

Санкт-Петербургский государственный университет  
Механика и Математическое моделирование  
Теоретическая и прикладная механика

Ковалев Алексей Олегович

Исследование динамики электромагнитной тросовой системы

Магистерская диссертация

Научный руководитель:

Д.ф.-м.н., проф. Тихонов А.А.

Рецензент:

К.ф.-м.н. Антипов К.А.

Санкт-Петербург

2017

SAINT-PETERSBURG STATE UNIVERSITY  
Mechanics and mathematical modeling  
Theoretical and applied mechanics

Alexey Kovalev Olegovich

Investigation of dynamics for electromagnetic tether system

Master's Thesis

Scientific supervisor:  
Prof.Dr. in Physico-mathematical sciences Tikhonov A.A.

Reviewer:  
Ph.D. in Physico-mathematical sciences Antipov K.A.

Saint-Petersburg

2017

## Содержание

Введение.....	4
Постановка задачи.....	6
Поиск положения равновесия через матрицу направляющих косинусов.....	9
Поиск положения равновесия через углы Эйлера.....	16
Нахождения первого интеграла.....	18
Линеаризация уравнений.....	20
Заключение.....	21
Список использованных источников.....	22

## Введение

Космические тросовые системы - это очень перспективное направление в космодинамике. Многие российские и зарубежные ученые ведут исследования в этой области [Нойт, 2009, Aslanov, 2016]. В первую очередь отметим монографию отечественных ученых В.В. Белецкого и Е.М. Левина [Белецкий, 1990], в которой были исследованы многие задачи о движении космических тросовых систем. Один из важных разделов в изучении космической тросовой системы - это электродинамические тросовые системы. Электродинамической тросовой системой мы будем называть систему, которая содержит проводящий трос, по которому протекает ток [Белецкий, 1990]. Тросовая система может быть изолированной [Ishige, 2004] или неизолированной [Zhong, 2013]. Длина троса может варьироваться и может достигать до 20 км [Banks, 1981]. Изучение электродинамических тросовых систем открывает новые возможности в освоении космоса. Такую систему можно использовать как двигатель и как генератор электрической энергии. При движении троса по орбите с устройствами контакта с плазмой в тросе будет индуцироваться электродвижущая сила [Iess, 2002. I], которую можно использовать для повышения или понижения космического аппарата на орбите [Белецкий, 1990]. Также проходят исследования в направлении реализации космического лифта [Ледков, 2014; Белецкий, 1990]. Также изучается возможность использования космической тросовой системы для измерения параметров гравитационного и магнитного полей Земли и параметров атмосферы на низких орбитах [Colombo, 1975]. Итальянские ученые и сотрудники национального управления по авиации и исследованию космического пространства одни из первых в 1992 попытались развернуть трос на длинную дистанцию в космосе, но из-за механической неисправности трос был выпущен на расстояние около 260 метров вместо 21 километра [Dobrowolny, 1993]. Успешное разворачивание троса было элегантно продемонстрировано чуть позже в миссии SEDS [Johnson, 2000] и

TSS-1R, в обоих случаях трос был развернут на расстояние около 19 км [Stone, 1998]. Диаметр троса очень мал и может быть 2 мм [Yamaigiwa, 2005]. Вдобавок электродинамические тросовые системы являются выгодными для различных транспортных операций. Одной из самых актуальных задач является уборка космического мусора [Heide, 2001]. Согласно эффекту Кesslera [Kessler, 1978] взаимные столкновения космического мусора могут вызвать лавинообразный рост числа обломков, что в результате затруднит вывод новых космических аппаратов на орбиту Земли. Существуют несколько концепций уборки космического мусора [Philips, 2012; Aslanov, 2014; Hoyt, 1999].

Космические аппараты будут примыкать к нефункционирующим спутникам с помощью гарпуна. Для «выстрела» используется сжатый газ. Давление регулируется для возможности изменения скорости от 4 до 80 атмосфер. Скорость гарпуна будет достигать 20-90 м/с. [Forshaw, 2016]. А малая масса, низкая стоимость и высокая надежность позволит им конкурировать в сфере уборки космического мусора.

## Постановка задачи

На низкой околоземной орбите будут действовать моменты способствующие закрутке космической тросовой системы [Somenzi, 2005]. В данной работе проводится исследование устойчивости космической тросовой системы с электродинамическим тросом относительно местной вертикали. Трос считается невесомым. Рассмотрим модель взаимодействия тросовой системы с магнитным полем Земли (Рис.1). Космические аппараты А и В соединены тросом. При построении модели космической тросовой системы будем считать орбиту центра масс круговой. Наклонение орбиты  $i = 0$ . Для работы электродинамической тросовой системы на телах А и В должны быть установлены специальные устройства, которые могут собирать свободные электроны из окружающей плазмы [Hastings, 1987; less, 2002. II]. Предположим, что в тросе течет электрический ток, электроны движутся от А к В. На конце В электроны стекают с контактора в ионосферную плазму и перемещаются к полюсам по спиральным траекториям, «обматывающим» магнитные линии SBN. Будем считать ток  $I$  положительным, если он течет от А к В, а наоборот, отрицательным, соответственно. На высоте около 110 км электроны уходят от космического аппарата В, достигают высокой проводимости и переходят на линии SAN, возвращаясь к космическому аппарату А [Белецкий, 1990]. Таким образом, электрический ток, текущий в тросе, замыкается через ионосферные токи, текущие вдоль магнитных линий. Протекание тока через ионосферу также сопровождается потерями, но они малы и учитываться не будут. На высотах более 2000 км этот механизм будет работать недостаточно эффективно в виду того, что плотность силы магнитного тока мала [Heide, 2001].

