Санкт-Петербургский государственный университет
Факультет прикладной математики – процессов управления

УДК 519.816

На правах рукописи

Ледовская Вероника Александровна

Выпускная квалификационная работа

Исследование мер риска в теории принятия решений

МК.3002.2014 «Прикладная математика и процессы управления»

Направление подготовки: 01.06.01 «Математика и механика»

Научный руководитель,
доктор физ.-мат. наук,
профессор Колбин В. В.

Рецензент,
кандидат физ.-мат. наук,
директор ЦПИ ФГАОУ ВО «СПбПУ» Козырев С. В.

Санкт-Петербург

2018

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Людям каждый день приходится принимать решения, опираясь на свой жизненный опыт и знания. При принятии решений, касающихся социальной, экономической, политической жизни общества важным аспектом является количественная и качественная оценка предпочтений лиц принимающих решения (ЛПР), а также оценка риска различных альтернатив, из которых ЛПР стремятся выбрать наилучшую. Жизнь человека с каждым годом становится все более насыщенной событиями и информацией, темп жизни, особенно в больших городах, невероятно высок. Поэтому ЛПР также стремится к тому, чтобы принятие решения было быстрым и своевременным, а определение наилучшей альтернативы было возможно для любых ситуаций.

Конечно, нет универсального средства, позволяющего решить любую жизненную задачу, но ученые издавна стремятся к его созданию и рассматривают ситуацию с различных точек зрения. Поэтому и существуют математические направления посвященные исследованию риска, полезности, отношений предпочтения и т.д. Сложность задач, решаемых в данных исследованиях, состоит в том, что они работают с эмпирическими данными, а, значит, не всегда есть возможность применить одну теорию ко всем задачам.

Целью научной работы является исследование нескольких концепций принятия решений: аппарата мер риска, принципа стохастического доминирования, метода ожидаемой полезности и оценки интенсивности предпочтений, а так же выявление и описание случаев, в которых применение перечисленных методов будет наиболее эффективным.

Для достижения цели необходимо решить следующие ***задачи***:

- исследование мер риска на когерентность, выбор наиболее удобных мер риска для применения к эмпирическим данным;
- исследование таких подходов к принятию решения, как принцип стохастического доминирования и метод ожидаемой полезности;

- описание взаимосвязи понятия степени рисковости с методами стохастического доминирования и ожидаемой полезности;
- исследование аппарата для оценки интенсивности предпочтений;
- разработка новых способов оценки интенсивности предпочтений.

Постановка задачи

Целью научной работы является изучение нескольких концепций принятия решений, а также исследование способа оценки интенсивности предпочтений с помощью функции полезности. Исследование разделено на несколько этапов.

В первой главе проведено исследование аппарата мер риска, проверка наиболее часто используемых мер риска на когерентность. Результатом данного исследования является отбор мер риска для дальнейшего изучения в соотношении с другими методами ранжирования альтернатив.

Вторая глава посвящена методу ожидаемой полезности и условиям, накладываемым мерами риска на функцию полезности. Кроме того в ней изучена взаимосвязь степеней рисковости и порядков неприятия риска, характеризующихся производными функции полезности.

В третьей главе проведено исследование принципа стохастического доминирования, его взаимосвязи с методом ожидаемой полезности, аппаратом мер риска и степенями рисковости.

Четвертая глава содержит сравнение трех методов в условиях рисковости разных степеней на численном примере.

В пятой главе изучены методы оценки интенсивности предпочтения и их свойства, проведена работа по предложению новых характеристик и критериев оценивания интенсивности предпочтений на основании функции полезности.

Обзор литературы

Теория принятия решений имеет большой спектр различных методов для принятия решений в условиях риска и неопределенности. Они применяются во многих областях жизнедеятельности, проводя обработку эмпирических данных. Сложность принятия решения состоит не только формализации и описании предпочтений лица принимающего решения (ЛПР), но и в оценке риска.

Пожалуй, одним из основополагающих понятий теории принятия решений является понятие полезности. Впервые оно было использовано Бернулли [1] в XVIII, при исследовании им Петербургского парадокса. В дальнейшем, Дж. Фон Нейман и О. Моргенштерн, которые считаются родоначальниками теории полезности, сформулировали ряд аксиом, характеризующих рациональное поведение ЛПР [2]. Кроме того, предложили функцию полезности, которая помогает отразить индивидуальные предпочтения лица принимающего решения. Фишберн позднее описал системы аксиом, необходимые для применения метода ожидаемой полезности [3]. А Дж. Пратт и К. Эрроу охарактеризовали с помощью функции полезности отношение ЛПР к риску. Развитие теории полезности продолжается и по сей день, но ее методы не всегда удобны из-за необходимости задавать функцию полезности индивидуума, так как данная задача бывает весьма непростой для эмпирических данных.

Альтернативным методом для сравнения решений является принцип стохастического доминирования [4, 5, 6]. При его использовании нет необходимости в обращении к явной функции полезности, хотя на нее накладываются некоторые ограничения [7]. Таким образом, данный метод может быть полезным в тех случаях, когда ЛПР сложно определить функцию полезности. Взаимосвязь различных порядков стохастического доминирования и порядков риска рассматривается в статьях [8, 9]. А в работе [4] описывается связь степени рисковости с принципом стохастического доминирования.

В теории принятия решений ЛПР может опираться не только на полезность альтернатив, но и на величину риска потерь или доходов при выполнении альтернативы. Удобным способом количественного описания риска является построение меры риска. Одни из первых результатов в этом направлении принадлежат Фишберну [10]. Позднее Ф. Арцер, Ф. Делбаен, Ж.-М. Эбер и Д. Хиф ввели понятие когерентной меры риска [11] ввиду отсутствия какой-либо универсальной меры. За рубежом множество работ посвящено исследованию свойств мер риска [12, 13, 14, 15, 16] и возможности их применения в различных сферах жизнедеятельности. В некоторых статьях приводятся исследования, посвященные взаимосвязи порядков стохастического доминирования и мер риска [9, 10].

Все описанные выше методы позволяют ЛПР упорядочить альтернативы по величине их полезности или риска. Но в некоторых ситуациях бывает недостаточно просто упорядочить альтернативы. Необходимо еще и узнать насколько предпочтительнее для ЛПР одна альтернатива по сравнению с другой. Поэтому исследователями был предложен метод оценки интенсивности предпочтения [17, 18, 19], позволяющий выбрать решение в задачах, где нет единственной наилучшей альтернативы.

Глава 1. Анализ, оценка и управление риском

1.1. Понятие риска

Происхождение понятия «риск» неизвестно, существует множество предположений о его возникновении. Некоторые ученые считают, что слово имеет арабское происхождение, другие предполагают, что оно происходит от греческих слов ridsikon , ridsa – утес, скала. В Европе слово использовалось еще в средневековье, но в различных предметных областях, кроме того, было мало распространено. Благодаря появлению книгопечатания слово получает широкое распространение, особенно в Испании и Италии. Поэтому некоторые исследователи предполагают, что термин «риск» имеет испанское (risco – отвесная скала) или итальянское (risiko – опасность, угроза; risicare – лавировать между скал) происхождение [20]. В русский язык слово пришло в XVIII – XIX веке из французского (risqué – опасность).

Существует большое количество интерпретаций понятия «риск», условно можно выделить две ветви: экономическая и математическая.

К экономической ветви можно отнести определение риска, как возможности получения неблагоприятного результат (потерь) или прибыли. В данной ветви риск может рассматриваться как негативный фактор, влияние которого ЛПР стремится снизить. Но при этом риск может быть интерпретирован и как положительный фактор – возможность получения награды за риск, прибыли.

Понятие риска как события, которое может произойти в условиях неопределенности с некоторой вероятностью и приводит к различным исходам, можно отнести к математической ветви интерпретации понятия «риск». В таком смысле риск определяется как вероятность отклонения фактического значения от ожидаемого результата. Соответственно, чем больше это отклонение, тем выше риск [21].

Благодаря американскому экономисту Фрэнку Найту [22] фактор риска получил наиболее интенсивное развитие как один из важнейших факторов, влияющих на принятие решений. Найт был первым, кто предложил понимать риск как объективную вероятность события, которая может быть выражена количественно, в частности, в виде математически вероятностного распределения доходов. Тогда с ростом вероятности стандартного отклонения от ожидаемой величины риск уменьшается, иначе - увеличивается.

На практике возникновение рисковых ситуаций объясняется рядом факторов: отсутствием полной информации о том или ином событии, возникновением непредвиденных ранее ситуаций, которые значительно влияют на решение проблемы и т. д. Для того, чтобы сделать правильный и наиболее выгодный выбор необходимо правильно оценить риск и суметь его минимизировать. Инструментом для оценки и управления риском служит такой математический аппарат, как теория риска. Она неразрывно связана с теорией вероятности, истории развития этих наук тесно связаны друг с другом.

В данной работе будем понимать риск как случайное событие, возникающее с некоторой вероятностью, тогда для количественного описания риска могут быть использованы различные меры риска, которые мы рассмотрим далее.

1.2. Методы управления риском

Защита от негативного влияния рисков заключается в прогнозировании уровня дополнительных затрат, оценке тяжести возможного ущерба, использовании всего финансового механизма для ликвидации угрозы риска или его последствий.

Кроме того, общеизвестны четыре общих метода управления риском: *избегание*, *предотвращение потерь и контроль*, *снижение степени риска*, *поглощение*.

1. Избегание заключается в отказе от совершения рискового мероприятия. Но для финансового предпринимательства исключение риска обычно исключает и прибыль.

2. Предотвращение потерь и контроль как метод управления финансовым риском означает определенный набор превентивных и последующих действий,

которые обусловлены необходимостью предотвратить негативные последствия, уберечься от случайностей, контролировать их размер, если потери уже имеют место или неизбежны.

3. Снижение степени риска. Если невозможно или нежелательно избежать риска, то можно уменьшить влияние его негативных последствий на работу компании.

4. Поглощение состоит в признании ущерба и отказе от его страхования. К поглощению прибегают, когда сумма предполагаемого ущерба незначительна и ей можно пренебречь.

1.3. Анализ мер риска на когерентность

Введем вероятностное пространство (Ω, A, P), где Ω – множество элементарных исходов, A - σ-алгебра, заданная на Ω, а P – вероятностная мера, определенная на множествах из A.

Случайной величиной X (или риском) будем называть произвольное измеримое отображение из Ω в R.

Обозначим χ совокупность всех случайных величин на (Ω, A). Перенумеровав элементы Ω некоторым произвольным образом: $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, обозначим $X(\omega_i) = x_i$, $i = 1,\ldots n$ и будем отождествлять случайные величины $X \in \chi$ с векторами $X = (x_1, \ldots, x_n)$ из R^n.

Напомним [23], что *отношением предпочтения* $\preccurlyeq$ на множестве χ называется произвольное полное транзитивное бинарное отношение, а *мерой риска* называется произвольный функционал $\rho: X \to R$. Говорят, что мера риска ρ представляет отношение предпочтения $\preccurlyeq$, если

$$\rho(X) \leq \rho(Y) \Longrightarrow X \preccurlyeq Y, \text{ для } X, Y \in \chi.$$

Не существует универсальной меры риска, которая могла бы одинаково хорошо охарактеризовать риск для различных ситуаций. Поэтому в 1999 году группа ученых выделила ряд свойств, которыми должна обладать мера риска, для проведения качественного исследования рисков и управления ими [11]. Опишем выделенные учеными свойства и, т.к. на практике меры риска чаще используются для оценки финансовых рисков, дадим пояснение значения свойств на их примере.

1. Монотонность

$$X \leq Y \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y), \text{ для } X, Y \in \chi$$

Свойство монотонности позволяет описать рациональные предпочтения ЛПР. Например, при описании ситуации, в которой ЛПР стремится получить доход, данное свойство определяет правило «чем больше, тем лучше». Соответственно, если доходность X не меньше доходности Y, то согласно свойству риск альтернативы с доходностью X не больше риска, при выборе альтернативы с доходностью Y. Данное свойство описывает отношения предпочтения и критерии выбора в условиях риска для рационального ЛПР.

2. Супераддитивность

$$\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y), \text{ для } X, Y \in \chi.$$

Свойство супераддитивности характеризует поведение меры риска в ситуациях дробления или, наоборот, агрегирования (объединения) рисков и говорит о том, что совокупный риск нескольких альтернатив не превышает сумму рисков альтернатив. Обладающая данным свойством мера отражает преимущества диверсификации (инвестирование в разные активы, с целью снижения рисков) и подходит для описания условия: при объединении рисков ресурсы должны высвобождаться.

3. Положительная однородность

$$\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X), \lambda > 0, X \in \chi.$$

Данное свойство описывает необходимость независимости меры риска от выбора денежных единиц, в которых измеряется доходность (инвестиции), т.е. была инвариантна по отношению к ним. Величина риска не должна зависеть от единиц измерения — будь то рубли или тысячи рублей. Таким образом, свойство однородности отражает рост риска пропорционально росту инвестиций.

4. **Инвариантность относительно сдвига**

$$\rho(X + aI) = \rho(X) + a,\ a \in R,\ X \in \chi.$$

здесь $I = (1,1,\ldots,1)$ – вектор с единичными координатами длины n.

Описанное выше свойство отражает следующую ситуацию: при увеличении доходности X на известную ЛПР константу a, риск для данной альтернативы уменьшается.

Когерентной мерой риска называется функционал $\rho: X \to R$, обладающий свойствами монотонности, супераддитивности, положительной однородности и инвариантности относительно сдвигов [24].

Рассмотрим наиболее часто используемые меры рисков, и проведем анализ данных мер рисков на когерентность.

1. **Математическое ожидание**

- Непрерывное распределение $\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x\ f(x)dx,$
- Дискретное распределение $\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i.$

- Трансляционная инвариантность

Так как математическое ожидание постоянной *a* равно этой постоянной, т.е. постоянную *a* можно рассматривать как случайную величину *x*, которая может принимать только одно значение *a* с вероятностью равной единице. Поэтому $\mu = a \cdot 1 = a$. Поэтому

$$\mu(x + a) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i + a \cdot 1 = \mu(x) + a$$

То есть свойство трансляционной инвариантности выполняется для математического ожидания.

- Супераддитивность.

Рассмотрим две случайные величины X и Y (докажем для дискретного случая)

$$\mu(X+Y)=\sum_{ij}(x_i+y_j)p_{ij}=\sum_{ij}x_i p_{ij}+\sum_{ij}y_j p_{ij}=\sum_{ij}x_i\sum_{ij}p_{ij}+\sum_{ij}y_j\sum_{ij}p_{ij}=$$

$$=\sum_i x_i p_{i\bullet}+\sum_j y_j p_{\bullet j}=\sum_{ij}x_i p(X=x_i)+\sum_{ij}y_j p(Y=y_j)=\mu(X)+\mu(Y).$$

Таким образом, математическое ожидание – это супераддитивная функция.

- Положительная однородность.

Докажем, что это условие выполняется для математического ожидания, рассмотрим случайную величину X и постоянную $c\geq 0$:

$$\mu(cx)=\sum_{i=1}^{n}cx_i p_i=c\sum_{i=1}^{n}x_i p_i=c\mu(x).$$

- Монотонность.

Рассмотрим две случайные величины: X и Y, причем $Y=X+\varepsilon,$ где $\varepsilon\geq 0$- случайная величина, то есть $X\leq Y$

$$\mu(Y)=\mu(X+\varepsilon)=\sum_{ij}(x_i+\varepsilon_j)p_{ij}=\sum_{ij}x_i p_{ij}+\sum_{ij}\varepsilon_j p_{ij}=\mu(X)+\mu(\varepsilon),$$

т.е. математическое ожидание обладает свойством монотонности.

2. Дисперсия, стандартное отклонение

- Непрерывное распределение $\sigma^2=\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)dx$
- Дискретное распределение $\sigma^2=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2 p_i$

- Трансляционная инвариантность

Так как математическое ожидание постоянной a равно этой постоянной, т.е. постоянную a можно рассматривать как случайную величину x, которая может принимать только одно значение a с вероятностью равной единице, то:

$$\sigma(x+a)^2 = \mu\,[(x+a-\mu(x+a))^2] = \mu\,[(x-\mu(x)+a-\mu(a))^2] =$$

$$= \mu\,[(x-\mu(x))^2] = \sigma(x)^2$$

Рассуждения для дисперсии справедливы и для стандартного отклонения:

$$\sigma(x+a) = \sqrt{\sigma(x+a)^2} = \sigma(x)$$

То есть свойство трансляционной инвариантности не выполняется для дисперсии и стандартного отклонения.

- Супераддитивность.

Рассмотрим дисперсию суммы двух случайных величин X и Y (докажем для дискретного случая):

$$\sigma(X+Y)^2 = \sigma\,(X)^2 + \sigma(Y)^2 + 2Cov(X,Y),$$

где ковариация случайных величин имеет следующий вид:

$$Cov(X,Y) = \sigma(X)\cdot\sigma(Y)\cdot r,$$

где r – коэффициент корреляции. Так как $r \le 1$, то верно неравенство

$$Cov(X,Y) \le \sigma(X)\cdot\sigma(Y)$$

воспользовавшись которым, получаем

$$\sigma(X+Y)^2 \le \sigma(X)^2 + \sigma(Y)^2 + 2\sigma(X)\sigma(Y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma(X+Y)^2 \le (\sigma(X)+\sigma(Y))^2$$

Последнее неравенство эквивалентно неравенству

$$\sigma(X+Y) \le \sigma(X) + \sigma(Y).$$

Таким образом, стандартное отклонение – это супераддитивная функция. Но дисперсия таковой не является, так как для нее свойство супераддитивности выполняется тогда и только тогда, когда $r \le 0$, что неверно в общем случае.

- Положительная однородность.

Рассмотрим для дисперсии и стандартного отклонения случайной величины X и постоянной $c \geq 0$:

$$\sigma(cx)^2 = \mu[(cx - \mu(cx))^2] = \mu[(c(x - \mu(x))^2] = c^2 \mu[x - \mu(x)] = c^2 \sigma(x)^2$$

$$\sigma(cx) = \sqrt{c^2 \sigma(x)^2} = c\sigma(x)$$

Следовательно, стандартное отклонение обладает свойством положительной однородности. Но для дисперсии это свойство выполняется только в случае, если $c = 0$ и $c = 1$.

- Монотонность.

Рассмотрим две случайные величины: X и Y, причем $Y = X + \varepsilon,$ где $\varepsilon \geq 0$ – случайная величина, то есть $X \leq Y$, тогда

$$\sigma(y)^2 = \sigma(x + \varepsilon)^2 = \sigma(x)^2 + \sigma(\varepsilon)^2 + 2\,Cov\,(x + \varepsilon)$$

Величина $\sigma(x)^2$ меньше $\sigma(y)^2$, тогда и только тогда, когда

$$\sigma(\varepsilon)^2 + 2\,Cov\,(x + \varepsilon) < 0 \Rightarrow Cov\,(x + \varepsilon) < -\frac{1}{2}\sigma(\varepsilon)^2.$$

Однако, так как свойство монотонности должно выполняться для произвольных положительных случайных величин ε, то дисперсия не удовлетворяет этому свойству, так же как и стандартное отклонение.

3. Мера риска Market-risk

$$\beta_x = r_{X,R} \frac{\sigma_X}{\sigma_R}$$

Приведем выражение к более удобному для исследования виду:

$$\beta_x = r_{X,R} \frac{\sigma_X}{\sigma_R} = \frac{Cov(X,R)}{\sigma_X \sigma_R} \frac{\sigma_X}{\sigma_R} = \frac{Cov(X,R)}{\sigma_R^2} \qquad (1.3.1)$$

- Трансляционная инвариантность.

Рассмотрим случайную величину X и постоянную $c > 0$:

$$\beta(X+c)=\frac{Cov(X+c,R)}{\sigma_R^2}=\frac{\mu[(X+c-\mu(X+c))\cdot(R-\mu(R))]}{\sigma_R^2}=\frac{Cov(X,R)}{\sigma_R^2}=\beta_x(x)$$

Таким образом, для данной меры не выполняется свойство инвариантности.

- Супераддитивность.

Докажем, что выполняется условие супераддитивности:

$$\beta(X+Y)=\frac{Cov(X+Y,R)}{\sigma_R^2}=\frac{\mu[(X+Y-\mu(X+Y))\cdot(R-\mu(R))]}{\sigma_R^2}=$$

$$=\frac{\mu[(X+Y-\mu(X)-\mu(Y))\cdot(R-\mu(R))]}{\sigma_R^2}=$$

$$=\frac{\mu[(X-\mu(X))(R-\mu(R)+(Y-\mu(Y))\cdot(R-\mu(R))]}{\sigma_R^2}=$$

$$=\frac{\mu[(X-\mu(X))\cdot(R-\mu(R)]+\mu[(Y-\mu(Y))\cdot(R-\mu(R))]}{\sigma_R^2}=$$

$$=\frac{\mu[(X-\mu(X))\cdot(R-\mu(R)]}{\sigma_R^2}+\frac{\mu[(Y-\mu(Y))\cdot(R-\mu(R))]}{\sigma_R^2}=$$

$$=\frac{Cov(X,R)}{\sigma_R^2}+\frac{Cov(Y,R)}{\sigma_R^2}=\beta(X)+\beta(Y).$$

- Положительная однородность.

Для случайной величины X и постоянной $c>0$ выполняется

$$\beta(cX)=\frac{Cov(cX,R)}{\sigma_R^2}=\frac{\mu[(cX-\mu(cX))\cdot(R-\mu(R))]}{\sigma_R^2}=\frac{c\cdot Cov(X,R)}{\sigma_R^2}=c\cdot\beta(X)$$

- Монотонность.

Рассмотрим две случайные величины: X и Y, причем $Y=X+\varepsilon,$ где $\varepsilon\geq 0-$ случайная величина, то есть $X\leq Y$

$$\beta(X+\varepsilon)=\frac{Cov(X+\varepsilon,R)}{\sigma_R^2}=\frac{\mu[(X+\varepsilon-\mu(X+\varepsilon))\cdot(R-\mu(R))]}{\sigma_R^2}=$$

$$=\frac{\mu[(X-\mu(X))\cdot(R-\mu(R)]}{\sigma_R^2}+\frac{\mu[(\varepsilon-\mu(\varepsilon))\cdot(R-\mu(R))]}{\sigma_R^2}=$$

$$= \frac{Cov(X,R)}{\sigma_R^2} + \frac{Cov(\varepsilon,R)}{\sigma_R^2} = \beta(X) + \beta(\varepsilon).$$

4. Мера риска Lower Partial Moment

- Непрерывное распределение

$$LPM_{n,t}(X) = \int_{-\infty}^{t} (t-x)^n f(x)dx, \tag{1.3.2}$$

- Дискретное распределение

$$LPM_{n,t}(X) = \sum_i \max[(t-x_i),0]^n p_i, \tag{1.3.3}$$

В статье [12] приводятся следующие результаты проверки меры на когерентность.

- Положительная однородность

Мера $LPM_{n,t}(X)$ удовлетворяет условию положительной однородности тогда и только тогда, когда $t=0$ и $n=1$. Более того, если $t=0$, то порядок однородности $LPM_{n,t}(X)$ равен *n*, то есть

$$LPM_{n,0}(\lambda X) = \lambda^n LPM_{n,0}(X).$$

Доказательство. Покажем положительную однородность меры:

$$LPM_{n,t}(X) = \lambda \sum_i \max\left[\left(\frac{t}{\lambda} - x_i\right) I_{t-x\ge 0}\right]^n p_i .$$

Мера $LPM_{n,t}(X)$ положительно однородна тогда и только тогда, когда $t=0$. Иначе,

- если $t>0 \wedge \lambda>1$ или $t<0 \wedge 0<\lambda<1$, то

$$LPM_{n,t}(\lambda X) < \lambda^n LPM_{n,t}(X);$$

- если $t>0 \wedge 0<\lambda<1$ или $t<0 \wedge \lambda>1$, то

$$LPM_{n,t}(\lambda X) > \lambda^n LPM_{n,t}(X).$$

Поэтому $LPM_{n,t}(X)$ положительно однородна тогда и только тогда, когда $t=0$ и $n=1$.

- Трансляционная инвариантность

Мера $LPM_{n,t}(X)$ не удовлетворяет условию трансляционной инвариантности. Она уменьшается (увеличивается), если постоянная (безрисковая) составляющая добавляется к (вычитается из) случайной величине.

Доказательство. Рассмотрим случайную величину Y с $y_i=\varepsilon$, $\forall i\in\Omega$ $\varepsilon\in R\setminus\{0\}$ и величину $Z=X+Y$, тогда

$$LPM_{n,t}(Z)\le\sum_{i\in\Omega}[(t-x_i)I_{t-x_i\ge0}-\varepsilon\, I_{t-x_i-\varepsilon\ge0}]^n\, p_i\ .$$

- Монотонность

Мера $LPM_{n,t}(X)$ монотонна при всех $t\in R$ и $n>0$.

