i - x \frac{dy(x)}{dx}, \quad x \in (a_{i-1}, a_i], \quad i \in 1 : m-1. \tag{27}$$

Из неравенств (23) и равенства (27) можно вывести следующее представление ограничений

$$\eta_i - \frac{\sigma}{1-\sigma}(1-\eta_i) \le y(x) \le \eta_i - \frac{\delta}{1-\delta}(1-\eta_i), \tag{28}$$
$$x \in (a_{i-1}, a_i], \quad i \in 1 : m-1.$$

Преимущество данного вида неравенств в визуальной простоте: график функции $y(x)$ должен лежать между «ступеньками» (см. рис. 1).

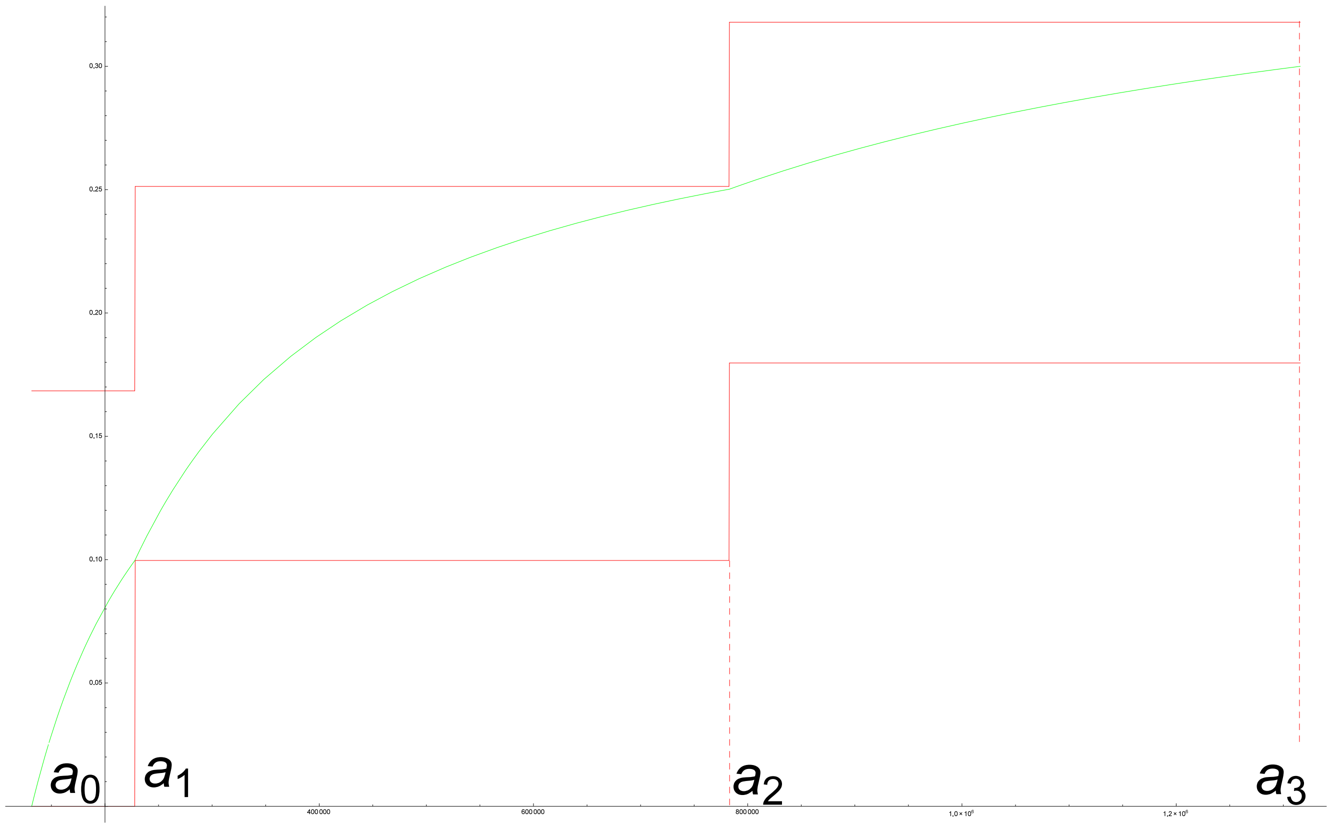

Рис. 1: Нелинейные ограничения-неравенства

Лемма 4.3. Последовательность $\{\overline{\eta}_k\}_{k=1}^{m-1}$ (24)–(25) строго монотонно возрастает, если

$$0 < \sigma < 1,$$
$$\eta_0 := 0, \quad \eta_j := \overline{\eta}_j,$$
$$0 < a_0, \quad a_{j-1} < a_j, \quad j \in 1 : k.$$

Доказательство. Докажем лемму методом математической индукции.

База индукции. Пусть $k = 2$. Нужно показать, что

$$\overline{\eta}_1 < \overline{\eta}_2.$$

Распишем подробнее

$$\overline{\eta}_1 := \sigma < \sigma + (1-\sigma)\sigma\left[1 - \frac{a_0}{a_1}\right] =: \overline{\eta}_2.$$

Так как $0 < \sigma < 1$ и $a_0 < a_1$, то неравенство действительно справедливо.

Индукционный переход. Пусть $k = n+1$. Нужно показать, что $\overline{\eta}_{n+1} > \overline{\eta}_n$.

$$\begin{aligned} \frac{\overline{\eta}_{n+1} - \sigma}{1-\sigma} &:= \overline{\eta}_n - \sum_{i=1}^{n} \frac{a_{i-1}}{a_n}(\overline{\eta}_i - \overline{\eta}_{i-1}) > \\ &> \overline{\eta}_{n-1} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_{i-1}}{a_{n-1}}(\overline{\eta}_i - \overline{\eta}_{i-1}) =: \frac{\overline{\eta}_n - \sigma}{1-\sigma} \end{aligned} \tag{29}$$

Разделим сумму, стоящую в левой части неравенства (29), следующим образом

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_{i-1}}{a_n}(\overline{\eta}_i - \overline{\eta}_{i-1}) = (\overline{\eta}_n - \overline{\eta}_{n-1})\frac{a_{n-1}}{a_n} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_{i-1}}{a_n}(\overline{\eta}_i - \overline{\eta}_{i-1}).$$

Прибавим к обеим частям неравенства (29) $\sum\limits_{i=1}^{n-1} \frac{a_{i-1}}{a_n}(\overline{\eta}_i - \overline{\eta}_{i-1})$ и вычтем $\overline{\eta}_{n-1}$, получим

$$\overline{\eta}_n - \overline{\eta}_{n-1} - (\overline{\eta}_n - \overline{\eta}_{n-1})\frac{a_{n-1}}{a_n} > \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_{i-1}}{a_n}(\overline{\eta}_i - \overline{\eta}_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_{i-1}}{a_{n-1}}(\overline{\eta}_i - \overline{\eta}_{i-1})$$

Упростив, получаем

$$\underbrace{(\overline{\eta}_n - \overline{\eta}_{n-1})}_{>0}\left(1 - \underbrace{\frac{a_{n-1}}{a_n}}_{<1}\right) > \sum_{i=1}^{n-1} \underbrace{a_{i-1}(\overline{\eta}_i - \overline{\eta}_{i-1})}_{>0}\underbrace{[a_n^{-1} - a_{n-1}^{-1}]}_{<0}.$$

$\blacksquare$

Лемма 4.4. Последовательность $\{\overline{a}_k\}_{k=1}^{m-1}$ строго монотонно возрастает, если

$$0 < \delta < \sigma < 1,$$

$$\eta_0 = 0, \quad \eta_j < \eta_{j+1}, \quad \eta_{j+1} < 1,$$

$$0 < a_0, \quad a_j < a_{j+1}, \quad j \in 0 : k-1.$$

Доказательство. Докажем лемму методом математической индукции.

База индукции. Пусть $k = 2$. Нужно показать, что

$$\overline{a}_1 < \overline{a}_2.$$

Распишем неравенство после умножения на $\dfrac{\delta}{1-\delta}$

$$a_0\frac{\eta_1}{1-\eta_1} < a_1\frac{\eta_2-\eta_1}{1-\eta_2} + a_0\frac{\eta_1}{1-\eta_2}.$$

В силу того, что $0 < \eta_1 < \eta_2 < 1$ и $0 < a_0 < a_1$

$$a_0\frac{\eta_1}{1-\eta_1} < a_1\frac{\eta_2-\eta_1}{1-\eta_1} + a_0\frac{\eta_1}{1-\eta_1} < a_1\frac{\eta_2-\eta_1}{1-\eta_2} + a_0\frac{\eta_1}{1-\eta_2}.$$

И так как

$$a_1\frac{\eta_2-\eta_1}{1-\eta_1} > 0,$$

то $\overline{a}_1 < \overline{a}_2$.

Индукционный переход. Пусть $k = n+1$. Нужно показать, что

$$\overline{a}_n < \overline{a}_{n+1}.$$

Умножив последнее неравенство на $\dfrac{\delta}{1-\delta}$ получим

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i-1}\frac{\eta_i-\eta_{i-1}}{1-\eta_n} < \sum_{i=1}^{n+1} a_{i-1}\frac{\eta_i-\eta_{i-1}}{1-\eta_{n+1}}.$$

Теперь, в силу того, что $0 < \eta_n < \eta_{n+1} < 1$, имеем

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i-1}\frac{\eta_i-\eta_{i-1}}{1-\eta_n} < \sum_{i=1}^{n+1} a_{i-1}\frac{\eta_i-\eta_{i-1}}{1-\eta_n} < \sum_{i=1}^{n+1} a_{i-1}\frac{\eta_i-\eta_{i-1}}{1-\eta_{n+1}}.$$

Из того, что $a_n > 0$, следует выполнение неравенства

$$a_n\frac{\eta_{n+1}-\eta_n}{1-\eta_n} > 0.$$

■

Лемма 4.5. Пусть выполнены предположения леммы 4.3. Если параметры $\eta_k = \overline{\eta}_k$, то справедливы равенства

$$\sum_{i=1}^{k} a_{i-1}\frac{\overline{\eta}_i-\overline{\eta}_{i-1}}{1-\overline{\eta}_k} = \frac{\sigma}{1-\sigma}\ a_{k-1} \quad k \in 1 : m-1.$$

Доказательство. Докажем лемму методом математической индукции.

База индукции. Предположение леммы при $k = 1$, очевидно, выполняется. Покажем, что при $k = 2$ справедливо равенство

$$\sum_{i=1}^{2} a_{i-1}\frac{\overline{\eta}_i-\overline{\eta}_{i-1}}{1-\overline{\eta}_2} = \frac{\sigma}{1-\sigma}\ a_1.$$

Действительно, так как

$$\sum_{i=1}^{2} a_{i-1}\frac{\overline{\eta}_i - \overline{\eta}_{i-1}}{1-\overline{\eta}_2} = a_1\frac{\overline{\eta}_2 - \overline{\eta}_1}{1-\overline{\eta}_2} + a_0\frac{\overline{\eta}_1}{1-\overline{\eta}_2} = \frac{a_1(\overline{\eta}_2 - \overline{\eta}_1) + a_0\overline{\eta}_1}{1-\overline{\eta}_2},$$

$$\overline{\eta}_2 - \overline{\eta}_1 = (1-\sigma)\sigma\left(1 - \frac{a_0}{a_1}\right),$$

$$1-\overline{\eta}_2 = (1-\sigma)\left[1-\sigma\left(1-\frac{a_0}{a_1}\right)\right],$$

$$\frac{a_1(\overline{\eta}_2 - \overline{\eta}_1) + a_0\overline{\eta}_1}{1-\overline{\eta}_2} = \frac{\sigma}{1-\sigma}\frac{(1-\sigma)(a_1-a_0)+a_0}{\left[1-\sigma\left(1-\frac{a_0}{a_1}\right)\right]},$$

$$(1-\sigma)(a_1-a_0)+a_0 = a_1 - \sigma(a_1-a_0) = a_1\left[1-\sigma\left(1-\frac{a_0}{a_1}\right)\right].$$

Индукционный переход. Пусть для некоторого

$k-1 \in 1:m-2$ выполнено

$$\sum_{i=1}^{k-1} a_{i-1}\frac{\overline{\eta}_i - \overline{\eta}_{i-1}}{1-\overline{\eta}_{k-1}} = \frac{\sigma}{1-\sigma}\,a_{k-2}.$$

Докажем справедливость для k.

$$\sum_{i=1}^{k} a_{i-1}\frac{\overline{\eta}_i - \overline{\eta}_{i-1}}{1-\overline{\eta}_k} = \sum_{i=1}^{k-1} a_{i-1}\frac{\overline{\eta}_i - \overline{\eta}_{i-1}}{1-\overline{\eta}_k} + a_{k-1}\frac{\overline{\eta}_k - \overline{\eta}_{k-1}}{1-\overline{\eta}_k} =$$

$$= \sum_{i=1}^{k-1} a_{i-1}\frac{\overline{\eta}_i - \overline{\eta}_{i-1}}{1-\overline{\eta}_{k-1}}\frac{1-\overline{\eta}_{k-1}}{1-\overline{\eta}_k} + a_{k-1}\frac{\overline{\eta}_k - \overline{\eta}_{k-1}}{1-\overline{\eta}_k} =$$

$$= \left(\frac{\sigma}{1-\sigma}\,a_{k-2}\right)\frac{1-\overline{\eta}_{k-1}}{1-\overline{\eta}_k} + a_{k-1}\left(\frac{1-\overline{\eta}_{k-1}}{1-\overline{\eta}_k} - 1\right) = \frac{\sigma}{1-\sigma}\,a_{k-1},$$

$$\frac{1-\overline{\eta}_{k-1}}{1-\overline{\eta}_k} = \frac{a_{k-1}}{\sigma a_{k-2} + (1-\sigma)a_{k-1}}.$$

Рассмотрим левое выражение подробней. Распишем разность $1-\overline{\eta}_k$

$$\frac{1-\overline{\eta}_{k-1}}{\left[1-\overline{\eta}_{k-1} + \frac{1-\overline{\eta}_{k-1}}{a_{k-1}}\sum_{i=1}^{k-1} a_{i-1}\frac{\overline{\eta}_i - \overline{\eta}_{i-1}}{1-\overline{\eta}_{k-1}}\right](1-\sigma)}.$$

Сократив числитель и знаменатель на $1-\overline{\eta}_{k-1}$, получим

$$\frac{1}{\left[1+\dfrac{\sigma a_{k-2}}{(1-\sigma)a_{k-1}}\right](1-\sigma)} = \frac{a_{k-1}}{\sigma a_{k-2}+(1-\sigma)a_{k-1}}.$$

■

`Замечание.` Обозначим

$$\overline{\sigma} = \frac{\sigma}{1-\sigma} = \underline{\sigma}^{-1}, \quad \underline{\delta} = \frac{1-\delta}{\delta} = \overline{\delta}^{-1}.$$

Тогда лемму 4.7 можно записать следующим образом:

$$\overline{a}_k = \underline{\delta}\overline{\sigma}a_{k-1},$$

если $\eta_k = \overline{\eta}_k, k \in 1:m-1$, и выполнены предположения леммы 4.3.