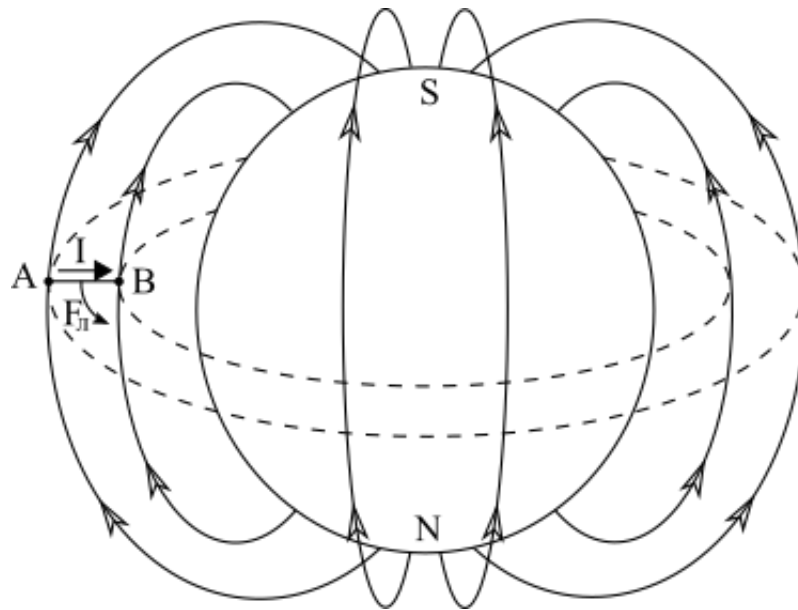


Рис. 1. Движение тросовой системы

В данной работе строится математическая модель космической тросовой системы, основанная на использовании моментов: Лоренца [Тихонов, 2003], Ампера [Белецкий, 1990] и гравитационного [Маркеев, 1999; Белецкий, 1965], для управления ориентацией космического аппарата. В предположение, что трос остается натянутым по местной вертикали на всем промежутке движения, отыскиваются возможные положения равновесия троса в орбитальной системе координат. Если трос совершает колебания, то можно считать, что его форма мало отклоняется от прямолинейной. И тогда будем рассматривать простейшую модель троса, когда трос аппроксимируется жестким стержнем постоянной длины [Gilchrist, 1998]. Космическая тросовая система находится в ньютоновском гравитационном поле. Рассмотрим гантель с точечными зарядами на концах (Рис.2). По тросу течет ток, который во многих случаях можно считать постоянным [Белецкий, 1990]. Трос будем считать изолированным для ограждения от прямого контакта с плазмой.

На рисунке 2  $m_1, m_2$  это космический аппарат и спутник, соответственно.

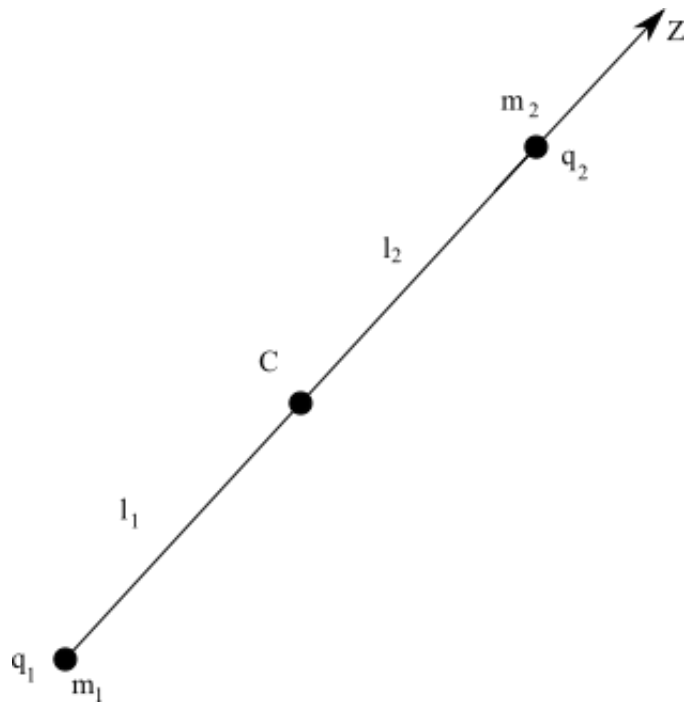


Рис. 2. Тросовая система

Центр масс всей системы обозначим  $C$ ,  $l_1, l_2$  - это длина троса до центра масс. На концах системы находится устройство контакта с плазмой, которое может вырабатывать заряды  $q_1, q_2$ . Положение массы  $m_1$  задается координатой  $z_1$ , а положение массы  $m_2$  задается координатой  $z_2$ .



# Поиск положения равновесия через матрицу направляющих косинусов

Вращательное движение троса описывается с помощью уравнений Эйлера:

$$\begin{cases} A\dot{\omega}_x + (C - B)\omega_y\omega_z = M_{\Gamma x} + M_{Lx} + M_{Ax}, \\ B\dot{\omega}_y + (A - C)\omega_z\omega_x = M_{\Gamma y} + M_{Ly} + M_{Ay}, \\ C\dot{\omega}_z + (B - A)\omega_x\omega_y = M_{\Gamma z} + M_{Lz} + M_{Az}, \end{cases} \quad (1)$$

где  $A, B, C$  – главные центральные моменты инерции космической тросовой системы,  $\omega$  – угловая скорость движения центра масс космической тросовой системы по круговой орбите,  $M_A, M_L, M_\Gamma$  – моменты Ампера, Лоренца и гравитационного.

Начнем рассматривать левую часть уравнений Эйлера. В данной работе получаем абстрактную модель, в которой масса вытянута вдоль линии по местной вертикали. Положением равновесия космической тросовой системы будем называть такое движение, при котором космическая тросовая система неподвижна в орбитальной системе координат. В положении равновесия  $\alpha_i = \beta_i = \gamma_i = const$  и проекции относительной угловой скорости космической тросовой системы на оси  $Oxyz$  :  $p = q = r = 0$ .