Доказательство. Рассмотрим случайную величину Y с $y_i\ge0$, $\forall i\in\Omega$ и $\exists i: y_i>0$. Пусть случайная величина Z определяется как $X+Y$. Тогда

$$LPM_{n,t}(Z)\le\sum_{i\in\Omega}[(t-x_i)I_{t-x_i\ge0}-y_i\, I_{t-x_i-y_i\ge0}]^n\, p_i<$$

$$<\sum_{i\in\Omega}[(t-x_i)I_{t-x_i\ge0}]^n\, p_i=LPM_{n,t}(X)\ .$$

- Супераддитивность

Мера $LPM_{n,t}(X)$ супераддитивна при всех $t\in R_+$ и $0<n\le1$.

Доказательство. Перепишем формулу (1.3.2) с использованием индикаторной функции, тогда

$$LPM_{n,t}(X)=\sum_i\max[(t-x_i)\ I_{t-x\ge0}]^n\, p_i\ .$$

Рассмотрим две случайные величины X и Y. Рассмотрим единичную ситуацию:

$$[(t-x-y)I_{t-x-y\geq 0}]^n p \leq [(2t-x-y)I_{t-x-y\geq 0}]^n p =$$

$$=[(t-x)I_{t-x\geq y}+(t-y)I_{t-y\geq x}]^n p \leq [(t-x)I_{t-x\geq 0}+(t-y)I_{t-y\geq 0}]^n p\,. \qquad (1.3.4.)$$

Первое неравенство следует из того, что величина t неотрицательна. Последнее неравенство выполняется, так как верны следующие отношения $(t-x)I_{t-x\geq 0} \geq (t-x)I_{t-x\geq y}$ и $(t-y)I_{t-y\geq 0} \geq (t-y)I_{t-y\geq x}$. В первом отношении правая и левая части неравенства равны всегда, кроме случая, когда $I_{t-x\geq 0} \neq I_{t-x\geq y}$. Когда $0<t-x<y$, то $(t-x)I_{t-x\geq 0} > 0 = (t-x)I_{t-x\geq y}$. В случае выполнения неравенства $y \leq t-x<0$, получаем $(t-x)I_{t-x\geq 0} = 0 > (t-x)I_{t-x\geq y}$.

Мы рассмотрели одно состояние, для того, чтобы обобщить полученный вывод на множество состояний, используется лемма 1.3.1:

Лемма 1.3.1. Для $n>1$, $n=1$, $[0<n<1]$ и $a_i, b_i \in R_+$, $\forall i \in \Omega$, и $\exists\, i \in \Omega : a_i > 0 \wedge b_i > 0$, выполняется неравенство (равенство):

$$\sum_{i\in\Omega}(a_i+b_i)^n > (=)[<]\sum_{i\in\Omega}(a_i)^n + \sum_{i\in\Omega}(b_i)^n\,.$$

Тогда для $n \geq 1$

$$\sum_{i\in\Omega}[(t-x_i-y_i)I_{t-x_i-y_i\geq 0}]^n p_i \leq$$

$$\leq \sum_{i\in\Omega}[(t-x_i)I_{t-x_i\geq 0}+(t-y_i)I_{t-y_i\geq 0}]^n p_i \leq \qquad (1.3.5)$$

$$\leq \sum_{i\in\Omega}[(t-x_i)I_{t-x_i\geq 0}]^n p_i + \sum_{i\in\Omega}[(t-y_i)I_{t-y_i\geq 0}]^n p_i\,.$$

Когда $t \geq 1$, а $n<1$, то знак неравенства (1.3.5) изменится на противоположный. А при условии $t<0$ в неравенстве (1.3.4) знак изменится, так как мы суммируем отрицательные числа. Поэтому, в общем случае, мера не является супераддитивной.

5. Мера рискаValue-at- risk

$$VaR_\alpha(X) = \inf\{l \in R : p(X \leq l) \geq \alpha\} \text{ или } VaR_\alpha(X) = -F^{-1}(\alpha).$$

- Монотонность:

Если X и Y – случайные величины, для которых выполняется неравенство: $X \leq Y$, тогда $p(X \geq l) \leq p(Y \geq l)$ для любого $l \in R$. Таким образом, если l принадлежит множеству $\{l \in R : p(Y \leq l) \geq \alpha\}$, тогда l принадлежит множеству $\{l \in R : p(X \leq l) \geq \alpha\}$. Отсюда, в частности

$$\inf\{l \in R : p(X \leq l) \geq \alpha\} \leq \inf\{l \in R : p(Y \leq l) \geq \alpha\},$$

поэтому

$$VaR_{\alpha}(X) \leq VaR_{\alpha}(Y).$$

- Положительная однородность:

Выполнение данного условия рассмотрено в [13], приведем его ниже.

Для случайной величины X и постоянной $c > 0$ выполняется

$$VaR_{\alpha}(\tilde{n}X) = \tilde{n}VaR_{\alpha}(X).$$

Доказательство:

$$VaR_{\alpha}(\tilde{n}X) = \inf\{x \in R : p(\tilde{n}X \leq x) \geq \alpha\} =$$

$$= c \cdot \inf\{x/c \in R : p(X \leq x/c) \geq \alpha\} = cVaR_{\alpha}(X).$$

- Трансляционная инвариантность:

Для случайной величины X и постоянной $b > 0$ выполняется

$$VaR_{\alpha}(X + b) = VaR_{\alpha}(X) + b.$$

Доказательство:

$$VaR_{\alpha}(X + b) = \inf\{x \in R : p(X + b \leq x) \geq \alpha\} = \inf\{x \in R : p(X \leq x - b) \geq \alpha\} =$$

$$= \inf\{s \in R : p(X \leq s) \geq \alpha\} + b = VaR_{\alpha}(X) + b,$$

где $s = x - b$.

- Супераддитивность:

В общем случае $VaR_{\alpha}(X)$ не является супераддитивной мерой, данное обстоятельство описано в [14, 15]. Приведем для доказательства этого утверждения контрпример.

Представим $VaR_\alpha(X)$ в следующем виде: $VaR_\alpha(X) = (c/(1-\alpha))^{1/z}$. Это простейшее определение $VaR_\alpha(X)$, оно верно, если квантиль x_α задается значением

$$1-\alpha = p\,(X > x_\alpha) = cx_\alpha^{-z}.$$

Тогда:

$$VaR_\alpha(X+Y) \approx (2c/(1-p))^{1/z} = 2^{1/z}(c/(1-p))^{1/z}$$

$$VaR_\alpha(X) + VaR_\alpha(Y) \approx (2c/(1-p))^{1/z}.$$

Если $z<1$, то $2^{1/z} > 2$ и, следовательно, $VaR_\alpha(X)$ не удовлетворяет условию супераддитивности. Например, для $c=1$ и $z=1/2$ мы получаем

$$VaR_\alpha(X+Y) \approx 2(VaR_\alpha(X) + VaR_\alpha(Y),$$

а для $\tilde{n}=1$ и $z=1/4$ мы имеем

$$VaR_\alpha(X+Y) \approx 8(VaR_\alpha(X) + VaR_\alpha(Y).$$

6. Мера риска Expected Shortfall

Для случайной величины X с уровнем доверия $\alpha \in (0;1)$ мера риска $ES_\alpha(X)$ будет иметь следующий вид:

- Непрерывное распределение

$$ES_\alpha(X) = \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha VaR_\beta(X,\beta)\,d\beta, \tag{1.3.6}$$

- Дискретное распределение

$$ES_\alpha(X) = -\alpha^{-1}(E[X \cdot 1_{\{X \le x_\alpha\}}] + x_\alpha(\alpha - p(X \le x_\alpha))), \tag{1.3.7}$$

где $x_\alpha = \inf\{x \in R : p\,(X \le x) \ge \alpha\}$,

$$1_{\{X \le x_\alpha\}} = \begin{cases} 1, \text{ если } \alpha \text{ удовлетворяет условию } X \le x_\alpha \\ 0, \text{ если } \alpha \text{ не удовлетворяет условию } X \le x_\alpha \end{cases}$$ – индикаторная

функция, причем $E[\,1_{\{X \le x_\alpha\}}] = \alpha$. Такое представление описано в статье [25].

- Положительная однородность.

Для случайной величины X и постоянной $c > 0$ выполняется

$$ES_{\alpha}(\tilde{n}X) = \tilde{n}ES_{\alpha}(X).$$

Доказательство следует из положительной однородности $VaR_{\alpha}(X)$ по формуле (1.3.6):

$$ES_{\alpha}(\tilde{n}X) = \frac{1}{1-\alpha}\int_{\alpha}^{1} VaR_{\beta}(cX, \beta)\, d\beta = \frac{c}{1-\alpha}\int_{\alpha}^{1} VaR_{\beta}(X, \beta)\, d\beta = cES_{\alpha}(X).$$

- Трансляционная инвариантность.

Для случайной величины X и постоянной $b > 0$ выполняется

$$ES_{\alpha}(X + b) = ES_{\alpha}(X) + b.$$

Доказательство следует из трансляционной инвариантности $VaR_{\alpha}(X)$.

- Монотонность.

Рассмотрим две случайные величины X и Y. Если $X \le Y$, то

$$ES_{\alpha}(X) \le ES_{\alpha}(Y).$$

Доказательство следует из монотонности меры риска $VaR_{\alpha}(X)$.

- Супераддитивность меры.

Доказательство выполнения этого свойства приведено в [25].

Рассмотрим представление меры риска $ES_{\alpha}(X)$ в виде (1.3.7):

Введем обозначение:

$$1_{\{X \le x\}}^{(\alpha)} = \begin{cases} 1_{\{X \le x\}}, \text{если } p(X = x) = 0 \\ 1_{\{X \le x\}} + \dfrac{\alpha - p(X \le x)}{p(X \le x)} \cdot 1_{\{X = x\}}, \text{если } p(X = x) > 0 \end{cases},$$

можем заметить, что

$$1_{\{X \le x\}}^{(\alpha)} \in [0;1],$$

$$E[1^{(\alpha)}_{\{X \le x\}}] = \alpha,$$

$$\alpha^{-1} E[X \cdot 1^{(\alpha)}_{\{X \le x\}}] = -ES_\alpha(X).$$

Тогда

$$ES_\alpha(X+Y) = -\alpha^{-1} E[(X+Y) \cdot 1^{(\alpha)}_{\{X+Y \le (x+y)_\alpha\}}] =$$

$$= -\alpha^{-1} E[X \cdot 1^{(\alpha)}_{\{X+Y \le (x+y)_\alpha\}} + Y \cdot 1^{(\alpha)}_{\{X+Y \le (x+y)_\alpha\}}].$$

Составим разность $ES_\alpha(X) + ES_\alpha(Y) - ES_\alpha(X+Y)$ и определим ее знак:

$$\alpha(ES_\alpha(X) + ES_\alpha(Y) - ES_\alpha(X+Y)) = -E[X \cdot 1^{(\alpha)}_{\{X \le x_\alpha\}}] - E[Y \cdot 1^{(\alpha)}_{\{Y \le y_\alpha\}}] +$$

$$+ E[X \cdot 1^{(\alpha)}_{\{X+Y \le (x+y)_\alpha\}} + Y \cdot 1^{(\alpha)}_{\{X+Y \le (x+y)_\alpha\}}] =$$

$$= E[X(1^{(\alpha)}_{\{X+Y \le (x+y)_\alpha\}} - 1^{(\alpha)}_{\{X \le x_\alpha\}}) + Y(1^{(\alpha)}_{\{X+Y \le (x+y)_\alpha\}} - 1^{(\alpha)}_{\{Y \le y_\alpha\}})] \ge$$

$$\ge x_\alpha E[1^{(\alpha)}_{\{X+Y \le (x+y)_\alpha\}} - 1^{(\alpha)}_{\{X \le x_\alpha\}}] + y_\alpha E[1^{(\alpha)}_{\{X+Y \le (x+y)_\alpha\}} - 1^{(\alpha)}_{\{Y \le y_\alpha\}}] =$$

$$\ge x_\alpha(\alpha - \alpha) + y_\alpha(\alpha - \alpha) = 0.$$

В неравенстве мы использовали следующий факт:

$$\begin{cases} 1^{(\alpha)}_{\{X+Y \le (x+y)_\alpha\}} - 1^{(\alpha)}_{\{X \le x_\alpha\}} \ge 0, \text{если } X > x_\alpha \\ 1^{(\alpha)}_{\{X+Y \le (x+y)_\alpha\}} - 1^{(\alpha)}_{\{X \le x_\alpha\}} \le 0, \text{если } X < x_\alpha \end{cases}$$

Таким образом, получаем, что мера $ES_\alpha(X)$ супераддитивна.

7. Мера риска Worst Conditional Expectation

Для случайной величины X с уровнем доверия $\alpha \in (0;1)$ мера риска $WCE_\alpha(X)$ будет иметь следующий вид:

$$WCE_\alpha(X) = -\inf\{E[X \mid A] : A \in \Omega, p(A) > \alpha\}.$$

Впервые эта мера была введена в статье [11] как когерентная мера риска. По своей сути она является наихудшим математическим ожиданием, поэтому удовлетворяет всем условиям когерентности [16, 25].

Результаты проведенного анализа мер риска были опубликованы в статьях [26, 27] и в книге [28].

1.4. Практическое применение

Области применения мер риска разнообразны, с помощью мер риска можно оценивать не только финансовые или материальные потери или прибыли, но и использовать меры рисков для оценки риска смертельных случаев при возникновении чрезвычайных ситуаций, а именно стихийных бедствий. В данном параграфе будут найдены оценки рисков по количеству погибших при наводнениях, землетрясениях, извержениях вулканов и цунами.

Постановка задачи

По статистическим данным, приведенным в табл. 1. Приложения, о количестве погибших при наводнениях, землетрясениях, извержениях вулканов и цунами

- провести оценку рисков в количестве погибших с помощью рассмотренных ранее мер риска;
- составить шкалы рисковости по каждой мере рисков;
- сравнить полученные результаты.

Решение

Так как в расчетах использованы эмпирические данные [29, 30], то для расчета мер использовались их дискретные формы записи. Существуют некоторые особенности вычисления мер для дискретной функции распределения, которые будут описаны ниже. Расчеты проводились с помощью программы Microsoft Excel 2007.

1. **Расчет мер**

Проведем расчеты для мер, проанализированных в данной главе.

- **дисперсия и стандартное отклонение**

Стихийное бедствие	*Дисперсия*	*Стандартное отклонение*
наводнение	1915184872	43763
землетрясение	3898477104	62438
извержение вулкана	268796024	16395
цунами	144777643	12032

- **Мера β-риск**

Для расчета меры риска β-риск используем формулу (1.3.1). Для начала необходимо рассчитать величину σ_R – стандартное отклонение для случайной величины, характеризующей общее количество жертв для всех стихийных бедствий, которое получилось следующим $\sigma_R = 40810{,}35$.

Промежуточные результаты, которые были получены для нахождения меры β-риск, приведены в табл. 2 Приложения. В таблице расположенной ниже приведены значения меры β-риск для разных видов стихийных бедствий.

Стихийное бедствие	*β-риск*
наводнение	1,03288
землетрясение	1,299354
извержение вулкана	0,317872
цунами	0,292144

- **Мера Value-at-risk**

Мера риска $VaR_\alpha(X)$ для эмпирических данных представляет собой выборочный квантиль соответствующего уровня α, результаты для данной меры риска приведены ниже в таблице.

Стихийное бедствие	$VaR_\alpha(X)$			
	$\alpha = 0{,}05$	$\alpha = 0{,}3$	$\alpha = 0{,}5$	$\alpha = 0{,}95$
наводнение	1525	5624	7625	107485
землетрясение	1000	1621	2500	87587
извержение вулкана	9	700	1335	29025
цунами	119	2182	3620	30000

- **Мера Lower Partial Moment**

При расчете меры $LPM_{n,t}$ по формуле (1.3.3) необходимо задать уровень t – уровень потерь, будем принимать его равным различным квантилям распределения. Тогда для удобства обозначим $LPM_{n,\alpha}$ – мера $LPM_{n,t}$, для которой величина t равна квантилю с уровнем вероятности α. Уровень $\alpha = 0{,}05$

нецелесообразно, так как этому уровню соответствует только одно наблюдение, и при расчете меры получаем значение 0.

Стихийное бедствие	$LPM_{n,\alpha}$		
	$\alpha = 0{,}3$	$\alpha = 0{,}5$	$\alpha = 0{,}95$
наводнение	540	1298	87432
землетрясение	306	895	99341
извержение вулкана	72	360	29249
цунами	123	622	24700

- **Мера Expected Shortfall**

Для расчета меры $ES_\alpha(X)$ можно использовать несколько способов, работе были использованы два из них:

– Первый способ, представлен в статье [16],

$$ES_\alpha(X) = -\frac{1}{[N\alpha]}\sum_{i=1}^{[N\alpha]} X_i\ , \qquad (1.4.1)$$

– второй способ, представлен в статье [17],

$$ES_\alpha(X) = -\frac{1}{N\alpha}\left(\sum_{i=1}^{[N\alpha]} X_i + (N\alpha - [N\alpha])X_{[N\alpha]}\right), \qquad (1.4.2)$$

здесь N – количество исходов, $[N\alpha]$ – целая часть $N\alpha$. Для удобства обозначим $ES_\alpha^{(1)}(X)$ – меру Expected Shortfall, рассчитанную по первому способу, а $ES_\alpha^{(2)}(X)$ – меру, рассчитанную по первому способу. Результаты вычислений приведены ниже в виде таблицы.

Стихийное бедствие	$ES_\alpha^{(1)}(X)$			
	$\alpha = 0{,}05$	$\alpha = 0{,}5$	$\alpha = 0{,}95$	$\alpha = 0{,}3$
наводнение	1525	4929	13059	3802
землетрясение	2000	1802	17920	1421
извержение вулкана	40	664	4642	340
цунами	119	2273	9480	2064

Стихийное бедствие	$ES_\alpha^{(2)}(X)$			
	$\alpha = 0{,}05$	$\alpha = 0{,}5$	$\alpha = 0{,}95$	$\alpha = 0{,}3$
наводнение	1916	5036	16533	3829

Стихийное бедствие	$ES_{\alpha}^{(2)}(X)$			
	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,5$	$\alpha = 0,95$	$\alpha = 0,3$
землетрясение	1000	1658	12189	1267
извержение вулкана	19	609	3741	280
цунами	325	2340	8861	1762

- **Мера Worst Conditional Expectation**

Мера риска $WCE_{\alpha}(X)$ дает грубые результаты в случае, когда рассматриваемые исходы близки к равновероятным, это обусловлено ее природой. Использование данной меры распределений с равновероятными событиями нецелесообразно.

2. Составление шкал

Теперь составим шкалы рисковости для рассмотренных мер, на них сверху вниз в порядке убывания рисковости расположены стихийные бедствия.

Шкала №1 изображенная на рис. 1.1, получена для мер: $VaR_{0,05}(X)$, $VaR_{0,95}(X)$, $LPM_{1,0,03}(X)$, $LPM_{1,0,05}(X)$, $ES_{0,05}^{(1)}(X)$, $ES_{0,95}^{(1)}(X)$, $ES_{0,05}^{(2)}(X)$, $ES_{0,95}^{(2)}(X)$.

Рис. 1.1. *Шкала рисковости №1*

Шкала №2 изображенная на рис. 1.2, получена для мер: $VaR_{0,3}(X)$, $VaR_{0,5}(X)$, $ES_{0,3}^{(1)}(X)$, $ES_{0,5}^{(1)}(X)$, $ES_{0,3}^{(2)}(X)$, $ES_{0,5}^{(2)}(X)$.

Рис. 1.2. *Шкала рисковости №2*

Шкала №3 изображенная на рис. 1.3, получена для мер $LPM_{1,0,95}(X)$ и β-риск.

Рис. 1.3. *Шкала рисковости №3*

3. Сравнение результатов

Можно сделать вывод, что самая большая дисперсия (разброс) жертв характерна для землетрясений, за ними следуют наводнения, извержения и цунами.

По шкале рисковости $VaR_\alpha(X)$ с уровнем α = 0,05 и α = 0,95 видно, что самые большие потери ожидаются при наводнениях, затем следуют землетрясения, цунами и извержения. Но для шкалы рисковости $VaR_\alpha(X)$ с уровнем α = 0,3 и α = 0,5 ситуация меняется, в порядке убывания следуют: наводнения, цунами, землетрясения, извержения. То есть шкала рисковости $VaR_\alpha(X)$ зависит от того, для какой части распределения рассчитывается мера: для хвостовой или центральной. Аналогичная ситуация складывается и для меры $ES_\alpha(X)$. Так же при сравнении результатов $ES_\alpha^{(1)}(X)$ и $ES_\alpha^{(2)}(X)$ видно, что $ES_\alpha^{(2)}(X)$ имеет больший запас, чем $ES_\alpha^{(1)}(X)$, но все же не такой большой, как $VaR_\alpha(X)$. Таким образом, наиболее предпочтительной мерой при расчете рисков для эмпирических распределений будет $ES_\alpha^{(2)}(X)$.

Шкала меры $LPM_{n,\alpha}(X)$ дает абсолютно другие результаты. Для уровня вероятности α = 0,95 получена следующая шкала: землетрясения, наводнения, извержения, цунами, а α = 0,3 и α = 0,5 – наводнения, землетрясения, цунами, извержения, что совпадает со шкалой рисковости $ES_\alpha(X)$ с уровнем α = 0,05 и α =

0,95. Мера $LPM_{n,\alpha}(X)$ не является когерентной, как и $VaR_{\alpha}(X)$, но дает результаты менее грубые, чем $VaR_{\alpha}(X)$.

Шкала для β-риска совпадает со шкалой $LPM_{n,\alpha}(X)$ для уровня α = 0,95. Она не имеет аналогов среди когерентных мер риска.

Меру $WCE_{\alpha}(X)$ возможно вычислить только для распределений, в которых события не являются равновероятными. Поэтому использование $WCE_{\alpha}(X)$ в распределениях близких к равновероятным нецелесообразно. Результаты опубликованы в книге [28].

Глава 2. Принцип ожидаемой полезности

2.1. Понятие ожидаемой полезности

Впервые математическая формулировка понятия ожидаемой полезности появилась еще в XVIII веке. В попытке объяснить Санкт-Петербургский парадокс ученые Габриэль Крамер и Даниэль Бернулли [1] пришли к выводу, что люди при принятии решения стремятся увеличить ожидаемую ценность (полезность), а не ожидаемый максимальный выигрыш. В ходе своих рассуждений Бернулли предложил функцию полезности и показал, что функция ожидаемой полезности для нее конечна. При этом ученый не пытался измерить полезность с помощью той функции и не оценивал рациональность поведения людей. Только спустя почти два века Джон фон Нейман и Оскар Моргенштерн «практически определили численную полезность как объект, для которого подсчет математических ожиданий является законным» (Нейман и Моргенштерн, 1970, с. 55 в [2]). Они описали рациональное поведение ЛПР с помощью системы из пяти аксиом, из которых можно вывести принцип максимума ожидаемой полезности. Этот принцип используется и в настоящее время при принятии решений в условиях риска и неопределенности.

2.2. Функция полезности фон Неймана – Моргенштерна

Принцип рационального принятия решений в условиях неопределенности с использованием функции полезности опирается на пять аксиом, определенных фон Нейманом и Моргенштерном. Они отражают необходимые условия для непротиворечивого поведения индивидуума. Данные аксиомы описаны в книге [31] и приведены ниже. Для начала введем определение.

Определение 2.2.1. Обозначим $G(x, z : \alpha)$ ситуацию, в которой индивид с вероятностью α получает денежную сумму x, и с вероятностью $(1-\alpha)$ – сумму z.

Кроме того, введем следующее обозначение: пусть S – множество всех возможных исходов.

Аксиома 2.2.1. *Аксиома сравнимости* (*полноты*). Для всего множества возможных исходов S ЛПР может либо предпочесть исход x исходу y $(x \succ y)$, либо $(y \succ x)$, либо он безразличен в отношении к выбору между x и y $(x \sim y)$. Запись $(x \succeq y)$ означает, что исход x предпочтительнее исхода y либо индивид безразличен в отношении к выбору между x и y.

Аксиома 2.2.2. *Аксиома транзитивности* (*состоятельности*). Если $(x \succ y)$ и $(y \succ z)$, то $(x \succ z)$. Если $(x \sim y)$ и $(y \sim z)$, то $(x \sim z)$.

