

ПРАВИТЕЛЬСТВО РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(СПбГУ)

Кафедра квантовой механики  
Направление «Физика»



**ДИНАМИКА КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ  
В МОДЕЛИ ТАВИСА-КАММИНГСА – КИМ  
ИССЛЕДОВАНИЕ**

Магистерская диссертация студента

\_\_\_\_\_ **Ермакова Игоря Владимировича**

Научный руководитель:  
\_\_\_\_\_ д. ф.-м. н., проф. **Соколов А.И.**

Рецензент:  
\_\_\_\_\_ к. ф.-м. н., ст.н.с. **Моягин Н.С.**

Санкт-Петербург  
2016

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>2</b>
1.1	Актуальность создания квантовых вычислителей . . . . .	2
1.2	Квантовая оптика . . . . .	2
1.3	Квантовый метод обратной задачи . . . . .	3
1.4	Задачи работы и её структура . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Описание модели</b>	<b>4</b>
2.1	Модель Тависа-Каммингса . . . . .	4
2.2	Интегрируемая обобщённая модель Тависа-Каммингса . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Численное исследование модели</b>	<b>6</b>
3.1	Постановка КМ задачи, основное состояние . . . . .	6
3.2	Элементарные возбуждения системы . . . . .	7
3.3	Анзац для волновой функции . . . . .	8
3.4	Динамика физических величин . . . . .	8
3.5	Эволюция атомной инверсии. Осцилляции Раби . . . . .	9
<b>4</b>	<b>Квантовый метод обратной задачи</b>	<b>10</b>
4.1	Алгебраический анзац Бете . . . . .	11
4.2	Выражение для энергии через уравнения Бете . . . . .	12
4.3	Проблема вычисления средних и скалярных произведений . . . . .	13
4.4	Детерминантное представление . . . . .	14
4.5	Выражение для атомной инверсии через детерминанты . . . . .	15
<b>5</b>	<b>Сравнение результатов точной диагонализации и КМОЗ</b>	<b>16</b>
5.1	Численное решение уравнений Бете . . . . .	16
5.2	Пример расчёта среднего с помощью КМОЗ . . . . .	17
<b>6</b>	<b>Результаты и выводы</b>	<b>17</b>
<b>7</b>	<b>Благодарности</b>	<b>18</b>
<b>8</b>	<b>Приложение</b>	<b>21</b>

# 1 Введение

## 1.1 Актуальность создания квантовых вычислителей

В настоящее время очень актуальна проблема создания эффективных квантовых вычислителей. Создание рабочего квантового вычислителя достаточной мощности, позволило бы решать NP-полные задачи за полиномиальное время, то есть за время  $O(t^n)$ , где  $n$  - некоторая константа [1]. Среди таких задач, например, факторизация целых чисел и задача коммивояжёра. На сегодняшний день не опубликовано классического (не предполагающего использование квантового вычислителя) алгоритма, который позволял бы решить эти задачи за полиномиальное время.

В 1994 году Питер Шор показал, что используя квантовый компьютер, можно разложить любое целое число на простые множители за полиномиальное время. Экспериментальная реализация алгоритма Шора была выполнена в 2001 году [2]. В работе [2] было использовано всего 7 кубитов, что позволило факторизовать число 15. Учитывая то, что в современных системах, реализующих шифрование, применяются ключи длиной в 1024 бита и более, см. например ГОСТ Р 34.10-2012, не может быть и речи о применении системы из 7 кубитов на практике. Другой проблемой является сложность манипуляций с такими кубитами, установка, использованная в работе [2] чрезвычайно сложная и дорогая, в то время как для рабочего компьютера необходима возможность манипуляций с очень большим количеством кубитов.

## 1.2 Квантовая оптика

Проблема описанная выше представляет собой интерес для физиков из различных областей. На данный момент предложено множество схем по созданию квантовых вычислителей [3, 4], например, предлагается использовать: ионы в ловушках, спиновые системы, бозе-эйнштейн конденсаты, оптические системы. Системы, изучаемые в квантовой оптике, считаются очень перспективными для задач квантовой информатики [5, 6, 7], в силу того, что их экспериментальная реализация относительно проста и доступна.

Одной из самых популярных моделей в квантовой оптике является модель

Джейнса-Каммингса [8], в 2013 году отметившая своё пятидесятилетие [9]. Эта модель, несмотря на свою простоту позволяет изучить множество неклассических эффектов, таких как, например, коллапсы и возращения атомной инверсии [10]. Отметим также, что работы Сержа Ароша [11] по исследованию ридберговских атомов в резонаторах, за которые впоследствии была дана нобелевская премия, также довольно тесно связаны с обобщениями модели Джейнса-Каммингса.

Модель Джейнс-Каммингса достаточно проста и хорошо изучена, на сегодняшний день большинство интересных исследований связаны с различными её обобщениями, выходящими далеко за рамки оригинального концепта. В данной работе рассматривается одно из таких обобщений: интегрируемая обобщённая модель Тависа-Каммингса.

### 1.3 Квантовый метод обратной задачи

Квантовая версия метода обратной задачи рассеяния (КМОЗ), была разработана в ЛОМИ Л.Д. Фаддеевым, Е.К. Скляниным, П.П. Кулишем, Л.А. Тахтаджаном, [12, 13, 14]. Оказывается что, в квантовой механике одномерных многочастичных систем многие модели являются точно решаемыми. Точно решаемая модель в смысле КМОЗ, характеризуется тем свойством, что может быть точно найден как её спектр, так и корреляционные функции.

Среди моделей, которые были решены с помощью КМОЗ такие известные модели как: модель Lieb-Liniger (одномерные отталкивающиеся бозоны), ХХХ и ХХZ магнетики Гейзенберга, модель Тависа-Каммингса [15], а также обобщённая модель Тависа-Каммингса [19], исследованию корреляционных функций в которой посвящена настоящая работа.