Где  $\alpha_i = \beta_i = \gamma_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) – это элементы матрицы направляющих косинусов

$$A = \begin{pmatrix} x(\bar{i}) & y(\bar{j}) & z(\bar{k}) \\ \xi(\xi_0) & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \eta(\eta_0) & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \zeta(\zeta_0) & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}.$$

Представим  $\omega$  в виде

$$\begin{aligned}\omega_x &= p + \omega_0 \beta_1, \\ \omega_y &= q + \omega_0 \beta_2, \\ \omega_z &= r + \omega_0 \beta_3.\end{aligned}\tag{2}$$

Направим вдоль гантели ось  $z$  (Рис 3), тогда  $C = 0$ , а  $A = B = m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2$ .

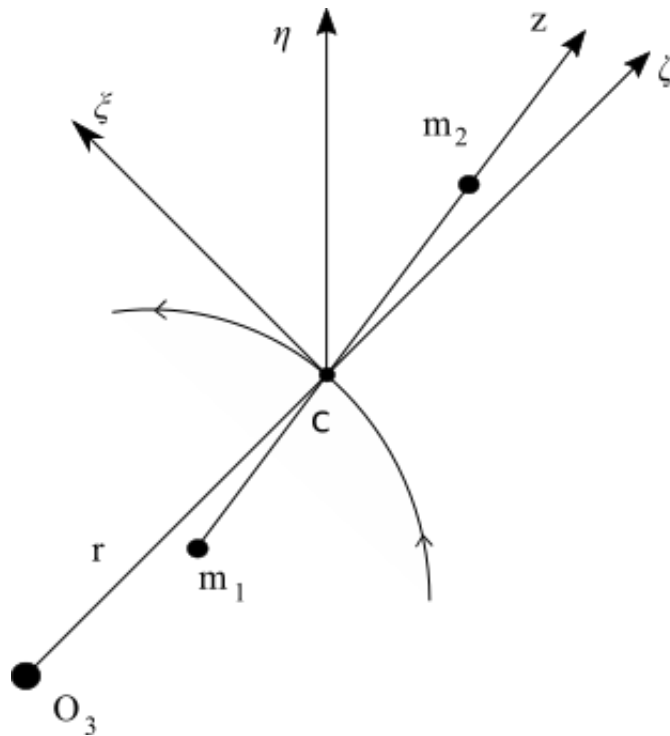


Рис. 3. Движение космической тросовой системы

Где  $\eta$  направлена по нормали к плоскости орбиты,  $\xi$  направлена по касательной к орбите,  $\zeta$  направлена по местной вертикали.

Линейный характер нашей задачи приводит к тому, что третье уравнение системы (1) не описывает интересующих нас динамических процессов. Подставим значения (2), соответствующие положению равновесия, в левую часть уравнений (1)

$$\begin{cases} -A\omega_0^2 \beta_2 \beta_3 = M_{gx} + M_{Lx} + M_{Ax}, \\ A\omega_0^2 \beta_1 \beta_3 = M_{gy} + M_{Ly} + M_{Ay}. \end{cases}\tag{3}$$

Теперь будем рассматривать правую часть уравнений (3). Она получена при предположении, что на космическую тросовую систему действуют моменты  $M_A, M_L, M_G$  Ампера, Лоренца и гравитационного. Момент Лоренцевых сил может значительно превышать гравитационный момент и другие возмущающие моменты и может использоваться как восстанавливающий момент в системе ориентации космического аппарата [Тихонов, 2003].

Моменты гравитационных сил являются одним из важнейших факторов, влияющих на вращение искусственных небесных тел. Для космического аппарата, обладающего тензором инерции  $J = diag(A, B, C)$  в системе координат  $Oxyz$  и имеющего угловую скорость движения центра масс на орбите  $\omega_0$ , проекции гравитационного момента на оси  $x, y$  определяются по формулам:

$$\begin{cases} M_{Gx} = -3A\omega_0^2\gamma_2\gamma_3, \\ M_{Gy} = 3A\omega_0^2\gamma_1\gamma_3. \end{cases} \quad (4)$$

Для круговой орбиты  $\omega_0^2 = \frac{\gamma M}{R^3}$ ,  $M$  - масса Земли,  $\gamma$  - гравитационная постоянная, а  $R$  - радиус-вектор центра масс тела относительно центра Земли.

Запишем момент Лоренца:

$$\bar{M}_L = \int_V \sigma \bar{\rho} \times (\bar{\mathcal{G}} \times \bar{B}) dV, \quad (5)$$

где  $\mathcal{G}$  - скорость элемента  $dV$  относительно магнитного поля Земли,  $\bar{\rho}$  - радиус-вектор элемента  $dV$  относительно центра масс космического аппарата,  $\bar{B}$  - вектор магнитной индукции магнитного поля. В работе [Петров, 1999] показано, что при нецентральной распределении заряда момент  $\bar{M}_L$  можно аппроксимировать выражением

$$\bar{M}_L = Q\bar{\rho}_0 \times (\bar{\mathcal{G}}_c \times \bar{B}_c),$$

где  $\bar{\rho}_0 = \frac{1}{Q} \int_V \sigma \bar{\rho} dv$  радиус-вектор центра заряда относительно его центра масс,

$Q$  - электростатический заряд, распределенный по его объему  $V$  с плотностью  $\sigma$ ,  $\bar{\mathcal{G}}_c$  - скорость центра масс космического аппарата относительно магнитного поля

$$\bar{\mathcal{G}}_c = R(\omega_0 - \omega_3)\bar{\xi}_0 = R(\omega_0 - \omega_3)(\alpha_1\bar{i} + \alpha_2\bar{j} + \alpha_3\bar{k}),$$

а  $\omega_3 = \frac{2\pi}{T}$  - это угловая скорость суточного вращения Земли,  $T$  - период обращения,  $\bar{B}_c$  - вектор магнитной индукции магнитного поля в центре масс космического аппарата, заданный компонентами в орбитальной системе координат

$$\bar{B}_c = \frac{\mu}{R^3}(\beta_1\bar{i} + \beta_2\bar{j} + \beta_3\bar{k}),$$

где  $\mu$  - магнитный момент земного диполя.