Аксиома 2.2.3. *Аксиома сильной независимости*. Предположим, что сложилась ситуация, в которой ЛПР с вероятностью α получает денежную сумму x, и с вероятностью $(1-\alpha)$ – сумму z, т. е. $G(x, z:\alpha)$. Сильная независимость означает, что если индивид безразличен в отношении к выбору между x и y $(x \sim y)$, то он также будет безразличен в отношении к выбору между ситуациями $G(x, z:\alpha)$ и $G(y, z:\alpha)$, т. е. из $(x \sim y)$ следует $G(x, z:\alpha) \sim G(y, z:\alpha)$.

Аксиома 2.2.4. *Аксиома измеримости.* Если $(x \succ y \sim z)$ или $(x \sim y \succ z)$, то существует единственная вероятность α, такая, что $y \sim G(x, z:\alpha)$.

Поясним смысл этой аксиомы на примере. Пусть существуют три исхода: $x = 1000$; $y = 0$; величина z означает смерть игрока. Исходя из здравого смысла, смерть нельзя сравнивать ни с каким выигрышем, и соответствующего этому исходу значения вероятности α существовать не может. Однако в жизни бывают ситуации, когда некий проигрыш равнозначен смерти. Тогда утверждение $y \sim G(x, z:\alpha)$ можно считать справедливым для некоторого значения $0 \le \alpha \le 1$.

Аксиома 2.2.5. *Аксиома ранжирования.* Если альтернативы y и u находятся по предпочтительности между альтернативами x и z и можно построить такие ситуации, в которых ЛПР безразличен в отношении выбора между y и $G(x, z:\alpha_1)$, а также при выборе между u и $G(x, z:\alpha_2)$, то при $\alpha_1 > \alpha_2$ $(y \succ u)$.

Утверждение аксиомы вполне соответствует здравому смыслу: чем больше вероятность крупного выигрыша, тем больше затрат требует игра, т. е. тем большая плата потребуется за приобретение права участвовать в этой игре.

Учитывая то, что люди выбирают по принципу «чем больше, тем лучше», и выполняются приведенные аксиомы, можно сделать вывод, *что ЛПР при принятии решения будет стремиться к максимизации ожидаемой полезности.* Другими словами, из всех возможных решений он выберет то, которое обеспечивает наибольшую ожидаемую полезность. Сформулируем определение полезности по Нейману-Моргенштерну, так же описанное в книге [31].

Определение 2.2.2. *Полезность* – это некоторое число, приписываемое лицом, принимающим решение, каждому возможному исходу. Функция полезности Неймана-Моргенштерна для ЛПР показывает полезность, которую он приписывает каждому возможному исходу. У каждого ЛПР своя функция полезности, которая показывает его предпочтение к тем или иным исходам в зависимости от его отношения к риску.

Определение 2.2.3. Пусть на некотором множестве альтернатив X определено отношение предпочтения $\succcurlyeq$. Тогда вещественнозначная функция $u(x)$ определенная на X будет называться *функцией полезности*, если выполняется условие: $x \succcurlyeq y \Leftrightarrow u(x) \geq u(y)$ для всех $x, y \in X$.

Функция полезности не только помогает количественно описать предпочтения ЛПР, но и оценить его отношение к риску. ЛПР по отношению к риску условно делятся на три группы: склонные к риску, несклонные и безразличные. В общем случае функция полезности может быть трех типов, графики которых можно охарактеризовать так:

- несклонность к риску – строго вогнутая функция, у которой каждая дуга кривой лежит выше своей хорды;
- безразличие к риску – прямая линия;
- склонность к риску – строго выпуклая функция, у которой каждая дуга кривой лежит ниже своей хорды.

Независимо друг от друга ученые Джон Пратт (1964) [32] и Кеннет Эрроу (1971) [33] разработали меру неприятия риска, которая представляет собой отношение второй производной функции полезности к первой, взято с отрицательным знаком. Эту меру принято называть *коэффициентом Эрроу-Пратта неприятия риска*:

$$R_\alpha = -\frac{u''(x)}{u'(x)}.$$

Мера удобна тем, что является инвариантной относительно линейных преобразований и, кроме того, принимает постоянное значение для линейных и экспоненциальных функций полезности.

Прежде, чем переходить к вероятностному описанию принципа ожидаемой полезности, дадим общее определение ожидаемой полезности события.

Определение 2.2.4. *Ожидаемая полезность события* равна сумме произведений вероятностей исходов на значения полезностей этих исходов.

2.3. Модель ожидаемой полезности

Принятие решений в условиях риска, где риск выражается в вероятностной неопределенности исходов, подразумевает выбор альтернатив, которые описываются с помощью вероятностной меры на множестве исходов, например, с помощью функции распределения. Опишем соотношение нескольких альтернатив, используя соответствующие функции распределения, а также функции полезности для данных альтернатив.

Введем вероятностное пространство (Ω, A, P), где Ω – множество элементарных исходов, A – σ-алгебра, заданная на Ω, а P – вероятностная мера, определенная на множествах из A.

Случайной величиной X (или риском) будем называть произвольное измеримое отображение из Ω в R.

Обозначим χ совокупность всех случайных величин на (Ω, A). Перенумеровав элементы Ω некоторым произвольным образом: $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, обозначим $X(\omega_i) = x_i$, $i = 1, \dots, n$ и будем отождествлять случайные величины $X \in \chi$ с векторами $X = (x_1, \dots, x_n)$ из R^n.

Будем рассматривать отношение предпочтения $\succ$ на множестве альтернатив, которые являются вероятностными мерами. В работе [3], разработано несколько систем аксиом, таких, что для любого удовлетворяющего им отношения $\succ$ на P существует такая функция $u \in U$, что

$$\mu \prec \kappa \Leftrightarrow E(u, \mu) < E(u, \kappa), \tag{2.3.1}$$

где для любых $\mu, \kappa \in P$ через $E(u, \mu)$ и $E(u, \kappa)$ обозначено математическое ожидание функции u относительно вероятностных мер μ, κ.

В теории ожидаемой полезности могут быть установлены аксиоматические характеристики отношений $\succ$ и $\geq$ на P, которые обладают односторонними представлениями вида:

$$\mu \prec \kappa \Longrightarrow E(u, \mu) < E(u, \kappa),$$
$$\mu \approx \kappa \Rightarrow E(u, \mu) = E(u, \kappa),$$

или

$$\mu \preccurlyeq \kappa \Longrightarrow E(u, \mu) \leq E(u, \kappa),$$
$$\mu \prec \kappa \Longrightarrow E(u, \mu) < E(u, \kappa).$$

В книге [3] модели ожидаемой полезности посвящено несколько глав. В данной работе мы не будем приводить подробное описание всех моделей, а воспользуемся моделью (2.3.1) и рассмотрим ее взаимосвязь с мерами риска.

2.4. Метод ожидаемой полезности и меры риска

Совместное использование мер риска и ожидаемой полезности накладывает некоторые ограничения на производные функции полезности. В предыдущих разделах мы рассмотрели несколько различных мер риска. Выберем из них наиболее часто используемые на практике, таковыми являются $VaR_{\alpha}^{F}(X)$, $LPM_{n,t}(X)$, $ES_{\alpha}^{F}(X)$, и проанализируем их связь с методом ожидаемой полезности.

Для начала ознакомимся с теоремой, опубликованной в статье [34].

Теорема 2.4.1. Пусть F и G являются кумулятивными распределениями двух различных случайных величин с квантилями Q_F и Q_G соответственно.

Тогда F доминирует G в терминах стохастического доминирования второго порядка тогда и только тогда, когда

$$\int_0^{\alpha} Q_F(t)dt \geq \int_0^{\alpha} Q_G(t)dt$$

для всех значений α в диапазоне $0 \leq \alpha \leq 1$, и имеет место строгое неравенство при некотором значении α.

Так же воспользуемся леммой 2.4.1 приведенной А. А. Новоселовым в его книге [23].

Лемма 2.4.1. Математическое ожидание от функции $E(h(X))$ от случайной величины, имеющей функцию распределения F, может быть вычислено по формуле

$$\int_{-\infty}^{\infty} h\ (x)\, dF(x) \geq \int_0^1 h(F^{-1}(v))dv\,.$$

Теперь докажем предложение.

Теорема 2.4.1. Пусть $F(x)$ и $G(x)$ являются функциями распределения двух различных случайных величин. И пусть $ES_{\alpha}^{F}(X)$ – мера *Expected Shortfall*, а $U(x)_F$ – неубывающая (невозрастающая) функция полезности, соответствующие случайной величине с функцией распределения $F(x)$. Тогда для них выполняется:

$$ES_{\alpha}^{F}(X) \leq ES_{\alpha}^{G}(X) \quad \Leftrightarrow \quad E[U(x)]_F \geq E[U(x)]_G\,.$$

Доказательство. Используем представление *Expected Shortfall* (1.3.7) и распишем представление меры через квантиль распределения величины X

$$ES_{\alpha}(X) = \frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} VaR_{\beta}(X,\beta)\, d\beta = -\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} F^{-1}\,(\beta)d\beta\,.$$

Тогда $ES_{\alpha}^{F}(X) \leq ES_{\alpha}^{G}(X)$ можно записать так

$$-\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} F^{-1}(\beta)d\beta \leq -\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} G^{-1}(\beta)d\beta \quad \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} (F^{-1}(\beta) - G^{-1}(\beta))d\beta \leq 0$$

отсюда следует, что $F^{-1}(\beta)-G^{-1}(\beta)\geq 0$ или $F^{-1}(\beta)\geq G^{-1}(\beta)$, следовательно, выполняется соотношение $F(x)\leq G(x)$. Тогда, используя лемму 2.4.1 и учитывая, что функция полезности монотонная, получим

$$E[U(x)]_F = \int_{-\infty}^{\infty} U(x)dF(x) = \int_0^1 U(F^{-1}(\beta))d\beta \geq$$

$$\geq \int_0^1 U(G^{-1}(\beta))d\beta = \int_{-\infty}^{\infty} U(x)dG(x) = E[U(x)]_G.$$

Таким образом, получили $E[U(x)]_F \geq E[U(x)]_G$. Обратное утверждение доказывается аналогично. ■

Теорема 2.4.2. Пусть $F(x)$ и $G(x)$ являются функциями распределения двух различных случайных величин. И пусть $LPM_{n,t}^F(X)$ – мера *Lower Partial Moment*, а $U(x)_F$ – неубывающая (невозрастающая) функция полезности, соответствующие случайной величине с функцией распределения $F(x)$. Тогда для них выполняется:

$$LPM_{n,t}^F(X) \leq LPM_{n,t}^G(X) \quad \Leftrightarrow \quad E[U(x)]_F \geq E[U(x)]_G.$$

Доказательство. Используем формулу записи (1.3.2) для меры $LPM_{n,t}(X)$ и распишем ее представление через квантиль распределения величины X

$$LPM_{n,t}(X) = E\{\max[(t-x)^n, 0]\} = \int_{-\infty}^{t} (t-x)^n f(x)dx.$$

Тогда $LPM_{n,t}^F(X) \leq LPM_{n,t}^G(X)$ можно записать так

$$\int_{-\infty}^{t} (t-x)^n f(x)dx \leq \int_{-\infty}^{t} (t-x)^n g(x)dx \quad \Rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{t} (t-x)^n (f(x)-g(x))dx \leq 0$$

тогда верно выражение $f(x)-g(x)\leq 0$ или $F(x)\leq G(x)$, так как при $\forall t$ справедливо неравенство $(t-x)^n \geq 0$. Отсюда следует, что выполняется соотношение $F^{-1}(\beta) \geq G^{-1}(\beta)$. Тогда, используя лемму 2.4.1 и учитывая, что функция полезности монотонная, получим следующее выражение

$$E[U(x)]_F = \int_{-\infty}^{\infty} U(x)dF(x) = \int_0^1 U(F^{-1}(\beta))d\beta \geq$$

$$\geq \int_0^1 U(G^{-1}(\beta))d\beta = \int_{-\infty}^{\infty} U(x)dG(x) = E[U(x)]_G.$$

Таким образом, получили $E[U(x)]_F \geq E[U(x)]_G$. Обратное утверждение доказывается аналогично. ■

Теорема 2.4.3. Пусть $F(x)$ и $G(x)$ являются функциями распределения двух различных случайных величин. И пусть $VaR_\alpha^F(X)$ – мера *Value-at-risk*, а $U(x)_F$ – неубывающая (невозрастающая) функция полезности, соответствующие случайной величине с функцией распределения $F(x)$. Тогда для них выполняется:

$$VaR_\alpha^F(X) \leq VaR_\alpha^G(X) \quad \Leftrightarrow \quad E[U(x)]_F \geq E[U(x)]_G.$$

Доказательство. Используем представление $VaR_\alpha(X)$ для непрерывного распределения и запишем представление меры через квантиль распределения величины X

$$VaR_\alpha(X) = -F^{-1}(\alpha).$$

Тогда $VaR_\alpha^F(X) \leq VaR_\alpha^G(X)$ можно записать так $F^{-1}(\beta) \geq G^{-1}(\beta)$. Отсюда следует, что $F(x) \leq G(x)$. Тогда, используя лемму 2.4.1 и учитывая, что функция полезности монотонная, получим

$$E[U(x)]_F = \int_{-\infty}^{\infty} U(x)dF(x) = \int_0^1 U(F^{-1}(\beta))d\beta \geq$$

$$\geq \int_0^1 U(G^{-1}(\beta))d\beta = \int_{-\infty}^{\infty} U(x)dG(x) = E[U(x)]_G.$$

Таким образом, получили $E[U(x)]_F \geq E[U(x)]_G$. Обратное утверждение доказывается аналогично. ■

Из проведенного исследования можем сделать вывод, что использование мер риска накладывает лишь одно ограничение на функцию полезности – это ее неубывание (невозрастание), т. е. $U'(x) \geq 0$ ($U'(x) \leq 0$).

2.5. Связь степеней рисковости и производных функции полезности

Лицо, принимающее решение, стремится получить наиболее выгодное решение. Если ЛПР не склонен к риску, то для него наиболее выгодным будет наименее рискованное решение, но если ЛПР предпочитает риск, то выберет наиболее рискованную альтернативу. Чаще всего на практике ЛПР стремится минимизировать риск, для достижения этой цели ЛПР старается принять решение в условиях малорисковости или рисковости меньшей степени. Понятие степени рисковости введено в работе [4].

Пусть Y – некоторая случайная величина, описывающая состояние неблагоприятной внешней среды, ее функция распределения имеет вид $\Phi(y) = P(Y \leq y)$. Вероятность принимает значения в интервале от 0 до 1, разобьем данный промежуток на n интервалов следующим образом: $[k_1, k_2] \cup (k_2, k_3] \cup ... \cup (k_{n-1}, k_n]$, где $k_1 = 0, k_n = 1$, а k_i – значения вероятности, заданные экспертом.

Определение 2.5.1. Будем полагать, что имеет место рисковость степени ноль, если $p(y) \in [k_1, k_2]$.

Определение 2.5.2. Будем полагать, что имеет место рисковость степени $(n-2)$, если $p(y) \in [k_{n-1}, k_n]$.

Как мы знаем, функция полезности характеризует отношение к риску ЛПР. Например, положительная первая производная функции полезности описывает случай ненасыщаемости потребностей, то есть для ЛПР с такой функцией полезности больше лучше, чем меньше. А отрицательная вторая производная функции полезности ЛПР показывает, что он строго не расположен к риску. Но кроме склонности или несклонности индивидуума к риску, функция также позволяет определить порядок неприятия риска, впервые данное понятие было введено в работе [8].

Сначала дадим определение неприятия риска порядка *n*. Для любой функции $U(x)$: $[a,b] \to R^1$ предположим, что $U \in \tilde{N}^{\infty}$, тогда $U^{(k)}(x)$ – производная функции $U(x)$ степени *k*, $k = 2,3,...$

Определение 2.5.3. Говорят, что ЛПР с функцией полезности $U(x)$ имеет неприятие риска порядка *n*, если

$$(-1)^{n-1}U^{(n)}(x) > 0 \text{ для всех } x \in [a,b],\ n \geq 1. \qquad (2.5.1)$$

Теперь определим понятие порядка риска, предложенное в работе [8].

Пусть $F(x)$ и $G(x)$ – функции распределения случайных величин X_1 и X_2 соответственно, $x \in [a,b]$. Функция распределения принимает значения от 0 до 1, т. е. $F(a) = G(a) = 0$ и $F(b) = G(b) = 1$. Введем следующие обозначения: $F^1(x) = F(x)$, $F^k(x) = \int_a^x F^{k-1}(t)\,dt$, $k = 2,3,...$ Эти обозначения применимы и к $G(x)$.

Определение 2.5.4. $G(x)$ имеет большую величину риска порядка *n*, чем $F(x)$, если

$$G^k(b) = F^k(b) \text{, для } k = 1,...,n-1, \qquad (2.5.2)$$

$$G^n(x) \geq F^n(x) \text{, для всех } x \in [a,b], \qquad (2.5.3)$$

со строгим неравенством $>$ в (2.5.3) для некоторого $x \in (a,b)$.

В терминах ожидаемой полезности соотношение функций распределений, приведенное выше, можно записать следующим образом:

$$\int_a^b U(x)dF^1(x) - \int_a^b U(x)dG^1(x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}U^{(k-1)}(b)[F^k(b) - G^k(b)] +$$

$$+ \int_a^b (-1)^n U^{(n)}(x)[F^n(b) - G^n(b)]dx.$$

Рассмотрим лемму, которая отражает взаимосвязь данных выше определений [8].

Лемма 2.5.1. $G(x)$ имеет большую степень риска порядка *n*, чем $F(x)$, тогда и только тогда, когда каждое лицо принимающее решение, имеющее неприятие риска порядка *n*, предпочитает величину с функцией распределения $F(x)$ величине с функцией распределения $G(x)$.

В статье [9] было описано соотношение между стохастическим доминированием, порядками риска и неприятием риска.

Определение 2.5.5. Любое ЛПР, имеющее функцию полезности, удовлетворяющую условию

$$(-1)^{k-1}U^{(k)}(x) > 0 \text{ для всех } x \in [a,b] \text{ и } k = 1...n$$

предпочтет величину с функцией распределения $F(x)$ величине с функцией распределения $G(x)$ тогда и только тогда, когда

$$G^k(b) \geq F^k(b) \text{, для } k = 1,..n-1,$$

$$G^n(x) \geq F^n(x) \text{, для всех } x \in [a,b],$$

со строгим неравенством $>$ в (2.5.3) для некоторого $x \in (a,b)$.

Выше были изложены сведения необходимые для определения связи степеней рисковости и производных функции полезности.

Теорема 2.5.1. Если ЛПР, характеризующееся неприятием риска порядка *m*, предпочитает величину с функцией распределения $F(x)$ величине с функцией распределения $G(x)$ в условиях рисковости степени $(n-1)$, то ЛПР предпочитает $F(x)$ альтернативе $G(x)$ и в условиях рисковости степени *n*.

Доказательство. Пусть имеет место ситуация, когда ЛПР, характеризующееся неприятием риска порядка *m*, предпочитает $F(x)$, а не $G(x)$, т. е. для функции полезности ЛПР $U(x)$: $[a,b] \to R^1$ предположим, что $U \in \tilde{N}^{\infty}$, тогда $U^{(k)}(x)$ – производная функции $U(x)$ степени *k*, $k = 2,3,...$ выполняется условие $(-1)^{m-1}U^{(m)}(x) > 0$ для всех $x \in [a,b]$, $m \geq 1$.

Тогда по условию леммы 2.5.1 выполняется следующее: $G(x)$ имеет большую величину риска порядка *m*, чем $F(x)$, если

$$G^k(b) = F^k(b) \text{, для } k = 1,...,m-1,$$

$$G^m(x) \geq F^m(x) \text{, для всех } x \in [a,b],$$

со строгим неравенством $>$ в (2.5.3) для некоторого $x \in (a,b)$.

Пусть $p_1(y)$ – вероятность возникновения состояния y внешней среды, которое соответствует условию рисковости степени $(n-1)$, а $p_2(y)$ соответствует условию рисковости степени n.

С учетом независимости случайных событий $G(x)$ имеет большую величину риска порядка m, чем $F(x)$ в условиях рисковости степени $(n-1)$, обозначим это как $G^m(x) \geq_{(n-1)} F^m(x)$, если

$$G^k(b) = F^k(b) \text{, для } k = 1,...,m-1,$$

$$G^m(x) \cdot p_1(y) \geq F^m(x) \cdot p_1(y) \text{, для всех } x \in [a,b].$$

Разделим обе части неравенства на $p_1(y)$ и умножим на $p_2(y)$. Так как $p_1(y) > 0$ и $p_2(y) > 0$, то знак неравенства не изменится, получим

$$G^m(x) \cdot p_2(y) \geq F^m(x) \cdot p_2(y) \text{, для всех } x \in [a,b],$$

следовательно $G^m(x) \geq_{(n)} F^m(x)$, что и требовалось доказать.

Теорема 2.5.2. Если ЛПР, характеризующееся неприятием риска порядка n, предпочитает величину с функцией распределения $F(x)$ величине с функцией распределения $G(x)$, то ЛПР предпочитает $F(x)$ альтернативе $G(x)$ в случае неприятия риска порядка $(n+1)$.

Доказательство. Пусть имеет место ситуация, когда ЛПР, характеризующееся неприятием риска порядка n, предпочитает $F(x)$, а не $G(x)$, т. е. для функции полезности ЛПР $U(x)$: $[a,b] \to R^1$ предположим, что $U \in \tilde{N}^\infty$, тогда $U^{(k)}(x)$ – производная функции $U(x)$ степени k, $k = 2,3,...$ выполняется условие

$$(-1)^{n-1} U^{(n)}(x) > 0 \text{ для всех } x \in [a,b],\ n \geq 1. \tag{2.5.4}$$

Тогда по условию леммы 2.5.1 выполняется следующее: $G(x)$ имеет большую величину риска порядка n, чем $F(x)$, если

$$G^k(b) = F^k(b) \text{, для } k = 1,...,n-1, \tag{2.5.5}$$

$$G^n(x) \ge F^n(x)\text{, для всех } x \in [a,b], \qquad (2.5.6)$$

со строгим неравенством $>$ в (2.5.3) для некоторого $x \in (a,b)$.

Знаем, что при выполнении условий (2.5.5, 2.5.6, 2.5.7), по *определению 2.5.5* $F(x)$ доминирует $G(x)$ в условиях стохастического доминирования порядка *n*, т. е. $F(x) \ge_n G(x)$.

Приведем здесь вспомогательную теорему, она доказана в работе [4].

Теорема 2.5.3. Если имеет место стохастическое доминирование порядка $(k-1)$: $X_1 \ge_{(k-1)} X_2$, то имеет место и стохастическое доминирование порядка *k*: $X_1 \ge_{(k)} X_2$.

Тогда по теореме 2.5.3, так как выполняется $F(x) \ge_n G(x)$, то выполняется и $F(x) \ge_{(n+1)} G(x)$. Таким образом, для стохастического доминирования порядка $(n+1)$ следует выполнение неравенства $(-1)^n U^{(n+1)}(x) > 0$. Что и требовалось доказать.

Теорема 2.5.4. Пусть α, β такие, что $1 \le \alpha \le k$, $0 \le \beta \le n-3$, где $k, n \in N$. Если найдутся такие $i = \alpha$ и $j = \beta$, что ЛПР, характеризующееся неприятием риска порядка *i*, предпочитает величину с функцией распределения $F(x)$ величине с функцией распределения $G(x)$ в условиях рисковости степени *j*, то имеет место ситуация, когда ЛПР с порядком неприятия риска $(i+1)$ предпочитает $F(x)$ альтернативе $G(x)$ и в условиях рисковости степени $(j+1)$.

Введем обозначение предпочтения $(i)RA(j)$ для ситуации, когда ЛПР, характеризующееся неприятием риска порядка *i*, предпочитает величину с функцией распределения $F(x)$ величине с функцией распределения $G(x)$ в условиях рисковости степени *j*, т. е. $F(x)(i)RA(j)G(x)$.
(*RA* – risk aversion – неприятие риска).

Доказательство данной теоремы следует из доказательства теорем 2.5.1 и 2.5.2.