### 1.4 Задачи работы и её структура

Данная работа во многом основана на результатах полученных автором и коллегами в работе [20], которая посвящена разработке детерминатного представления для корреляционных функций в интегрируемой обобщённой модели Тависа-Каммингса. Тем не менее в настоящей работе господствует обзорный стиль изложения, автор старался фокусироваться не на технических деталях, а на

упрощённом изложении того, что было сделано.

В главе 2 описывается исследуемая модель, она строится как обобщение хорошо известной модели Тависа-Каммингса, обсуждаются свойства интегрируемости этих моделей и приводится краткий обзор работ, сделанных другими авторами ранее. В главе 3 излагается численный подход к модели и его результаты. В главе 4 кратко излагаются основные положения КМОЗ, а также основные аналитические результаты полученные в работе [20]. В главе 5 излагаются некоторые технические моменты применения КМОЗ, а также сравниваются результаты двух подходов. В главе 6 обсуждаются результаты всей работы. В приложении приведены данные необходимые для иллюстрации работы КМОЗ.

## 2 Описание модели

### 2.1 Модель Тависа-Каммингса

Модель Тависа-Каммингса описывает ансамбль состоящий из  $N$  двухуровневых, невзаимодействующих атомов одного сорта, находящихся в резонаторе. Мы предполагаем, что только одна резонатора должна быть учтена, в то время как все остальные моды предполагаются достаточно подавленными. Каждый атом может находиться в основном  $|\psi_i^-\rangle$  и в возбуждённом  $|\psi_i^+\rangle$  состояниях. Гамильтониан модели Тависа-Каммингса в единицах  $\hbar = c = 1$  записывается как:

$$\mathbf{H}_{TC} = \omega a^\dagger a + \omega_0 S^z + g(a^\dagger S^- + a S^+), \quad (1)$$

здесь  $\omega$  и  $\omega_0$  частота моды резонатора и частота перехода между атомными уровнями, соответственно,  $g$  константа связи отвечающая за взаимодействие атома с полем резонатора.  $a$  и  $a^\dagger$  операторы рождения и уничтожения для электромагнитного поля в резонаторе, которые удовлетворяют обычным бозонным коммутационным соотношениям  $[a, a^\dagger] = 1$ . Мы также ввели коллективные  $N$ -атомные операторы Дикке  $S^\pm, S^z$  (спиновые операторы для полного спина  $S \leq N/2$ ) как:

$$S^\pm \equiv \sum_{i=1}^N S_i^\pm = \sum_{i=1}^N \sigma_i^\pm, \quad S^z \equiv \sum_{i=1}^N S_i^z = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sigma_z^i, \quad (2)$$

где

$$S_i^+ = |\psi_i^+\rangle\langle\psi_i^-|, \quad S_i^- = |\psi_i^-\rangle\langle\psi_i^+|, \quad S_i^z = \frac{1}{2}(|\psi_i^-\rangle\langle\psi_i^-| - |\psi_i^+\rangle\langle\psi_i^+|), \quad (3)$$

здесь  $\sigma_i^\pm = \frac{1}{2}(\sigma^x \pm i\sigma^y)$ , и  $\sigma_i^x, \sigma_i^y, \sigma_i^z$  матрицы Паули, действующие каждая на  $i$ -й узел. Операторы  $S^z$  и  $S^\pm$  удовлетворяют коммутационным соотношениям:

$$[S^+, S^-] = 2S^z, \quad [S^z, S^\pm] = \pm S^\pm, \quad (4)$$

алгебры  $su(2)$ .

В гамильтониане (1) первый член описывает одну квантованную моду электромагнитного поля резонатора, второй член описывает атомную инверсию всей системы, первая часть члена отвечающего за взаимодействие описывает переход из возбуждённого состояния в основное, сопровождаемый излучением фотона, в то время как вторая часть описывает противоположный процесс. См. рис. 2.1

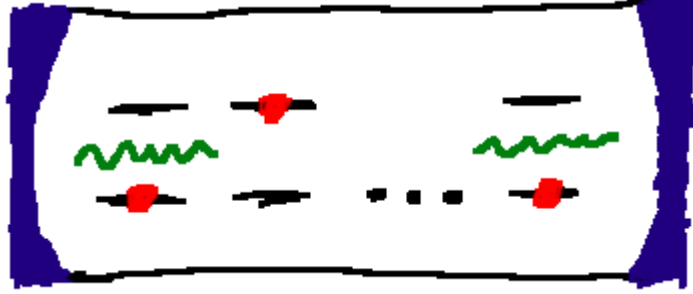


Рис. 1: Схематическая иллюстрация модели Тависа-Каммингса

Число возбуждений  $\mathbf{M}$  и оператор Казимира  $\mathbf{S}^2$ :

$$\mathbf{M} \equiv S^z + a^\dagger a, \quad (5)$$

$$\mathbf{S}^2 \equiv S^+ S^- + S^z (S^z - 1), \quad (6)$$

являются двумя нетривиальными интегралами движения системы  $[\mathbf{H}_{TC}, \mathbf{M}] = [\mathbf{H}_{TC}, \mathbf{S}^2] = 0$ . Модель Тависа-Каммингса является точно решаемой моделью, и она была решена Тависом и Каммингсом в 1968 году в работе [17] для случая точного резонанса  $\omega = \omega_0$ . И Хеппом и Либом для конечного детьюнинга  $\omega \neq \omega_0$ , в 1973 в работе [18]. Теперь рассмотрим одно обобщение этой модели, которое сохраняет свойство её точной решаемости.

## 2.2 Интегрируемая обобщённая модель Тависа-Каммингса

Рассмотрим следующее обобщение гамильтониана (1):

$$\mathbf{H}_K = \omega a^\dagger a + \omega_0 S^z + g(a^\dagger S^- + a S^+) + \gamma(a^\dagger a^\dagger a a + (S^z)^2). \quad (7)$$

Здесь член четвёртого порядка по бозонам описывает среду с керровской нелинейностью, которой заполнен резонатор, в то время как  $(S^z)^2$  описывает спин-спиновое взаимодействие. Такая модель была решена точно в 1996 году в работе [19].