Распишем момент Лоренца как

$$\begin{aligned} M_L = \int_V \sigma \bar{\rho} \times (\bar{V} \times \bar{B}) dv &= \int_V \sigma \bar{\rho} \times [(\bar{V}_c + \Delta\bar{V}) \times (\bar{B}_c + \Delta\bar{B})] dv = \int_V \sigma \bar{\rho} \times (\bar{V} \times \bar{B}_c) dv + \\ &+ \int_V \sigma \bar{\rho} \times (\bar{V} \times \Delta\bar{B}) dv + \int_V \sigma \bar{\rho} \times (\Delta\bar{V} \times \bar{B}_c) dv + \int_V \sigma \bar{\rho} \times (\Delta\bar{V} \times \Delta\bar{B}) dv \end{aligned}$$

$$\text{Обозначим } M_1 = \int_V \sigma \bar{\rho} \times (\bar{V} \times \bar{B}_c) dv, \quad \Delta M_1 = \int_V \sigma \bar{\rho} \times (\bar{V} \times \Delta\bar{B}) dv,$$

$$M_2 = \int_V \sigma \bar{\rho} \times (\Delta\bar{V} \times \bar{B}_c) dv, \quad \Delta M_2 = \int_V \sigma \bar{\rho} \times (\Delta\bar{V} \times \Delta\bar{B}) dv.$$

Параметр  $\Delta M_2$  слишком мал и не будет рассматриваться при построения уравнения.

В результате нахождения интеграла (5) получаем их проекции на оси  $x, y$

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{J1x} = \frac{-R(\omega_0 - \omega_3)\mu(q_1z_1 + q_2z_2)\gamma_2}{R^3}, \\ \Delta M_{J1x} = -\frac{3\mu(q_1z_1^2 + q_2z_2^2)(\omega_0 - \omega_3)(\beta_2\beta_3 - \gamma_2\gamma_3)}{R^3}, \\ M_{J2x} = \frac{3\mu(q_1z_1^2 + q_2z_2^2)(\omega_0 - \omega_3)\beta_2}{R^3}, \\ M_{J1y} = \frac{\mu R(\omega_0 - \omega_3)(q_1z_1 + q_2z_2)\gamma_1}{R^3}, \\ \Delta M_{J1y} = -\frac{3\mu(q_1z_1^2 + q_2z_2^2)(\omega_0 - \omega_3)(\gamma_1\gamma_3 - \beta_1\beta_3)}{R^3}, \\ M_{J2y} = \frac{\mu\beta_3(q_1z_1^2 + q_2z_2^2)(-\omega_0 + \omega_3)\beta_1}{R^3}. \end{array} \right. \quad (6)$$

В процессе движения относительно геомагнитного поля с магнитной индукцией  $\mathbf{B}$  возбуждается сила Ампера, вычислим его для нашей системы

$$d\bar{F}_A = I d\bar{l} \times \bar{B} = \bar{I} \times \bar{B} dz,$$

где  $\bar{I} = I\bar{k}$  – сила тока, будем считать её постоянной;  $\bar{k}$  – орт оси  $z$ .

$$\begin{aligned} \bar{M}_A &= \int_{z_1}^{z_2} \bar{\rho} \times (I\bar{k} \times \bar{B}) dz = I \int_{z_1}^{z_2} (x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}) \times [k \times (B_x\bar{i} + B_y\bar{j} + B_z\bar{k})] dz = \\ &= I \int_{z_1}^{z_2} (x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}) \times [k \times (B_x\bar{j} + B_y\bar{i})] dz = I \int_{z_1}^{z_2} (-B_x\bar{i} - B_y\bar{j}) dz. \end{aligned}$$

Магнитная индукция  $\mathbf{B}$  раскладывается на

$$\mathbf{B} = B_c + \Delta B,$$

$$\text{где } \Delta B_x = -\frac{3\mu}{R^4}(B_1\gamma_3 + B_3\gamma_1), \quad \Delta B_y = -\frac{3\mu}{R^4}(B_2\gamma_3 + B_3\gamma_2).$$

Продолжим находить момент Ампера с учетом разложения  $\mathbf{B}$ :

$$\begin{aligned}
\bar{M}_A = & -I \int_{z_1}^{z_2} z \left[ (B_{cx} + \Delta B_x) \bar{i} + (B_{cy} + \Delta B_y) \bar{j} \right] dz = -I \int_{z_1}^{z_2} z (B_{cx} \bar{i} + B_{cy} \bar{j}) dz - \\
& -I \int_{z_1}^{z_2} (\Delta B_x \bar{i} + \Delta B_y \bar{j}) z dz = -I \frac{z_2^2 - z_1^2}{2} (B_{cx} \bar{i} + B_{cy} \bar{j}) - I \int_{z_1}^{z_2} -\frac{\mu}{R^3} (B_1 \gamma_3 + B_3 \gamma_1) i - \\
& -\frac{3\mu}{R^4} (B_2 \gamma_3 + B_3 \gamma_2) \bar{j} z^2 dz = -I \frac{\mu}{R^3} \left[ \frac{z_2^2 - z_1^2}{2} (B_1 \bar{i} + B_2 \bar{j}) - \frac{z_2^3 - z_1^3}{R} ((B_1 \gamma_3 + B_3 \gamma_1) \bar{i} + \right. \\
& \left. + (B_2 \gamma_3 + B_3 \gamma_2) \bar{j}) \right].
\end{aligned} \tag{7}$$