Данную взаимосвязь можно представить в виде схемы:

$$
\begin{array}{ccccccc}
(1)RA(n-2) & \Rightarrow & (2)RA(n-2) & \Rightarrow & \ldots & \Rightarrow & (k)RA(n-2), \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\
(1)RA(n-3) & \Rightarrow & (2)RA(n-3) & \Rightarrow & \ldots & \Rightarrow & (k)RA(n-3), \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\
(1)RA(0) & \Rightarrow & (2)RA(0) & \Rightarrow & \ldots & \Rightarrow & (k)RA(0).
\end{array}
$$

Рис. 2.2. *Схема, отражающая связь степеней рисковости и порядка неприятия риска (порядка производной функции полезности)*

Глава 3. Концепция стохастического доминирования

3.1. Принцип стохастического доминирования

Стохастическое доминирование является одной из концепций оценки в условиях неопределенности. Стохастическое доминирование примечательно тем, что для определения выгодной альтернативы достаточно знать соответствующие функции распределения негарантированных результатов и отношение к риску ЛПР. В обращении к явной функции полезности нет необходимости, хотя на нее накладываются некоторые ограничения [5, 35].

Пусть задано вероятностное пространство (R, B, P), где R – множество вещественных чисел, B – борелевская сигма-алгебра, P – вероятностная мера на B. Пусть P – множество вероятностных распределений на измеримом пространстве (R, B). Тогда будем обозначать $F(x) = \mathrm{P}((-\infty, x])$, функцию распределения, соответствующую $X_1 \in \mathrm{P}$, а $G(x) = \mathrm{P}((-\infty, x])$, функцию распределения, соответствующую $X_2 \in \mathrm{P}$.

Определение 3.1.1. Пусть $X_1, X_2 \in \mathrm{P}$. Имеет место *стохастическое доминирование первого* порядка: $X_1 \leq_1 X_2$, если $F(x) \geq G(x),\ x \in R$.

Определение 3.1.2. Имеет место стохастическое доминирование k-го порядка, $X_1 \leq_k X_2$, если $F^k(x) \geq G^k(x),\ x \in R$, где

$$F^k(x) = \int_{-\infty}^{x} F^{k-1}(t)\, dt, \quad k = 2,3...$$

Стохастическое доминирование можно характеризовать различными способами; используем описание в терминах ожидаемой полезности [6, 7].

1. ***Стохастическое доминирование первого порядка***

Стохастическое доминирование первого порядка характеризует ситуацию, когда ЛПР предпочитает большее количество полезности меньшему количеству, т.е. функция полезности должна быть возрастающей.

Определение 3.1.3. Пусть $U(x)$ – строго возрастающая монотонная функция полезности $(U'(x) > 0)$, $E[U(x)]_F$ – ожидаемая полезность, соответствующая функции распределения $F(x)$. Пусть $a \le x \le b$, тогда говорят, что X_2 доминирует X_1 в смысле стохастического доминирования первого порядка, если

$$F(x) \ge G(x) \Leftrightarrow E[U(x)]_F \le E[U(x)]_G .$$

Стохастическое доминирование первого порядка принято обозначать как $\ge_{FSD}$ или $\ge_1$. Графически условие проиллюстрировано на рис. 3.1.

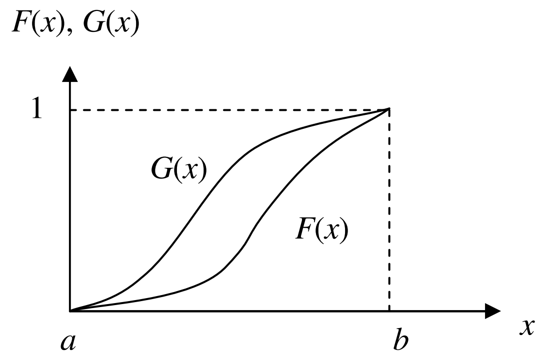

Рис. 3.1. *Стохастическое доминирование первого порядка*

2. *Стохастическое доминирование второго порядка*

Стохастическое доминирование второго порядка накладывает дополнительное условие на функцию полезности: предполагается, что ЛПР является строго не расположенным к риску, т. е. должны выполняться условия $U'(x) > 0$ и $U''(x) < 0$.

Определение 3.1.4. Пусть $U(x)$ – строго возрастающая монотонная функция полезности $(U'(x) > 0)$ и $U''(x) < 0$, $E[U(x)]_F$ – ожидаемая полезность, соответствующая функции распределения $F(x)$. Тогда говорят, что X_2 доминирует X_1 в смысле стохастического доминирования второго порядка, если выполняется

$$\int_{-\infty}^{x} F(t)\, dt \ge \int_{-\infty}^{x} G(t)\, dt \Leftrightarrow E[U(x)]_F \le E[U(x)]_G .$$

Стохастическое доминирование второго порядка принято обозначать как $\geq_{SSD}$ или $\geq_2$. Графически условие проиллюстрировано на рис. 3.2.

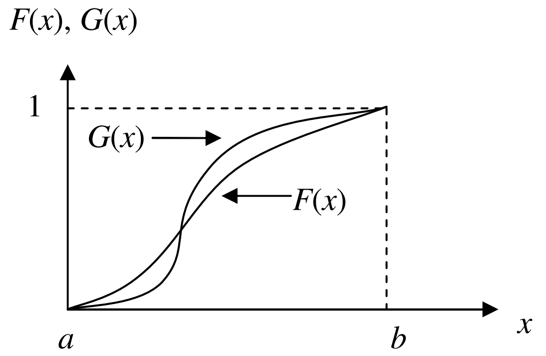

Рис.3. 2. *Стохастическое доминирование второго порядка*

3. *Стохастическое доминирование третьего порядка*

Стохастическое доминирование третьего порядка накладывает еще одно условие на функцию полезности: ЛПР обладает убывающей абсолютной несклонностью к риску, это значит, что должно выполняться условие $U'''(x) > 0$. Соответственно, для выполнения условий стохастического доминирования третьего порядка для функции полезности должны выполняться условия $U'(x) > 0$, $U''(x) < 0$ и $U'''(x) > 0$.

Определение 3.1.5. Пусть $U(x)$ – строго возрастающая монотонная функция полезности ($U'(x) > 0$) и $U''(x) < 0$, $U'''(x) > 0$, $E[U(x)]_F$ – ожидаемая полезность, соответствующая функции распределения $F(x)$. Тогда говорят, что X_2 доминирует X_1 в смысле стохастического доминирования третьего порядка, если выполняется

$$\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\vartheta} F(v,t)\,dvdt \geq \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\vartheta} G(v,t)\,dvdt \Leftrightarrow E[U(x)]_F \leq E[U(x)]_G.$$

Стохастическое доминирование третьего порядка принято обозначать как $\geq_{TSD}$ или $\geq_3$.

Можно развить концепцию стохастического доминирования до более высоких порядков, при этом в условиях, накладываемых на функцию полезности, присутствует следующая закономерность:

$$U^{(k)}(x)=\frac{d^kU(x)}{dx^k}=\begin{cases}>0, \text{если } k \text{ нечетное}\\ <0, \text{если } k \text{ четное}\end{cases}.$$

Но интерпретация данных условий является неоднозначной, а иногда и невозможной [36].

3.2. Стохастическое доминирование и меры риска

К сожалению, зачастую различные меры риска дают противоречивые результаты для одного и того же набора альтернатив. В свою очередь, принцип максимизации ожидаемой полезности и критерий стохастического доминирования для функции полезности позволяют определить предпочтения ЛПР и дают соответствующие правила принятия решений.

В данном разделе мы используем критерий стохастического доминирования совместно с ранее выбранными мерами риска. Изучим поведение мер риска в условиях первого и второго порядка стохастического доминирования соответственно и узнаем, как меры риска способны дать согласованные результаты.

Как мы знаем, различные меры риска дают отличные друг от друга результаты. Аналогично, от выбора функции полезности для описания предпочтений ЛПР зависит и результат принятия решения. Но если мы сможем оценить варианты с помощью критерия стохастического доминирования, то для широкого класса функций полезности предпочтения будут одни и те же. Проследим взаимосвязь общей меры риска и ожидаемой полезности при условии стохастического доминирования.

Рассмотрим две случайные величины X и Y с функциями распределения $F(x)$ и $G(y)$ соответственно. Будем обозначать $X >_1 Y$, если X стохастически доминирует Y в смысле первого порядка доминирования, и $X >_2 Y$, если X стохастически доминирует Y в смысле второго порядка доминирования. В общем случае, обозначим $X >_{SD} Y$ ситуацию, когда X стохастически доминирует Y.

Дадим *определение* стохастического доминирования в терминах мер риска.

Определение 3.2.1. Говорят, что X стохастически доминирует Y – $X >_{SD} Y$, если $\rho(X) \le \rho(Y)$, где ρ – мера риска.

1. ***Меры риска и стохастическое доминирование первого порядка***

Теорема 3.2.1.

1. Независимо от распределения X и Y, следующие выражения эквивалентны:

   a. $X >_1 Y$;

   b. $VaR_\alpha(X) \le VaR_\alpha(Y)$;

   c. $LPM_{n,t}(X) \le LPM_{n,t}(Y)$, где $n = 0$.

2. Если $X >_1 Y$, тогда:

   d. $ES_\alpha(X) \le ES_\alpha(Y)$;

   e. $LPM_{n,t}(X) \le LPM_{n,t}(Y)$, где $n = 1$.

Но обратное неверно.

Доказательство:

$\boldsymbol{a} \Leftrightarrow \boldsymbol{b}$: Если X и Y – случайные величины, для которых выполняется $X >_1 Y$, следовательно, выполняется соотношение $F(x) \le G(y)$. Тогда для любого $l \in R$ справедливо следующее $p(X \ge l) \le p(Y \ge l)$.

Из неравенства следует: если l принадлежит множеству $\{l \in R : p(Y \le l) \ge \alpha\}$, тогда l принадлежит множеству $\{l \in R : p(X \le l) \ge \alpha\}$. Тогда выполняется

$$\inf\{l \in R : p(X \le l) \ge \alpha\} \le \inf\{l \in R : p(Y \le l) \ge \alpha\}.$$

А так как $VaR_\alpha(X) = \inf\{l \in R : p(X \le l) \ge \alpha\}$, то $VaR_\alpha(X) \le VaR_\alpha(Y)$. Обратное утверждение доказывается аналогично.

$\boldsymbol{a} \Leftrightarrow \boldsymbol{c}$:. При $n = 0$ мера принимает вид:

$$LPM_{0,t}(X) = \int_{-\infty}^{t} (t-x)^0 f(x)dx = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx = p(X \le t),$$

аналогично она описывается и для величины *Y*. А так как $X >_1 Y$, то $F(x) \le G(y)$, следовательно $p(X \le t) \le p(Y \le t)$, то $LPM_{n,t}(X) \le LPM_{n,t}(Y)$. Обратное доказывается аналогично.

d: Докажем, что если выполняется условие $X >_1 Y$, то выполняется и $ES_\alpha(X) \le ES_\alpha(Y)$.

Если $X >_1 Y$, то $F(x) \le G(y)$, следовательно, справедливо соотношение $\{x : F(x) \ge \beta\} \subseteq \{y : G(y) \ge \beta\}$, тогда $F^{-1}(\beta) \ge G^{-1}(\beta)$, где $\beta \in (0;1]$.

Напомним, что $ES_\alpha(X) = \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha VaR_\beta(X,\beta)\,d\beta = -\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha F^{-1}(\beta)d\beta$. Рассмотрим разность мер для случайных величин *X* и *Y* $ES_\alpha(X) - ES_\alpha(Y)$ и определим знак выражения.

$$ES_\alpha(X) - ES_\alpha(Y) = -\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha F^{-1}(\beta)d\beta - \left(-\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha G^{-1}(\beta)d\beta)\right) =$$

$$-\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha (F^{-1}(\beta) - G^{-1}(\beta))d\beta$$

Так как $F^{-1}(\beta) \ge G^{-1}(\beta)$, то получим, что $F^{-1}(\beta) - G^{-1}(\beta) \ge 0$, тогда

$$-\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha (F^{-1}(\beta) - G^{-1}(\beta))d\beta \le 0.$$

Отсюда следует, что $ES_\alpha(X) \le ES_\alpha(Y)$.

e: Докажем, что если выполняется условие $X >_1 Y$, то $LPM_{1,t}(X) \le LPM_{1,t}(Y)$, где $n = 1$.

Если $X >_1 Y$, то $F(x) \le G(y)$, а значит, выполняется неравенство $f(x) \le g(x)$.

Запишем представление меры для непрерывного распределения:

$$LPM_{1,t}(X) = \int_{-\infty}^t (t-x)^1 f(x)dx.$$

Тогда $LPM_{1,t}(X) - LPM_{1,t}(Y)$ можно записать так

$$\int_{-\infty}^{t}(t-x)f(x)dx-\int_{-\infty}^{t}(t-x)g(x)dx \quad =$$

$$=\int_{-\infty}^{t}(t-x)(f(x)-g(x))dx$$

Тогда, так как выполняется $f(x)\le g(x)$, то верно и $f(x)-g(x)\le 0$. Так как при $\forall t$ справедливо неравенство $(t-x)\ge 0$. Отсюда следует, что выполняется $LPM_{1,t}(X)\le LPM_{1,t}(Y)$ ■.

2. Меры риска и стохастическое доминирование второго порядка

Теорема 3.2.2. Независимо от распределения X и Y, следующие выражения эквивалентны:

a. $X>_2 Y$;

b. $ES_\alpha(X)\le ES_\alpha(Y)$;

c. $LPM_{n,t}(X)\le LPM_{n,t}(Y)$, где $n=1$.

Если $X>_2 Y$, тогда выполняется $LPM_{n,t}(X)\le LPM_{n,t}(Y)$, где $n=2$, но обратное неверно.

Доказательство:

$\boldsymbol{a}\Leftrightarrow\boldsymbol{b}$: следует из результата, полученного Г. Фёльмером и А. Шидом в книге [37]. В этой книге есть теорема 2.58, которая утверждает, что $X>_2 Y$ эквивалентно неравенству:

$$\int_0^\alpha F^{-1}(\beta)d\beta\ge\int_0^\alpha G^{-1}(\beta))d\beta \text{ для всех } \alpha\in(0,1].$$

А из данного неравенства следует:

$$-\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha F^{-1}(\beta)d\beta\le-\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha G^{-1}(\beta))d\beta \text{ для всех } \alpha\in(0,1].$$

Зная, что $ES_\alpha(X)=-\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha F^{-1}(\beta)d\beta$, получаем $ES_\alpha(X)\le ES_\alpha(Y)$.

b $\Leftrightarrow$ ***c***: по определению, так как $X >_2 Y$, то есть $\int\limits_{-\infty}^{t} F(x)\,dx \ge \int\limits_{-\infty}^{t} G(x)\,dx$, а $LPM_{1,t}(X) = \int\limits_{-\infty}^{t} (t-x)^1 f(x)dx = \left((t-x)F(x)\Big|_{-\infty}^{t} + \int\limits_{-\infty}^{t} F(x)dx \right) = \int\limits_{-\infty}^{t} F(x)dx$ при условии, что $\lim\limits_{x\to-\infty} xF(x) = 0$, что следует из $\int\limits_{-\infty}^{t} xf(x)dx > -\infty$.

Докажем теперь: $X >_2 Y \Rightarrow LPM_{2,t}(X) \le LPM_{2,t}(Y)$.

Так как $X >_2 Y$, то есть выполняется $\int\limits_{-\infty}^{t} F(z)\,dz \ge \int\limits_{-\infty}^{t} G(z)\,dz$.

В работе Портера [38] доказано (данное доказательство можно провести с помощью теоремы Фубини), что

$$\int\limits_{-\infty}^{t} F(z)\,dz = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{t} (t-z)^2 f(z)dz. \tag{3.2.1}$$

Мы знаем, что

$$LPM_{2,t}(X) = \int\limits_{-\infty}^{t} (t-z)^2 f(z)dz,$$

тогда из равенства 3.2.1 следует, что $LPM_{2,t}(X) \le LPM_{2,t}(Y)$ ■.

3.3. Стохастическое доминирование и степени рисковости

Во второй главе было дано определение 2.5.1 степени рисковости, введенное в работе [4]. Так же в ней была доказана теорема, связывающая понятие степени рисковости и порядок стохастического доминирования.

Теорема 3.3.1. Пусть α,β такие, что $1 \le \alpha \le k-1,\, 0 \le \beta \le n-3$, где $k,n \in N$. Если найдутся такие $i=\alpha$ и $j=\beta$, что имеет место стохастическое доминирование порядка i в условиях рисковости степени *j*: $A \ge_{i,j} B$ (или иначе $(i)SDR(j)$), то имеет место стохастическое доминирование порядка $(i+1)$ в условиях рисковости степени $(j+1)$: $A \ge_{i+1,j+1} B$ (т. е. $(i+1)SDR(j+1)$).

$$
\begin{array}{ccccccc}
(1)SDR(n-2) & \Rightarrow & (2)SDR(n-2) & \Rightarrow & \ldots & \Rightarrow & (k)SDR(n-2), \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\
(1)SDR(n-3) & \Rightarrow & (2)SDR(n-3) & \Rightarrow & \ldots & \Rightarrow & (k)SDR(n-3), \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\
(1)SDR(0) & \Rightarrow & (2)SDR(0) & \Rightarrow & \ldots & \Rightarrow & (k)SDR(0).
\end{array}
$$

Рис. 3.1. *Схема, отражающая связь степеней рисковости и порядка стохастического доминирования*

Глава 4. Сравнение методов

Методы оценивания рисков, а так же ранжирования оценок рисков, рассмотренные в работе, чаще всего применяются при решении финансовых задач, но это не единственная область их применения. Так же их можно использовать для оценки количества людей с различными заболеваниями, основываясь на статистических данных Министерства Здравоохранения. В частности, проведем оценку риска заражения людей ВИЧ и туберкулезом.

Постановка задачи. С помощью изученных методов: принцип стохастического доминирования, метод ожидаемой полезности, оценка с помощью мер риска, сравнить случайные величины в условиях различных степеней рисковости, реализации которых приведены в Приложении, табл. 3, это статистические данные по количеству людей с диагнозами ВИЧ и туберкулез [39].

Решение. Обозначим X_1 – случайную величину, которая соответствует данным о количестве людей с диагнозом ВИЧ, а X_2 – случайную величину, отражающую количество людей с диагнозом туберкулез. И запишем функции распределения данных величин $F(x)$ и $G(x)$ соответственно, их графики представлены на рис. 4.1.

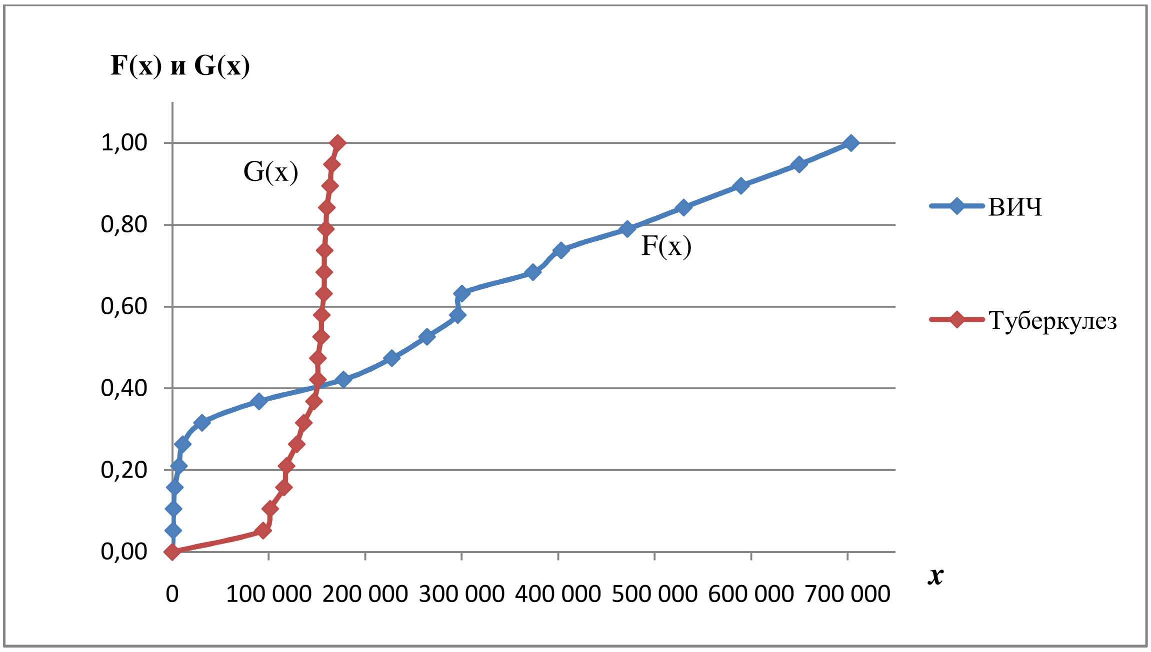

Рис. 4.1. *Функции распределения случайных величин* X_1 *(ВИЧ),* X_2 *(Туберкулез).*

$$F(x)=\begin{cases}0 \text{ } при \text{ } x<887\\ 0{,}05 \text{ } при \text{ } 887\le x<1090\\ 0{,}11 \text{ } при \text{ } 1090\le x<2063\\ 0{,}16 \text{ } при \text{ } 2063\le x<6918\\ 0{,}21 \text{ } при \text{ } 6918\le x<10889\\ 0{,}26 \text{ } при \text{ } 10889\le x<30647\\ 0{,}32 \text{ } при \text{ } 30647\le x<89808\\ 0{,}37 \text{ } при \text{ } 89808\le x<177579\\ 0{,}42 \text{ } при \text{ } 177579\le x<227502\\ 0{,}47 \text{ } при \text{ } 227502\le x<263898\\ 0{,}53 \text{ } при \text{ } 263898\le x<296045\\ 0{,}58 \text{ } при \text{ } 296045\le x<300252\\ 0{,}63 \text{ } при \text{ } 300252\le x<373718\\ 0{,}68 \text{ } при \text{ } 373718\le x<403100\\ 0{,}74 \text{ } при \text{ } 403100\le x<471676\\ 0{,}79 \text{ } при \text{ } 471676\le x<530185\\ 0{,}84 \text{ } при \text{ } 530185\le x<589581\\ 0{,}89 \text{ } при \text{ } 589581\le x<650100\\ 0{,}95 \text{ } при \text{ } 650100\le x<703781\\ 1 \text{ } при \text{ } x\ge 703781\end{cases}
\qquad
G(x)=\begin{cases}0 \text{ } при \text{ } x<94214\\ 0{,}05 \text{ } при \text{ } 94214\le x<101570\\ 0{,}11 \text{ } при \text{ } 101570\le x<115792\\ 0{,}16 \text{ } при \text{ } 115792\le x<142411\\ 0{,}21 \text{ } при \text{ } 142411\le x<142871\\ 0{,}26 \text{ } при \text{ } 142871\le x<143293\\ 0{,}32 \text{ } при \text{ } 143293\le x<148762\\ 0{,}37 \text{ } при \text{ } 148762\le x<150879\\ 0{,}42 \text{ } при \text{ } 150879\le x<150904\\ 0{,}47 \text{ } при \text{ } 150904\le x<154344\\ 0{,}53 \text{ } при \text{ } 154344\le x<154964\\ 0{,}58 \text{ } при \text{ } 154964\le x<157110\\ 0{,}63 \text{ } при \text{ } 157110\le x<157649\\ 0{,}68 \text{ } при \text{ } 157649\le x<157859\\ 0{,}74 \text{ } при \text{ } 157859\le x<159110\\ 0{,}79 \text{ } при \text{ } 159110\le x<160130\\ 0{,}84 \text{ } при \text{ } 160130\le x<163618\\ 0{,}89 \text{ } при \text{ } 163618\le x<165401\\ 0{,}95 \text{ } при \text{ } 165401\le x<171352\\ 1 \text{ } при \text{ } x\ge 171352\end{cases}$$

Зададим значения вероятности, которые разбивают промежуток от 0 до 1 на некоторое количество интервалов и воспользуемся определением 2.4.2. Разделим промежуток на пять интервалов, которые будут характеризовать риск следующим образом:

- $p(y)\in[0;0{,}2]$ – рисковость степени ноль (низкая степень риска);
- $p(y)\in(0{,}2;0{,}4]$ – рисковость первой степени (степень риска ниже средней)
- $p(y)\in(0{,}4;0{,}6]$ – рисковость второй степени (средняя степень риска)
- $p(y)\in(0{,}6;0{,}8]$ – рисковость третьей степени (степень риска выше средней)
- $p(y)\in(0{,}8;1]$ – рисковость четвертой степени (высокая степень риска)

Тогда сравним случайные величины на каждом из промежутков с помощью принципа стохастического доминирования, метода ожидаемой полезности и аппарата мер риска, для этого воспользуемся теоремой 2.4.3 и теоремой 3.3.1.