Видно, что в случае когда  $\gamma = 0$ ,  $\mathbf{H}_K$  переходит в гамильтониан модели Тависа-Каммингса (1) и в гамильтониан модели Джейнса-Каммингса [8] когда  $N = 1$  ( $S = \frac{1}{2}$ ). В случае когда  $S = \frac{1}{2}$ ,  $(S^z)^2 = 1$  и  $\gamma \neq 0$  гамильтониан  $\mathbf{H}_K$  представляет собой гамильтониан модели Джейнса-Каммингса с керровской нелинейностью.

Можно заметить, что оператор числа частиц  $\mathbf{M}$  коммутирует с гамильтонианом  $\mathbf{H}_K$  :  $[\mathbf{H}_K, \mathbf{M}] = 0$ , таким образом, мы можем рассмотреть другой гамильтониан  $\mathbf{H} = g^{-1}(\mathbf{H}_K + (\gamma - \omega)\mathbf{M} - \gamma\mathbf{M}^2)$  и  $[\mathbf{H}_K, \mathbf{H}] = 0$ . Преобразовав выражение для  $\mathbf{H}$  мы можем записать:

$$\mathbf{H} = \Delta S^z + (a^\dagger S^- + a S^+) + c a^\dagger a S^z, \quad (8)$$

здесь  $c = -2g^{-1}\gamma$  это новая константа связи, а  $\Delta = g^{-1}(\gamma + \omega_0 - \omega)$  новый дельта-сдвиг. В дальнейшем мы можем рассматривать гамильтониан  $\mathbf{H}$ , однако все результаты могут быть мгновенно адаптированы для гамильтониана (7), через отображение описанное выше.

## 3 Численное исследование модели

### 3.1 Постановка КМ задачи, основное состояние

В данном разделе исследуем гамильтониан (8) численно, используя точную диагонализацию матрицы гамильтониана. Нам необходимо решить следующую квантовомеханическую задачу:

$$\mathbf{H}|\Psi_{S,M}^\sigma\rangle = E_{S,M}^\sigma|\Psi_{S,M}^\sigma\rangle \quad (9)$$

где  $0 \leq S \leq N/2$  - полный спин системы, здесь  $N$  - количество атомов в резонаторе,  $0 \leq M < 0$  - число возбуждений в системе, а  $\sigma$  - положительное число, нумерующее энергетические уровни системы.

Основным состоянием данной системы  $|GS\rangle$  является состояние, в котором все атомы находятся в основном состоянии, и в резонаторе отсутствуют фотоны. Определим состояние со всеми атомами находящимися в основном состоянии  $| - S, S\rangle$  как  $S^- | - S, S\rangle = 0$ , а также состояние с отсутствием фотонов в резонаторе  $|0\rangle$  как  $a|0\rangle = 0$ .  $|GS\rangle$  представляет собой тензорное произведение этих состояний:

$$|GS\rangle = | - S, S\rangle \otimes |0\rangle \quad (10)$$

Действительно, легко проверить, что данное состояние собственное и имеет энергию  $-\Delta S$

$$\mathbf{H}|GS\rangle = -\Delta S|GS\rangle \quad (11)$$

## 3.2 Элементарные возбуждения системы

Чтобы представить себе структуру элементарных возбуждений в системе, очень удобно рассмотреть случай, когда резонатор содержит всего один атом  $N = 1$ ,  $S = \frac{1}{2}$ , в таком случае это модель Джейнса-Каммингса с Керровской нелинейностью. Обозначим основное состояние атома как  $|\downarrow\rangle$  и возбуждённое как  $|\uparrow\rangle$ . Повышения энергии системы, можно добиться либо добавляя в резонатор фотон  $|\downarrow\rangle|1\rangle$ , либо возбуждая атом  $|\uparrow\rangle|0\rangle$ . Нетрудно однако, убедиться, что оба этих состояния по отдельности не являются собственными. Заметим, что второй член в гамильтониане (8) переводит состояние  $|\downarrow\rangle|1\rangle$  в состояние  $|\uparrow\rangle|0\rangle$  и наоборот, в то время как для других двух членов эти состояния являются собственными. Таким образом элементарное возбуждение может быть построено как суперпозиция этих двух состояний см. Рис. 3.2.

Такое элементарное рассмотрение на примере одного атома в резонаторе и одного фотона показывает, что фотон в резонаторе связан с атомом и нет смысла говорить про фотон или атом по отдельности, пока они находятся в резонаторе. Зная как устроены элементарные возбуждения системы не трудно объяснить, например, осцилляции Раби, которые будут обсуждаться в дальнейшем.



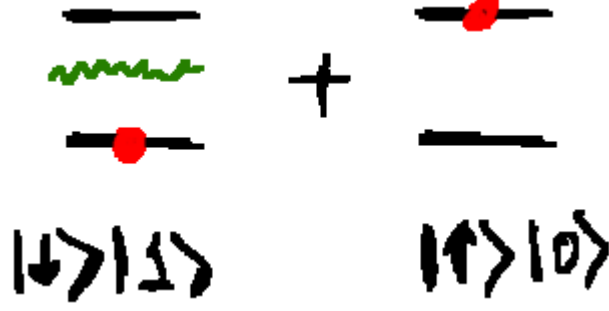


Рис. 2: Схематическая иллюстрация элементарного возбуждения с одним фотоном в модели Джейнса-Каммингса