Перепишем уравнение (7) для наших проекции на оси  $x, y$ :

$$\begin{cases} M_{Ax} = -I \frac{\mu}{R^3} \left[ \frac{(z_2^2 - z_1^2)}{2} \beta_1 - \frac{(z_2^3 - z_1^3)}{R} (\beta_1 \gamma_3 + \beta_3 \gamma_1) \right], \\ M_{Ay} = -I \frac{\mu}{R^3} \left[ \frac{(z_2^2 - z_1^2)}{2} \beta_2 - \frac{(z_2^3 - z_1^3)}{R} (\beta_2 \gamma_3 + \beta_3 \gamma_2) \right]. \end{cases} \tag{8}$$

Рассмотрим сначала простейшую модель космической тросовой системы, учитывая гравитационный момент, Амперов момент (без  $\Delta B$ ) и Лоренцев момент с учетом  $M_1$ . Подставим выражения (4), (6) и (8) в (3):

$$\begin{cases} -3\omega_0^2 (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) \gamma_2 \gamma_3 + R(\omega_0 - \omega_3) \frac{\mu}{R^3} (q_1 z_1 + q_2 z_2) (-\gamma_2) - \frac{I\mu}{2R^3} (z_2^2 - z_1^2) \beta_1 = \\ = -A\omega_0^2 \beta_2 \beta_3, \\ 3\omega_0^2 (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) \gamma_1 \gamma_3 + R(\omega_0 - \omega_3) \frac{\mu}{R^3} (q_1 z_1 + q_2 z_2) \gamma_1 - \frac{I\mu}{2R^3} (z_2^2 - z_1^2) \beta_2 = \\ = A\omega_0^2 \beta_1 \beta_3. \end{cases} \tag{9}$$

Из уравнения (9) установлено, что вертикальное положение троса, соответствующее значению  $\gamma_3 = 1$ , существует лишь при условии:

$$z_1^2 = z_2^2. \tag{10}$$

Следующим шагом рассмотрим модель, учитывающее градиентность магнитного поля Земли. Подставим (4), (6) и (8) в уравнение (3):

$$\left\{ \begin{array}{l} -3\omega_0^2(m_1l_1^2 + m_2l_2^2)\gamma_2\gamma_3 + R(\omega_0 - \omega_3)\frac{\mu}{R^3}(q_1z_1 + q_2z_2)(-\gamma_2) - \frac{3\mu(\omega_0 - \omega_3)}{R^3}(q_1z_1^2 + q_2z_2^2) \cdot \\ \cdot (\beta_2\beta_3 - \gamma_2\gamma_3) + \frac{\mu\beta_3}{R^3}(q_1z_1^2 + q_2z_2^2)(\omega_0 - \omega_3)\beta_2 - \frac{I\mu}{2R^3}(z_2^2 - z_1^2)\beta_1 + \frac{I\mu}{2R^4}(z_2^3 - z_1^3)(\beta_1\gamma_3 + \\ + \beta_3\gamma_1) = -A\omega_0^2\beta_2\beta_3 \\ 3\omega_0^2(m_1l_1^2 + m_2l_2^2)\gamma_1\gamma_3 + R(\omega_0 - \omega_3)\frac{\mu}{R^3}(q_1z_1 + q_2z_2)\gamma_1 - \frac{3\mu(\omega_0 - \omega_3)}{R^3}(q_1z_1^2 + q_2z_2^2) \cdot \\ \cdot (\gamma_1\gamma_3 - \beta_1\beta_3) + \frac{\mu\beta_3}{R^3}(q_1z_1^2 + q_2z_2^2)(-\omega_0 - \omega_3)\beta_1 - \frac{I\mu}{2R^3}(z_2^2 - z_1^2)\beta_2 + \frac{I\mu}{2R^4}(z_2^3 - z_1^3)(\beta_2\gamma_3 + \\ + \beta_3\gamma_2) = A\omega_0^2\beta_1\beta_3 \end{array} \right.$$

Таким образом, мы видим, что при подстановки всех моментов с их составляющими значение  $\gamma_3$  не отличается. Положение нормали к плоскости орбиты оказывается равновесным.

## Поиск положения равновесия через углы Эйлера

Формулы переходы от матрицы направляющих косинусов к углам Эйлера

$\alpha_i, \beta_i, \gamma_i (i=1,2,3)$  имеют вид:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \cos \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi \cos \vartheta, & \alpha_2 &= -\sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi \cos \vartheta, \\ \alpha_3 &= \sin \psi \sin \vartheta, & \gamma_1 &= \sin \varphi \sin \vartheta, & \gamma_2 &= \cos \varphi \sin \vartheta, & \gamma_3 &= \cos \vartheta, \\ \beta_1 &= \sin \psi \cos \varphi + \sin \varphi \cos \psi \cos \vartheta, & \beta_2 &= -\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi \cos \vartheta, \\ \beta_3 &= -\sin \vartheta \cos \psi. \end{aligned}$$