1. Принцип стохастического доминирования

Проверим условие стохастического доминирования первого и второго порядка. По определениям 3.1.1 и 3.1.2, справедливо соотношение $X_1 \leq_1 X_2$ если функции удовлетворяют неравенству $F(x) \geq G(x)$ для любых $x \in R$, а $X_1 \leq_2 X_2$ справедливо, если $\int\limits_{-\infty}^{x} F(t)\,dt \geq \int\limits_{-\infty}^{x} G(t)\,dt$ для любых $x \in R$.

Рассмотрим промежуток $[0;0{,}2]$, проверим, как себя ведут функции распределения на данном промежутке (рис. 4.2).

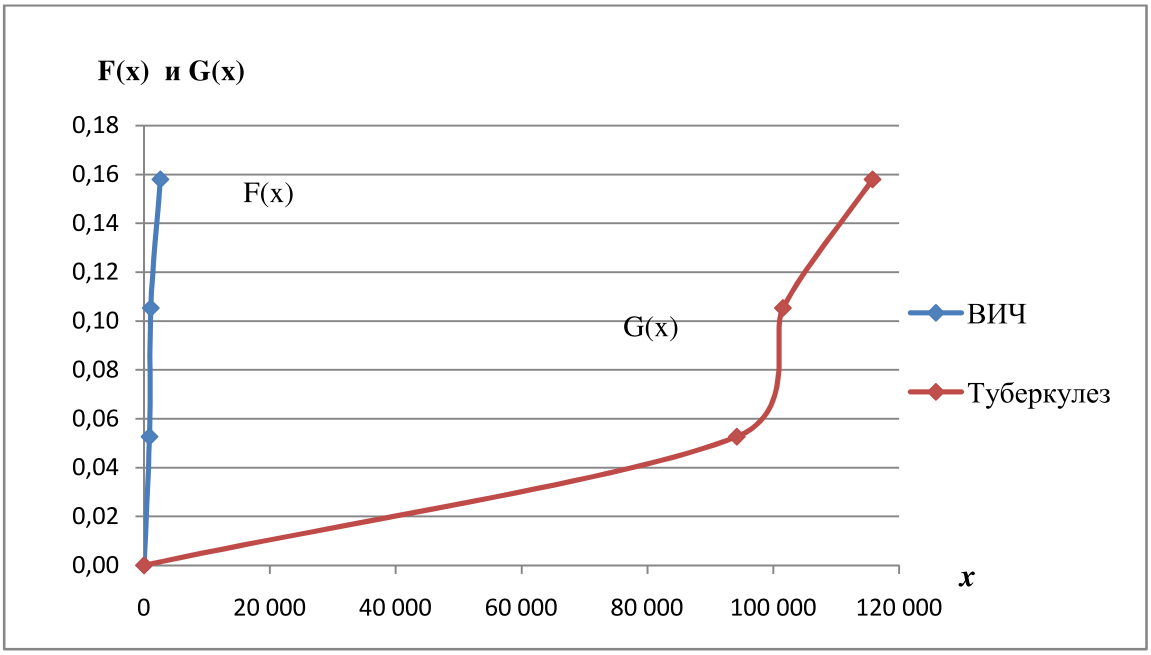

Рис. 4.2. *Функции распределения случайных величин* X_1 *(ВИЧ),* X_2 *(Туберкулез) на промежутке* $[0;0{,}2]$ *(низкая степень рисковости).*

По графику видно, что $F(x) \leq G(x)$ на всем промежутке $p(y) \in [0;0{,}2]$. Таким образом, условие для первого порядка стохастического доминирования выполнено, т. е. $X_1 \geq_1 X_2$ на данном промежутке.

Теперь проверим выполнение условия стохастического доминирования второго порядка. В статье [40] приведена формула для вычисления интеграла дискретной функции распределения:

$$F^2(x_i) = F(x_i)(x_i - x_{i-1}) + F(x_{i-1}), \qquad (4.1.1)$$

здесь $F^2(x_i)$ интеграл функции распределения $F(x)$ для наблюдения x_i. используем данную формулу для поиска интегралов функций распределения, и затем сравним их. Запишем результаты расчетов в виде таблицы

$$F^2(887) = 0{,}05 \cdot (887 - 0) + 0 = 46{,}68$$

$$F^2(1090) = 0{,}11 \cdot (1090 - 887) + F^1(887) = 68{,}05$$

$$F^2(2063) = 0{,}16 \cdot (2063 - 1090) + F^1(1090) = 306{,}95$$

$$G^2(94214) = 0{,}05 \cdot (94214 - 0) + 0 = 4958{,}63$$

$$G^2(101570) = 0{,}11 \cdot (101570 - 94214) + G^1(94214) = 5732{,}91$$

$$G^2(115792) = 0{,}16 \cdot (115792 - 101570) + G^1(101570) = 7978{,}48$$

Для удобства сравнения запишем вычисления в табличном виде:

Соответствующее значение вероятности	$F^2(x)$	$G^2(x)$	$F^2(x) - G^2(x)$
0,05	46,68	4958,63	-4 911,95
0,11	68,05	5732,91	-5 664,86
0,16	306,95	7978,48	-7 671,53

Исходя из полученных результатов, можем сделать вывод, что $F^2(x) \le G^2(x)$, значит, в условиях рисковости степени ноль X_1 доминирует X_2 в смысле стохастического доминирования второго порядка, т. е. $X_1 \ge_2^0 X_2$.

Рассмотрим промежуток $(0{,}2;0{,}4]$, характеризующий первую степень рисковости, на рис. 4.3 представлен график функций распределения на этом промежутке. По графику можем увидеть, что и на рассматриваемом промежутке $F(x) \le G(x)$, т. е. $X_1 \ge_1 X_2$. То есть в заданных условиях при уровне вероятности $p(y) \in (0{,}2;0{,}4]$ ВИЧ менее опасен, чем туберкулез.

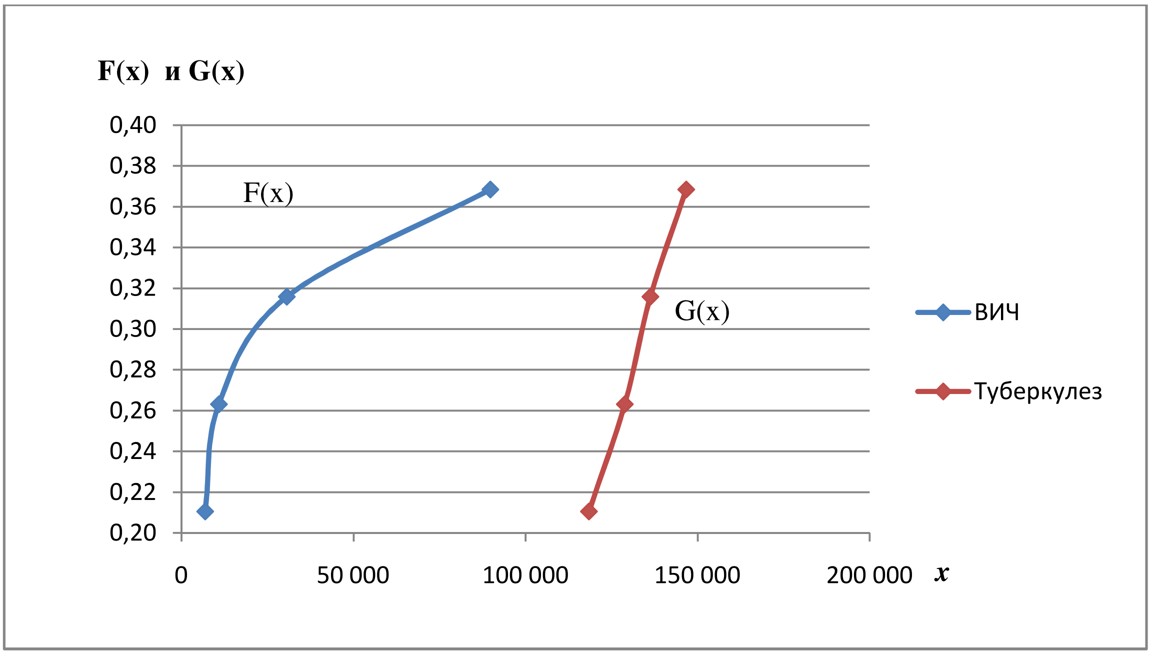

Рис. 4.3. *Функции распределения случайных величин* X_1 *(ВИЧ),* X_2 *(Туберкулез) на промежутке* $(0{,}2; 0{,}4]$ *(степень рисковости ниже средней).*

Приведем значения интегралов, соответствующих данному промежутку для того, чтобы определить, выполняется ли условие стохастического доминирования второго порядка. Интегралы были рассчитаны по формуле (4.1.1).

Соответствующее значение вероятности	$F^2(x)$	$G^2(x)$	$F^2(x)-G^2(x)$
0,21	1 215,37	8530,03	-7 314,66
0,26	2 260,37	11282,59	-9 022,22
0,32	8 499,74	13626,33	-5 126,60
0,37	30295,89	17483,16	12 812,74

Можно увидеть, что отрицательная разность $F^2(x)-G^2(x)$ в сумме больше, чем положительная, т. е. $F^2(x) \le G^2(x)$. К такому же выводу можно прийти и исходя из графика функций распределения на рис. 4.4. Можно заметить, что площадь ограниченная функциями распределения обозначенная знаком плюс, меньше, чем площадь, обозначенная знаком минус. Таким образом, X_1 доминирует X_2 в смысле стохастического доминирования второго порядка.

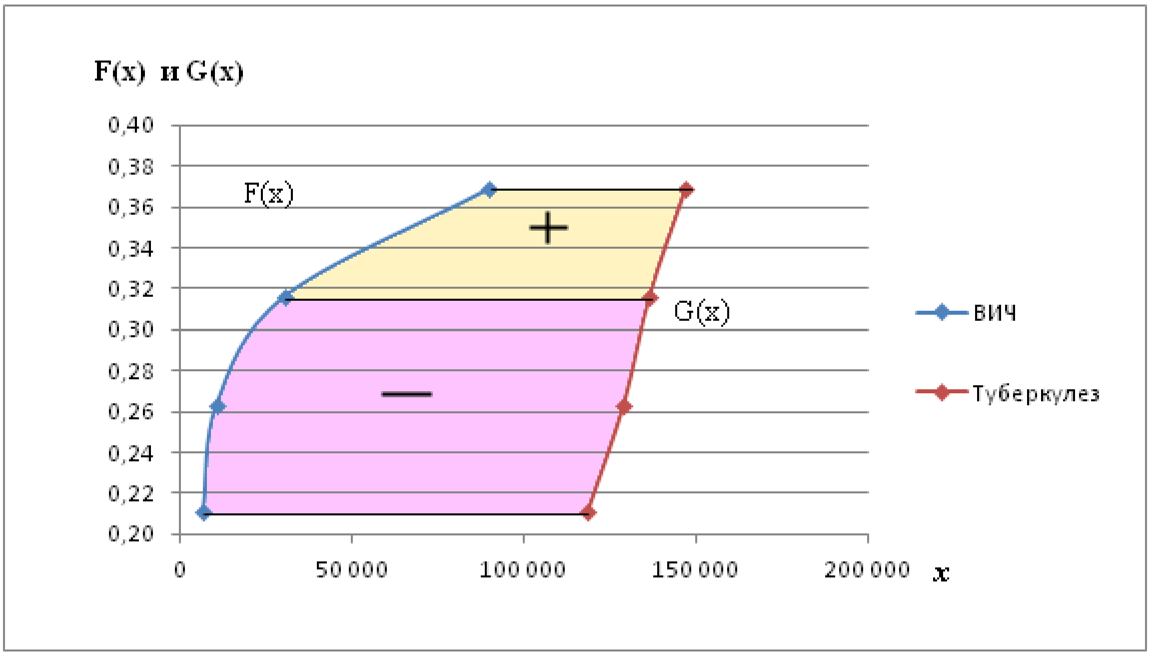

Рис. 4.4. *Функции распределения случайных величин* X_1 *(ВИЧ),* X_2 *(Туберкулез) на промежутке* $(0{,}2; 0{,}4]$ *(степень рисковости ниже средней).*

Для второй степени рисковости, на рис. 4.5 представлен график функций распределения на этом промежутке.

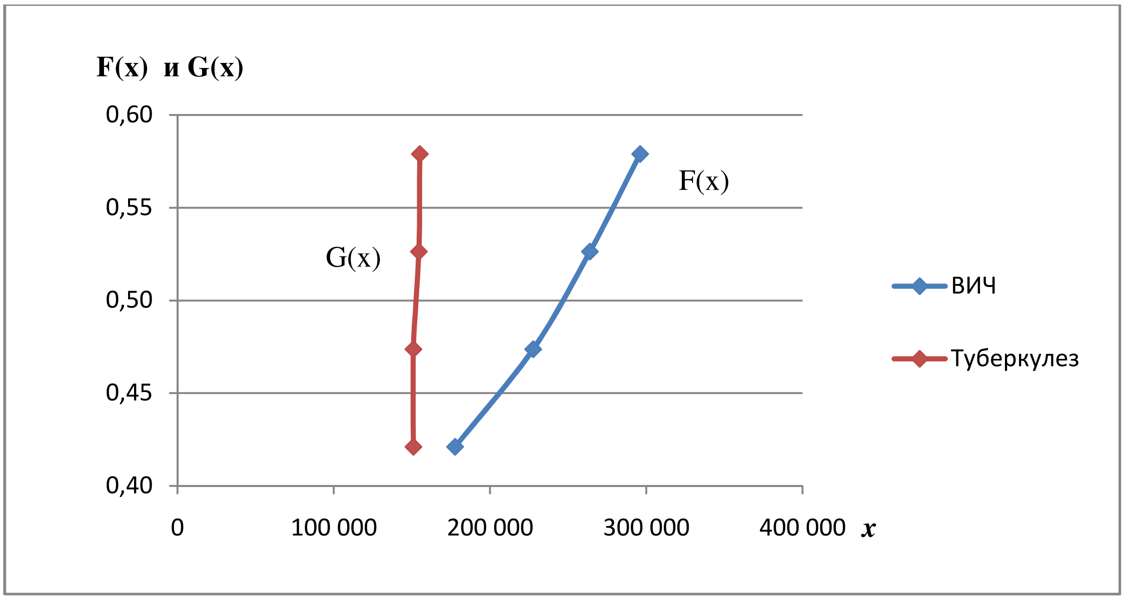

Рис. 4.5. *Функции распределения случайных величин* X_1 *(ВИЧ),* X_2 *(Туберкулез) на промежутке* $(0{,}4; 0{,}6]$ *(средняя степень рисковости).*

По графику можем увидеть, что на рассматриваемом промежутке $F(x) \geq G(x)$, т. е. $X_1 \leq_1 X_2$. В данном интервале вероятности туберкулез является менее опасным, чем ВИЧ.

Проверим, выполняется ли условие стохастического доминирования второго порядка, для этого вычислим интегралы функций распределения:

Соответствующее значение вероятности	$F^2(x)$	$G^2(x)$	$F^2(x)-G^2(x)$
0,42	67 252,11	19 216,98	48 035,13
0,47	90 899,84	19 228,55	71 671,29
0,53	110 055,63	21 039,13	89 016,50
0,58	128 667,05	21 398,32	107 268,73

По полученным значениям можно сделать вывод, что $F^2(x) \geq G^2(x)$, то есть X_2 доминирует X_1 в смысле стохастического доминирования второго порядка.

На рис. 4.6 и 4.7 представлены графики функций на промежутках $(0{,}6;0{,}8]$ и $(0{,}8;1]$, относящихся к третьей и четвертой степени рисковости соответственно.

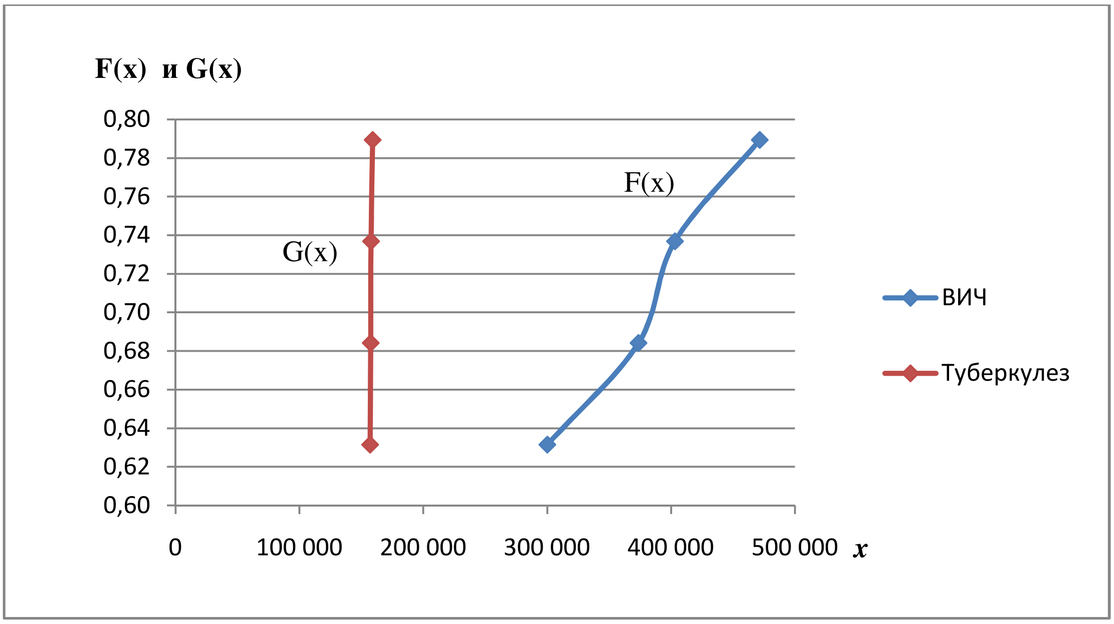

Рис. 4.6. *Функции распределения случайных величин* X_1 *(ВИЧ),* X_2 *(Туберкулез) на промежутке* $(0{,}6;0{,}8]$ *(степень рисковости выше средней).*

Поведение функций на данных промежутках подобно, здесь величина X_2 доминирует X_1 в смысле стохастического доминирования первого порядка, это можно увидеть на графиках.

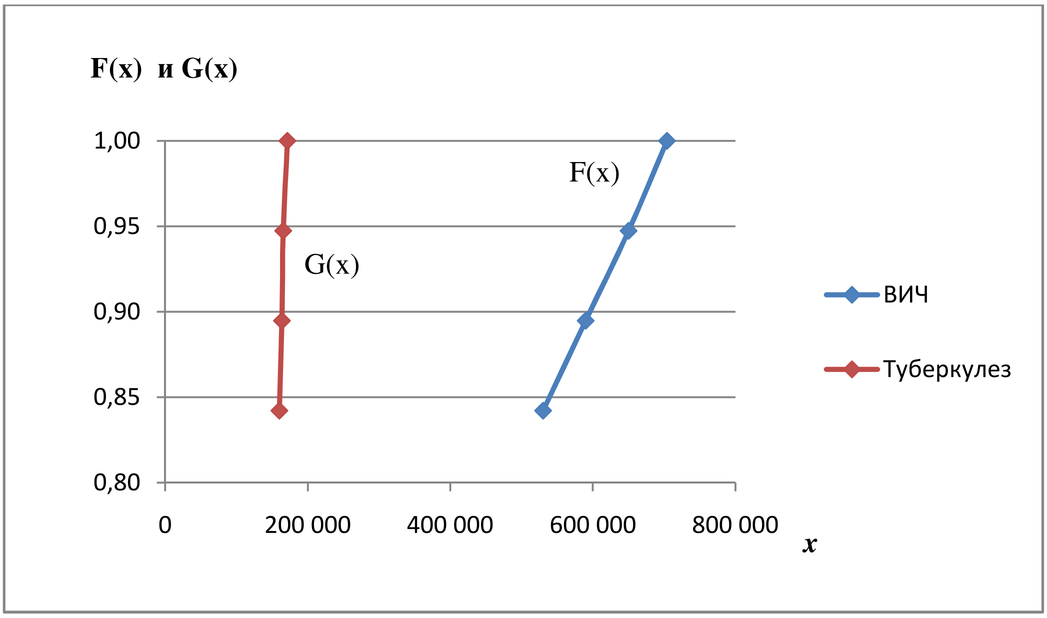

Рис. 4.7. *Функции распределения случайных величин* X_1 *(ВИЧ),* X_2 *(Туберкулез) на промежутке* $(0{,}8;1]$ *(высокая степень рисковости).*

Приведем ниже значения интегралов для каждого из интервалов.

Соответствующее значение вероятности	$F^2(x)$	$G^2(x)$	$F^2(x)-G^2(x)$
Интервал $(0{,}6;0{,}8]$			
0,63	131 324,11	22753,23	108 570,88
0,68	181 590,32	23122,27	158 468,05
0,74	203 240,21	23277,21	179 963,00
0,79	257 379,16	24264,81	233 114,35
Интервал $(0{,}8;1]$			
0,84	306 649,89	25123,41	281 526,49
0,89	359 793,68	28244,04	331 549,65
0,95	417 127,47	29933,34	387 194,14
1	470 808,47	35884,89	434 923,59

Исходя из расчетов, можем сделать вывод, что выполняется следующее неравенство $F^2(x) \geq G^2(x)$, следовательно, величина X_2 доминирует X_1 в смысле стохастического доминирования второго порядка. Для значений вероятности, попадающих в рассмотренные промежутки ВИЧ опаснее туберкулеза.

Если же не использовать понятие степени рисковости, то результат для принципа стохастического доминирования будет следующим.

Как можно увидеть по графику на рис.1 для функций $F(x)$ и $G(x)$ условие принципа стохастического доминирования первого порядка не выполняется. Так как функции не удовлетворяют неравенству $F(x) \geq G(x)$ для любых $x \in R$, которое приведено в определении 3.1.1.

Проверим, выполняется ли условие принципа стохастического доминирования второго порядка. Исходя из графика функций распределения на рис. 8, можно заметить, что площадь ограниченная функциями распределения обозначенная знаком плюс, значительно меньше, чем площадь, обозначенная знаком минус, справа от точки пересечения функций распределения. Поэтому можно сделать вывод, что при вычислении разности функций $F(x) - G(x)$ для всех $x \in R$, получим функцию, которая принимает отрицательные значения, а это означает $F^2(x) \geq G^2(x)$. Это говорит о том, что для ЛПР не склонного к риску предпочтительнее будет альтернатива $G(x)$, соответственно, по данному принципу ВИЧ опаснее туберкулеза.

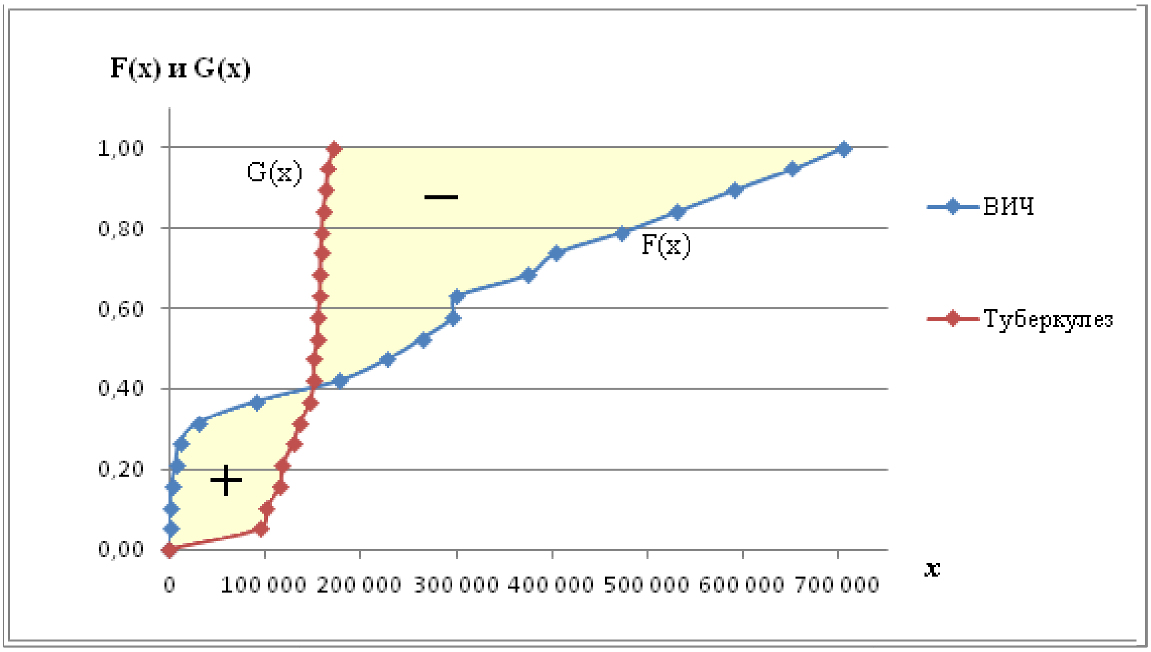

Рис. 4.8. *Функции распределения случайных величин* X_1 *(ВИЧ),* X_2 *(Туберкулез).*

2. Метод ожидаемой полезности

Выберем функцию ожидаемой полезности, она должна неограниченно увеличиваться при возрастании аргумента, причем достаточно быстро, так как, чем больше людей заболевает, тем хуже. Выбирать будем, соответственно наименьшее из полученных значений функции полезности для величин с функциями распределения $F(x)$ и $G(x)$.