Если $a_k = \overline{a}_{k-1}$, то будем обозначать $\eta_k = \underline{\eta}_k$.

Лемма 4.6. Последовательность $\{\underline{\eta}_k\}_{k=1}^{m-1}$ строго монотонно возрастает.

Лемма 4.7. Если параметры $\eta_k = \underline{\eta}_k$, то справедливы равенства

$$\underline{a}_{k-1} = \overline{\delta}\underline{\sigma}a_k \quad k \in 1:m-1.$$

Лемма 4.8. Условия (19)–(20),(23),(24)–(25),(28) равнозначны. То есть (19)–(20)

$$\sum_{i=1}^{k} a_{i-1}(\eta_i-\eta_{i-1}) \le \left[(1-\eta_k)a_{k-1}+\sum_{i=1}^{k} a_{i-1}(\eta_i-\eta_{i-1})\right]\sigma,$$
$$\sum_{i=1}^{k} a_{i-1}(\eta_i-\eta_{i-1}) \ge \left[(1-\eta_k)a_k+\sum_{i=1}^{k} a_{i-1}(\eta_i-\eta_{i-1})\right]\delta,$$

эквивалентны (23)

$$\delta\frac{1-y}{x} \le \frac{dy}{dx} \le \sigma\frac{1-y}{x}$$
$$(0<\delta<\sigma<1),$$

и (24)–(25)

$$\eta_1 \leq \sigma,$$

$$a_1 \leq \frac{1-\delta}{\delta}\,\frac{\eta_1}{1-\eta_1}\,a_0,$$

$$\eta_k \leq \sigma + (1-\sigma)\left[\eta_{k-1} - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{a_{i-1}}{a_{k-1}}\,(\eta_i - \eta_{i-1})\right],$$

$$a_k \leq \frac{1-\delta}{\delta} \sum_{i=1}^{k} a_{i-1} \frac{\eta_i - \eta_{i-1}}{1-\eta_k},$$

$$k \in 2 : m-1,$$

и (28)

$$\eta_i - \frac{\sigma}{1-\sigma}\,(1-\eta_i) \leq y(x) \leq \eta_i - \frac{\delta}{1-\delta}\,(1-\eta_i),$$

$$x \in (a_{i-1}, a_i], \quad i \in 1 : m-1.$$

4.2 О существовании точного решения

В данном параграфе ответим на вопрос: возможно ли оптимальную шкалу подоходного налога $y^*(x)$ (10) аппроксимировать непрерывной кусочно-гиперболической функцией $y(x)$ (15) с ограничениями (17)–(21) с любой достаточно малой величиной приближения $\varepsilon > 0$, т. е.

$$\inf_{\tau \in T} \max_{i \in 1:m-1} \min_{H_i} \sup_{x \in (a_{i-1}, a_i]} |y^*(x) - y_i(x)| = \varepsilon.$$

Обозначим

$$\Delta_i(x) := y^*(x) - y_i(x), \quad i \in 1 : m-1.$$

Тогда $\Delta_i(x)$ есть функция отклонения.

Предположим, что для некоторого натурального числа $1 < v < m-1$ точка $x_0 \in (a_{v-1}, a_v]$. Определим параметры

$$\eta_i = \overline{\eta}_i, \quad i \in 1 : v, \quad a_0 := x_-.$$

Проведём аппроксимацию на отрезке $[x_-, x_0]$. Положим a_i, $i \in 1 : v$, равными корням уравнений

$$\Delta_i(x) = \varepsilon, \quad x > a_{i-1}, \quad i \in 1 : v. \tag{30}$$

Без умаления общности можно считать, что величина приближения $\varepsilon > 0$ выбирается так, что для некоторого номера v выполняется $a_v = x_0$. Доказательство существования корня уравнений (30) приводится в приложении 2.

Выберем величину приближения ε из полуинтервала $\left(0, (1 - y_+)\dfrac{\sigma - \delta}{1 - \sigma}\right]$. На отрезке $[x_0, x_+]$ аппроксимируем следующим образом: допустим, что номер $m > v + 1$, далее двигаемся по схеме

1. В силу ограничения на непрерывность,

   $$\Delta_{m-1}(x_+, \eta_{m-1}) = y_+.$$

   Тогда можно записать $y_{m-1}(x, \eta_{m-1})$ в виде

   $$\eta_{m-1} + \frac{x_+}{x}\,(y_+ - \eta_{m-1}).$$

2. Аппроксимацию будем выполнять с точки $a_{m-1} = x_+$ до a_{v+1}, причём a_k, $k \in m - 2 : v + 1$, выбираются как решение уравнения

   $$y^*(a_{k+1}) - y_{k+1}(x, \underline{\eta}_{k+1}) = \varepsilon, \quad x \in [x_0, a_k), \tag{31}$$

   где

   $$y_{k+1}(x, \underline{\eta}_{k+1}) = \underline{\eta}_{k+1} + \frac{a_{k+1}}{x}(y_{k+1}(a_{k+1}, \underline{\eta}_{k+1}) - \underline{\eta}_{k+1}),$$
   $$\underline{\eta}_{k+1} = (1 - \delta) y_{k+1}(a_{k+1}) + \delta;$$

   Доказательство. При $k = m - 2$ для существования корня уравнения (31) на полуинтервале $[\underline{a}_{k+1}, a_{k+1})$, где $\underline{a}_{k+1} = \overline{\delta}\underline{\sigma} a_{k+1}$, требуется, чтобы

   $$y^*(a_{m-1}) - y_{m-1}(\underline{a}_{k+1}, \underline{\eta}_{k+1}) > \varepsilon.$$

   Данное неравенство равносильно следующему

   $$(1 - y_+)\frac{\sigma - \delta}{1 - \sigma} > \varepsilon. \tag{32}$$

Для каждого $k \in m-3 : v+1$ покажем справедливость неравенства

$$y^*(a_{k+1}) - y_{k+1}(\underline{a}_{k+1}, \underline{\eta}_{k+1}) > \varepsilon. \tag{33}$$

Распишем подробней функцию $y_{k+1}(x, \underline{\eta}_{k+1})$ в точке $\underline{a}_{k+1}$. Имеем

$$\begin{aligned} y_{k+1}(\underline{a}_{k+1}, \underline{\eta}_{k+1}) &= 1 - (1 - y_{k+1}(a_{k+1}, \underline{\eta}_{k+1})) + \\ +\delta(1 - y_{k+1}(a_{k+1}, \underline{\eta}_{k+1})) &- \underline{\delta}\overline{\sigma}\delta(1 - y_{k+1}(a_{k+1}, \underline{\eta}_{k+1})) = \\ &= 1 - (1 - y_{k+1}(a_{k+1}, \underline{\eta}_{k+1}))(1 + \delta(\underline{\delta}\overline{\sigma} - 1)) = \\ &= \frac{\delta - \sigma}{1 - \sigma} + \frac{1 - \delta}{1 - \sigma} y_{k+1}(a_{k+1}, \underline{\eta}_{k+1}). \end{aligned} \tag{34}$$

В силу непрерывности функции $y(x)$ и условию (31) уравнение (34) можно записать в виде

$$y_{k+1}(\underline{a}_{k+1}, \underline{\eta}_{k+1}) = \frac{\delta - \sigma}{1 - \sigma} + \frac{1 - \delta}{1 - \sigma}(y^*(a_{k+2}) - \varepsilon).$$

Учитывая последнее равенство, перепишем неравенство (33)

$$y^*(a_{k+1}) + \frac{\sigma - \delta}{1 - \sigma} - \underbrace{\frac{1 - \delta}{1 - \sigma}}_{=1 + \frac{\sigma - \delta}{1 - \sigma}}(y^*(a_{k+2}) - \varepsilon) > \varepsilon,$$

$$\frac{\sigma - \delta}{1 - \sigma}(1 - y^*(a_{k+2}) + \varepsilon) > y^*(a_{k+2}) - y^*(a_{k+1}),$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma - \delta}{1 - \sigma}(1 - y^*(a_{k+2}) + \varepsilon) &\geq \frac{\sigma - \delta}{1 - \sigma}(1 - y_+ + \varepsilon) > \varepsilon > \\ > y^*(a_{k+2}) - y^*(a_{k+1}) &= \underbrace{y^*(a_{k+2}) - y_{k+2}(a_{k+1}, \underline{\eta}_{k+2})}_{=\varepsilon} + \\ &+ \underbrace{y_{k+2}(a_{k+1}, \underline{\eta}_{k+2}) - y^*(a_{k+1})}_{<0}. \end{aligned}$$

Справедливость неравенства

$$\frac{\sigma - \delta}{1 - \sigma}(1 - y_+ + \varepsilon) > \varepsilon$$

следует из (32). ■

3. Если $y_{k+1}(x_0, \underline{\eta}_{k+1}) > y_0 - \varepsilon$, то $k := v$ и полагаем

$$\eta_{v+1} = \frac{y_0 - \varepsilon - \dfrac{a_{v+1}}{x_0}(y^*(a_{v+2}) - \varepsilon)}{1 - \dfrac{a_{v+1}}{x_0}}.$$

Данное значение для η_{v+1} было получено из равенства

$$y_{k+1}(x_0, \eta_{v+1}) = y_0 - \varepsilon.$$

Проверим, выполнены ли ограничения на эластичность (28) при данном выборе параметра η_{v+1}. А именно проверим выполнение левого неравенства (28), так как правое неравенство (28), очевидно, выполняется.

Докажем неравенство

$$y_0 - \varepsilon > \eta_{v+1}(1+\overline{\sigma}) - \overline{\sigma} =$$

$$= \left(\frac{a_{v+1}y^*(a_{v+2}) - x_0 y_0}{a_{v+1} - x_0} - \varepsilon\right)(1+\overline{\sigma}) - \overline{\sigma},$$

$$y_0 > \frac{a_{v+1}y^*(a_{v+2}) - x_0 y_0}{a_{v+1} - x_0}(1+\overline{\sigma}) - \overline{\sigma}(1+\varepsilon).$$

Устремляя ε к нулю, получим

$$y_0 > \lim_{\varepsilon \downarrow 0}\left(\frac{a_{v+1}y^*(a_{v+2}) - x_0 y_0}{a_{v+1} - x_0}(1+\overline{\sigma}) - \overline{\sigma}(1+\varepsilon)\right) =$$

$$= (xy^*)'_x(x_0+0)(1+\overline{\sigma}) - \overline{\sigma} = (\delta + y_0(1-\delta))*$$

$$*(1+\overline{\sigma}) - \overline{\sigma}\Big| * (1-\sigma),$$

$$y_0(1-\sigma) > y_0(1-\delta) + \delta - \sigma,$$

$$y_0 < 1.$$

Таким образом была доказана

Теорема 4.9 (Теорема существования точного решения [6])**.** Задачу об аппроксимации функции $y^*(x)$ непрерывной кусочно-гиперболической функцией $y(x)$ при наличии ограничений (17), (19)–(21), без учёта ограничений на рост предельных ставок (18), можно решить с любой достаточно малой величиной приближения $\varepsilon > 0$.