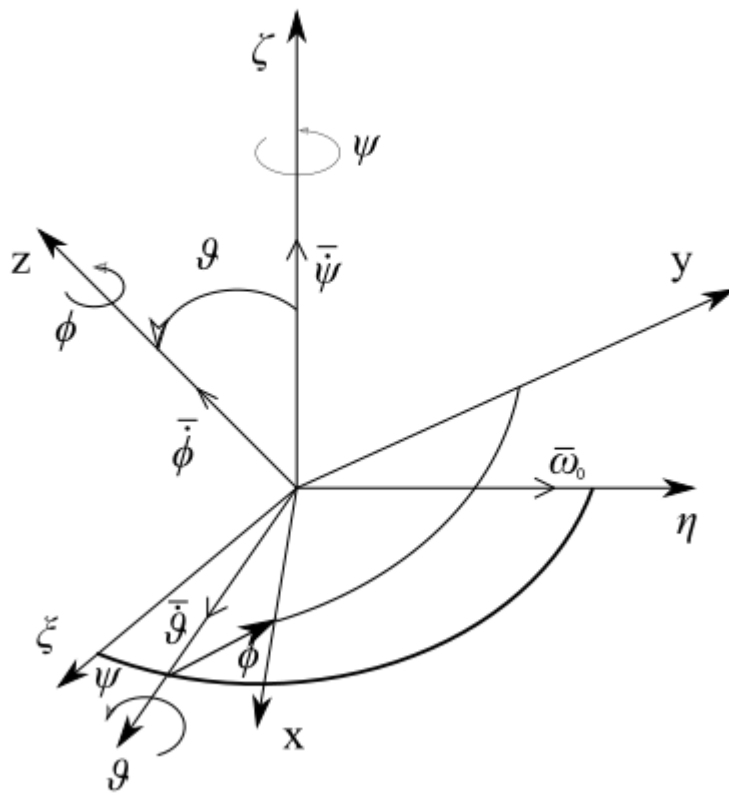


Рис. 4. Движение электромагнитной тросовой системы

Вращательное движение троса опишем с помощью уравнение Эйлера

(1):

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\vartheta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \vartheta \sin \varphi + \omega_0 \sin \psi \cos \varphi + \omega_0 \sin \varphi \cos \psi \cos \vartheta, \\ \omega_y &= -\dot{\vartheta} \sin \varphi + \dot{\psi} \sin \vartheta \cos \varphi - \omega_0 \sin \varphi \sin \psi + \omega_0 \cos \varphi \cos \psi \cos \vartheta, \\ \omega_z &= \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta - \omega_0 \sin \vartheta \cos \psi. \end{aligned}$$



Запишем гравитационный момент:

$$\begin{cases} M_{\Gamma x} = -3A\omega_0^2 \cos \varphi \sin \vartheta \cos \vartheta, \\ M_{\Gamma y} = 3A\omega_0^2 \sin \varphi \sin \vartheta \cos \vartheta. \end{cases} \quad (11)$$

Лоренцев момент:

$$\begin{cases} M_{\Gamma 1x} = \frac{-R(\omega_0 - \omega_3)\mu(q_1 z_1 + q_2 z_2) \cos \varphi \sin \vartheta}{R^3}, \\ M_{\Gamma 1y} = \frac{\mu R(\omega_0 - \omega_3)(q_1 z_1 + q_2 z_2) \sin \varphi \sin \vartheta}{R^3}. \end{cases} \quad (12)$$

Момент Ампера:

$$\begin{cases} M_{Ax} = -I \frac{\mu}{R^3} \left[ \frac{(z_2^2 - z_1^2)}{2} (\sin \psi \cos \varphi + \sin \varphi \cos \psi \cos \vartheta) \right], \\ M_{Ay} = -I \frac{\mu}{R^3} \left[ \frac{(z_2^2 - z_1^2)}{2} (-\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi \cos \vartheta) \right]. \end{cases} \quad (13)$$

Рассмотрим простейшую модель космической тросовой системы, учитывая гравитационный момент, Амперов момент и Лоренцев момент с учетом  $M_1$ . Подставим уравнения (11), (12) и (13) в (1). С учетом того, что нет вращения по углу  $\varphi = \vartheta = 0$  и  $z_2^2 = z_1^2$ , запишем уравнения в следующем виде:

$$\begin{aligned} A\omega_0 \dot{\psi} \cos \psi - A\omega_0 \dot{\psi} \cos \psi &= 0, \\ A\omega_0 \dot{\varphi} \sin \psi + A\omega_0 \dot{\psi} \sin \psi - A\omega_0 \dot{\varphi} \sin \psi - A\omega_0 \dot{\psi} \sin \psi &= 0. \end{aligned}$$

Мы видим, что система находится в положении равновесия относительно местной вертикали.

## Нахождения первого интеграла

Кинематические уравнения Пуассона:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_1 + \omega_y \alpha_3 - \omega_z \alpha_2 &= -\omega_0 \gamma_1, \\ \dot{\beta}_1 + \omega_y \beta_3 - \omega_z \beta_2 &= 0, \\ \dot{\gamma}_1 + \omega_y \gamma_3 - \omega_z \gamma_2 &= \omega_0 \alpha_1. \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} x \rightarrow y \rightarrow z \\ 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим вопрос об устойчивости вертикального положения троса. Для этого возьмем простейшую модель и умножим первое выражение на  $\omega_x$ , а второе на  $\omega_y$ :

$$\begin{cases} -3\omega_0^2 \gamma_3 (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) \gamma_2 \omega_x - R(\omega_0 - \omega_3) \frac{\mu}{R^3} (q_1 z_1 + q_2 z_2) \gamma_2 \omega_x - \frac{I\mu}{2R^3} (z_2^2 - z_1^2) \beta_1 \omega_x = \\ = A\dot{\omega}_x \omega_x - A\omega_y \omega_z \omega_x, \\ 3\omega_0^2 \gamma_3 (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) \gamma_1 \omega_y + R(\omega_0 - \omega_3) \frac{\mu}{R^3} (q_1 z_1 + q_2 z_2) \gamma_1 \omega_y - \frac{I\mu}{2R^3} (z_2^2 - z_1^2) \beta_2 \omega_y = \\ = A\dot{\omega}_y \omega_y + A\omega_z \omega_x \omega_y. \end{cases}$$

Сложим первое и второе уравнение:

$$\begin{aligned} 3\omega_0^2 \gamma_3 (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) (\dot{\gamma}_3 - \omega_* \alpha_3) + R(\omega_0 - \omega_3) \frac{\mu}{R^3} (q_1 z_1 + q_2 z_2) (\dot{\gamma}_3 - \omega_* \alpha_3) + \\ + \frac{I\mu}{2R^3} (z_2^2 - z_1^2) (-\beta_1 \omega_x - \beta_2 \omega_y) = A\dot{\omega}_x \omega_x + A\dot{\omega}_y \omega_y. \end{aligned} \quad (14)$$