### 3.3 Анзац для волновой функции

Обобщая рассуждения выше на случай произвольного числа атомов в резонаторе нетрудно написать следующий анзац для волновой функции:

$$|\Psi_{S,M}^\sigma\rangle = \sum_{m=0}^{\min(2S,M)} A_{S,M,m}^\sigma (S^+)^m (a^\dagger)^{M-m} |GS\rangle \quad (12)$$

убедиться в том, что это собственная функция можно прямой проверкой. Зажимая выражение (9), справа и слева между такими функциями, получим матрицу гамильтониана  $\mathbf{H}$ :

$$H_{m,k} = (m - S)(\Delta + c(M - m))\delta_{mk} + (m + 1)(2S - m)\delta_{m+1,k} + (M + 1 - m)\delta_{m-1,k} \quad (13)$$

здесь индексы  $m, k$  пробегают значения от 0 до  $\min(2S, M)$ . Диагонализация матрицы (13) даёт нам все значения энергии системы  $E_{S,M}^\sigma$ , а также все значения коэффициентов  $A_{S,M,m}^\sigma$ .

### 3.4 Динамика физических величин

Помимо собственных энергий системы и непосредственно волновых функций, нас обычно интересует эволюция во времени среднего значения какой-нибудь физической величины  $\langle \hat{A} \rangle(t)$ , которой соответствует некоторый оператор  $\hat{A}$ . Решение задачи на собственные значения (13), позволяет это вычислить относительно просто.

В эксперименте система всегда приготовлена в каком-то изначальном состоянии  $|\Phi_0\rangle$ , которое не обязательно является собственным. Поведение этого состояния во времени  $|\Phi(t)\rangle$  может быть исследовано с помощью оператора эволюции  $\hat{U}(t) = e^{i\hat{H}t}$ ,  $|\Phi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\Phi_0\rangle$ . Для того, чтобы вычислить как ведёт себя величина  $\langle\Phi(t)|\hat{A}|\Phi(t)\rangle$ , необходимо между обкладками оператора вставить полный набор собственных функций:

$$\langle\Phi(t)|\hat{A}|\Phi(t)\rangle = \sum_{M,M'}^{\infty} \sum_{\sigma_1,\sigma_2} \langle\Phi(t)|\Psi_{S,M'}^{\sigma_1}\rangle \langle\Psi_{S,M'}^{\sigma_1}|\hat{A}|\Psi_{S,M}^{\sigma_2}\rangle \langle\Psi_{S,M}^{\sigma_2}|\Phi(t)\rangle \quad (14)$$

опуская простые преобразования:

$$\langle\Phi(t)|\hat{A}|\Phi(t)\rangle = \sum_M^{\infty} \sum_{\sigma_1,\sigma_2} e^{it(E_{S,M}^{\sigma_1} - E_{S,M}^{\sigma_2})} \langle\Phi_0|\Psi_{S,M}^{\sigma_1}\rangle \langle\Psi_{S,M}^{\sigma_1}|\hat{A}|\Psi_{S,M}^{\sigma_2}\rangle \langle\Psi_{S,M}^{\sigma_2}|\Phi_0\rangle \quad (15)$$

Таким образом мы можем изучать динамику любой физической величины, ниже мы изучим зависимость от времени атомной инверсии, для изначального когерентного состояния света.

### 3.5 Эволюция атомной инверсии. Осцилляции Раби

Предположим, что изначальное состояние системы приготовлено в следующем состоянии: все атомы находятся в основном состоянии  $| - S, S \rangle$ , а свет находится в когерентном состоянии  $|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$ . Здесь  $\langle n \rangle = |\alpha|^2$  - среднее число фотонов в данном состоянии. Такое когерентное состояние является весьма естественным для эксперимента, потому что именно состояния такого типа генерируются, например, лазером. Распределение вероятности обнаружить  $k$  фотонов в данном состоянии представляет собой распределение Пуассона:  $p(k) = \langle \alpha | \alpha \rangle = e^{-\langle n \rangle} \frac{\langle n \rangle^k}{k!}$ , см. Рис. 3.5.

То что система приготовлена изначальное в когерентном состоянии позволяет нам ввести естественное обрезание в формуле (15) и не суммировать по бесконечному количеству  $M$ , что было бы невозможно, а учесть лишь достаточно близкие к  $\langle n \rangle$  значения  $M$ . Нетрудно убедиться, что для  $|M - \langle n \rangle| \gg 0$  члены суммы (15) достаточно быстро спадают.

Хорошо известной и легко измеряемой в оптике величиной является атомная инверсия  $\langle S^z \rangle$  [21]. Решая задачу на собственные функции (13), и используя формулу (15), мы можем исследовать её зависимость от времени, см. рис. 4.