Тогда пусть функция полезности имеет следующий вид:

$$U(x) = x^{0,9}$$

Данная функция дифференцируема $U \in \tilde{N}^{\infty}$, причем $U'(x) = 0{,}9 \cdot x^{-0,1} > 0$, $U''(x) = -0{,}09 \cdot x^{-1,1} < 0$, $U'''(x) = 0{,}099 \cdot x^{-2,1} > 0$, $\ldots (-1)^{m-1} U^{(m)}(x) > 0$.

Ниже изображен график данной функции на рис. 9.

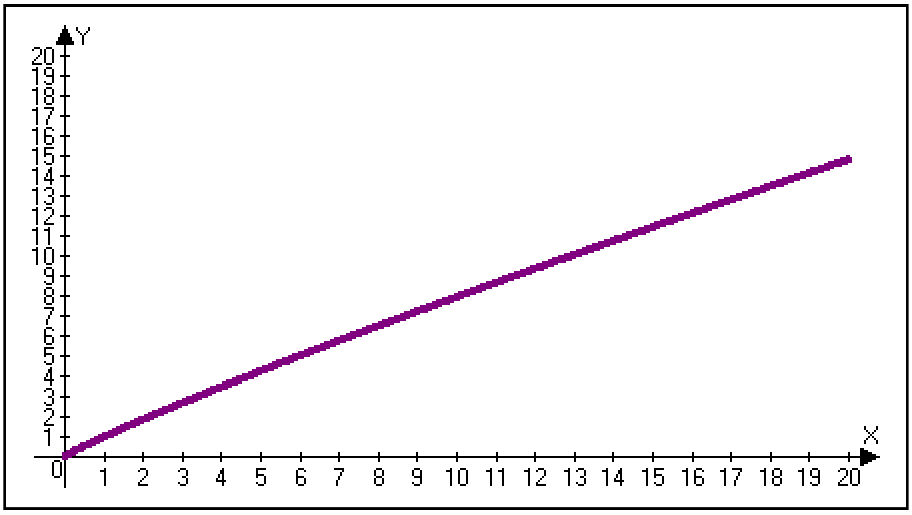

Рис. 4.9. *График функции полезности в общем виде.*

Тогда рассчитаем для наблюдений случайных величин X_1 и X_2 значения функции полезности для каждой степени рисковости. Расчеты приведены в табл. 4 Приложения. После этого мы можем найти ожидаемую полезность каждой альтернативы по формуле:

$$E[U(x)] = \sum_{i=1}^{n} U(x_i) \cdot p_i \,,$$

где n – количество наблюдений, p_i – вероятность наблюдения x_i.

Для общего случая, без разделения по степеням рисковости, получены следующие результаты для статистик:

$$E\,[U_F(x)] = 74043{,}76 \text{ и } E\,[U_G(x)] = 43991{,}5,$$

$$E\,[U_F(x)] \geq E\,[U_G(x)].$$

Для ЛПР в данном случае предпочтительна ожидаемая полезность с минимальным значением, т. е. $E[U_G(x)]$. Соответственно, по методу ожидаемой полезности туберкулез является менее опасным заболеванием, чем ВИЧ.

Теперь рассчитаем значения ожидаемой полезности для каждой степени рисковости:

Степень рисковости	$E[U_F(x)]$	$E[U_G(x)]$	*Соотношение полезностей*
Нулевая степень	114,58	5164,41	$E[U_F(x)] \le E[U_G(x)]$
Первая степень	2461,61	8578,86	$E[U_F(x)] \le E[U_G(x)]$
Вторая степень	14684,74	9748,66	$E[U_F(x)] \ge E[U_G(x)]$
Третья степень	22487,17	10044,52	$E[U_F(x)] \ge E[U_G(x)]$
Четвертая степень	34295,66	10455,05	$E[U_F(x)] \ge E[U_G(x)]$

Таким образом, для нулевой и первой степеней рисковости ВИЧ является менее опасным, чем туберкулез. Для остальных степеней ситуация противоположная. Подводя итог, можно сказать, что при малых значениях вероятности возникновения болезни нужно опасаться туберкулеза, а при больших значениях – ВИЧ.

3. Оценивание альтернатив с помощью мер риска

По результатам, приведенным в главе 1, мы сделали вывод, что наилучшей когерентной мерой для расчета риска эмпирических наблюдений является $ES_a^{(2)}(X)$, которая вычисляется по формуле (1.4.2), из некогерентных мер рассмотрим меру $LPM_{n,t}(X)$, которую будем рассчитывать по формуле (1.3.3).

Расчет мер проводим так же, как и для задачи, рассмотренной в главе 1. Возьмем уровень вероятности α как среднее значение каждого промежутка, характеризующего степени рисковости. После проведенных в Microsoft Excel расчетов, получены следующие результаты:

Болезнь	$ES_a^{(2)}(X)$				
	$\alpha = 0,1$	$\alpha = 0,3$	$\alpha = 0,5$	$\alpha = 0,7$	$\alpha = 0,9$
ВИЧ	983	7691	71565	143065	224643
Туберкулез	97698	114783	128512	136475	141814

Болезнь	$LPM_{n,t}(X)$				
	$\alpha = 0,1$	$\alpha = 0,3$	$\alpha = 0,5$	$\alpha = 0,7$	$\alpha = 0,9$
ВИЧ	0	1687	78926	161921	328763
Туберкулез	0	4500	11286	14825	21228

По ним можно сделать следующий вывод. Для нулевой и первой степени рисковости наиболее опасным является туберкулез. Для второй степени рисковости ситуация складывается неоднозначная, так как меры дают противоположное упорядочение. Это объясняется тем, что на промежутке $(0,4;0,6]$ функции распределения пересекаются. Для третьей и четвертой степеней рисковости наиболее опасным является ВИЧ, это подтверждается и графиком.

Результаты. Итак, нами была проведена оценка риска тремя методами, сравним полученные результаты для каждой степени рисковости.

Степень рисковости ноль: все методы дают единый результат – для значения вероятности принадлежащего промежутку $[0;0,2]$ ВИЧ будет менее опасен, чем туберкулез.

Первая степень рисковости: туберкулез опаснее, чем ВИЧ для уровня вероятности из интервала $(0,2;0,4]$. Такой результат получен для всех используемых методов. Причем, для стохастического доминирования второго порядка получены разности интегралов с разными знаками, это говорит о том, что при вероятности близкой к 0,4 функции пересекаются.

Вторая степень рисковости: для принципа стохастического доминирования первого и второго порядка, а так же для метода ожидаемой полезности при вероятности $(0,4;0,6]$ туберкулез менее опасен, чем ВИЧ. Но по результатам применения аппарата мер риска однозначно определить, какая из болезней опаснее, нельзя. Так как меры дали противоположные результаты, это произошло потому, что при вероятности близкой к 0,4 функции пересекаются и не позволяют ответить на вопрос при расчете мер только для середины отрезка $(0,4;0,6]$. Чтобы уточнить результат, нужно было бы рассчитать меры риска для других уровней вероятности данного промежутка.

Третья и четвертая степень рисковости: для данных степеней результаты одинаковы для всех методов. Во всех случаях, когда вероятность высока ВИЧ опаснее туберкулеза.

Если бы мы проводили наше исследование без использования понятия степеней рисковости, результаты получились бы совершенно другими. Так, по принципу стохастического доминирования первого порядка нельзя сказать, какая из болезней опаснее, так как условия этого принципа не выполнены для всех $x \in R$. По принципу стохастического доминирования второго порядка можно сделать вывод, что для ЛПР не склонного к риску ВИЧ опаснее туберкулеза. И метод ожидаемой полезности дает такой же результат. А результат, получаемый с помощью аппарата мер риска зависит от того, какой уровень вероятности выберет ЛПР. В этом смысле, меры риска являются более гибким инструментом для оценки риска и упорядочения альтернатив, даже без использования понятия степеней рисковости. Так же можно сделать вывод, что применение степеней рисковости помогает более качественно и подробно изучить соотношение альтернатив, особенно для методов стохастического доминирования и ожидаемой полезности, что очень важно в условиях реальной жизни. Результаты исследования опубликованы в книге [28].

Глава 5. Оценка интенсивности предпочтения

5.1. Некоторые свойства интенсивности предпочтения

Мы знаем, что функция полезности является возрастающей (или неубывающей), если с ростом количества ресурсов ЛПР растет их полезность. И наоборот, функция будет убывающей (или невозрастающей), если при росте количества ресурсов полезность будет уменьшаться. Рассмотрим функцию полезности $u(x)$: $\Omega \to R^1$ предположим, что $u \in C^{\infty}$, тогда $u^{(k)}(x)$ – производная функции $u(x)$ степени k, $k = 2,3,...$ Введем определение степени интенсивности предпочтения.

Определение 5.1.1. Когда для отношения $\succ$ и $\{x_i\} = \Omega$ – множества исходов принятия решений существует функция полезности такая, что $x_i \succ x_j \Rightarrow u(x_i) > u(x_j)$, будем называть разность полезностей $u(x_i) - u(x_j) > 0$ *интенсивностью предпочтения* [17].

Обозначим $u(x_i, x_j) = u(x_i) - u(x_j)$ – функция *интенсивности предпочтения,* тогда условие будет выглядеть следующим образом:

$$x_i \succ x_j \Rightarrow u(x_i, x_j) > 0 \text{ для всех } x_i, x_j \in \Omega.$$

Бинарное отношение $\prec$ может быть описано с помощью функции интенсивности предпочтения, когда оно ациклично.

Оценка интенсивности предпочтения играет решающую роль в ситуациях, когда нет единственной наилучшей альтернативы. Впервые ситуацию (парадокс), где отсутствует максимальная альтернатива, описал Кондорсе в конце XVIII века. В качестве примера такой ситуации является случай, когда множество Ω состоит из трех элементов x, y, z и имеется три таких строгих упорядочения $\{\prec_i\}_{i=1}^{3}$ на Ω, что

$$x \prec_1 y \prec_1 z,$$

$$y \prec_2 z \prec_2 x,$$

$$z \prec_3 x \prec_3 y.$$

В этом случае отношение $\prec$, представляющее собой: $x \prec y \Leftrightarrow n\,(x,\ y) < 0$, где $n\,(x,\ y)$ – разность между числом таких i, для которых $x \precsim_i y$, и числом таких i, для которых $y \precsim_i x$, имеет вид:

$$x \prec y \prec z \prec x.$$

Получается, что при очередном принятии решения в данных условиях может быть выбрана любая из альтернатив, и, в этом смысле, устойчивости решение этой задачи не имеет. Но оценить наиболее вероятное к принятию решение можно с использованием интенсивности предпочтения. Причем, существуют ситуации, когда оценка интенсивности предпочтения позволяет принять оптимальное решение.

Функция интенсивности предпочтения позволяет упорядочивать альтернативы по величине интенсивности. Она задает на множестве Ω×Ω слабое упорядочение:

$$(x,y) \prec^* (z,w) \Leftrightarrow u(x,y) < u(z,w);$$

при этом условие о кососимметричности функции *u* означает, что

$$(x,y) \prec^* (z,w) \Leftrightarrow (w,z) \prec^* (y,x).$$

Из определения 5.1.1. получим:

$$x \prec y \Leftrightarrow (x,x) \prec^* (y,x).$$

В книге [17] предложен такой подход к оценке интенсивности, при котором на отношение предпочтения и множество альтернатив накладываются определенные условия, при которых функция *u*, обладающая свойством:

$$(x,y) \prec^* (z,w) \Leftrightarrow u(x) - u(y) < u(z) - u(w)$$

единственна с точностью до положительного линейного преобразования. Формулировки алгебраических аксиом, обладающих указанными свойствами, приведены в [3].

Приведем в данном разделе некоторые алгебраические и порядковые свойства интенсивности предпочтения, опубликованные в [17].

Определение 5.1.2. Пусть на Ω задано отношение предпочтения $\prec$, тогда функция интенсивности предпочтения *u*, представляющая данное отношение будем называть *аддитивной на транзитивных компонентах*, если

$$x \prec y \prec z \wedge x \prec z \Longrightarrow u(x,z) = u(x,y) + u(y,z);$$

аддитивной на отрицательно транзитивных компонентах, если

$$x \mathrel{\overline{\prec}} y \mathrel{\overline{\prec}} z \wedge x \mathrel{\overline{\prec}} z \Longrightarrow u(x,z) = u(x,y) + u(y,z);$$

супераддитивной на транзитивных компонентах, если

$$x \prec y \prec z \wedge x \prec z \Longrightarrow u(z,x) \geq u(z,y) + u(y,x);$$

супераддитивной на отрицательно транзитивных компонентах, если

$$x \mathrel{\overline{\prec}} y \mathrel{\overline{\prec}} z \wedge x \mathrel{\overline{\prec}} z \Longrightarrow u(x,z) \geq u(x,y) + u(y,z).$$

Если для данного отношения $\prec$ на $\boldsymbol{\Omega}$ задана односторонняя функция полезности v:

$$x \prec y \Longrightarrow v(x) < v(y),$$

то функция интенсивности предпочтения имеет вид:

$$u(x,y) = \big(v(x) - v(y)\big)\delta(x,y),$$

где $\delta(x,y) = 0$ при $x \approx y$ и $\delta(x,y) = 1$ при $x \mathrel{\overline{\approx}} y$, и является аддитивной на транзитивных компонентах. Кроме того она аддитивна на отрицательно транзитивных компонентах при выполнении условия

$$x \prec y \Leftrightarrow v(x) < v(y).$$

Для отношения $\prec$ на $\boldsymbol{\Omega}$, задающего интервальное упорядочение

$$x \prec y \Leftrightarrow v(x) + \sigma(x) < v(y),$$

где v - функция полезности, а σ - неотрицательная пороговая функция, функция интенсивности принимает следующий вид

$$u(x,y) = \begin{cases} v(x) + \sigma(x) - v(y) \text{ при } x \prec y, \\ 0 \text{ при } x \approx y, \\ v(x) - v(y) - \sigma(y) \text{ при } x \succ y \end{cases}$$

и задает супераддитивное на транзитивных компонентах представление отношения $\prec$, так как

$$x \prec y \prec z \Longrightarrow u(x,z) = u(x,y) + u(y,z) + \delta(y).$$

Благодаря свойству аддитивности функции интенсивности предпочтения, ЛПР может восстановить функцию полезности. Приведем описание ниже.

Лемма 5.1.1. На Ω существует такая функция полезности v единственная с точностью до прибавления константы, что для любых $x, y \in \Omega$ выполняется

$$u(x, y) = v(x) - v(y),$$

если функция интенсивности предпочтения u аддитивна на отрицательно транзитивных компонентах и представляет слабое упорядочение $\prec$ на Ω.

Лемма 5.1.2. На Ω существует функция полезности v такая, что выполняется

$$x \prec y \Rightarrow v(x) - v(y) = u(x, y),$$

т.е. для любых $x, y \in \Omega$

$$u(x, y) = \big(v(x) - v(y)\big)\delta(x, y),$$

где $\delta(x, y) = 0$ при $x \approx y$ и $\delta(x, y) = 1$ при $x \not\approx y$, если функция интенсивности предпочтения u является аддитивной на транзитивных компонентах и задает строгое упорядочение $\prec$ на Ω.

Доказательство этих лемм можно найти, например, в [17].

Определение 5.1.3. Пусть на Ω задано отношение $\prec$, тогда представляющую его функцию интенсивности предпочтения u будем называть *монотонной на транзитивных компонентах*, если

$$x \prec y \prec z \wedge x \prec z \Rightarrow u(z, x) \geq \max\{u(z, y), u(y, x)\};$$

если же неравенство в правой части данного условия является строгим, то функцию интенсивности предпочтения u назовем *строго монотонной на транзитивных компонентах*.

Определение 5.1.4. Пусть на Ω задано отношение $\prec$, которое имеет цикл $x_1 \prec x_2 \prec \cdots \prec x_n \prec x_1$, тогда если существует такой элемент $z \in \Omega$, что $x_i \prec z$ при всех i, или существует такой элемент $w \in \Omega$, что $w \prec x_i$ при всех i, то цикл $x_1 \prec x_2 \prec \cdots \prec x_n \prec x_1$ называется *f*-циклом.

Теорема 5.1.1. Пусть Ω есть не более чем счетное множество альтернатив, на котором задано асимметричное отношение $\prec$. Тогда

1) $\prec$ не имеет *f*-циклов, если оно задается строго монотонной на транзитивных компонентах функцией интенсивности предпочтения,

2) $\prec$ представимо с помощью аддитивной на транзитивных компонентах функции интенсивности предпочтения, если $\prec$ не имеет *f*-циклов и является слабо полным.

На множестве альтернатив Ω, являющемся выпуклым подмножеством в некотором векторном пространстве *E*, интенсивность предпочтения обладает рядом особых свойств, которые будут описаны ниже. [17].

Определение 5.1.4. Функцию интенсивности предпочтения u на Ω×Ω будем называть *биаффинной*, если выполняются следующие равенства

$$u(x, ay + (1-a)z) = au(x, y) + (1-a)u(x, z),$$
$$u(ax + (1-a)y, z) = au(x, z) + (1-a)u(y, z),$$

при любом $a \in [0,1]$ и при любых $x, y, z \in \Omega$

Так как функция u кососимметрична, то условия этого определения эквивалентны.

Теорема 5.1.2 (о единственности). Пусть существует биаффинная функция интенсивности предпочтения u, представляющая на выпуклом множестве альтернатив Ω отношение $\prec$, тогда существует такая константа $a > 0$, что для любой другой биаффинной функции интенсивности предпочтения v на Ω×Ω выполняется

$$u(x, y) = av(x, y), \text{ для всех } x, y \in \Omega$$

Так как в теории полезности основным предположением является монотонность функции интенсивности предпочтения, то рассмотрим связь между биаффинностью и монотонностью на транзитивных компонентах.

Теорема 5.1.3 (о монотонности). Пусть на Ω задано отношение $\prec$, которое представляется биаффинной функцией интенсивности предпочтения u, которая будет монотонной на транзитивных компонентах тогда и только тогда, когда отношение $\prec$ – слабое упорядочение и на Ω существует такая аффинная функция v, что для всех $x, y \in \Omega$ выполняется

$$u(x, y) = v(x) - v(y).$$

Доказательства теорем можно найти в [4].

Определение 5.1.5. Функцию интенсивности предпочтения *u* будем называть

выпукло-вогнутой, если для любых $x, y, z \in \Omega$ и любого $a \in [0,1]$

$$u(x, ay + (1-a)z) \geq au(x, y) + (1-a)u(x, z);$$

строго выпукло-вогнутой, если при $a \in [0,1]$ и $y \neq z$

$$u(x, ay + (1-a)z) > au(x, y) + (1-a)u(x, z);$$

квазивыпукло-квазивогнутой, если для любых $x, y, z \in \Omega$ и любого $a \in [0,1]$

$$u(x, ay + (1-a)z) \geq \min\{u(x, y), u(x, z)\}.$$

Функция интенсивности предпочтения может быть использована для поиска максимальных элементов отношения $\prec$, данное свойство функции будет описано ниже.

Теорема 5.1.4. Пусть множество альтернатив Ω является выпуклым компактом, на котором задано отношение $\prec$, обладающее представлением с помощью функции интенсивности предпочтения *u*. Отношение $\prec$ имеет максимальный элемент, если функция *u* является квазивыпукло-квазивогнутой и полунепрерывна снизу по второй переменной. Отношение $\precsim = \prec \cup \approx$ имеет строго наибольший элемент, если функция *u* является строго выпукло-вогнутой.

5.2. Степени и меры интенсивности предпочтения

Концепция интенсивности предпочтения развивается и критикуется уже долгое время. Критика данной концепции касается способов измерения интенсивности. Различные способы оценки интенсивности приведены в работах [3, 18, 19, 28, 41]. В настоящей работе мы предложили и исследовали новые критерии оценки интенсивности предпочтения: степени и меры интенсивности.

- **Производные функции полезности и интенсивность предпочтения**

Будем рассматривать три группы ЛПР, сформированные в зависимости от отношения к риску: склонные к риску – рискофилы, несклонные – рискофобы и безразличные – рисконейтралы.

В статье [42] приводится интерпретация знаков пяти первых производных функции полезности. А так же обосновывается теория о том, что рискофилы и рискофобы имеют одинаковое отношение к риску для нечетных порядков. А для четных порядков их отношение противоположны: для рискофобов $u^{(2n)}(x)<0$, а для рискофилов $u^{(2n)}(x)>0$.

Рассмотрим зависимость предпочтений от производных функции полезности, то есть от отношения ЛПР к риску.

– Нечетные порядки производных функции полезности

Известно, что первая производная для любого ЛПР должна быть больше нуля, причем, чем больше значение производной, тем больше полезность. Это обусловлено свойствами функции полезности, аксиомами фон Неймана-Моргенштерна о рациональном выборе ЛПР [31].

Аналогично, для нечетных порядков функции полезности действует следующая интерпретация: чем больше значение производной, тем выше полезность. Следовательно, интенсивность предпочтения для нечетных порядков производной функции полезности, будет выражаться так:

$$x_i \succ x_j \Rightarrow u^{(2n-1)}(x_i) - u^{(2n-1)}(x_j) > 0.$$

– Четные порядки производных функции полезности

Как известно, чем больше абсолютное значение второй производной, тем больше несклонность / склонность к риску ЛПР [8]. Кроме того, знак второй производной функции полезности определяет отношение ЛПР к риску: если $u''(x)<0$, то ЛПР является рискофобом, если $u''(x)>0$, то ЛПР – рискофил.

Тогда интенсивность предпочтения для разных типов отношения к риску будет выглядеть следующим образом:

– для рискофила: $x_i \succ x_j \Rightarrow u''(x_i) - u''(x_j) > 0$.

– для рискофоба: $x_i \succ x_j \Rightarrow u''(x_i) - u''(x_j) < 0$.

Можно показать, что приведенные выше рассуждения, распространяются и на более высокие четные порядки производных.

Введем определение степени интенсивности предпочтения.

Определение 5.2.1. Имеет место *интенсивность предпочтения степени 0 по модулю* μ_0, если

$$x_i \succ x_j \Rightarrow u(x_i) - u(x_j) = \mu_0 \text{ для всех } x_i, x_j \in \Omega,\ n \geq 1,\ \mu_0 > 0.$$

Определение 5.2.2. Имеет место *интенсивность предпочтения степени n по модулю* μ_n, если

$$x_i \succ x_j \Rightarrow u^{(n)}(x_i) - u^{(n)}(x_j) = \mu_n \text{ для всех } x_i, x_j \in \Omega,\ n = 1{,}2... \qquad (5.2.1)$$

$$\mu_n > 0 \quad n = 2m-1, m = 1{,}2,...,$$

$$\mu_n > 0 \quad n = 2m, m = 1{,}2,... \text{ для рискофилов,}$$

$$\mu_n < 0 \quad n = 2m, m = 1{,}2,... \text{ для рискофобов.}$$

Обозначим $u_{(n)}(x_i, x_j) = u^{(n)}(x_i) - u^{(n)}(x_j)$ – функция *интенсивности предпочтения степени n по модулю* μ_n, тогда условие (5.2.1) будет выглядеть следующим образом:

$$x_i \succ x_j \Rightarrow u_{(n)}(x_i, x_j) = \mu_n \text{ для всех } x_i, x_j \in \Omega,\ n = 1{,}2....$$

- **Относительная интенсивность предпочтения**

Приведенные выше определения 5.2.1 и 5.2.2 были сформулированы для абсолютной интенсивности предпочтения. Далее мы рассмотрим относительную интенсивность предпочтения.

Используя метод естественной нормализации, предложенный в книге [43], введем определение относительной интенсивности предпочтения, проводя аналогию с первой интервальной мерой ценности, представленной в работе [19]

Определение 5.2.3. Для множества исходов принятия решений $\{x_j\} = \Omega$ и заданной на них функции полезности $u(x)\colon \Omega \to R^1$ пусть выполняются условия:

– Существует исход x_1 такой, что для всех *j* выполняется условие $x_1 \succ x_j$, и существует исход x_r такой, что для всех *j* выполняется $x_j \succ x_r$.