Теперь первое уравнение из системы (9) умножим на  $\beta_1$ , а второе на  $\beta_2$ :

$$\begin{cases} -3\omega_0^2 \gamma_3 (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) \gamma_2 \beta_1 - R(\omega_0 - \omega_3) \frac{\mu}{R^3} (q_1 z_1 + q_2 z_2) \gamma_2 \beta_1 - \frac{I\mu}{2R^3} (z_2^2 - \\ - z_1^2) \beta_1^2 = A\dot{\omega}_x \beta_1 - A\omega_0^2 \beta_2 \beta_3 \beta_1, \\ 3\omega_0^2 \gamma_3 (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) \gamma_1 \beta_2 + R(\omega_0 - \omega_3) \frac{\mu}{R^3} (q_1 z_1 + q_2 z_2) \gamma_1 \beta_2 - \frac{I\mu}{2R^3} (z_2^2 - \\ - z_1^2) \beta_2^2 = A\dot{\omega}_y \beta_2 + A\omega_0^2 \beta_2 \beta_3 \beta_1. \end{cases} \quad (15)$$

Сложим полученные в (15) уравнения:

$$3\omega_0^2\gamma_3(m_1l_1^2 + m_2l_2^2)(-\alpha_3) + R(\omega_0 - \omega_3)\frac{\mu}{R^3}(q_1z_1 + q_2z_2)(-\alpha_3) + \frac{I\mu(z_2^2 - z_1^2)}{2R^3}(-\beta_1^2 - \beta_2^2) = A\dot{\omega}_x\beta_1 + A\dot{\omega}_y\beta_2. \quad (16)$$

Введем обозначения  $a = \frac{I\mu(z_2^2 - z_1^2)}{2R^3}$ ,  $L = R(\omega_0 - \omega_3)\frac{\mu}{R^3}(q_1z_1 + q_2z_2)$ .

Перепишем:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{A}{2}(\omega_x^2 + \omega_y^2) - \frac{3}{2}A\omega_0^2\gamma_3^2 + L\gamma_3 - A\omega_0(\omega_x\beta_1 + \omega_y\beta_2)\right] = a(\omega_x\beta_1 + \omega_y\beta_2 - \omega_0(\beta_1^2 + \beta_2^2)). \quad (17)$$

Перейдем от абсолютных угловых скоростей  $\omega_x, \omega_y$  к относительным угловым скоростям  $p, q$ :

$$\frac{d}{dt}\left[A(p^2 + q^2) - A\omega_0^2(\beta_1^2 + \beta_2^2) - 3A\omega_0^2\gamma_3^2 - 2L\gamma_3\right] = 2a(p\beta_1 + q\beta_2). \quad (18)$$

Введем новую переменную  $\Delta = 1 - \gamma_3$ , представляющую собой отклонение троса от вертикального положения  $\gamma_3 = 1$ . Получим:

$$\frac{d}{dt}\left[A(p^2 + q^2) + (3A\omega_0^2 + L)\alpha_3^2 + (4A\omega_0^2 + L)\beta_3^2 + L\Delta^2\right] = 2a(p\beta_1 + q\beta_2). \quad (19)$$

При условии выполнения  $z_1^2 = z_2^2$  и  $a = 0$  имеет место первый интеграл:

$$A(p^2 + q^2) + (3A\omega_0^2 + L)\alpha_3^2 + (4A\omega_0^2 + L)\beta_3^2 + L\Delta^2 = \text{const}. \quad (20)$$

## Линеаризация уравнений движения

Выполним линеаризацию:  $\sin \vartheta \approx \vartheta, \cos \vartheta \approx 1, \cos \psi \approx 1$ .

$$A(\ddot{\vartheta} + \omega_0 \dot{\psi} \cos \psi) - A(\dot{\psi} \vartheta + \omega_0 \cos \psi)(\dot{\psi} - \omega_0 \vartheta \cos \psi) = -3A\omega_0^2 \vartheta - \frac{R(\omega_0 - \omega_3) \vartheta \mu(q_1 z_1 + q_2 z_2)}{R^3},$$
$$A\ddot{\vartheta} + 4A\omega_0^2 \vartheta + \frac{R(\omega_0 - \omega_3) \vartheta \mu(q_1 z_1 + q_2 z_2)}{R^3} = 0.$$

В линейном приближении получаем уравнение гармонических колебаний:

$$\ddot{\vartheta} + \left[ 4\omega_0^2 + \frac{R(\omega_0 - \omega_3) \mu(q_1 z_1 + q_2 z_2)}{AR^3} \right] \vartheta = 0.$$

Если отсутствует Лоренцев момент, то тогда частота колебаний равна  $2\omega_0$ . А если подключается момент Лоренца, то частота колебаний возрастает - это соответствует увеличению жесткости системы.