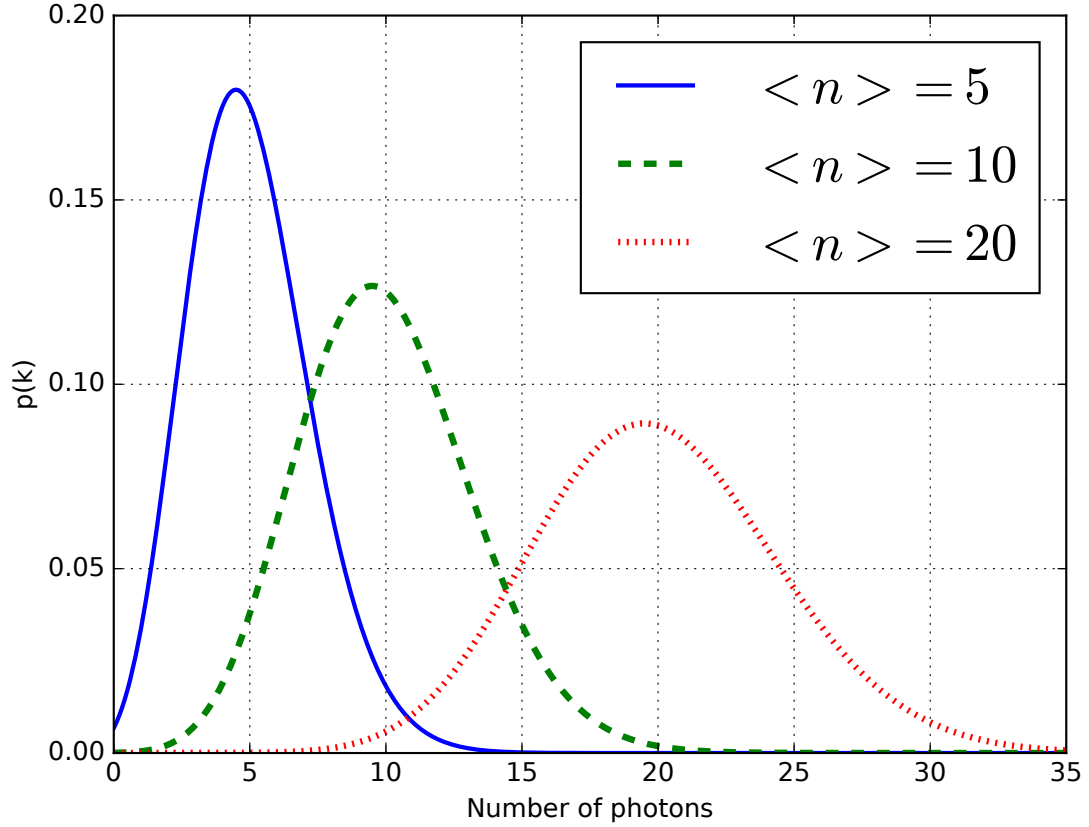


Рис. 3: Распределение вероятности для разных чисел фотонов в когерентном состоянии.

Видно, что наблюдаются осцилляции Раби - это существенно квантовый эффект, не предсказываемый полуклассической теорией. Также видно, что при увеличении нелинейности наблюдается локализация осцилляций, инверсия осциллирует вокруг своего основного состояния, среда подавляет возможность перехода электронов в возбуждённые состояния.

Мы исследовали нашу систему численно, воспользовавшись тем, что матрицы, которые нужно диагонализировать, решая задачу (13) не превышают по размерам матрицы  $100 \times 100$ . В следующем разделе мы применим квантовый метод обратной задачи, получим с его помощью аналитические выражения для корреляционных функций.

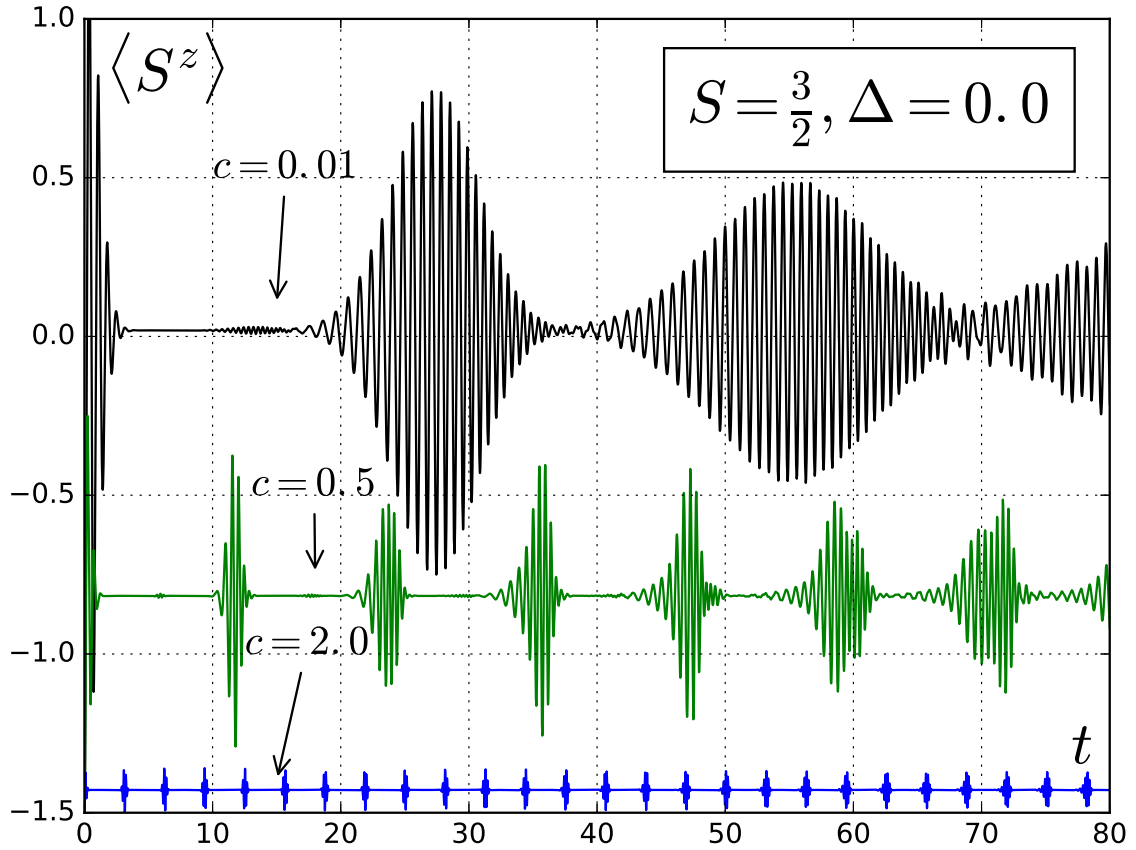


Рис. 4: Зависимость от времени атомной инверсии  $\langle S^z \rangle$  для изначально когерентного состояния. Для трёх атомов в резонаторе  $N = 3, S = \frac{3}{2}$ , при нулевом детьюнинге  $\Delta = 0.0$ , и при среднем числе фотонов  $\langle n \rangle = 20$ . На графике выбраны разные значения константы связи, отвечающей за нелинейность  $c = 0.01/0.5/2.0$ .