`Замечание.` Теорема 4.9 при некотором выборе входных данных гарантирует совместность системы ограничений (17)–(21). Совместность достигается путём увеличения величины приближения ε к её максимально допустимой верхней грани, таким образом можно добиться выполнения ограничений порядка (18), которые нарушаются именно при достаточно малой величине ε, и минимизировать количество получаемых диапазонов $m-1$. Далее, данное решение можно положить в качестве начального приближения для нахождения оптимального решения. Если количество диапазонов $m-1$ получается большим десяти (то есть, когда $\delta \approx \sigma$), то, вообще говоря, это не означает, что система ограничений не является совместной при меньшем числе диапазонов (см. пример 6.5 параграфа 6), иначе — ограничения на эластичность (19)–(20) следует отбросить, так как именно из-за них число $m > 10$, и решать задачу безусловной оптимизации (этому посвящён параграф 5). Как будет показано на примере 6.6 параграфа 6, при $\delta \approx \sigma$ ограничения порядка (18) будут выполнены автоматически.

Пример. Приблизим функцию $y^*(x)$ на отрезке $[x_-, x_0]$ с ограничениями (17)–(21) с точностью $\varepsilon = 0.0091969$ методом, описанным в теореме 4.9. О входных параметрах см. параграф 6.

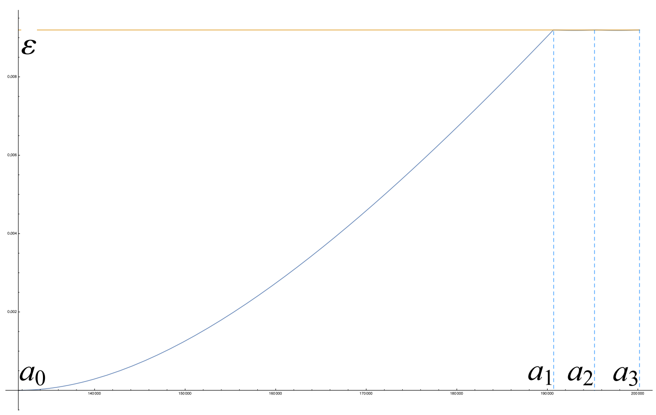

Рис. 2: Разность $y^*(x) - y(x)$

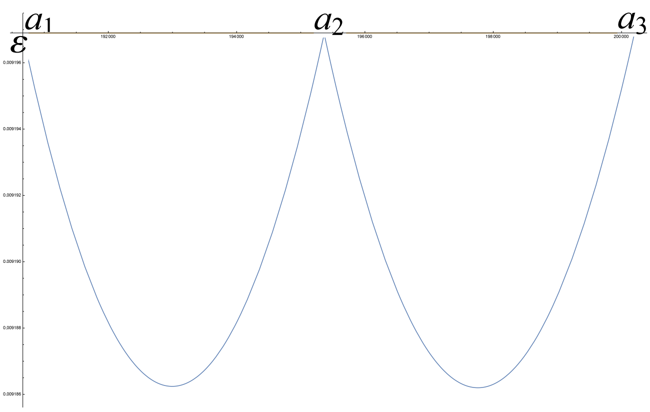

Рис. 3: Разность $y^*(x) - y(x)$

i	0	1	2	…	28	29
η_i	0	0.190827	0.238679	…	0.329474	0.332965
a_i	131580	190667	195365	…	384016	394740

Таблица 2: Параметры аппроксимации $y(x)$

4.3 Упрощение исходной задачи

Для нахождения оптимального решения задачи будут полезны следующие леммы [7]. Зафиксируем векторы H, A и натуральное число $m \geq 2$.

Лемма 4.10. Функция средних ставок налога $y(x)$ (15) представима в виде максимума из функций $y_k(x), k \in 1 : m-1$, (14)

$$\max_{x \in (x_-, x_+]} \big\{ y_1(x), y_2(x), \ldots, y_{m-1}(x) \big\}, \tag{35}$$

тогда и только тогда, когда выполнены условия (17)

$$a_0 = x_-, \qquad a_0 < a_1 < \ldots < a_{m-1}, \qquad a_{m-1} = x_+$$

и (18)

$$\eta_0 = 0, \qquad \eta_0 \leq \eta_1 \leq \ldots \leq \eta_{m-1}, \qquad \eta_m = y_+.$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что $y_i(a_i) = y_{i+1}(a_i), i \in 1 : m-2$. Рассмотрим случай, когда $m = 3$, то есть имеется только два диапазона. Выберем точку x^*, например, из интервала (a_0, a_1), тогда нужно показать справедливость неравенства

$$y_1(x^*) > y_2(x^*).$$

Действительно,

$$y_1(x^*) = \eta_1 - \frac{a_0 \eta_1}{x^*} > \eta_2 - \frac{a_1(\eta_2 - \eta_1) + a_0 \eta_1}{x^*} = y_2(x^*) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \eta_1 - \frac{a_0 \eta_1}{x^*} - \frac{a_1 \eta_1}{x^*} + \frac{a_0 \eta_1}{x^*} > \eta_2 - \frac{a_1 \eta_2}{x^*} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \eta_1 \left(1 - \frac{a_1}{x^*}\right) > \eta_2 \left(1 - \frac{a_1}{x^*}\right) \Leftrightarrow \eta_1 < \eta_2.$$

Аналогично доказывается неравенство $y_1(x^*) < y_2(x^*)$, когда точка x^* принадлежит полуинтервалу $(a_1, a_2]$. Если $x^* = a_1$, то доказательство очевидно.

Рассмотрим теперь случай, когда число m больше трёх. Пусть x^* принадлежит внутреннему интервалу $(a_{s-1}, a_s), s \in 2 : m-2$. Тогда нужно доказать две группы неравенств

$$y_s(x^*) > \ldots > y_1(x^*) \tag{36}$$

и

$$y_s(x^*) > \ldots > y_{m-1}(x^*). \tag{37}$$

Сначала докажем (36). Для любого $j \in \mathbb{N}, j < s$, справедливо

$$y_s(x^*) = \eta_s - \frac{\sum\limits_{i=1}^{s} a_{i-1}(\eta_i - \eta_{i-1})}{x^*} > \eta_j - \frac{\sum\limits_{i=1}^{j} a_{i-1}(\eta_i - \eta_{i-1})}{x^*} = y_j(x^*),$$

$$\eta_s - \eta_j - \frac{\sum\limits_{i=j+1}^{s} a_{i-1}(\eta_i - \eta_{i-1})}{x^*} > 0,$$

$$(\eta_s - \eta_j)\left[1 - \frac{\sum\limits_{i=j+1}^{s} a_{i-1}\dfrac{\eta_i - \eta_{i-1}}{\eta_s - \eta_j}}{x^*}\right] > 0.$$

Так как $\eta_s > \eta_j$, то осталось показать, что

$$\sum_{i=j+1}^{s} a_{i-1}\frac{\eta_i - \eta_{i-1}}{\eta_s - \eta_j} < x^*.$$

Это справедливо в силу того, что

$$\sum_{i=j+1}^{s} a_{i-1}\frac{\eta_i - \eta_{i-1}}{\eta_s - \eta_j} < \sum_{i=j+1}^{s} a_{s-1}\frac{\eta_i - \eta_{i-1}}{\eta_s - \eta_j} = a_{s-1} < x^*.$$

Аналогично доказываются неравенства (37). Если натуральное число j принимает значения от $s+1$ до $m-1$, то справедливо

$$y_s(x^*) = \eta_s - \frac{\sum\limits_{i=1}^{s} a_{i-1}(\eta_i - \eta_{i-1})}{x^*} > \eta_j - \frac{\sum\limits_{i=1}^{j} a_{i-1}(\eta_i - \eta_{i-1})}{x^*} = y_j(x^*),$$

$$\eta_s - \eta_j + \frac{\sum\limits_{i=s+1}^{j} a_{i-1}(\eta_i - \eta_{i-1})}{x^*} > 0,$$

$$(\eta_s - \eta_j)\left[1 + \frac{\sum\limits_{i=s+1}^{j} a_{i-1}\dfrac{\eta_i - \eta_{i-1}}{\eta_s - \eta_j}}{x^*}\right] > 0.$$

Так как $\eta_s < \eta_j$, то нужно показать, что

$$x^* < \frac{\sum\limits_{i=s+1}^{j} a_{i-1}\dfrac{\eta_i-\eta_{i-1}}{\eta_j-\eta_s}}{x^*}$$

Оказывается,

$$x^* < a_s = \sum_{i=s+1}^{j} a_s \frac{\eta_i-\eta_{i-1}}{\eta_j-\eta_s} < \sum_{i=s+1}^{j} a_{i-1} \frac{\eta_i-\eta_{i-1}}{\eta_j-\eta_s}.$$

Таким образом, доказаны неравенства (36),(37). Аналогично доказываются неравенства, когда точка x^* принадлежит граничным полуинтервалам. Если $x^* = a_i, i \in 1 : m-2$, то $x^* \in (a_{i-1}, a_{i+1})$, и подобным же образом доказываются неравенства

$$y_{i-1}(x^*) = y_i(x^*) > y_j(x^*) \quad \text{для} \quad j \in \mathbb{N} \setminus \{i, i+1\}, j < m-1.$$

■

Предположим, что для некоторого $v \in 1 : m-2$ точка $x_0 \in (a_{v-1}, a_v)$. Определим параметры

$$\eta_i := \overline{\eta}_i, i \in 1 : v, \qquad \eta_i := \underline{\eta}_i, i \in v+1 : m-1. \tag{38}$$

Лемма 4.11. Если выполнены условия (38), неравенства (19)–(20)

$$\sum_{i=1}^{k} a_{i-1}(\eta_i - \eta_{i-1}) \le \left[(1-\eta_k)a_{k-1} + \sum_{i=1}^{k} a_{i-1}(\eta_i - \eta_{i-1})\right]\sigma,$$
$$\sum_{i=1}^{k} a_{i-1}(\eta_i - \eta_{i-1}) \ge \left[(1-\eta_k)a_k + \sum_{i=1}^{k} a_{i-1}(\eta_i - \eta_{i-1})\right]\delta,$$

или им равнозначные (см. лемму 4.8) и (21)

$$a_{m-1}(\eta_m - \eta_{m-1}) + \sum_{i=1}^{m-1} a_{i-1}(\eta_i - \eta_{i-1}) = 0,$$

то

$$y(x) < y^*(x) \quad \forall x \in (x_-, x_+),$$

для любых допустимых[2] параметров $x_-, x_+, y_+, \delta, \sigma$ или равносильных[3] им.

[2] То есть удовлетворяющих группе неравенств (6)–(9).
[3] См. [13, 14].

Доказательство. Обозначим $y^*_\sigma(x) = y^*(x)$, когда $x \in (x_-, x_0)$, и $y^*_\delta(x) = y^*(x)$, когда $x \in [x_0, x_+]$. Нужно доказать два неравенства

$$y(x, H, A) < y^*_\sigma(x), \tag{39}$$

$$y(x, H, A) < y^*_\delta(x). \tag{40}$$

Сначала докажем неравенство (39). Параметр a_1 определим, как корень уравнения

$$\Delta_1(x, \sigma) = y^*_\sigma(x) - y_1(x, \sigma) = \varepsilon,$$

где ε — сколь угодно малое положительное число. Так как правосторонняя производная функции $\Delta_k(x, \overline{\eta}_k), k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ имеет отрицательный знак, производная функции $\Delta_k(x, \overline{\eta}_k)$ обращается в ноль в точке $x^*_k(\overline{\eta}_k) > a_{k-1}$, то определим параметры a_k равными $x^*_k(\overline{\eta}_k)$. Таким образом функция отклонения $\Delta_k(x, \overline{\eta}_k)$ будет монотонно убывать.