– Неверно соотношение: $x_r \succ x_1$,

– Выполняется условие $x_j \succ x_r \Rightarrow u(x_j) > u(x_r)$ для всех $x_j \in \Omega$.

Тогда *относительной интенсивностью предпочтения j–го исхода* назовем величину

$$R(x_j) = \frac{u(x_j) - u(x_r)}{u(x_1) - u(x_r)} > 0, \; j = 2 \dots r-1.$$

Легко заметить, что $0 \le R(x_j) \le 1$. То есть относительная интенсивность предпочтения служит интервальной мерой.

Сформулируем определение степени относительной интенсивности предпочтения, опираясь на результаты исследования, полученные для формулировки определения 5.2.1.

Определение 5.2.4. Имеет место *относительная интенсивность предпочтения j–го исхода степени n*, если

$$R_{(n)}(x_j) = \frac{u^{(n)}(x_j) - u^{(n)}(x_r)}{u^{(n)}(x_1) - u^{(n)}(x_r)} \text{ для всех } x_j \in \Omega, \; j = 2 \dots r-1, \; n = 1,2... \quad (5.2.2)$$

Зная, что $u_{(n)}(x_i, x_j)$ – функция *интенсивности предпочтения степени n*, перепишем условие (5.2.2) следующим образом:

$$R_{(n)}(x_j) = \frac{u_{(n)}(x_i, x_r)}{u_{(n)}(x_1, x_r)} \text{ для всех } x_i, x_j \in \Omega, \; n = 1,2...$$

Необходимо понимать, что значение относительной интенсивности предпочтения степени *n* во многом зависит от вида функции полезности и ее производной. Поэтому для использования данной характеристики интенсивности предпочтения, необходимо исследовать поведение функции на рассматриваемом промежутке и определить наилучшую и наихудшую альтернативу для каждой степени интенсивности предпочтения.

Тогда мы обеспечим выполнение условия: $0 \le R_{(n)}(x_j) \le 1$, которое, в свою очередь позволяет определить меру интенсивности предпочтения.

- **Меры интенсивности предпочтения**

Функция относительной интенсивности предпочтения степени *n* принимает значения в интервале от 0 до 1, разобьем данный промежуток на *m* интервалов следующим образом: $[k_1, k_2] \cup (k_2, k_3] \cup ... \cup (k_{m-1}, k_m]$, где $k_1 = 0, k_m = 1$, а k_i – значения, заданные экспертом.

Определение 5.2.5. Имеет место мера интенсивности предпочтения степени *n* порядка ноль, если $R_{(n)}(x_j) \in [k_1, k_2]$.

Определение 5.2.6. Имеет место мера интенсивности предпочтения степени *n* порядка $(m-2)$, если $R_{(n)}(x_j) \in (k_{m-1}, k_m]$.

- **Ожидаемая интенсивность предпочтения**

Один из видов неопределенности при принятии решений характеризуется вероятностной неопределенностью исходов, подразумевает выбор альтернатив, которые описываются с помощью вероятностной меры на множестве исходов. В работе [3] разработано несколько систем аксиом для отношения предпочтения $\succ$, которое рассматривается на множестве альтернатив, являющихся вероятностными мерами.

Введем вероятностное пространство (Ω, A, P), где Ω – множество элементарных исходов, A – σ-алгебра, заданная на Ω, а P – вероятностная мера, определенная на множествах из A. Случайной величиной X будем называть произвольное измеримое отображение из Ω в R.

Обозначим χ совокупность всех случайных величин на (Ω, A). Перенумеровав элементы Ω некоторым произвольным образом: $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, обозначим $X(\omega_i) = x_i$, $i = 1,\ldots n$ и будем отождествлять случайные величины $X \in \chi$ с векторами $X = (x_1, \ldots, x_n)$ из R^n.

Рассмотрим *модель ожидаемой интенсивности предпочтения*:

$$\nu \prec \kappa \Leftrightarrow E(u, \nu \times \kappa) < 0,$$

$$u(x, y) = -u(y, x) \text{ для всех } x, y \in \Omega,$$

которая дает возможность практического шкалирования сравнительной полезности и интенсивности предпочтения на основе оценок предпочтения между вероятностными мерами на множестве исходов [3].

Определение 5.2.7. Имеет место *ожидаемая интенсивность предпочтения степени n по модулю* μ_n, если

$$\nu \succ \kappa \Rightarrow E(u_{(n)}, \nu \times \kappa) = E(u^{(n)}(x) - u^{(n)}(y)) = \mu_n \text{ для всех } n = 1,2...$$

$$\mu_n > 0 \quad n = 2m-1, m = 1,2,...,$$

$$\mu_n > 0 \quad n = 2m, m = 1,2,... \text{ для рискофилов,}$$

$$\mu_n < 0 \quad n = 2m, m = 1,2,... \text{ для рискофобов,}$$

где $\nu, \kappa \in P$ – вероятностные меры соответствующие исходам $x, y \in \Omega$.

- **Пример применения новых определений**

Задача. Оценить интенсивность предпочтения, относительную и ожидаемую интенсивность предпочтения однокомпонентных медицинских препаратов на основе ибупрофена и лоперамида в зависимости от их стоимости для потребителя.

Решение. Существует широкий спектр медицинских препаратов на основе ибупрофена и лоперамида, производимый различными фармацевтическими компаниями. Соответственно их цена варьируется, в зависимости от производителя и аптеки. Диапазоны цен препаратов с учетом формы выпуска оказались следующими:

- активное вещество ибупрофен: от 0,25 € до 1,90 €,
- активное вещество лоперамид: от 0,45 € до 4,70 €.

Тогда множество исходов (альтернатив) для ибупрофена есть $\Omega_I = [0{,}25; 1{,}90]$, а для лоперамида – $\Omega_L = [0{,}45; 4{,}70]$.

В качестве лица, принимающего решение, выступает группа студентов. Ясно, что с ростом цены препарата, его полезность снижается, поэтому функция полезности будет монотонно убывающей в указанном диапазоне. С помощью метода, предложенного в книге [41], строятся функции полезности для данных препаратов. Сначала для каждого препарата находится детерминированный эквивалент лотереи 50-50 вида <0,25;1,90> и <0,45;4,70>, который равен соответственно 1,00 и 3,30. Так как по смыслу задачи функция полезности убывающая, то полагаем, что $u_I(0{,}25) = u_L(0{,}45) = 1$ и $u_I(1{,}90) = u_L(4{,}70) = 0$, где $u_I(x)$ – функция полезности для препарата с ибупрофеном, $u_L(x)$ – функция полезности для препарата с лоперамидом. Далее с использованием полученных значений, находятся еще три детерминированных эквивалента. Полученные данные приведены в таблицах ниже:

$u_I(x)$	0	0,25	0,325	0,5	0,75	1
x	2,00	1,50	1,25	0,80	0,50	0,25

Табл. 5.2.1. Таблица значений функции полезности для ибупрофена.

$u_L(x)$	0	0,25	0,5	0,75	0,875	1
x	4,70	4,30	3,30	0,85	0,60	0,45

Табл. 5.2.2. Таблица значений функции полезности для лоперамида.

Затем проводится проверка согласованности полученных результатов, и строятся кривые функций полезности для ибупрофена и лоперамида. Далее с помощью программы «Advanced Grapher» были вычислены аппроксимирующие функции, проходящие через полученные точки:

- $u_I(x) = -0{,}4628 \cdot \ln(x) + 0{,}3952$, с коэффициентом детерминации $R^2 = 0{,}98$;
- $u_L(x) = 4{,}6880 \cdot 10^{-4} \cdot x^4$ - $0{,}6332 \cdot x^3 + 0{,}4671 \cdot x^2$ - $1{,}1477 \cdot x + 1{,}4210$,

с коэффициентом детерминации $R^2 = 0{,}99$.

1. Найдем значения функции полезности для набора альтернатив:

$u(x)$ \ x_i	$x_1 = 0{,}80$	$x_2 = 1{,}00$	$x_3 = 1{,}20$	$x_4 = 1{,}40$	$x_5 = 1{,}60$
$u_I(x)$	0,4985	0,3952	0,3108	0,2395	0,1777
$u_L(x)$	0,7696	0,6776	0,6080	0,5579	0,5243

Табл. 5.2.3. Значения функций полезности для набора альтернатив {x_1, x_2, x_3, x_4, x_5}={0,80; 1,00;1,20;1,40;1,60}.

2. Используя определение 5.2.1, найдем интенсивность предпочтения для пар альтернатив:

$x_i \succ x_j$ / $u(x_i, x_j)$	$x_1 \succ x_2$	$x_2 \succ x_3$	$x_3 \succ x_4$	$x_4 \succ x_5$	$x_1 \succ x_3$	$x_2 \succ x_4$	$x_3 \succ x_5$
$u_I(x_i, x_j)$	0,1033	0,0844	0,0713	0,0618	0,1876	0,1557	0,1331
$u_L(x_i, x_j)$	0,0920	0,0696	0,0501	0,0336	0,1616	0,1197	0,0837

Табл. 5.2.4. Значения функций интенсивности предпочтения для набора альтернатив {x_1, x_2, x_3, x_4, x_5}*={0,80; 1,00;1,20;1,40;1,60}.*

По полученным данным можем сделать вывод, что наибольшая интенсивность предпочтения для обоих препаратов приходится на альтернативы x_1 и x_2, а наименьшая – между альтернативами x_4 и x_5. Это говорит о том, что разница в между двумя низкими ценами для потребителя более важна, чем между двумя высокими ценами. Причем, для лоперамида интенсивность между альтернативами x_2 и x_3 почти в 2 раза больше, чем для x_4 и x_5. Можно сделать следующий вывод: чем выше цена, тем безразличнее относится к ее увеличению ЛПР.

3. Функции полезности $u_I(x)$ и $u_L(x)$ являются убывающими на промежутках Ω_I и Ω_L соответственно, поэтому производная функции полезности меньше нуля. Используя определение 5.2.2, найдем первую и вторую степени интенсивности предпочтения:

$x_i \succ x_j$ / $u_{(1)}(x_i, x_j)$	$x_1 \succ x_2$	$x_2 \succ x_3$	$x_3 \succ x_4$	$x_4 \succ x_5$	$x_1 \succ x_3$	$x_2 \succ x_4$	$x_3 \succ x_5$
$u_{I(1)}(x_i, x_j)$	-0,1157	-0,0771	-0,0551	-0,0413	-0,1928	-0,1322	-0,0964
$u_{L(1)}(x_i, x_j)$	-0,1194	-0,1046	-0,0900	-0,0754	-0,2240	-0,1946	-0,1654

Табл. 5.2.5. Значения функций интенсивности предпочтения первой степени для набора альтернатив {x_1, x_2, x_3, x_4, x_5}*={0,80; 1,00;1,20;1,40;1,60}.*

В нашем примере, для ЛПР, чем меньше цена, тем выше полезность. Соответственно, интенсивность предпочтения первой степени можно интерпретировать следующим образом: увеличение цены на 0,2€ в диапазоне низких цен снижает полезность для ЛПР значительно больше, чем увеличение на ту же сумму в диапазоне высоких цен. То есть, чем ниже цена, тем сильнее реагирует покупатель на ее повышение.

$u_{(2)}(x_i, x_j)$ \ $x_i \succ x_j$	$x_1 \succ x_2$	$x_2 \succ x_3$	$x_3 \succ x_4$	$x_4 \succ x_5$	$x_1 \succ x_3$	$x_2 \succ x_4$	$x_3 \succ x_5$
$u_{I(2)}(x_i, x_j)$	0,2603	0,1414	0,0853	0,0553	0,4017	0,2267	0,1406
$u_{L(2)}(x_i, x_j)$	0,0740	0,0735	0,0731	0,0726	0,1475	0,1466	0,1457

Табл. 5.2.6. Значения интенсивности предпочтения второй степени для набора альтернатив $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$={0,80; 1,00;1,20;1,40;1,60}.

Как известно, знак второй производной функции полезности определяет отношение к риску. В нашем примере ЛПР по отношению к ценам на оба препарата является рискофилом. Кроме того чем больше абсолютное значение второй производной, тем больше ЛПР рискует.

Для двух рассматриваемых активных веществ склонность к риску у ЛПР уменьшается по мере роста цены препаратов, их содержащих. Но в случае, с препаратами, содержащими ибупрофен, значения функции интенсивности второй степени указывают нам на то, что для наиболее предпочтительных альтернатив ЛПР склонен к риску в большей степени. Тогда как для препаратов на основе лоперамида, интенсивность предпочтения второй степени показывает, что ЛПР рискует в одинаковой степени, вне зависимости от того, является ли альтернатива наиболее предпочтительной или наименее предпочтительной.

4. Найдем относительную интенсивность предпочтения для рассматриваемых препаратов, используя определение 5.2.3.

$R(x_j)$ \ x_j	$x_2 = 1{,}00$	$x_3 = 1{,}20$	$x_4 = 1{,}40$
$R_I(x_j)$	0,3333	0,2457	0,1715
$R_L(x_j)$	0,5828	0,5229	0,4797

Табл. 5.2.7. Значения функции относительной интенсивности предпочтения для набора альтернатив $\{x_2, x_3, x_4\}$={1,00;1,20;1,40}.

Величина относительной интенсивности предпочтения характеризует насколько текущая альтернатива лучше наихудшей альтернативы относительно разницы между наилучшей и наихудшей альтернативой. Такая характеристика позволяет сравнить интенсивность каждой отдельно взятой альтернативы. В нашем случае значения относительной интенсивности альтернатив указывают на следующее: для ибупрофена альтернатива x_2 почти в два раза предпочтительнее по интенсивности, чем альтернатива x_4, для лоперамида разница в интенсивности предпочтения одиночных альтернатив примерно одинакова.

5. Найдем относительную интенсивность предпочтения первой и второй степени для рассматриваемых препаратов, используя определение 5.2.4.

$R_{(1)}(x_j)$ \ x_j	$x_2 = 1{,}00$	$x_3 = 1{,}20$	$x_4 = 1{,}40$
$R_{I(1)}(x_j)$	0,1429	0,0952	0,0612
$R_{L(1)}(x_j)$	0,5248	0,3883	0,2708

Табл. 5.2.8. Значения функции относительной интенсивности предпочтения первой степени для набора альтернатив $\{x_2, x_3, x_4\}=\{1,00;1,20;1,40\}$.

При расчете относительной интенсивности $R_{L(1)}(x_j)$ мы должны учесть, что функция $u'_L(x)$ на промежутке $[0{,}45; 4{,}70]$ вогнутая. Максимальное значение функции в точке (2,97; 0,51). Тогда, будем исследовать $R_{L(1)}(x_j)$ на промежутке [0,45; 2,97], в который попадают рассматриваемые альтернативы.

Исходя из полученных значений $R_{(1)}(x_j)$, с учетом свойств первой производной функции полезности можно сделать вывод, что увеличение цены почти не влияет на общую тенденцию интенсивности предпочтения альтернатив для ибупрофена. Для препаратов, имеющих в составе лоперамид, следует заметить, что увеличение цены повышает разницу в интенсивности предпочтения альтернатив.

$R_{(2)}(x_j)$ \ x_j	$x_2 = 1{,}00$	$x_3 = 1{,}20$	$x_4 = 1{,}40$
$R_{I(2)}(x_j)$	0,0476	0,0282	0,0165
$R_{L(2)}(x_j)$	0,8629	0,8136	0,7646

Табл. 5.2.9. Таблица значений относительной интенсивности второй степени для набора альтернатив $\{x_2, x_3, x_4\}=\{1,00;1,20;1,40\}$.

Выводы в случае $R_{(2)}(x_j)$ аналогичны полученным ранее для интенсивности предпочтения второй степени.

6. Используя определение 5.2.6, найдем меру интенсивности предпочтения. Зададим значения k_i, которые разбивают промежуток $[0;1]$ на некоторое количество интервалов. Разделим промежуток на пять интервалов и найдем соответствующие меры интенсивности предпочтения ЛПР. Получим следующие интервалы: $[0;0{,}2]$, $(0{,}2;0{,}4]$, $(0{,}4;0{,}6]$, $(0{,}6;0{,}8]$, $(0{,}8;1]$. Далее определим меру интенсивности предпочтения различных степеней.

Для препаратов с ибупрофеном альтернативы x_2 и x_3 имеют меру интенсивности предпочтения (нулевой степени) первого порядка, а альтернатива x_4 – порядка ноль. Мера интенсивности предпочтения первой и второй степени порядка ноль характерна для всех рассматриваемых альтернатив.

Исследование меры для препаратов с лоперамидом дают следующий результат: все альтернативы имеют меру интенсивности предпочтения третьего порядка. Интересно, что альтернативы x_3 и x_4 имеют меру интенсивности предпочтения первой степени второго порядка, а альтернатива x_2 – третьего порядка.

Чем выше порядок меры интенсивности предпочтения, тем больше относительная интенсивность предпочтения альтернативы. Меры дают нам возможность группировать альтернативы по величине интенсивности. Что упрощает для ЛПР принятие решения, оно может рассматривать не все возможные альтернативы, а только те, которые имеют меру определенного порядка, удовлетворяющего ЛПР.

7. Найдем ожидаемую интенсивность предпочтения различных степеней. Для начала определим интервалы, на которых хотим исследовать ожидаемую полезность. Для этого воспользуемся предыдущими рассуждениями и выберем наиболее интересные для исследования альтернативы.

Для исследования ожидаемой интенсивности предпочтения первой степени возьмем для рассмотрения пары альтернатив: 0,80 и 1,00; 1,00 и 1,20.

Воспользуемся определением 5.2.7 для нахождения значения ожидаемой интенсивности предпочтения первой и второй степени, получим следующие результаты:

$[x_i; x_j]$ / $E(u_{(1)}, \nu \times \kappa)$	[0,80; 1,00]	[1,00; 1,20]
$E(u_{I(1)}, \nu \times \kappa)$	-0,0926	-0,0926
$E(u_{L(n)}, \nu \times \kappa)$	-0,0762	-0,0824

Табл. 5.2.10. Таблица значений ожидаемой интенсивности предпочтения первой степени

$[x_i; x_j]$ / $E(u_{(2)}, \nu \times \kappa)$	[0,80; 1,00]	[1,00; 1,20]
$E(u_{I(2)}, \nu \times \kappa)$	0,0844	0,1033
$E(u_{L(2)}, \nu \times \kappa)$	0,1149	0,1072

Табл. 5.2.11. Таблица значений ожидаемой интенсивности предпочтения второй степени

Результаты: введенные в данной работе понятия позволяют наиболее тщательно и глубоко изучить интенсивность предпочтения ЛПР. Степени интенсивности предпочтения позволяют оценить соотношение интенсивности предпочтения и степень реакции ЛПР на увеличение / уменьшение благ, а также влияние отношения к риску ЛПР на интенсивность. Понятие меры интенсивности позволяют сгруппировать альтернативы по уровню интенсивности и отсеять альтернативы с уровнем, не удовлетворяющим интересы исследователя.

Важно заметить, что использование введенных определений зависит от вида функции полезности, не всякая функция полезности будет удобна для проведения глубокого исследования предпочтений. В частности, полиномиальная функция полезности нечетного порядка для исследований степеней интенсивности не годится, так как на промежутке исследования ее производные ведут себя непредсказуемо.

Результаты данного исследования приведены в статье [44].

5.3. Порог принятия решения

Функция интенсивности предпочтения (определение 5.1.1), предполагает существование монотонной функции полезности. На практике не всегда удается задать монотонную функцию интенсивности предпочтения на всем множестве альтернатив. Поэтому далее мы рассмотрим несколько немонотонных функций полезности и оценку интенсивности предпочтения для них.

Примером случая, когда функция полезности бывает немонотонной, может служить задача из области медицины. Например, исследование результатов анализа крови на содержание различных компонентов: гормонов, сахара, лейкоцитов и т.д. Для каждого компонента существует своя «норма», и отклонение в большую или меньшую сторону, означает отрицательный результат. В этом случае, функция полезности при содержании компонента меньше нормы возрастать, а больше нормы – убывать.

По смыслу своего применения функция полезности непрерывная и кусочно-монотонная (немонотонна) на множестве альтернатив, то есть она является возрастающей или убывающей на интервалах промежутка ее определения. Рассмотрим функцию полезности $u(x)$: $[a;b] \rightarrow R$, где промежуток $[a;b]$ можно разбить на k интервалов, на которых функция или убывает, или возрастает. В зависимости от способа построения функции полезности ЛПР может изначально знать границы промежутков монотонности функции на $[a;b]$, а может для ранее выбранной функции полезности определить промежутки ее монотонности.

Теорема 5.3.1. Непрерывная кусочно-монотонная функция $u(x)$ определенная на промежутке $[a;b]$ имеет абсолютный максимум и абсолютный минимум на этом промежутке.

Доказательство:

Так как функция непрерывна на промежутке $[\mathrm{a};\mathrm{b}]$, значит, по теореме Вейерштрасса (о непрерывности функций), она ограничена на нем и достигает своих минимального и максимального значений.

Если функция непрерывна и монотонна на отрезке, то она достигает своих максимального и минимального значений в концах отрезка.

Функция $u(x)$ кусочно-монотонна и непрерывна на $[a; b]$ и, следовательно, существует конечное число таких точек $x_1, x_2 \dots x_k$, что

$$\mathrm{a} < x_1 < \mathrm{x}_2 < \dots < x_\mathrm{k} < b$$

и $u(x)$ монотонна в каждом из промежутков $[a; x_1]$, $[x_1; x_2]$, …, $[x_k; b]$.

Следовательно, максимальным значением функции $u(x)$ будет наибольшее из значений

$$u(a), u(x_1), u(x_2)\ , \dots , u(x_k), u(b).$$

Минимальное значение $u(x)$ будет соответствовать наименьшему из этих значений.■

Мы выяснили, что у функции полезности может быть несколько максимумов и минимумов. Так как данные значения являются порогом, при переходе через который функция меняет свой характер: из возрастающей становится убывающей и наоборот, они представляют особый интерес для ЛПР. Исследуя интенсивность предпочтения, ЛПР при достижении экстремума функции полезности должен производить замену функции интенсивности предпочтения.

Определение 5.3.1. *Порогом принятия решения* для функции полезности $u(x)$ определенной на $[a; b]$ будем называть такую альтернативу x^*, что $u(x^*) = \max u(x)$ или $u(x^*) = \min u(x)$ для любых $x \epsilon [a; b]$.

Определение 5.3.2. *Абсолютным (максимальным или минимальным) порогом принятия решения* для функции полезности $u(x)$ будем называть такую альтернативу $\tilde{x}$, что $u(\tilde{x}) = \max u(x^*)$ или $u(\tilde{x}) = \min u(x^*)$ для любых $x^* \epsilon [a; b]$.

5.4. Порог принятия решения на практике

Постановка задачи: владелец аптеки, зная статистические данные о заболеваемости пневмонией, опубликованные на сайте Роспотребнадзора РФ (см. Приложение, табл. 5) [45], хочет выяснить, в какое время нужно увеличить закупаемое количество препаратов для лечения пневмонии с целью повышения прибыли.

Для решения данной задачи построим функцию полезности, определим порог принятия решения и вычислим интенсивность предпочтения.

Решение: ясно, что потребность в препаратах для лечения пневмонии напрямую зависит от количества заболевших. Следовательно, при построении функции полезности ЛПР поставит максимальное значение полезности в соответствие месяцу, когда заболевших больше всего. По индексу сезонности заболеваемости понятно, что ноябрь и февраль – месяцы с повышенным количеством случаев заболевания, а август – месяц, с наименьшим показателем заболеваемости. На эти месяцы следует обратить особое внимание, но необходимо также понять: какова потребность в медикаментах, а соответственно, возможность получить наибольшую прибыль вблизи пикового значения.

Функция полезности строилась, исходя из среднего количества больных в каждом месяце, с помощью метода, уже использованного в пункте 5.2 данной работы. Полезность в нашем примере выражается не в денежном эквиваленте, а в баллах (условных единицах), заданных ЛПР как оценка прибыли на конец месяца, величина которой составляет от 15 до 150 баллов.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$U^*(x_i)$	125	150	120	90	50	30	20	15	40	85	100	75

Табл. 5.4.1. Значения функции полезности.