## 4 Квантовый метод обратной задачи

В этом разделе кратко излагаются основные результаты работы [20], в которой автор настоящей дипломной работы является соавтором. Для подробного ознакомления с применением КМОЗ к модели (8) читатель может обратиться к работе [20]. Отметим, что версия выложенная на [arxiv.org](http://arxiv.org) написана подробно и в ней не опущено ни одной детали, что делает её доступной для читателя не знакомого с КМОЗ.

## 4.1 Алгебраический анзац Бете

Применив квантовый метод обратной задачи к модели (8), что было впервые сделано в [19], можно сделать следующее утверждение: вектора, называемые также Бетевскими векторами

$$|\Psi_{S,M}^\sigma(\{\lambda\})\rangle = \prod_{j=1}^M (\lambda_j^\sigma \mathbf{X} - \mathbf{Y}) |GS\rangle, \quad (16)$$

являются собственными векторами гамильтониана (8), если множество быстрот (rapidities)  $\{\lambda\} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M\}$  является решением системы из  $M$  уравнений Бете:

$$(1 + \Delta c - c\lambda_n) \frac{\lambda_n + cS}{\lambda_n - cS} = \prod_{j=1, j \neq n}^M \frac{\lambda_n - \lambda_j + c}{\lambda_n - \lambda_j - c}, \quad (17)$$

эти уравнения имеют  $K = \min(2S, M) + 1$  (по модулю группы перестановок) наборов решений, в которых все быстроты попарно различны. Операторы  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$  определяются как:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= a^\dagger + cS^+, \quad \mathbf{Y} = (1 + c\Delta)S^+ - ca^\dagger S^z + c^2 a^\dagger a S^+; \\ [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] &= 0, \end{aligned} \quad (18)$$

Вектор дуальный, к вектору  $|\Psi_{S,M}^\sigma(\{\lambda\})\rangle$ , определяется как:

$$\langle \Psi_{S,M}(\{\lambda\}) | = \langle GS | \prod_{j=1}^M (\lambda_j a - \mathbf{Z}), \quad (19)$$

где

$$\mathbf{Z} = (S^- + caS^z) \quad (20)$$

В [19] доказано, что система векторов Бете формирует полный ортогональный набор:

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{S,M}(\{\lambda^{\sigma_1}\}) | \Psi_{S,M}(\{\lambda^{\sigma_2}\}) \rangle &\sim \delta_{\sigma_1, \sigma_2} \\ \sum_{\sigma} \frac{|\langle \Psi_{S,M}(\{\lambda^\sigma\}) \rangle \langle \Psi_{S,M}(\{\lambda^\sigma\}) |}{\mathcal{N}_\sigma^2} &= \mathbb{I}. \end{aligned} \quad (21)$$

отметим, что этот набор не является ортонормированным, а также бетевские вектора и им дуальные не переходят друг в друга при эрмитовом сопряжении.

## 4.2 Выражение для энергии через уравнения Бете

Система уравнений Бете (17) содержит в себе всю информацию о собственных энергиях системы и её собственных векторах. Через решения уравнений Бете можно выразить любую физическую величину. Энергия системы (8) выражается через решения уравнений Бете, как:

$$E_{S,M} = \frac{S}{c} \prod_{j=1}^M \left(1 - \frac{c}{\lambda_j}\right) - \left(S\Delta + \frac{S}{c}\right) \prod_{j=1}^M \left(1 + \frac{c}{\lambda_j}\right). \quad (22)$$

Каждому набору решений уравнений Бете соответствует свой уровень энергии, количество наборов решений и количество уровней энергии в системе совпадает. Поскольку все корни уравнений Бете либо действительны, либо содержат своё комплексное сопряжение в наборе, энергия всегда действительна, несмотря на комплексность корней.

## 4.3 Проблема вычисления средних и скалярных произведений

Помимо энергии системы, нам интересно исследовать средние значения наблюдаемых. Мы знаем собственные функции системы (16,19), таким образом знание решений уравнений Бете формально позволяет нам вычислять среднее от любой величины. Однако, наивная попытка вычислить средние "в лоб терпит крах из-за того, что выражения (16,19) слишком сложны.

Попробуем вычислить скалярные произведения бетевских векторов для  $M = 1, 2$ :

$$S_1(\mu, \lambda) \equiv \langle \Psi_{S,1}(\mu) | \Psi_{S,1}(\lambda) \rangle = -c^2 s^2 + s(2 + c(2\Delta - \lambda - \mu)) + \lambda\mu, \quad (23)$$

и

$$\begin{aligned}
S_2(\mu_1, \mu_2, \lambda_1, \lambda_2) \equiv \langle \Psi_{S,2}(\mu_1, \mu_2) | \Psi_{S,2}(\lambda_1, \lambda_2) \rangle = \\
2c^4 s^4 - 4c^4 s^3 + 2c^4 s^2 - (\lambda_1 + \lambda_2) (-2c^3 s^3 + 2c^3 s^2 + c(4s^2 - 2s)(c\Delta + 1)) - \\
(\mu_1 + \mu_2) (-2c^3 s^3 + 2c^3 s^2 + 4cs^2(c\Delta + 1) - 2cs(c\Delta + 1)) + 4c^2 s^2(c\Delta + 1) + 2c^2 \lambda_1 \lambda_2 s^2 + \\
2c^2 \mu_1 \mu_2 s^2 + (c\Delta + 1) (-8c^2 s^3 + 4c^2 s^2 - 2c^2 s + (8s^2 - 4s)(c\Delta + 1)) + \\
2(\lambda_1 + \lambda_2)(\mu_1 + \mu_2)s(c\Delta + 1) - 2c(\lambda_1 + \lambda_2)\mu_1 \mu_2 s - \\
2c\lambda_1 \lambda_2 (\mu_1 + \mu_2)s + 2\lambda_1 \lambda_2 \mu_1 \mu_2, \quad (24)
\end{aligned}$$

число коммутаторов, которое необходимо вычислить, считая скалярное произведение, растёт как  $2^M$  [22]. Таким образом вычисление скалярных произведений через раскрытие коммутаторов не имеет никакого смысла для произвольных  $M$ . Тем не менее формулы выше уже могут быть использованы для вычисления средних и таким образом правильность формализма может быть проверена для  $M = 1, 2$ .