Отметим зависимость значения функций $y(x)$ и $y^*_\sigma(x)$ от их производных:

$$y_k(x, \eta_k) = \eta_k - x\frac{dy_k(x, \eta_k)}{dx}, \quad \text{когда } x \in (a_{k-1}, a_k),$$

$$y_k(a_k, \eta_k) = \eta_k - a_k\frac{dy_k(a_k - 0, \eta_k)}{dx},$$

$$y^*_\sigma(x) = 1 - \frac{x}{\sigma}\frac{dy^*_\sigma(x)}{dx}, \quad \text{когда } x \in (x_-, x_0).$$

Рассмотрим разность

$$y^*_\sigma(a_2) - y_2(a_2, \overline{\eta}_2) = 1 - \frac{a_2}{\sigma}\frac{dy^*_\sigma(a_2)}{dx} - \overline{\eta}_2 + a_2\frac{dy_2(a_2 - 0, \overline{\eta}_2)}{dx} =$$

$$= 1 - \overline{\eta}_2 - \frac{a_2}{\sigma}\left[\frac{dy^*_\sigma(a_2)}{dx} - \sigma\frac{dy_2(a_2 - 0, \overline{\eta}_2)}{dx}\right] = 1 - \overline{\eta}_2 -$$

$$-\frac{a_2}{\sigma}\left[\underbrace{\frac{dy^*_\sigma(a_2)}{dx} - \frac{dy_2(a_2 - 0, \overline{\eta}_2)}{dx}}_{=0} + (1 - \sigma)\frac{dy_2(a_2 - 0, \overline{\eta}_2)}{dx}\right] =$$

$$= (1-\sigma) - (1-\sigma)y_1(a_1,\sigma) - \frac{a_2}{\sigma}(1-\sigma)\frac{dy_2(a_2-0,\overline{\eta}_2)}{dx} =$$

$$(1-\sigma)\left[1 - y_1(a_1,\sigma) - \frac{a_2}{\sigma}\frac{dy_2(a_2-0,\overline{\eta}_2)}{dx}\right] > 0.$$

Так как $\sigma \in (0,1)$, то выражение в круглых скобках больше нуля. Осталось рассмотреть выражение, стоящее в квадратных скобках. Имеем

$$1 - y_1(a_1,\sigma) - \frac{a_2}{\sigma}\frac{dy_2(a_2-0,\overline{\eta}_2)}{dx} =$$

$$= 1 - y_1(a_1,\sigma) - \frac{a_2}{\sigma}\frac{a_1(1-\sigma)y_1(a_1,\sigma) + a_0\sigma}{a_2^2} =$$

$$= 1 - y_1(a_1,\sigma) - \frac{a_1\left[(1-\sigma)y_1(a_1,\sigma) + \overbrace{\frac{a_0\sigma}{a_1}}^{=\sigma - y_1(a_1)}\right]}{a_2\sigma} =$$

$$= 1 - y_1(a_1,\sigma) - \frac{a_1(1-y_1(a_1,\sigma))}{a_2} = (1-y_1(a_1,\sigma))\left[1 - \frac{a_1}{a_2}\right] > 0,$$

так как $y(x) \in (0,1)$ и $a_2 > a_1$. Аналогично доказываются неравенства

$$\Delta_k(x) > 0 \quad \forall k \in [3,v].$$

Неравенство (40) доказывается следующим образом: параметры a_k должны удовлетворять неравенству $\overline{\delta}\underline{\sigma}a_{k+1} \le a_k$, и выполняться

$$\frac{d\Delta_{k+1}(a_{k+1}-0,\underline{\eta}_{k+1})}{dx} < 0, \quad k = m-2, ..., v+1.$$

Пусть $k = m-2$, тогда для $x \in (a_{m-2}, x_+)$, $a_{m-1} = x_+$, и

$$\frac{d\Delta(a_{k+1}-0,\underline{\eta}_{k+1})}{dx} = \delta\frac{1-y_\delta^*(x)}{x} + \frac{x_+}{x}\frac{y_{m-1}(x_+,\underline{\eta}_{m-1}) - \underline{\eta}_{m-1}}{x} =$$

$$= \delta\frac{1-y_\delta^*(x)}{x} - \frac{x_+}{x}\frac{1-y_+}{x} < 0.$$

Предположим, что $k \in v+1 : m-3$, $x \in (a_k, a_{k+1})$, a_{k+1} выбираются произвольным образом из интервала $(\overline{\delta}\underline{\sigma}a_{k+2}, a_{k+2})$, и пусть $\Delta_{k+1}(a_{k+1}-0,\underline{\eta}_{k+1}) = \varepsilon_{k+1}$, тогда справедливо

$$\frac{d\Delta_{k+1}(a_{k+1}-0,\underline{\eta}_{k+1})}{dx}=\delta\frac{1-y_\delta^*(x)}{x}+\frac{a_{k+1}}{x}\frac{y_{k+1}(a_{k+1},\underline{\eta}_{k+1})-\underline{\eta}_{k+1}}{x}=$$

$$=\delta\frac{1-y_\delta^*(x)}{x}+\frac{a_{k+1}}{x}\delta\frac{1-y_{k+1}(a_{k+1},\underline{\eta}_{k+1})}{x}=$$

$$=\frac{\delta}{x}\left(1-y_\delta^*(x)-\frac{a_{k+1}}{x}(1-y_{k+1}(a_{k+1},\underline{\eta}_{k+1}))\right).$$

Рассмотрим выражение в круглых скобках и покажем, что оно меньше нуля, действительно

$$1-y_\delta^*(x)-\frac{a_{k+1}}{x}(1-y_{k+1}(a_{k+1},\underline{\eta}_{k+1}))<0$$

$$1-y_\delta^*(x)<\frac{a_{k+1}}{x}(1-y_{k+1}(a_{k+1},\underline{\eta}_{k+1}))\Big|*x$$

$$x(1-y_\delta^*(x))<a_{k+1}(1-y_{k+1}(a_{k+1},\underline{\eta}_{k+1}))$$

$$x(1-y_+)\left(\frac{x_+}{x}\right)^\delta<a_{k+1}\left((1-y_+)\left(\frac{x_+}{a_{k+1}}\right)^\delta+\varepsilon_{k+1}\right)$$

Обозначим $p=(1-y_+)x_+^\delta$ и отбросим ε_{k+1}, тогда последнее неравенство перепишется следующим образом

$$px^{1-\delta}<pa_{k+1}^{1-\delta}.$$

Это справедливо, так как $x<a_{k+1}$. ■

Лемма 4.12. Пусть выполнены условия леммы 4.11 и $a_k>a_k^*, k\in 2:v-1$, где a_k^* — корень уравнения

$$\Delta_k(x,\overline{\eta}_k)=\Delta_k(a_{k-1},\overline{\eta}_k),\quad x>a_{k-1},$$

тогда

$$\arg\max_{x\in[x_-,x_+]}\Delta(x)=x_0,$$

где $\Delta(x)=y^*(x)-y(x)$.

Благодаря леммам 4.10–4.12 можно существенно упростить задачу (16)–(21). Задача (16)

$$\inf_{\tau\in T}\max_{i\in 1:m-1}\min_{H_i}\sup_{x\in(a_{i-1},a_i]}|y^*(x)-y_i(x,H_i,A_{i-1})|$$

равносильна следующей задаче

$$\inf_{\tau\in T}\min_{H}\sup_{x\in(x_-,x_+]}\left|y^*(x)-y(x,H,A)\right|.$$

В силу леммы 4.11, можно опустить модуль

$$\inf_{\tau\in T}\min_{H}\sup_{x\in(x_-,x_+]}y^*(x)-y(x,H,A).$$

Так как справедлива лемма 4.12, то есть максимальное отклонение достигается в точке x_0, то задача эквивалентна следующей

$$\inf_{\tau\in T}\min_{H}y_0-y(x_0,H,A).$$

И если предположить, что $m\geq 3$, $x_0\in(a_{v-1},a_v), v\in 2:m-2$, и положить параметры $\eta_i=\overline{\eta}_i, i\in 1:v$, и $\eta_i=\underline{\eta}_i, i\in v+1:m-1$, то задача перепишется так

$$\inf_{\tau\in T}y_0-y(x_0,A).$$

Так как константу можно не учитывать, то по свойству функции супремума [8] имеем

$$-\sup_{\tau\in T}y(x_0,A)=\inf_{\tau\in T}-y(x_0,A).$$

Отбросим минус перед функцией супремума. В силу леммы 4.10 и предположения, что $x_0\in(a_{v-1},a_v)$,

$$\sup_{\tau\in T}y_v(x_0,A_{v-1}).$$

Подытожив вышесказанное, задача (16)–(21) переписывается следующим образом

$$\sup_{\tau\in T}y_v(x_0,A_{v-1}), \tag{41}$$

$$a_0=x_-,\qquad a_0<a_1<\ldots<a_{m-1},\qquad a_{m-1}=x_+, \tag{42}$$

$$\eta_0=0,\qquad \eta_v\leq\eta_{v+1},\qquad \eta_m=y_+, \tag{43}$$

$$a_k\leq\frac{1-\delta}{\delta}\sum_{i=1}^{k}a_{i-1}\frac{\eta_i-\eta_{i-1}}{1-\eta_k}, \tag{44}$$

$$k\in 1:m-1, \tag{45}$$

$$a_{m-1}(\eta_m-\eta_{m-1})+\sum_{i=1}^{m-1}a_{i-1}(\eta_i-\eta_{i-1})=0. \tag{46}$$

4.4 Частное решение упрощенной задачи

Решим задачу (41)–(46) методом множителей Лагранжа при $m = 4, v = 2$. Из (38) находим выражения для $\eta_k, k = 1, 2, 3:$

$$\eta_1 = \sigma,$$

$$\eta_2 = \sigma + \sigma(1-\sigma)\left(1 - \frac{a_0}{a_1}\right),$$

$$\eta_3 = (1-\delta)y_+ + \delta.$$

Выпишем явный вид функции $y_v(x_0, A)$ при $v = 2$[4]

$$y_2(x_0, A) = (1-\sigma)\sigma\left(1 - \frac{a_0}{a_1}\right)\left(1 - \frac{a_1}{x_0}\right) + \sigma\left(1 - \frac{a_0}{x_0}\right).$$

Приравнивая частную производную $y_2(x_0, a_1)$ по a_1 к нулю, получаем

$$\frac{\partial y_2(x_0, a_1)}{\partial a_1} = \sigma(1-\sigma)a_1^{-2}\left(1 - \frac{a_1}{x_0}\right) - \sigma(1-\sigma)\left(1 - \frac{a_0}{a_1}\right) =$$

$$= \sigma(1-\sigma)a_1^{-2}\left(1 - \frac{a_1}{x_0} - 1 + \frac{a_0}{a_1}\right) = \sigma(1-\sigma)a_1^{-2}\left(\frac{a_0}{a_1} - \frac{a_1}{x_0}\right) = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow a_1 = \sqrt{a_0 x_0}.$$

Из условия (46) следует

$$a_2 = \frac{x_+(1-y_+)\delta - \sqrt{a_0 x_0}(1-\sigma)\sigma\left(1 - \sqrt{\frac{a_0}{x_0}}\right) - a_0\sigma}{y_+ + \delta(1-y_+) - \sigma - (1-\sigma)\sigma\left(1 - \sqrt{\frac{a_0}{x_0}}\right)}.$$

[4] При $v > 2$ см. приложение 1 и формулу (50).

5 Решение безусловной задачи

В данном параграфе пойдёт речь об аппроксимации функции $y^*(x)$ непрерывной кусочно-гиперболической функцией $y(x)$, то есть о задаче (16). Доказательство существования решения задачи (16) с любой сколь угодно малой величиной приближения приведено в диссертации [5]. В работе [9] приведена попытка решения несколько видоизменённой задачи (16) линейными сплайнами.

Для решения задачи приводятся два алгоритма: алгоритм нахождения наилучшей непрерывной аппроксимации гладкой строго выпуклой или вогнутой функции степенными функциями, и модифицированный алгоритм, опирающийся на предыдущий, для непрерывной аппроксимации кусочно-гладкой строго вогнутой функции имеющей излом степенными функциями. Заключительный пункт данного параграфа о применении модифицированного алгоритма к данной конкретной задаче (16).

5.1 Теоретическое обоснование

Сформулируем некоторые известные определения и утверждения

Определение 5.1. Функция $f(x)$, определённая и конечная на отрезке $[a, b]$, называется вогнутой (выпуклой) на $[a, b]$, если для любых $x_1, x_2 \in [a, b]$ выполняется

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \geq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2), \quad \alpha \in [0, 1]$$
$$(f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2), \quad \alpha \in [0, 1]).$$

Определение 5.2. Функция $f(x)$, определённая и конечная на отрезке $[a, b]$, называется строго вогнутой (строго выпуклой) на $[a, b]$, если для любых $x_1, x_2 \in [a, b], x_1 \neq x_2$, выполняется

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) > \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2), \quad \alpha \in (0, 1)$$
$$(f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) < \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2), \quad \alpha \in (0, 1)).$$

Теорема 5.1 (Лагранж)**.** Если функция $f(x)$, определённая на отрезке $[a, b]$, строго выпукла или вогнута на интервале (a, b) и непрерывно дифференцируема на (a,b), то существует единственная точка $\xi \in (a,b)$ такая, что

$$f'(\xi)(b-a) = f(b) - f(a).$$

Теорема 5.2 (Коши)**.** Если функции $f(x), g(x)$, определённые на отрезке $[a,b]$, непрерывно дифференцируемы на интервале $(a,b), a < b$, причём $g'(x) \neq 0$ на (a,b), и являются строго выпуклыми или вогнутыми на (a,b), то существует единственная точка $\xi \in (a,b)$ такая, что

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

5.2 Алгоритм

Пусть аппроксимируемая функция $y^*(x)$[5], строго *вогнутая* или *выпуклая* на отрезке $[a,b]$, $0 < a < b$, *непрерывно дифференцируема* на интервале (a,b), а значение аппроксимации, непрерывной степенной функции на $[a,b]$, в точках a и b совпадает со значением аппроксимируемой функции в соответствующих точках.

Введём определённые на отрезке $[a_{i-1}, a_i]$ функции для некоторого действительного числа n, не равного нулю, и натурального числа $m \geq 2$

$$y_i(x, \beta_i) := \gamma_{i-1} + \beta_i(x^n - a_{i-1}^n), \qquad i \in 1 : m-1. \tag{47}$$

Обозначим через $\Delta_i(x, \beta_i) = y^*(x) - y_i(x, \beta_i)$ отклонение функции $y^*(x)$ от $y_i(x, \beta_i)$.

Опишем схему алгоритма.