С помощью программы Advanced Grapher 2.2 (методом регрессионного анализа) построена аппроксимирующая полиномиальная функция полезности, которая имеет вид:

$$U(x) = 5{,}1724 * 10^{-4}x^8 - 0{,}0256x^7 + 0{,}5190x^6 - 5{,}5287x^5 + 33{,}0775x^4 - 107{,}6842x^3 + 159{,}3187x^2 - 54{,}8592x + 100{,}3408$$

Коэффициент корреляции: $R^2 = 0{,}9973$

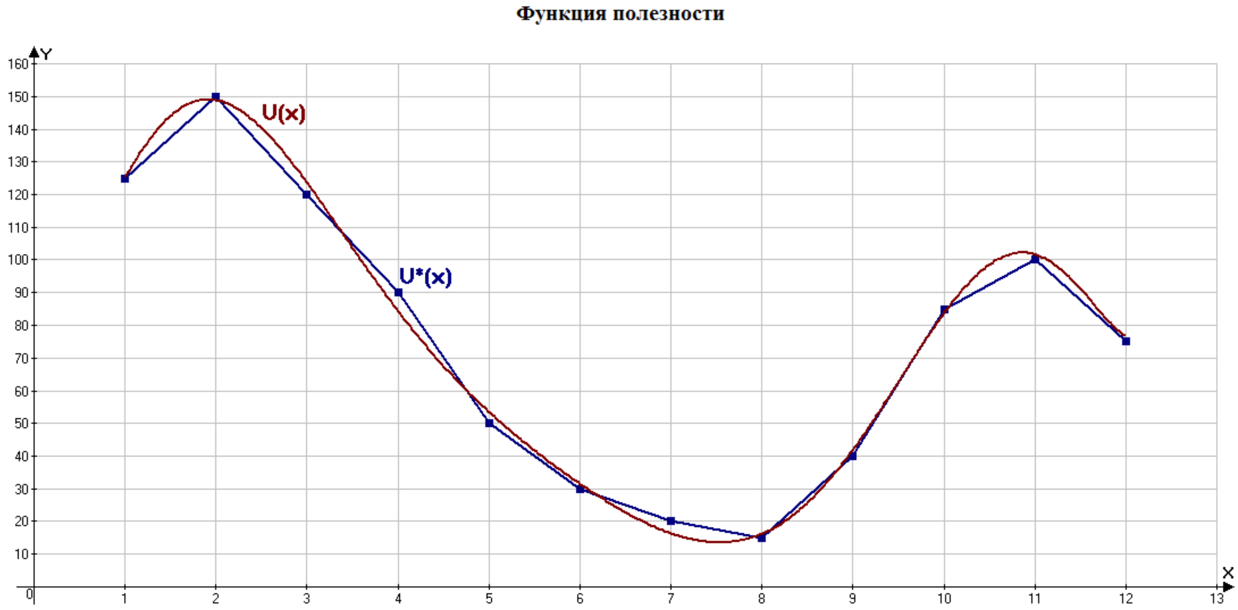

Рис. 5.4.1. График функции полезности

Полученная нами функция является кусочно-монотонной и имеет четыре промежутка монотонности.

С помощью вышеназванной программы проведено исследование функции полезности на экстремумы, на промежутке $x \in [1; 12]$ их три:

Экстремум	x	$U(x)$
max	1,91	149,03
min	7,53	13,55
max	10,86	102,19

Таким образом, мы нашли три порога принятия решения для ЛПР: $x_1^* = 1{,}91$, $x_2^* = 7{,}53$, $x_3^* = 10{,}86$, один из этих порогов является абсолютным максимальным: $\tilde{x}_{max} = 1{,}91$, а другой – абсолютным минимальным: $\tilde{x}_{min} = 7{,}53$.

Рассмотрим интенсивность предпочтения альтернатив, близких к порогам принятия решения, которые интересуют ЛПР, а именно пороги с максимальными значениями функции полезности.

1. Абсолютный максимальный порог принятия решения является альтернативой $\tilde{x}_{max} = 1{,}91$. Так как множество альтернатив – временной промежуток – 12 месяцев, то $\tilde{x}_{max} = 1{,}91$ обозначает, в данном контексте, 25 февраля (мы знаем, что промежуток от 1 до 2 – это февраль, в этом месяце 28 дней, следовательно: 0,91 часть от 28 дней это 25,48 ≈ 25 февраля). Теперь рассмотрим альтернативы, соответствующие 22 февраля: $x \in [1{,}78; 1{,}81]$, 23

февраля: $x \in [1{,}83; 1{,}85]$, 24 февраля: $x \in [1{,}86; 1{,}89]$. Для определенности рассмотрим альтернативы со значениями $x_{22} = 1{,}81$, $x_{23} = 1{,}85$, $x_{24} = 1{,}89$.

Интенсивность предпочтения определяется как:

$$u(x_{i-1}, x_i) = U(x_i) - U(x_{i-1}).$$

Тогда функция интенсивности предпочтения для рассматриваемых альтернатив будет иметь следующие значения:

$x_i \succ x_j$ / $U(x_i, x_j)$	$x_{25} \succ x_{24}$	$x_{24} \succ x_{23}$	$x_{23} \succ x_{22}$
$U(x_i, x_j)$	0,0096	0,0938	0,1867

Табл. 5.4.2. Значения интенсивности предпочтения для альтернатив, соответствующих 22-25 февраля

Легко заметить, что интенсивность предпочтения за 3 дня до получения максимальной прибыли (22 февраля), значительно выше, чем за день до этого события. То есть ЛПР следует позаботиться о том, чтобы сделать запасы медикаментов не только заранее, но и не позднее, чем за 3 дня до наступления максимального спроса на препараты.

Теперь рассмотрим период времени после пикового значения полезности и возьмем для рассмотрения 26-28 февраля, по аналогии с предыдущими вычислениями, 26 февраля: $x_{26} = 1{,}96$, 27 февраля: $x_{27} = 1{,}99$, 28 февраля: $x_{28} = 2{,}03$. При этом учитывая, что функция полезности убывает после перехода абсолютного порога принятия решения, т.е. функция интенсивности предпочтения для данного промежутка будет другой. Интенсивность предпочтения для альтернатив февраля будет определяться так: $u(x_{i-1}, x_i) = U(x_{i-1}) - U(x_i)$.

Величина функции интенсивности предпочтения для рассматриваемых альтернатив равна:

$x_i \succ x_j$ / $U(x_i, x_j)$	$x_{25} \succ x_{26}$	$x_{26} \succ x_{27}$	$x_{27} \succ x_{28}$
$U(x_i, x_j)$	0,0642	0,1067	0,2181

Табл. 5.4.3. Значения интенсивности предпочтения для альтернатив, соответствующих 25-28 февраля

Получаем, что интенсивность предпочтения для 28 февраля значительно выше, чем для 26 февраля, то есть прибыль через 3 дня начнет убывать с большей скоростью, чем через день-два после максимального значения. Кроме того, интенсивность предпочтения в период 26-28 февраля выше, чем в период 22-24 февраля, из этого можно сделать вывод скорость уменьшения прибыли после пикового значения, будет больше, чем ее рост до пикового значения. Вероятно, в период после 3 дней следует провести акцию по снижению стоимости медикаментов, с целью увеличения количества продаваемого товара.

2. Второй максимальный порог принятия решения является альтернативой $x_3^* = 10{,}86$, соответствующей 25 ноября. Аналогично предыдущим рассуждениям исследуем альтернативы, соответствующие 22-24 ноября: $x_{22} = 10{,}76$, $x_{23} = 10{,}79$, $x_{24} = 10{,}83$ и 26-28 ноября: $x_{26} = 10{,}89$, $x_{27} = 10{,}93$, $x_{28} = 10{,}96$. Получим следующие интенсивности предпочтения:

$x_i \succ x_j$ / $U(x_i, x_j)$	$x_{25} \succ x_{24}$	$x_{24} \succ x_{23}$	$x_{23} \succ x_{22}$
$U(x_i, x_j)$	0,0256	0,1148	0,1462

Табл. 5.4.4. Значения интенсивности предпочтения для альтернатив, соответствующих 22-25 ноября

$x_i \succ x_j$ / $U(x_i, x_j)$	$x_{25} \succ x_{26}$	$x_{26} \succ x_{27}$	$x_{27} \succ x_{28}$
$U(x_i, x_j)$	0,0265	0,1166	0,1484

Табл. 5.4.5. Значения интенсивности предпочтения для альтернатив, соответствующих 25-28 ноября

Легко заметить, что в обоих случаях интенсивность предпочтения соседних альтернатив увеличивается при отдалении от точки порога принятия решения, причем почти симметрично. В данном временном периоде рост и уменьшение прибыли происходит без резких скачков, следовательно, не стоит принимать специальных мер (например, скидочных акций) для привлечения клиентов.

Результаты

В первой главе проведено исследование различных мер риска на когерентность. Исходя из условий когерентности, можно сделать вывод, что создание меры риска универсальной для порядков стохастического доминирования невозможно. Потому что мера должна содержать в себе реализацию случайной величины в соответствующей степени, как, например, $LPM_{n,t}(X)$, чтобы удовлетворять разным порядкам доминирования.

После построения мер риска для статистических данных, можно сказать, что наиболее удобной когерентной мерой является $ES_{\alpha}(X)$, рассчитанная по формуле (1.4.2). Из некогерентных мер риска можно выделить две меры: $LPM_{n,t}(X)$ и $VAR_{\alpha}(X)$. Мера $VAR_{\alpha}(X)$ дает результаты, схожие с $ES_{\alpha}(X)$, но с большим запасом, когда применяется к эмпирическим данным. А мера $LPM_{n,t}(X)$ интересна тем, что в зависимости от степени n мера соответствует разным порядкам стохастического доминирования, разным порядкам риска.

Во второй главе оказана теорема, связывающая понятия степени рисковости и порядок неприятия риска. Это позволяет использовать метод ожидаемой полезности в терминах степеней рисковости. В третьей главе доказаны теоремы, описывающие взаимосвязь мер риска и порядка стохастического доминирования.

Решена задача по сравнению результатов методов оценки риска в условиях рисковости разных степеней. Можно сделать вывод о том, что использование степеней рисковости дает более гибкие и подробные результаты, нежели исследование данных без применения этого понятия. А так же можно заметить, что аппарат мер риска является более гибким, чем методы ожидаемой полезности и стохастического доминирования.

Таким образом, итоги сравнения альтернатив зависят и от метода, применяемого для их ранжирования, и от степени рисковости, выбранной экспертом.

В пятой главе введены дополнительные измерения интенсивности предпочтения: степени и меры, применение которых рассмотрено на практике.

Также предложен порог принятия решения для кусочно-монотонных функций полезности, доказана теорема о существовании порога и приведен пример его применения. Оценка интенсивности предпочтений позволяет проанализировать близкие по величине полезности альтернативы, сделать выводы о скорости увеличения или уменьшения полезности при выборе из множества наиболее предпочтительных альтернатив.

В работе исследованы методы, решающие задачу оптимизации и принадлежащие различным математическим аппаратам. Продолжить это исследование можно в области мер риска, для того, чтобы создать меру, которая позволяла бы сравнивать результаты метода ожидаемой полезности и принципа стохастического доминирования между собой. Так как на практике лица принимающие решения сталкиваются с ситуациями, когда необходимо использовать оба метода и иметь возможность сравнить результаты упорядочения обоих методов.

Заключение

Современная теория решений постоянно развивается, это подтверждают многочисленные исследования различных подходов к оценке риска. В литературе подробно описана связь метода ожидаемой полезности и некоторых мер риска с принципом стохастического доминирования. В данной работе исследованы три метода количественной оценки риска: аппарат мер риска, метод ожидаемой полезности и принцип стохастического доминирования.

В первой главе проведен анализ мер риска, используемых в теории принятия решений на когерентность. Исследовано их практическое применение к эмпирическим данным, выявлены наиболее предпочтительные меры рисков для проведения количественной оценки риска для статистических данных.

Во второй главе проведено исследование условий, которые накладываются на функцию полезности при совместном ее использовании с мерами риска, доказаны теоремы 2.4.1-2.4.3. Так же изучена и доказана связь степеней рисковости с методом ожидаемой полезности, а именно какое соотношение связывает степени рисковости с производными функции полезности, см. теоремы 2.5.1, 2.5.2, 2.5.4. В третьей главе описан принцип стохастического доминирования и его связь с мерами риска, доказаны теоремы 3.2.1 и 3.2.2 о соотношении порядков стохастического доминирования и мер риска.

В четвертой главе решается задача сравнения результатов трех методов оценки риска с использованием понятия рисковости различных степеней и без использования данного определения.

В пятой главе исследован метод оценки интенсивности предпочтения, предложены новые инструменты для измерения интенсивности (введены определения 5.2.1 – 5.2.7), результат применения которых проверен на примере. Также предложено понятие порога принятия решений (введены определения 5.3.1, 5.3.2) для кусочно-монотонных функций полезности, доказана теорема 5.3.1, проведена интерпретация результатов на примере.

Литература

1. Бернулли Д. Опыт новой теории измерения жребия [1738] // Вехи экономической мысли. Т.1. Теория потребительского поведения и спроса. СПб.: Экономическая школа, 1999, С.11–27.
2. Дж. фон Нейман, О. Моргенштерн. Теория игр и экономическое поведение. / Перев. с англ. под ред. и с доб. Н. Н. Воробьева. М.: Наука, 1970. 708 с.
3. Фишберн П. Теория полезности для принятия решений. М.: Наука, 1978. 352 с.
4. Колбин В.В., Белоносова И.Ю. Анализ рисков в страховании, СПб.: Издательство СПбГУ, 2006. 68 с.
5. Крувшиц Л., Шефер Д., Шваке М. Финансирование и инвестиции. Сборник задач и решений / Пер. с нем. под общей редакцией Сабова З. А., Дмитриева А. Л. СПб.: Питер, 2001. 320 с.
6. Новоселов А. А. Стохастическое доминирование и его приложения в моделировании риска // Записки ФАМ Семинара, Красноярск, 2002. Т. 7. С. 37–44.
7. Новоселов А. А., Варочкина Т. С. Стохастическое доминирование I и II рода // Вестник Красноярского государственного университета, 2004. Т. 5. Вып. 2. С. 15–21.
8. Ekern S. Increasing Nth degree risk // Economics Letters 6, 1980. P. 329-333.
9. Jean W. H. The geometric mean and stochastic dominance // Journal of Finance 35, 1980. P. 151-158.
10. Fishburn P. C. Mean-risk analysis with risk associated with below-target returns // The American Economic Review, 1977. Vol. 67, 2. P. 116–126.
11. Artzner P., Delbaen F., Eber J. M. Coherent measures of risk //Math. Fin., 1999. Vol. 9, 3. P. 203–228.
12. Barbosa A., Ferreira M. A. Beyond coherence and extreme losses: Root Lower Partial Moment as a risk measure, 2004. Available at SSRN: http://ssrn.com/abstract=609221 or http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.609221.

13. Peng J. Value at Risk and Tail Value at Risk in uncertain environment // Proceedings of the Eighth International Conference on Information and Management Sciences, 2009. P. 787–793.
14. Rootzén H., Kluppelberg C. A single number can't hedge against economic catastrophes // Ambio, 1999. Vol. 28, No. 6. P. 550–555.
15. Danielsson J., Jorgensen B. N., Sarma M., Samorodnitsky G., de Vries C. G. Fat tails, VaR and subadditivity // Journal of Econometrics, 2013. Vol. 172, 2. P. 283–291.
16. Benati S. The optimal portfolio problem with coherent risk measure constraints // Europian Journal of Operational Research, 2003. Vol. 150, No. 3. P. 572–584.
17. Кирута А.Я., Рубинов А.М., Яновская Е.Б. Оптимальный выбор распределений в сложных социально-экономических задачах. Л.: Наука, 1980. 167 с.
18. Peter H. Farquhar, L. Robin Keller Preference intensity measurement //Annals of Operations Research, 1989, Vol. 19, 1, P. 205–217.
19. Фишберн П. К. Измерение относительных ценностей / Статистическое измерение качественных характеристик. – М.: Статистика (Перевод с английского под редакцией Е. М. Четыркина), 1972. С. 34–94.
20. Алехин Е.И. Теория риска и моделирование рисковых ситуаций. Конспект лекций. Орел: ОГУ, 2006. 90 с.
21. Панягина А.Е. Подходы к пониманию и классификации рисков // Современная экономика: проблемы, тенденции, перспективы. 2012. Вып. №6. С. 1–11.
22. Найт Ф. Понятие риска и неопределенности // Thesis, 1994. Вып. 5. С. 12–28 (Перев. с англ. С. А. Афонцева из: Frank H. Knight. The Meaning of Risk and Uncertainty // F. Knight. Risk, Uncertainty, and Profit. Boston: Houghton Mifflin Co, 1921. P. 210–235).
23. Новоселов А. А. Математическое моделирование финансовых рисков: теория измерения. Новосибирск: Наука, 2001. 99 с.

24. Новоселов А. А. Обобщенные когерентные меры риска // Труды IV Всероссийской конференции по финансово-актуарной математике и смежным вопросам. Т. 1. Красноярск, 2005. С. 325–339.
25. Acerbi C., Tasche D. On the coherence of Expected Shortfall // Journal of Banking & Finance, 2002. Vol. 26(7). P. 1487–1503.
26. Ледовская, В.А. Анализ некогерентных мер риска // Процессы управления и устойчивость: Труды 44-й международной научной конференции аспирантов и студентов / СПб.: Издат. Дом СПбГУ, 2013. С. 605–610.
27. Ледовская, В.А. Колбин В.В. Когерентные меры риска // Процессы управления и устойчивость: Труды 44-й международной научной конференции аспирантов и студентов / СПб.: Издат. Дом СПбГУ, 2013. С. 611–616.
28. Ледовская В.А, Колбин, В.В. Исследование мер риска в теории принятия решений / В.В. Колбин, // Оценка и управление риском / Palmarium Academic Publishing, 2014. С. 191–245.
29. The United States Geological Survey. http://www.usgs.gov/natural_hazards/
30. Statistic Brain. http://www.statisticbrain.com/
31. Дубров А.М., Лагоша Б.А., Хрусталев Е.Ю. Моделирование рисковых ситуаций в экономике и бизнесе. / Под ред. Б.А. Лагоши. М.: Финансы и статистика, 2000. 176 с.
32. Pratt J.W. Risk Aversion in the Small and in the Large // Econometrica, January–April 1964, Vol. 32, P. 122–136.
33. Arrow K.J. Essays in the Theory of Risk-Bearing. Chicago: Markham Pub. Co., 1971. 278 p.
34. Levy H., Kroll Y. Ordering uncertain options with borrowing and lending // The Journal of Finance, 1978. Vol. 33, 2. P. 553–574.
35. Колбин В. В. Анализ и оценка рисков. СПб: Изд. дом СПбГУ, 2005. 70 с.
36. Буренин А.Н. Управление портфелем ценных бумаг. М., Научно-техническое общество имени академика С.И. Вавилова, 2008. 440 с.

37. Follmer. H., Schied, A. Stochastic Finance: An Introduction in discrete Time, 2nd rev. and extended ed. De Gruyter Studies in Mathematics; 27. 2004. P. 459.
38. Porter R. Semivariance and Stochastic Dominance: A Comparison // The American Economic Review, 1974. Vol. 64, 1. P. 200–204.
39. Европейское региональное бюро Всемирной организации здравоохранения. http://data.euro.who.int/hfadb/shell_ru.html
40. Jean W. H., Helms B. P. Stochastic dominance as a decision model // Quarterly Journal of Business and Economics, 1986. Vol. 25, 1. P. 65–101.
41. Кини Р. Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения / Пер. с англ. под ред. И. Ф. Шахнова. М.: Радио и связь, 1981. 560 с.
42. Deck C., Schlesinger H. Consistency of Higher Order Risk Preferences // Econometrica, Econometric Society, 2014. Vol. 82. P. 1913–1943.
43. Трухачев Р.И. Модели принятия решений в условиях риска и не определенности. М.: Наука, 1981. 151 с.
44. Ledovskaya, V.A., Kolbin V.V. Degrees and measures of preference intensity // International Conference on «Stability and Control Processes» in Memory of V.I. Zubov, SCP / IEEE, Article number 7342192, 2015. P. 470–474. http://ieeexplore.ieee.org/document/7342192/.
45. Роспотребнадзор. Статистические материалы. http://www.rospotrebnadzor.ru/activities/statistical-materials/

Приложение

Табл. 1. Исходные статистические данные по количеству погибших во время природных катастроф.

№	Количество погибших, чел.			
	Землетрясение	**Извержение вулкана**	**Наводнение**	**Цунами**
1	1000	9	1525	119
2	1000	31	3034	1700
3	1000	43	3247	1997
4	1000	150	3841	2000
5	1117	152	4170	2144
6	1185	153	4421	2182
7	1313	245	4554	2243
8	1342	353	5624	3000
9	1500	500	5951	3000
10	1567	700	6229	3000
11	1621	700	6401	3620
12	1989	700	7453	3800
13	2000	800	7625	5000
14	2183	1000	7829	5000
15	2200	1184	7890	5233
16	2266	1200	7992	8000
17	2323	1335	8720	13486
18	2400	1335	9838	15030
19	2500	1369	10140	25674
20	2735	1377	10698	26360
21	2800	1475	12502	30000
22	3000	1680	21621	36500
23	4000	2000	23896	40000
24	5000	2000	33780	
25	5502	2942	107485	
26	5749	2957	150180	
27	9500	3360	173123	
28	9748	3500		
29	17118	4011		
30	20085	5110		

№	Количество погибших, чел.			
	Землетрясение	Извержение вулкана	Наводнение	Цунами
31	20896	6000		
32	25000	9350		
33	31000	14300		
34	50000	25000		
35	86000	29025		
36	87587	36417		
37	227898	92000		
38	316000			

Табл. 2. Промежуточные вычисления для меры β-риск.

Катастрофа	Стандартное отклонение	Коэффициент корреляции
Наводнение	43762,83	0,96319599
Землетрясение	62437,79	0,84927857
Извержение	16395	0,79124502
Цунами	12032,36	0,99086903

Табл. 3. Статистические данные о количестве больных ВИЧ и туберкулезом в России за период с 1994 по 2012 г.г..

Год	Количество инфицированных ВИЧ	Количество больных туберкулезом
1 994	887	94214
1 995	1090	101570
1 996	2603	115792
1 997	6918	118411
1 998	10889	150879
1 999	30647	128871
2 000	89808	165401
2 001	177579	171352
2 002	227502	163618
2 003	263898	160130
2 004	296045	154344

Год	Количество инфицированных ВИЧ	Количество больных туберкулезом
2 005	300252	150904
2 006	373718	157649
2 007	403100	154964
2 008	471676	157859
2 009	530185	159110
2 010	589581	157110
2 011	650100	146762
2 012	703781	136293

Табл. 4. Значения функции полезности для случайных величин с функциями распределения $F(x)$ и $G(x)$.

Соответствующее значение функции распределения	$U_F(x_i)$	$U_G(x_i)$
Интервал $[0;0,2]$		
0,05	449,9158	29 971,1553
0,11	541,6065	32 069,1383
0,16	1 185,5688	36 083,5436
Интервал $(0,2;0,4]$		
0,21	2 857,4754	36 817,4889
0,26	4 298,2255	39 731,9676
0,32	10 908,1015	41 785,5515
0,37	28 706,7166	44 663,3123
Интервал $(0,4;0,6]$		
0,42	53 021,5532	45 789,5918
0,47	66 265,3807	45 796,2645
0,53	75 734,2779	46 734,8036
0,58	83 988,9124	46 903,8446
Интервал $(0,6;0,8]$		
0,63	85 062,3385	47 487,8302
0,68	103 583,2694	47 634,5317
0,74	110 884,6726	47 691,7115
0,79	127 726,0263	48 031,7153

Соответствующее значение функции распределения	$U_F(x_i)$	$U_G(x_i)$
Интервал $(0,8;1]$		
0,84	141 900,7506	48 308,6386
0,89	156 130,9964	49 254,5978
0,95	170 483,4202	49 737,4472
1,00	183 102,2935	51 345,3024

Табл. 5. Статистические данные по месяцам за 2013-2016 г.г. о количестве больных пневмонией (внебольничной) в России.

№	**Месяц**	**2013**	**2014**	**2015**	**2016**	**Среднее значение**	**Индекс сезонности**
1	январь	68314	52785	51174	64652	59231,25	1,3113
2	февраль	70547	52295	53645	88347	66208,50	1,4658
3	март	68669	53960	52989	59052	58667,50	1,2988
4	апрель	53194	53097	47731	45261	49820,75	1,1030
5	май	35852	41967	37277	39340	38609,00	0,8548
6	июнь	29887	33549	31208	37570	33053,50	0,7318
7	июль	27041	29440	27607	32789	29219,25	0,6469
8	август	26896	26612	26069	33524	28275,25	0,6260
9	сентябрь	32329	32571	33651	40106	34664,25	0,7674
10	октябрь	46962	46318	43407	55143	47957,50	1,0617
11	ноябрь	52020	44779	45722	61645	51041,50	1,1300
12	декабрь	45668	39658	42180	53653	45289,75	1,0027