#### 4.4 Детерминантное представление

Проблема описанная выше решается при помощи детерминантного представления, разработанного Н. Славновым, в работе [23], она была успешно применена в работе [24] для вычисления форм факторов в ХХZ цепочке Гейзенберга. Отметим однако, что детерминантное представление необходимо для вычисления непосредственно средних от операторов, техника вычисления скалярных произведений была разработана раньше, В.Корепиным в работе [25].

В работе [20] также было успешно применено детерминантное представление. Основные результаты его применения заключаются в том, что для скалярного произведения бетевских векторов справедлива формула:

$$\mathcal{N}^2 = S_M(\{\lambda\}, \{\lambda\}) = c^M \prod_{j=1}^M d^2(\lambda_j) \prod_{\alpha \neq \beta} \frac{\lambda_\alpha - \lambda_\beta + c}{\lambda_\alpha - \lambda_\beta} \det \Phi(\{\lambda\}), \quad (25)$$

где составляющие элементы матрицы  $M \times M$

$$\Phi_{ab} = -\frac{\partial}{\partial \lambda_b} \ln \left\{ \frac{a(\lambda_a)}{d(\lambda_a)} \prod_{k=1, k \neq a}^M \frac{\lambda_a - \lambda_k - c}{\lambda_k - \lambda_a - c} \right\}. \quad (26)$$

матричные элементы переходов в свою очередь вычисляются как:

$$\begin{aligned} A_{M,n}(\{\mu\}, \{\lambda\}) &\equiv \langle \Psi_{S,M-n}(\{\mu\}) | a^n | \Psi_{S,M}(\{\lambda\}) \rangle \\ &= c^M \prod_{j=1}^M d(\lambda_j) \frac{\prod_{j=1}^{M-n} \prod_{\alpha=1}^M (\mu_j - \lambda_\alpha)}{\prod_{j>k>n} (\mu_k - \mu_j) \prod_{\alpha<\beta} (\lambda_\beta - \lambda_\alpha)} \det T_{(n)}(\{\mu\}, \{\lambda\}). \end{aligned} \quad (27)$$

Здесь набор решений уравнений Бете  $\{\mu\} \equiv \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{M-n}\}$  имеет длину  $M-n$ , в то время как набор  $\{\lambda\} \equiv \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M\}$  имеет длину  $M$ . Составляющие элементы матрицы  $T_{(n)}$  имеющей размер  $M \times M$  равны  $V_{ab}$  (29) для  $a \leq n$  и  $T_{ab}$  (28) для  $a > n$ ,  $1 \leq b \leq M$ .

$$T_{ab} \equiv T(\mu_a, \lambda_b) = \frac{1}{(\lambda_b - \mu_a)^2} (T_{ab}^{(1)} - T_{ab}^{(2)}) \quad (28)$$

$$T_{ab}^{(1)} = (\mu_a - \Delta - c^{-1})(\mu_a + cS) \prod_{j=1, j \neq b}^M \left(1 - \frac{c}{\mu_a - \lambda_j}\right)$$

$$T_{ab}^{(2)} = -c^{-1}(\mu_a - cS) \prod_{j=1, j \neq b}^M \left(1 + \frac{c}{\mu_a - \lambda_j}\right)$$

$$V_{ab} = \lim_{\mu_a \rightarrow \infty} \frac{\mu_a^{-M+a-1}}{(a-1)!} \frac{\partial^{a-1}}{\partial \mu_a^{a-1}} T(\mu_a, \lambda_b) \quad (29)$$

Сопряженный матричный элемент вычисляется как:

$$\begin{aligned} A_{M,n}^\dagger(\{\lambda\}, \{\lambda'\}) &\equiv \langle \Psi_{S,M}(\{\lambda\}) | (a^\dagger)^n | \Psi_{S,M-n}(\{\lambda'\}) \rangle \\ &= \frac{\nu_M}{\nu'_{M-n}} A_{M,n}^*(\{\mu\}, \{\lambda\}), \end{aligned} \quad (30)$$

здесь

$$\nu_M^{-1} = \prod_{j=1}^M (1 + \Delta c - c\lambda_j) = \prod_{j=1}^M \frac{\lambda_j - cS}{\lambda_j + cS}. \quad (31)$$

## 4.5 Выражение для атомной инверсии через детерминанты

Детерминантное представление, разработанное нами позволяет написать аналитические выражения для любых корреляционных функций. Самая простая и доступная для проверки физическая величина, для которой можно написать такое выражение - это атомная инверсия. Мы уже численно вычислили её в



разделе 3, сейчас напомним для неё аналитическую формулу. Запишем простое преобразование:

$$\langle \Phi(t) | S^z | \Phi(t) \rangle = \langle n \rangle - S - \langle \Phi(t) | a^\dagger a | \Phi(t) \rangle, \quad (32)$$

используя детерминантное представление напомним аналитическую формулу для последнего члена в этой формуле:

$$\begin{aligned} \langle \Phi(t) | a^\dagger a | \Phi(t) \rangle &= \sum_M \sum_{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3} \frac{e^{it(E_{S,M}^{\sigma_1} - E_{S,M}^{\sigma_3})}}{\mathcal{N}_{\sigma_1}^2 \mathcal{N}_{\sigma_2}^2 \mathcal{N}_{\sigma_3}^2} \\ &\times f_M(\{\lambda^{\sigma_1}\}) g_M(\{\lambda^{\sigma_3}\}) A_{M,1}^\dagger(\{\lambda^{\sigma_3}\}, \{\lambda^{\sigma_2}\}) A_{M,1}(\{\lambda^{\sigma_2}\}, \{\lambda^{\sigma_1}\}). \end{aligned} \quad (33)$$