1. Зафиксируем числа $n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$. Выберем положительное вещественное число h_0 — величину приближения.
2. k-я итерация $(k \geq 0)$:
   (a) Определим параметры $a_0 := a, \gamma_0 := y^*(a)$.
   (b) Если $m \geq 3$, то для каждого i от 1 до $m-2$ выполняем последовательно следующие три шага:

[5] Под $y^*(x)$ понимается произвольная функция.

i. Разрешим относительно x уравнение

$$\frac{d\Delta_i(x, \beta_i)}{dx} = 0.$$

Получим точку $x = x_i^*(\beta_i)$.

ii. Решим уравнение

$$\Delta_i(x_i^*(\beta_i), \beta_i) = -h_k.$$

Получим корень $\beta_i^{(k)}$ этого уравнения.

iii. Найдём корень уравнения

$$\Delta_i(x, \beta_i^{(k)}) = h_k$$

на отрезке (a_{i-1}, b), пусть он равен $x_i^{(k)}$. Положим

$$a_i := x_i^{(k)}, \gamma_i := y^*(a_i) - h_k, \beta_i := \beta_i^{(k)}.$$

(c) Параметр a_{m-1} положим равным b, а параметр $\beta_{m-1} := \beta_{m-1}^{(k)}$, где $\beta_{m-1}^{(k)}$ — решение линейного уравнения

$$\Delta_{m-1}(b, \beta_{m-1}) = 0.$$

(d) Если $|\Delta_{m-1}(x, \beta_{m-1}^{(k)})| > h_k$ для некоторого $x \in [a_{m-2}, a_{m-1}]$, то увеличиваем h_k, или если на отрезке $[a_{m-2}, a_{m-1}]$ один альтернанс, то уменьшаем h_k, и переходим к следующей итерации $k := k + 1$.

Если на отрезке $[a_{m-2}, a_{m-1}]$ два альтернанса, то процесс прекращается.

Определим непрерывную на отрезке $[a, b]$ функцию

$$y(x) := \begin{cases} y_1(x, \beta_1), & \text{если } x \in [a_0, a_1]; \\ y_2(x, \beta_2), & \text{если } x \in [a_1, a_2]; \\ \dots & \\ y_m(x, \beta_m), & \text{если } x \in [a_{m-2}, a_{m-1}]. \end{cases} \tag{48}$$

Алгоритм приведён в случае, когда

- $n = 1$ и функция $y^*(x)$ вогнутая на отрезке $[a, b]$;

- $n \neq 1$ и аппроксимация $y(x)$ непрерывно кусочно-вогнутая функция на $[a,b]$.

Если

- $n = 1$ и функция $y^*(x)$ выпуклая на отрезке $[a,b]$;
- $n \neq 1$ и аппроксимация $y(x)$ непрерывно кусочно-выпуклая функция на $[a,b]$,

то нужно везде (за исключением $|\Delta_i(x,\eta_i)| \lesseqgtr h_k$) при h_k поменять знак на противоположенный.

Допустим мы реализовали алгоритм ($m \geq 3$), то есть нашли коэффициенты

$$\beta_i, \gamma_{i-1}, \quad i \in 1 : m-1, \qquad a_j, \quad j \in 0 : m-1.$$

Тогда можно построить последовательность точек (см. 2(b)i пункт алгоритма) $\{x_i^*(\beta_i)\}_{i=1}^{m-1}$, где $x_{m-1}^*(\beta_{m-1})$ — точка из интервала (a_{m-2}, a_{m-1}), в которой производная функции отклонения равна нулю

$$\frac{d\Delta_{m-1}(x, \beta_{m-1})}{dx} = 0.$$

Составим *цепь*

$$x_1^*(\beta_1) < a_1 < x_2^*(\beta_2) < \ldots < a_{m-2} < x_{m-1}^*(\beta_{m-1}).$$

Построим последовательность $\{t_i\}_{i=1}^{2m-3}$, элементами которой будут *значения цепи* в порядке возрастания.

Тогда справедливы равенства

$$(-1)^s h = y^*(t_s) - y(t_s), \quad s \in 1 : 2m-3.$$

То есть разность $y^*(t_s) - y(t_s)$ достигает максимального по абсолютной величине значения с последовательной переменой знака в $2m-3$ точках t_s, $s \in 1 : 2m-3$.

`Замечание`. При $n = 1, m \geq 4 \quad y_i(x, \beta_i),\ i \in 2 : m-2$, есть *многочлен наилучшего равномерного приближения первой степени* для функции $y^*(x)$ на отрезке $[a_{i-1}, a_i]$. *Разбиение* $\tau = \{a_1, a_2, \ldots, a_{m-2}\}$ отрезка $[a_1, a_{m-2}]$ является *разбиением с равными уклонениями*, см. [10], [11]. Геометрическая интерпретация частного случая алгоритма изложена в книге [12].

5.3 Модифицированный алгоритм

Можно обобщить алгоритм параграфа 5.2 для случая, когда $y^*(x)$ является *строго вогнутой кусочно-гладкой* функцией имеющей излом в точке $x^* \in (a, b)$. Для этого добавим в пункт 2b вышеизложенного алгоритма для каждого $i \in 1 : m-2$ предварительный шаг:

пусть $a_{i-1} < x^*$. Обозначим через β_i^* решение линейного уравнения

$$\Delta_i(x^*, \beta_i) = h_k.$$

Найдём корни $(x_i^{(1)}, x_i^{(2)})$ уравнений

$$\Delta_i(x, \beta_i^*) = \pm h_k$$

на интервале (a_{i-1}, b). Если $x^* > \max\{x_i^{(1)}, x_i^{(2)}\}$, то переходим к пункту 2(b)i, иначе

если $i \neq m-2$[6], то выбираем тот номер j^*, при котором

$$x_i^{(j^*)} = \max_{\substack{j\in\{1,2\} \\ |\Delta_i(x,\beta_i^*)|\leq h_k \;\; x\in\left[a_{i-1}, x_i^{(j)}\right]}} x_i^{(j)};$$

если $i = m-2$[7], тогда выбираем тот номер j^*, при котором

$$x_i^{(j^*)} = \min_{\substack{j\in\{1,2\} \\ |\Delta_i(x,\beta_i^*)|\leq h_k \;\; x\in\left[a_{i-1}, x_i^{(j)}\right]}} x_i^{(j)}.$$

Положим

$$\beta_i := \beta_i^*, a_i := x_i^{(j^*)}, \gamma_i := y^*(a_i) + (-1)^{j^*} h.$$

Увеличиваем i на единицу [8].

`Замечание.` Крайне редко случается, что

$$\beta_i^* = \beta_i^{(j^*)}. \tag{49}$$

Поэтому в модифицированном алгоритме необходимо выполнить все шаги алгоритма 5.2 (когда это возможно), и если выполнено равенство (49), то количество точек альтернанса можно сохранить равным $2m-3$, когда $i < m-2$. Критерий остановки алгоритма в данном случае следующий:

[6] см. 6 пример 6.1

[7] см. 6 пример 6.2

[8] см. замечание

если на отрезке $[a_{m-2}, a_{m-1}]$ один альтернанс и при уменьшении h_{k-1}, $k \in \mathbb{N}$, т.е. выбрав $h_k = h_{k-1} - \varepsilon$, где ε — достаточно малое положительное вещественное число, хотя бы для одной точки $x \in [a_{m-2}, a_{m-1}]$ выполнено $|\Delta_{m-1}(x, \beta_{m-1})| > h_k$, то полагая h_{k-1} — величиной наилучшего приближения, выполняем алгоритм 5.2 и останавливаемся.

5.4 Модифицированный алгоритм на практике

Запишем алгоритм параграфа 5.3 применительно к задаче (16).

Отрезок $[a, b] := [x_-, x_+]$, $x^* = x_0$, зададим функцию $y^*(x)$ так, чтобы выполнялись неравенства (6)–(9), функции вида (47) приведём к виду (14), положив

$$n = -1, \quad \beta_i = -\sum_{j=1}^{i} a_{j-1}(\eta_j - \eta_{j-1}), \quad \gamma_{i-1} = y_i(a_{i-1} + 0, H, A).$$

Опишем схему алгоритма.

1. Зафиксируем число $m \in \mathbb{N},\ m \geq 2$. Выберем положительное вещественное число h_0 — величину приближения.
2. k-я итерация ($k \geq 0$):
   (a) Определим параметр $a_0 := x_-$.
   (b) Если $m \geq 3$, то для каждого i от 1 до $m-2$ выполняем последовательно следующие четыре шага:
      i. Выполняем данный пункт, пока $a_{i-1} < x_0$. Его описание смотреть ниже.
      ii. Разрешим относительно x уравнение
$$\frac{d\Delta_i(x, \eta_i)}{dx} = 0.$$

Получим точку

$$x_i^*(\eta_i) = \begin{cases} \left(\dfrac{\Sigma^i}{\sigma x_-^{\sigma}}\right)^{\dfrac{\overline{\sigma}}{\sigma}}, & \text{если } x_- < a_{i-1} < x_0; \\ \left(\dfrac{\Sigma^i}{\delta(1-y_+)x_+^{\delta}}\right)^{\dfrac{\overline{\delta}}{\delta}}, & \text{если } x_0 \le a_{i-1} \le x_+; \end{cases}$$

где $\Sigma^i = \sum\limits_{j=1}^{i} a_{j-1}(\eta_j - \eta_{j-1})$.

iii. Решим уравнение по η_i на интервале $(0,1)$

$$\Delta_i(x_i^*(\eta_i), \eta_i) = -h_k,$$

где

$$\Delta_i(x_i^*(\eta_i), \eta_i) = \begin{cases} \Delta_i^{\sigma}(x_i^*(\eta_i), \eta_i), & \text{если } x_- < a_{i-1} < x_0; \\ \Delta_i^{\delta}(x_i^*(\eta_i), \eta_i), & \text{если } x_0 \le a_{i-1} \le x_+; \end{cases}$$

$$\Delta_i^{\sigma}(x_i^*(\eta_i), \eta_i) = 1 - \eta_i + \left(\frac{\sigma x_-}{\Sigma^i}\right)^{\overline{\sigma}} \{\sigma - 1\},$$

$$\Delta_i^{\delta}(x_i^*(\eta_i), \eta_i) = 1 - \eta_i + (1-y_+)^{\frac{1}{1-\delta}} \left(\frac{\delta x_+}{\Sigma^i}\right)^{\overline{\delta}} \{\delta - 1\}.$$

Получим корень $\eta_i^{(k)}$ этого уравнения.

iv. Найдём корень уравнения

$$\Delta_i(x, \eta_i^{(k)}) = h_k$$

на отрезке (a_{i-1}, x_+). Пусть он равен $x_i^{(k)}$. Положим $a_i := x_i^{(k)}, \eta_i := \eta_i^{(k)}$.

(c) Параметр a_{m-1} положим равным x_+, а параметр $\eta_{m-1} := \eta_{m-1}^{(k)}$, где $\eta_{m-1}^{(k)}$ — решение линейного уравнения

$$\Delta_{m-1}(x_+, \eta_{m-1}) = 0.$$

(d) Если $|\Delta_{m-1}(x, \eta_{m-1}^{(k)})| > h_k$ для некоторого $x \in [a_{m-2}, a_{m-1}]$, то увеличиваем h_k, или если на отрезке $[a_{m-2}, a_{m-1}]$ один альтернанс, то уменьшаем h_k, и переходим к следующей итерации $k := k + 1$.

Если на отрезке $[a_{m-2}, a_{m-1}]$ два альтернанса, то процесс прекращается.

Описание 2(b)i шага: обозначим через η_i^* решение линейного уравнения

$$y_0 - y_i(x_0, \eta_i) = h_k.$$

Найдём корни $(x_i^{(1)}, x_i^{(2)})$ уравнений

$$\Delta_i(x, \eta_i^*) = \pm h_k$$

на интервале (a_{i-1}, x_0). Если $x_0 > \max\{x_i^{(1)}, x_i^{(2)}\}$, то переходим к пункту 2(b)ii, иначе

если $i \neq m-2$, то выбираем тот номер j^*, при котором

$$x_i^{(j^*)} = \max_{\substack{j \in \{1,2\} \\ |\Delta_i(x, \eta_i^*)| \leq h_k \ x \in \left[a_{i-1}, x_i^{(j)}\right]}} x_i^{(j)};$$

если $i = m-2$, тогда выбираем тот номер j^*, при котором

$$x_i^{(j^*)} = \min_{\substack{j \in \{1,2\} \\ |\Delta_i(x, \eta_i^*)| \leq h_k \ x \in \left[a_{i-1}, x_i^{(j)}\right]}} x_i^{(j)}.$$

Положим $\eta_i := \eta_i^*, a_i := x_i^{(j^*)}$, увеличиваем на единицу i.

6 Численные эксперименты.

Программное обеспечение, реализующее алгоритм параграфа 5.4, было написано в математическом пакете Wolfram Mathematica. Расчёты были произведены с точностью 10^{-6}. Следующие четыре примера иллюстрируют все тонкости алгоритма. Задать функцию $y^*(x)$ можно при помощи параметров $(x_-, x_+, y_+, \delta, \sigma)$ или $(x_-, x_0, x_+, y_0, y_+)$ (см. [13, 14]). Входные данные для $y^*(x)$ были предложены Р.О. Смирновым в статье [13]:

$$x_- = 131580, x_0 = 3 * x_-, x_+ = 10 * x_-, y_+ = 0.3, y_0 = 0.23.$$

Пример 6.1. Пусть $m = 4$. Получаем $h = 0.007128$ и таблицу 3. Проанализируем рис.4. На отрезках $[a_0, a_1]$ и $[a_2, a_3]$ имеем $3 - 1 = 2$ точки альтернанса (один альтернанс «ушёл на обслуживание» ограничения-равенства $y(a_0) = y^*(a_0)$ и $y(a_3) = y^*(a_3)$ соответственно). На отрезке $[a_1, a_2]$, которому принадлежит угловая точка x_0, запечатлён отрицательный момент модифицированного алгоритма. Разность $y^*(x) - y(x)$ достигает максимального отклонения (но не с переменой знака) на концах данного отрезка. Параметр $a_2 = x_0$, т.к. $m - 2 = 2$. На рис. 5 приведены графики $y^*(x)$ и $y(x)$.