## Заключение

В ходе диссертационной работы на основе динамических уравнений Эйлера была построена простейшая математическая модель и модель, учитывающая градиентность магнитного поля Земли. На электромагнитную тросовую систему действуют момент Ампера, момент Лоренца и гравитационный момент. Математическая модель была построена с помощью матрицы направляющих косинусов и углов Эйлера. При анализе математических моделей было установлено, что положение равновесия, соответствующее значению  $\gamma_3 = 1$ , существует лишь при условии  $z_1^2 = z_2^2$ . Также получен первый интеграл движения, с помощью которого определяются достаточные условия устойчивости. На основе этого была проведена линеаризация уравнений и оценка малых колебаний. Сделан вывод, что при увеличении жесткости системы возрастает частота колебаний. Это доказывает правильный выбор установки заряженных поверхностей на концах троса, что соответствует теореме Томпсона и Тета.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Антипов К.А., Петров К.Г., Тихонов А.А. Электродинамический метод трехосной стабилизации динамически симметричного космического аппарата. // Вестник СПбГУ. Сер. 1, 2006, вып.1.
2. Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс / В.В. Белецкий. - Москва : Наука, 1965. – 416 с.
3. Белецкий В.В. Динамика космических тросовых систем / В.В. Белецкий, Е.М. Левин. - Москва : Наука, 1990. - 330 с.
4. Ледков А.С., Пикалов Р.С. Исследование влияния движения подъемника на динамику космического лифта // Sci. Educ. Bauman MSTU. 2014. Т. 14. № 5. С. 206–216.
5. Маркеев А.П. Теоретическая механика: Учебник для университетов / А.П. Маркеев. - Москва : ЧеРо, 1999. - 572 с.
6. Петров К.Г., Тихонов А.А. Момент сил Лоренца, действующих на заряженный спутник в магнитном поле Земли. Ч.2: Вычисление момента и оценки его составляющих // Вестн.С.- Петербург.ун-та. Сер. 1. 1999. Вып. 3. №15. С.81-91.
7. Тихонов А.А. Метод полупассивной стабилизации космического аппарата в геомагнитном поле // Космич. исслед., 2003. Т.41.№1. С.69-79.
8. Aslanov V.S., Yudintsev V. V. Behavior of tethered debris with flexible appendages // Acta Astronaut. 2014. Т. 104. № 1. С. 91–98.
9. Aslanov V.S. Swing principle for deployment of a tether-assisted return mission of a re-entry capsule // Acta Astronaut. 2016. Т. 120. С. 154–158.
10. Banks P.M., Williamson P.R., Oyama K.I. Electrical behavior of a shuttlez electrodynamic tether system (sets)” // Planet. Space Sci. 1981. Т. 29. С. 139–147.

11. Colombo G., Gaposchkin E.M. Grossi M.D. Weiffenbach G.C. Shuttle-borne “Skyhook”: a new tool for low-orbital-altitude research // *Meccanica*. 1975. C. 3-20.
12. Dobrowolny M., Melchioni E. Electrodynamic Aspects of the First Tethered Satellite Mission // *J. Geophys. Res.* 1993. T. 98. № A8. C. 13,713-761,778.
13. Forshaw J.L., Aglietti G.S., Navarathinam N. RemoveDEBRIS: An in-orbit active debris removal demonstration mission / J.L. Forshaw, G.S. Aglietti, N. Navarathinam, H. Kadhem, T.Salmon, A.Pisseloup, E. Joffre, T.Chabot, I.Retat, R. Axthelm, S. Barraclough, A. Ratcliffe, C. Bernal, F. Chaumette, A.Pollini, W.H. Steyn // *Acta Astronaut.* 2016. T. 127. № 2016. C. 448–463.
14. Gilchrist B.E., Bonifazi C., Bilen S.G., Raitt W.J., Lebreton J.P. Enhanced electrodynamic tether currents due to electron emission from a neutral gas discharge: Results from the TSS-1R mission // *Geophys. Res. Lett.* 1998. T. 25. № 4. C. 437–440.
15. Hastings D.E. Theory of plasma contactors used in the ionosphere // *J. Spacecr. Rockets*. 1987. T. 24. № 3. C. 250–256.
16. Heide E.J. Van der, Kruijff M. Tethers and debris mitigation // *Acta Astronaut.* 2001. T. 48. № 5–12. C. 503–516.
17. Hoyt R.P., Forward R.L. Performance of the Terminator Tether for autonomous deorbit of LEO spacecraft // 35th Jt. Propuls. Conf. Exhib. 1999. № June.
18. Hoyt R.P., Barnes I.M., Nestor R., Slostad J.T. The Terminator Tape<sup>TM</sup>: A cost-effective de-orbit module for end-of-life disposal of LEO satellites // AIAA Space 2009 Conference and Exposition. 2009. C. 1–9.
19. Ishige Y., Kawamoto S., Kibe S. Study on electrodynamic tether system for space debris removal // *Acta Astronaut.* 2004. T. 55. № 11. C. 917–929.
20. Johnson L., Estes R.D., Lorenzini E., Martinez-Sanchez M., Sanmartin J. Propulsive small expendable deployer system experiment // *J. of spacecraft and rockets* 2000. T. 37. №2.

21. Kessler D.J., Cour-palais B.G. Was Observed // *J. Geophys. Res.* 1978. T. 83. № 8.
22. Iess L., Bruno C., Uliveri C. Satellite de-orbiting by means of electrodynamic tethers part I: General concepts and requirements // *Acta Astronaut.* 2002. T. 50. № 7. C. 399–406.
23. Iess L., Bruno C., Uliveri C. Satellite Deorbiting by Means of Electrodynamic Tethers part II: System Configuration and Performance // *Acta Astronaut.* 2002. T. 50. № 7. C. 407–416.
24. Phipps C.R. Removing orbital debris with lasers // *Adv. Sp. Res.* 2012. T. 49. № 9. C. 1283–1300.
25. Somenzi L., Iess L., Pelaez J. Linear Stability Analysis of Electrodynamic Tethers // *J. Guid. Control Dyn.* 2005. T. 28. № 5. C. 843–849.
26. Stone N.H., Bonifazi C. The TSS-1R Mission: Overview and scientific context // *Geophys. Res. Lett.* 1998. T. 25. № 4. C. 409–412.
27. Yamaigiwa Y., Hiragi E., Kishimoto T. Dynamic behavior of electrodynamic tether deorbit system on elliptical orbit and its control by Lorentz force // *Aerosp. Sci. Technol.* 2005. T. 9. № 4. C. 366–373.
28. Zhong R., Zhu Z.H. Libration dynamics and stability of electrodynamic tethers in satellite deorbit // *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 2013. T. 116. № 3. C. 279–298.