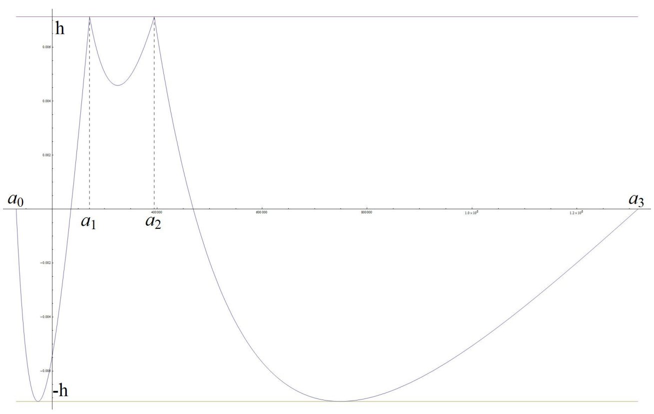

Рис. 4: Разность $y^*(x) - y(x)$

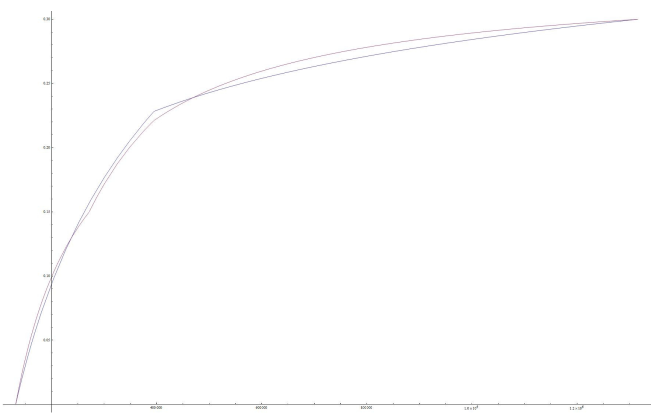

Рис. 5: Графики $y^*(x)$, $y(x)$

Пример 6.2. Пусть $m = 6$. Получаем $h = 0.002424$ и таблицу 4. Рассмотрим подробней рис.6. На отрезках $[a_0, a_1]$ и $[a_4, a_5]$ имеем две точки альтернанса. На отрезке $[a_2, a_3]$, которому принадлежит угловая точка x_0, три точки максимального по абсолютной величине отклонения, причём потенциальная точка

i	0	1	2	3
η_i	0	0.290826	0.377977	0.333808
a_i	131580	271404	394740	1315800

Таблица 3: Параметры аппроксимации $y(x)$

i	0	1	2	3	4	5
η_i	0	0.266836	0.346633	0.395114	0.295836	0.342353
a_i	131580	198330	327786	413776	644474	1315800

Таблица 4: Параметры аппроксимации $y(x)$

i	0	1	2	3	4
η_i	0	0.273023	0.367059	0.299564	0.347456
a_i	131580	215071	433312	742092	1315800

Таблица 5: Параметры аппроксимации $y(x)$

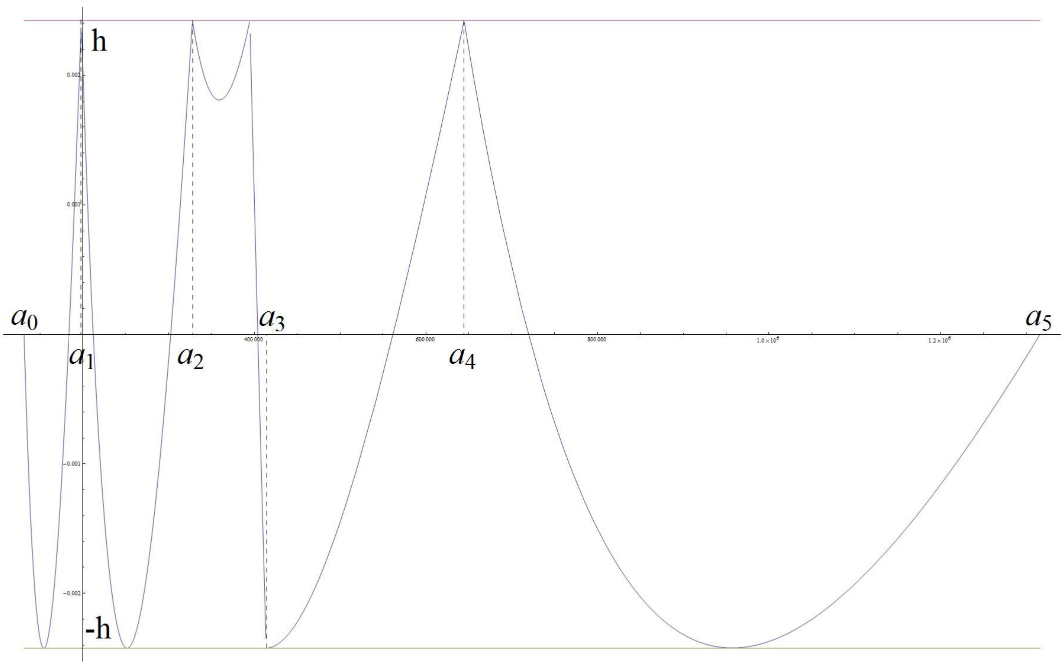

Рис. 6: Разность $y^*(x) - y(x)$

альтернанса следующего отрезка $[a_3, a_4]$ «перешла» к предыдущему отрезку. Параметр $a_3 > x_0$, т.к. $3 \neq 6 - 2 = 4$.

Пример 6.3. Пусть $m = 5$. Получаем $h = 0.003425$ и таблицу 5. Изображение разности $y^*(x) - y(x)$ приведено на рис. 7. Здесь мы воспользовались критерием остановки, описанном в замечании в пункте 5.3. На отрезке $[a_3, a_4]$ можно получить две точки альтернанса несколько искусственным способом: для этого

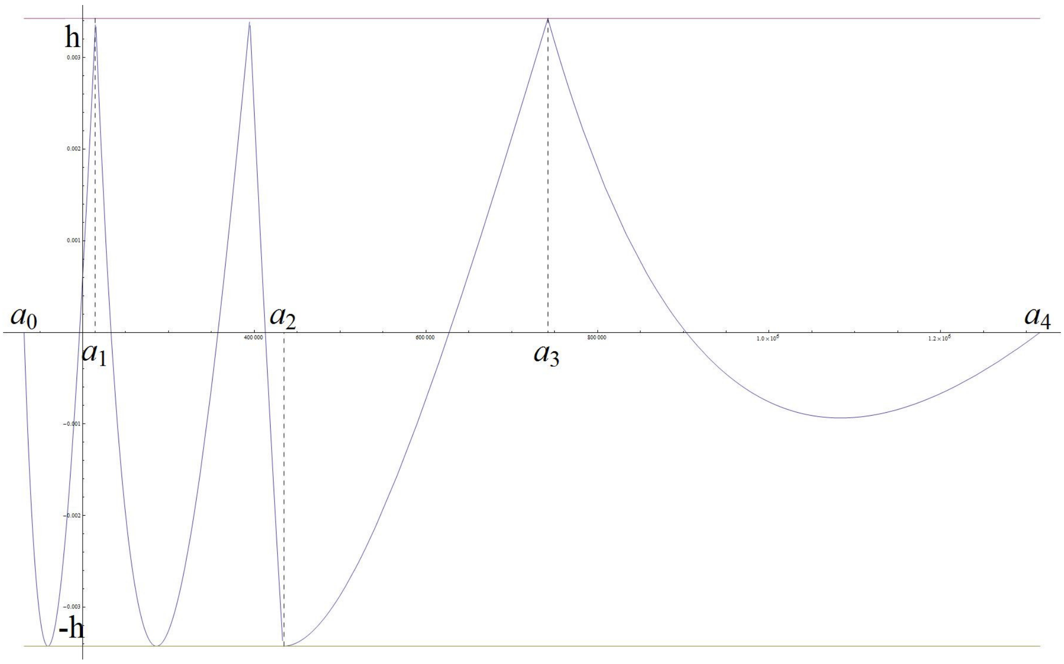

Рис. 7: Разность $y^*(x) - y(x)$

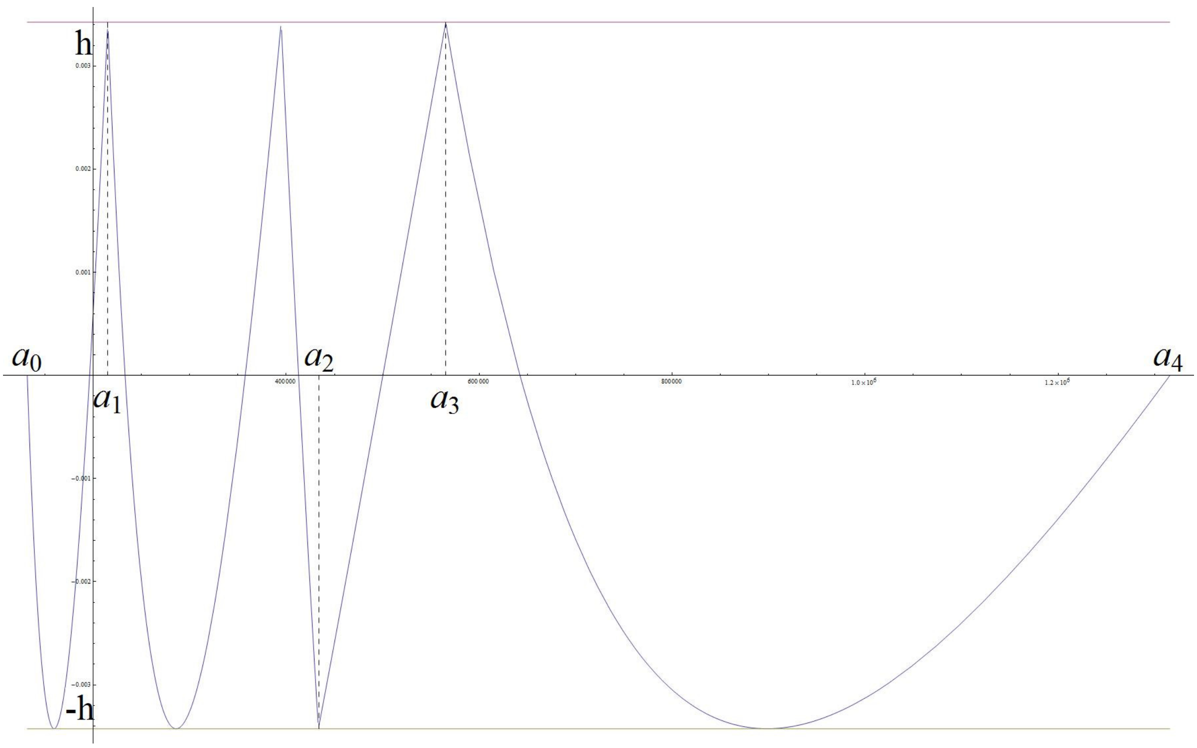

Рис. 8: Разность $y^*(x) - y(x)$

положим $\eta_{i+1} = 0.2781$, i — номер, при котором точка излома $x_0 \in [a_{i-1}, a_i]$ (здесь $i = 2$). Тогда $a_3 = 565383$, $\eta_4 = 0.339956$. График разности представлен на рис. 8.

Пример 6.4. Следующий пример иллюстрирует некоторый идеальный случай приближения. Был применён алгоритм параграфа 5.2 без каких-либо измене-

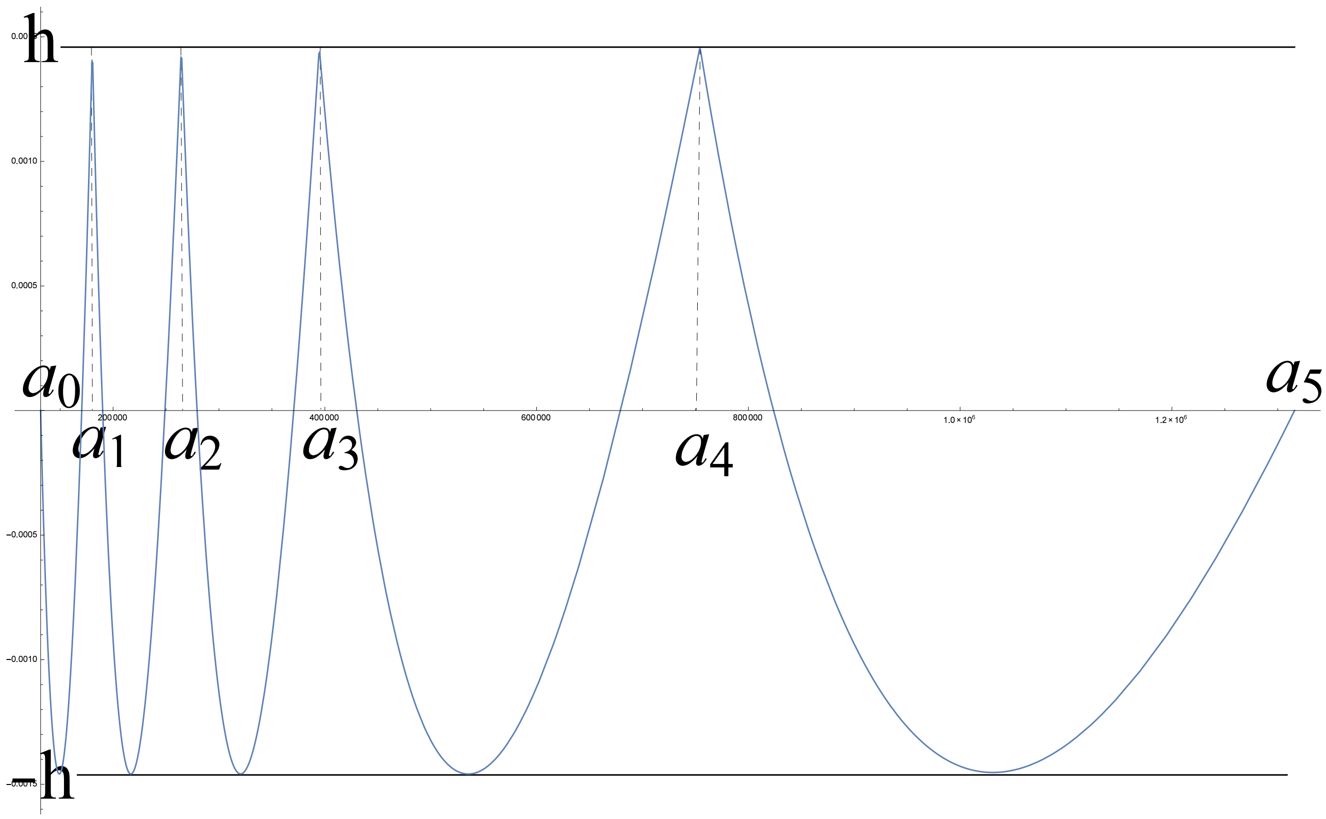

Рис. 9: Разность $y^*(x) - y(x)$

i	0	1	2	3	4	5
η_i	0	0.259628	0.322181	0.381979	0.309573	0.345341
a_i	131580	180416	264464	394740	754284	1315800

Таблица 6: Параметры аппроксимации $y(x)$

ний. Точность вычислений 10^{-4}, $m = 6$. Получаем $h = 0.0014588$ и таблицу 6. Как видно по рис. 9 на граничных отрезках мы имеем по два альтернанса, на внутренних по три.

Пример 6.5. Данный пример является оптимальным решением задачи (16)–(21). Решение было получено аналитически, путём решения упрощенной (см. пункт 4.4) задачи при $v = 2$ методом неопределённых множителей Лагранжа. Хоть теорема 4.9 выдаёт, что система совместна при $m = 5$, это не значит, что нельзя найти решение и при меньшем количестве диапазонов, см. рис. 10 и таб. 7. Здесь

$$m = 4, \quad h = 0.03883.$$

Пример 6.6. Данный пример относится к замечанию теоремы 4.9. Входные

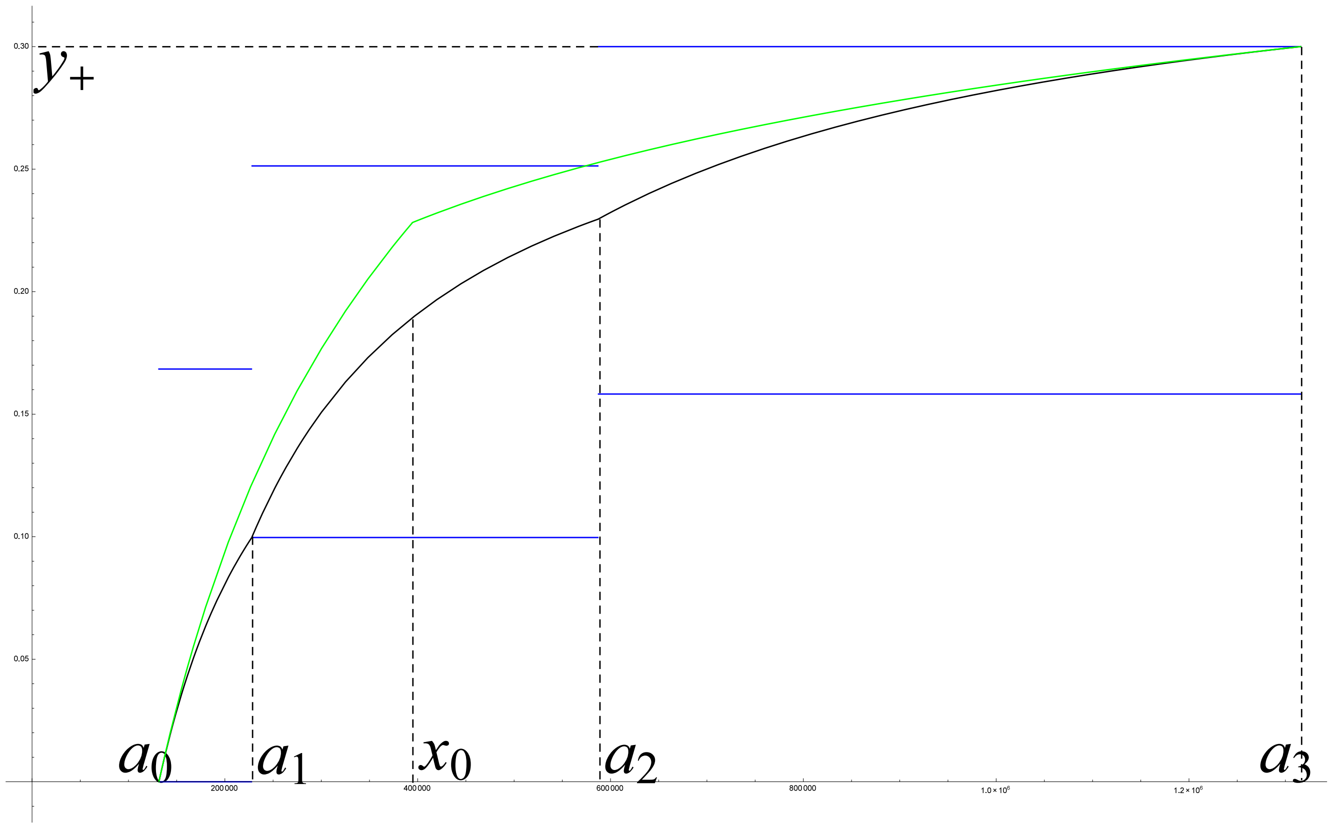

Рис. 10: График функции $y^*(x)$, ниже — $y(x)$, горизонтальными линиями обозначены нелинейные ограничения

i	0	1	2	3
η_i	0	0.235829	0.311996	0.35674
a_i	131580	227903	587104	1315800

Таблица 7: Параметры аппроксимации $y(x)$

параметры взяты из статьи [15]:

$$x_- = 106620, x_0 = 5 * x_-, x_+ = 20 * x_-, y_+ = 0.25, y_0 = 0.16.$$

Как видим на рис. 11, и это характерно для подобных входных параметров, то есть где $\delta \approx \sigma$, что условия порядка (18) (см. таб. 8) выполняются автоматически: это связано с тем, что скорость роста аппроксимируемой функции $y^*(x)$ «существенно» не изменяется в точке излома x_0. В данном случае

$$\delta = 0.0817494, \quad \sigma = 0.108332, \quad h = 0.00498, \quad m = 4.$$

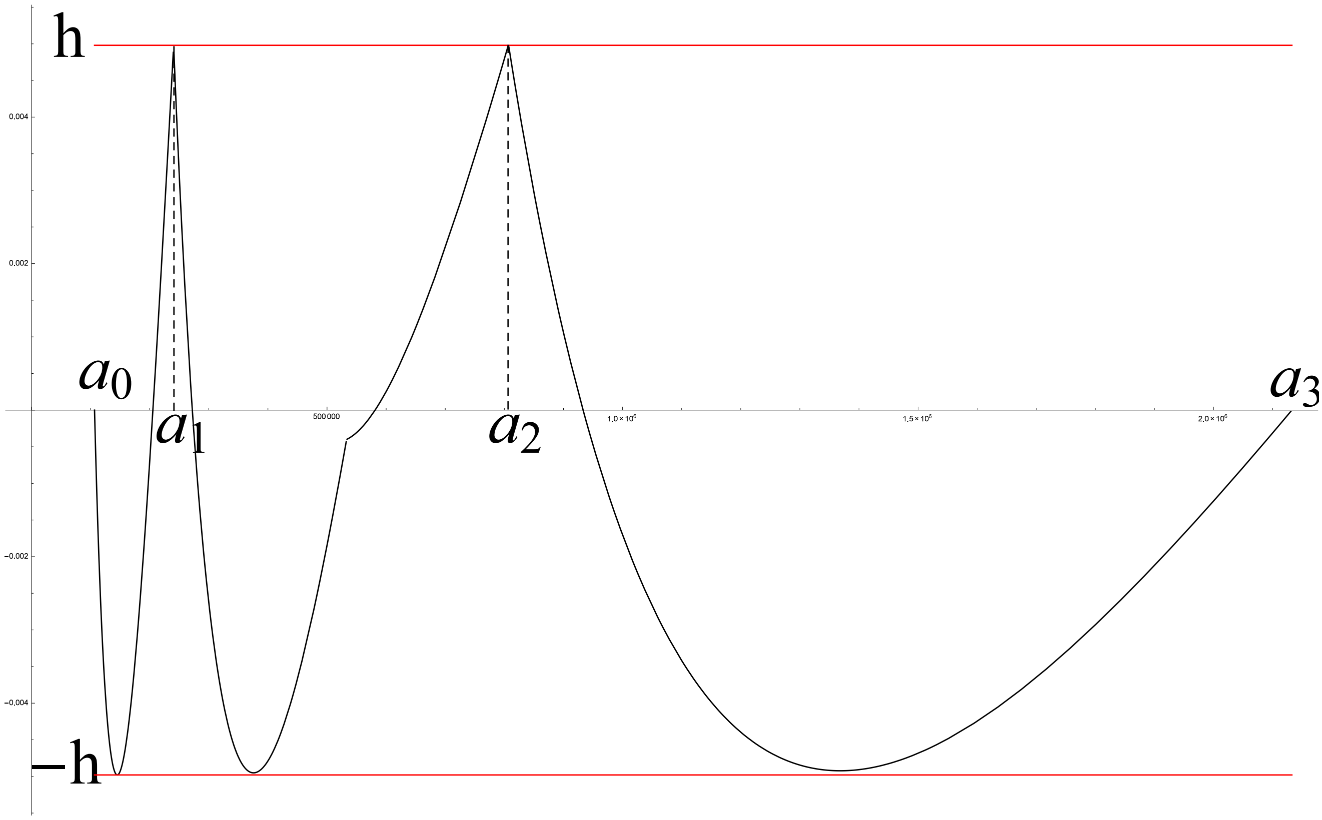

Рис. 11: Разность $y^*(x) - y(x)$

i	0	1	2	3
η_i	0	0.14258	0.227	0.290792
a_i	106620	240494	807000	2132400

Таблица 8: Параметры аппроксимации $y(x)$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Чистяков С. В., Ишханова М. В. Математические модели выбора налоговых шкал: Учебное пособие. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 1998. 52 с.

[2] Смирнов Р. О., Чистяков С. В. О ставках налогообложения как инструменте государственного регулирования // Экономика и математические методы, 1993. Т. 29, № 2. С. 268-274.

[3] Смирнов Р. О. Моделирование инструментов бюджетно-налоговой политики государства. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2009. 110 с.

[4] Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.

[5] Ишханова М. В. Математические модели построения налоговых шкал. – Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук, СПб., 1999, 110 с.

[6] Реут А. В. О существовании решения задачи аппроксимации оптимальной шкалы подоходного налога // Международный экономический симпозиум-2015: Материалы II международной научно-практической конференции, посвященной 75-летию экономического факультета Санкт-Петербургского государственного университета; I I I международной научной конференции Соколовские чтения «Бухгалтерский учет: взгляд из прошлого в будущее; международной весенней конференции молодых ученых-экономистов «Наука молодая» 22-25 апреля 2015 г. СПб.: Изд-во Скифия-принт, 2015. С. 193.

[7] Реут А. В. Аппроксимация оптимальной шкалы средних ставок подоходного налога // Процессы управления и устойчивость. 2017. Т. 4(20). № 1. С. 662–666.

[8] Демьянов В. Ф., Малозёмов В. Н. Введение в минимакс. Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1972, с. 368.

[9] Сухорукова Н. В. Обобщение алгоритма Ремеза на случай полиномиальных сплайнов. – Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук, СПб., 2005, 125 с.

[10] Вершик А. М., Малозёмов В. Н., Певный А. Б. Наилучшая кусочно-полиномиальная аппроксимация // Сибирский матем. журнал, 1975. Т. 16. № 5. С. 925–938.

[11] Малозёмов В. Н. Наилучшая кусочно-полиномиальная аппроксимация. // Семинар «CNSA & NDO». Избранные доклады. 24 апреля 2014 г. (www.apmath.spbu.ru/cnsa/pdf/BestApprox.pdf)

[12] Вержбицкий В. М. Основы численных методов. М.: Высш. шк., 2002. С. 396–397.

[13] Смирнов Р. О. Моделирование выбора параметров шкалы подоходного налога // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 5, 2011. Вып. 4. С. 141–148.

[14] Андерсен А. А., Чистяков С. В. Методологические основы разработки интерактивной системы построений шкалы ставок подоходного налога // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10, 2013. Вып. 3. С. 9–19.

[15] Смирнов Р. О. Исследование модели шкалы предельных ставок подоходного налога // Анализ, моделирование, управление, развитие социально-экономических систем: сборник научных трудов IX Международной школы-симпозиума АМУР-2015, Севастополь, 12-21 сентября 2015 / Под ред. доцента А. В. Сигала. – Симферополь : КФУ имени В. И. Вернадского, 2015. С. 354–361.

Приложение 1. Явные ограничения на выбор прогрессивной шкалы предельных ставок подоходного налога

Действительно, так как $\eta_k = \sum\limits_{i=1}^{k}(\eta_i - \eta_{i-1})$, то

$$\eta_k = \sigma + (1-\sigma)y_{k-1}(a_{k-1}) =$$

$$\sigma + (1-\sigma)\left[\sum_{i=1}^{k-1}(\eta_i - \eta_{i-1}) - \frac{\sum_{i=1}^{k-1} a_{i-1}(\eta_i - \eta_{i-1})}{a_{k-1}}\right] =$$

$$= \sigma + (1-\sigma)\left[\sum_{i=1}^{k-1}(\eta_i - \eta_{i-1})\left\{1 - \frac{a_{i-1}}{a_{k-1}}\right\}\right].$$

Далее,

$$\eta_k - \eta_{k-1} = (1-\sigma)\left[\sum_{i=1}^{k-1}(\eta_i - \eta_{i-1})\left\{1 - \frac{a_{i-1}}{a_{k-1}}\right\} - \sum_{i=1}^{k-2}(\eta_i - \eta_{i-1})\left\{1 - \frac{a_{i-1}}{a_{k-2}}\right\}\right] =$$

$$= (1-\sigma)\left[(\eta_{k-1} - \eta_{k-2})\left\{1 - \frac{a_{k-2}}{a_{k-1}}\right\} + \sum_{i=1}^{k-2}(\eta_i - \eta_{i-1})\left\{1 - \frac{a_{i-1}}{a_{k-1}}\right\} - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=1}^{k-2}(\eta_i - \eta_{i-1})\left\{1 - \frac{a_{i-1}}{a_{k-2}}\right\}\right] = (1-\sigma)\left[(\eta_{k-1} - \eta_{k-2})\left\{1 - \frac{a_{k-2}}{a_{k-1}}\right\} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{k-2}(\eta_i - \eta_{i-1})\left\{1 - \frac{a_{i-1}}{a_{k-1}} - 1 + \frac{a_{i-1}}{a_{k-2}}\right\}\right] =$$

$$= (1-\sigma)\sum_{i=1}^{k-1} a_{i-1}(\eta_i - \eta_{i-1})\{a_{k-2}^{-1} - a_{k-1}^{-1}\}, \quad k = 2, 3, \ldots$$

Используя выведенные рекуррентные соотношения, можно записать функцию $y_k(x, A_{k-1})$, представив её в виде

$$\sum_{i=1}^{k}(\eta_i - \eta_{i-1})\left\{1 - \frac{a_{i-1}}{x}\right\}. \tag{50}$$

Приложение 2. Доказательство существования корня уравнения (30)

Утверждение 1. Для $i \in 2 : v$ существование корня уравнения (30) для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ на отрезке $[x_i^*(\overline{\eta}_i), \bar{a}_i]$ строгой монотонности функции $\Delta_i(x, \overline{\eta}_i)$, где $x_i^*(\overline{\eta}_i)$ — точка, в которой производная функции отклонения обращается в ноль

$$\frac{d\Delta_i(x_i^*(\overline{\eta}_i), \overline{\eta}_i)}{dx} = 0,$$

следует из того, что

$$(\Delta_i(x_i^*(\overline{\eta}_i), \overline{\eta}_i) - \varepsilon)(\Delta_i(\bar{a}_i, \overline{\eta}_i) - \varepsilon) < 0.$$

Данное неравенство равносильно выполнению неравенства $\sigma + y_0 \leq 1$.

Доказательство. Правосторонняя производная по x функции $\Delta_i(x, \overline{\eta}_i)$ в точках $a_{i-1}, i \in 2 : v$, имеет отрицательный знак. Действительно,

$$\begin{aligned}(\Delta_i)'_x(a_{i-1} + 0) &= [y^*(x) - y_i(x, \overline{\eta}_i)]'_x\big|_{x=a_{i-1}+0} = \\ &= \frac{\sigma}{x}[y_i(x, \overline{\eta}_i) - y^*(x)]\big|_{x=a_{i-1}+0} = \\ &= \frac{\sigma}{a_{i-1}}[y_i(a_{i-1} + 0, \overline{\eta}_i) - y^*(a_{i-1})] = \\ &= \frac{\sigma}{a_{i-1}}[-\varepsilon] < 0.\end{aligned}$$

Так как $\Delta_i(x_i^*(\overline{\eta}_i), \overline{\eta}_i) < \varepsilon$, то покажем справедливость

$$\Delta_k(\overline{a}_k, \overline{\eta}_k) > \Delta_{k-1}(a_{k-1}, \overline{\eta}_{k-1}) = \varepsilon, \quad k \in 2 : v \tag{51}$$

Распишем неравенство (51) подробней

$$y_\sigma^*(\overline{a}_k) - y_k(\overline{a}_k, \overline{\eta}_k) > y_\sigma^*(a_{k-1}) - y_{k-1}(a_{k-1}, \overline{\eta}_{k-1}),$$

где

$$y_\sigma^*(x) = 1 - \left(\frac{x_-}{x}\right)^\sigma.$$

Отсюда имеем

$$y_\sigma^*(\overline{a}_k) - y_\sigma^*(a_{k-1}) > y_k(\overline{a}_k, \overline{\eta}_k) - y_{k-1}(a_{k-1}, \overline{\eta}_{k-1}). \tag{52}$$

Рассмотрим правую часть неравенства (52)

$$y_k(\overline{a}_k, \overline{\eta}_k) - y_{k-1}(a_{k-1}, \overline{\eta}_{k-1}) = \overline{\eta}_k - \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} a_{i-1}(\overline{\eta}_i - \overline{\eta}_{i-1})}{\overline{a}_k} -$$

$$-\overline{\eta}_{k-1} + \frac{\sum\limits_{i=1}^{k-1} a_{i-1}(\overline{\eta}_i - \overline{\eta}_{i-1})}{a_{k-1}} = (\overline{\eta}_k - \overline{\eta}_{k-1}) -$$

$$-\frac{a_{k-1}(\overline{\eta}_k - \overline{\eta}_{k-1}) + \sum\limits_{i=1}^{k-1} a_{i-1}(\overline{\eta}_i - \overline{\eta}_{i-1})}{\underline{\delta}\overline{\sigma} a_{k-1}} + \frac{\sum\limits_{i=1}^{k-1} a_{i-1}(\overline{\eta}_i - \overline{\eta}_{i-1})}{a_{k-1}} =$$

$$= (\overline{\eta}_k - \overline{\eta}_{k-1}) - (\overline{\eta}_k - \overline{\eta}_{k-1})\overline{\delta}\underline{\sigma} - \frac{\sum\limits_{i=1}^{k-1} a_{i-1}(\overline{\eta}_i - \overline{\eta}_{i-1})}{\underline{\delta}\overline{\sigma} a_{k-1}} +$$

$$+\frac{\sum\limits_{i=1}^{k-1} a_{i-1}(\overline{\eta}_i - \overline{\eta}_{i-1})}{a_{k-1}} = (\overline{\eta}_k - \overline{\eta}_{k-1})(1 - \overline{\delta}\underline{\sigma}) +$$

$$+\frac{\sum\limits_{i=1}^{k-1} a_{i-1}(\overline{\eta}_i - \overline{\eta}_{i-1})}{a_{k-1}}(1 - \overline{\delta}\underline{\sigma}) =$$

$$= \left(\overline{\eta}_k \underbrace{-\overline{\eta}_{k-1} + \frac{\sum\limits_{i=1}^{k-1} a_{i-1}(\overline{\eta}_i - \overline{\eta}_{i-1})}{a_{k-1}}}_{-y_{k-1}(a_{k-1}, \overline{\eta}_{k-1})} \right) (1 - \overline{\delta}\underline{\sigma}).$$

Теперь, в силу того, что $\overline{\eta}_k = \sigma + (1 - \sigma) y_{k-1}(a_{k-1}, \overline{\eta}_{k-1})$, последнее выражение можно записать в виде

$$(\sigma + (1 - \sigma) y_{k-1}(a_{k-1}, \overline{\eta}_{k-1}) - y_{k-1}(a_{k-1}, \overline{\eta}_{k-1}))\,(1 - \overline{\delta}\underline{\sigma}) =$$
$$= \sigma(1 - \overline{\delta}\underline{\sigma})(1 - y_{k-1}(a_{k-1}, \overline{\eta}_{k-1})). \tag{53}$$

Рассмотрим теперь левую часть неравенства (52)

$$y^*_\sigma(\overline{a}_k) - y^*_\sigma(a_{k-1}) = 1 - \left(\frac{a_0}{\overline{a}_k}\right)^\sigma - 1 + \left(\frac{a_0}{a_{k-1}}\right)^\sigma = \left(\frac{a_0}{a_{k-1}}\right)^\sigma -$$
$$-(\overline{\delta}\underline{\sigma})^\sigma \left(\frac{a_0}{a_{k-1}}\right)^\sigma = \left(1 - (\overline{\delta}\underline{\sigma})^\sigma\right) \left(\frac{a_0}{a_{k-1}}\right)^\sigma. \tag{54}$$

Учитывая (53),(54), перепишем неравенство (52)

$$\left(1-(\overline{\delta}\underline{\sigma})^{\sigma}\right)\left(\frac{a_0}{a_{k-1}}\right)^{\sigma} >$$

$$> \sigma(1-\overline{\delta}\underline{\sigma})(1-y_{k-1}(a_{k-1},\overline{\eta}_{k-1}))\Big| : \sigma(1-\overline{\delta}\underline{\sigma})\left(\frac{a_0}{a_{k-1}}\right)^{\sigma},$$

$$\frac{y^*_{\sigma}(\overline{a}_1)}{y_1(\overline{a}_1,\overline{\eta}_1)} = \frac{1-(\overline{\delta}\underline{\sigma})^{\sigma}}{\sigma(1-\overline{\delta}\underline{\sigma})} > \frac{1-y_{k-1}(a_{k-1},\overline{\eta}_{k-1})}{\left(\dfrac{a_0}{a_{k-1}}\right)^{\sigma}} =$$

$$= \frac{1-y_{k-1}(a_{k-1},\overline{\eta}_{k-1})}{1-y^*_{\sigma}(a_{k-1})} = \frac{1-y_{k-1}(a_{k-1},\overline{\eta}_{k-1})-\varepsilon+\varepsilon}{1-y_{k-1}(a_{k-1},\overline{\eta}_{k-1})-\varepsilon} =$$

$$= 1+\frac{\varepsilon}{1-y^*_{\sigma}(a_{k-1})},$$

$$\frac{y^*_{\sigma}(\overline{a}_1)}{y_1(\overline{a}_1,\overline{\eta}_1)} > 1+\frac{\varepsilon}{1-y^*_{\sigma}(a_{k-1})}\Big| * y_1(\overline{a}_1,\overline{\eta}_1)\Big| - y_1(\overline{a}_1,\overline{\eta}_1)$$

$$y^*_{\sigma}(\overline{a}_1) - y_1(\overline{a}_1,\overline{\eta}_1) = \Delta_1(\overline{a}_1,\overline{\eta}_1) \geq \varepsilon > \frac{\varepsilon y_1(\overline{a}_1,\overline{\eta}_1)}{1-y^*_{\sigma}(a_{k-1})},$$

$$y_1(\overline{a}_1,\overline{\eta}_1) + y^*_{\sigma}(a_{k-1}) < \overline{\eta}_1 + y^*_{\sigma}(a_{k-1}) = \sigma + y^*_{\sigma}(a_{k-1}) < 1. \tag{55}$$

Так, для $k = v$ получим, что выполнение неравенства (55) $\sigma + y^*_{\sigma}(a_{v-1}) < 1$ равносильно существованию корня уравнения $\Delta_k(x,\overline{\eta}_k) = \varepsilon$ на отрезке $[x^*_k, \overline{a}_k]$, и так как функция $\Delta_k(x,\overline{\eta}_k)$ на отрезке $[x^*_k, \overline{a}_k]$ является строго монотонной, то этот корень единственен.

Устремляя ε к нулю, получим, что $a_{v-1} \to x_0$ и

$$\sigma + y^*_{\sigma}(a_{v-1}) \to \sigma + y_0 \leq 1,$$

что и требовалось доказать. ■