здесь  $f_M$  и  $g_M$  - скалярные произведения бетеvских функций на начальное состояние  $|\Phi_0\rangle$ :

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{S,M}(\{\lambda\}) | \Phi_0 \rangle &= (-1)^{M+1} (c\alpha S)^M e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{m=0}^M e_m(cS)^{-m} \equiv f_M(\{\lambda\}), \\ \langle \Phi_0 | \Psi_{S,M}(\{\lambda\}) \rangle &= (c\bar{\alpha} S)^M e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{m=0}^M (-1)^{M-m} e_m(cS)^{-m} \equiv g_M(\{\lambda\}). \end{aligned} \quad (34)$$

здесь  $e_m$  - это элементарная симметрическая функция [26]

$$e_m = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_m} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \dots \lambda_{i_m} \quad (35)$$

## 5 Сравнение результатов точной диагонализации и КМОЗ

### 5.1 Численное решение уравнений Бете

Уравнения Бете (17) представляют собой систему сильно связанных, нелинейных алгебраических уравнений. Практическое применение квантового метода обратной задачи всегда сопряжено с анализом уравнений Бете и их решением. Для различных систем в решении уравнений Бете достигнуты различные успехи, в некоторых случаях, например основное состояние ХХХ магнетика, удаётся найти точную формулу для корней соответствующих основному состоянию системы. В других случаях, например, когда модель принадлежит к

классу интегрируемых по Годену-Ричардсону, удаётся свести задачу к решению системы линейных дифференциальных уравнений, с помощью ODE/IM соответствия [27].

В случае с рассматриваемой моделью уравнения Бете были исследованы автором численно, развёрнутые результаты можно найти в работе [20]. Основная идея использованная при изучении уравнений (17) заключается в том, что в пределе  $c \rightarrow 0$  эти уравнения переходят в уравнения вида:

$$\frac{2S}{\tilde{\lambda}_n} - \tilde{\lambda}_n + \Delta = \sum_{j=1, j \neq n}^M \frac{2}{\tilde{\lambda}_n - \tilde{\lambda}_j}. \quad (36)$$

Решение которых может быть получено либо с помощью ODE/IM соответствия [27], либо с помощью метода деформированных струн [28] для произвольных  $S$  и  $\Delta$ . Принципиальный алгоритм решения уравнений (17) следующий:

1. Решить уравнения (36) для произвольных  $S$  и  $\Delta$ .
2. Используя решение уравнений (36) как начальное приближение, малыми шагами увеличивать  $c$ . Решение полученное на каждом шаге становится новым начальным приближением.

## 5.2 Пример расчёта среднего с помощью КМОЗ

В приложении мы приводим подробный пример расчёта одного из членов суммы (33), для параметров  $c = 0.5$ ,  $\Delta = 1.0$ ,  $S = \frac{3}{2}$ ,  $\langle n \rangle = 20$ ,  $M = 14, 15$ . Решения уравнений Бете для этих параметров, а также соответствующие собственные энергии и нормы бетевских векторов приведены в таблице 1. Используя данные таблицы 1, можно вычислить численные значения для скалярных произведений  $f_{15}(\{\lambda^\sigma\})$ ,  $g_{15}(\{\lambda^\sigma\})$ , эти данные приведены в таблице 2. Значения матричных элементов переходов  $A_{15,1}(\{\lambda^{\sigma'}\}, \{\lambda^\sigma\})$  and  $A_{15,1}^\dagger(\{\lambda^\sigma\}, \{\lambda^{\sigma'}\})$  преведены в таблицах 3,4.

Результаты полученные с помощью КМОЗ полностью совпадают с результатами, которые были получены с помощью точной диагонализации, таким образом подтверждается правильность разработанного формализма и отсутствие в ключевых формулах случайных ошибок.

## 6 Результаты и выводы

В настоящей работе исследована интегрируемая обобщённая модель Тависа-Каммингса (7). Модель исследована с помощью двух подходов, первый основан на точной диагонализации гамильтониана модели, второй основан на применении КМОЗ и детерминантного представления.

Была вычислена эволюция атомной инверсии для изначально когерентного состояния с помощью точной диагонализации, а также с помощью детерминантного представления, которое впервые было адаптировано под рассматриваемую модель в работе [20], в которой автор данной работы является соавтором. Численные результаты полученные двумя способами полностью совпадают, что говорит о том, что формализм разработанный в работе [20] верен и не содержит ошибок.

Разработанный формализм является достаточно перспективным с точки зрения получения общих результатов. Например, корреляционные функции, записанные в виде детерминантов могут быть исследованы с помощью методов матричной задачи Римана-Гильберта. Уравнения Бете, исследованные численно в данной работе, будучи успешно исследованными аналитически неизбежно дадут информацию о физических характеристиках системы.

## 7 Благодарности

Автор признателен Боголюбову Н.Н. за плодотворное сотрудничество в течение двух лет.

## Список литературы

- [1] С. Даспуга, Х. Пападимитриу, У. Вазирани, *Алгоритмы* с. 230-309, Москва, МЦНМО (2014)
- [2] Vandersypen, Lieven M. K.; Steffen, Matthias; Breyta, Gregory; Yannoni, Costantino S.; Sherwood, Mark H.; Chuang, Isaac L., *Experimental realization of Shor's quantum factoring algorithm using nuclear magnetic resonance*, Nature, **414** (6866): 883–887, (2001)
- [3] Mikio Nakahara, Tetsuo Ohmi, *Quantum Computing: From Linear Algebra to Physical Realizations*, CRC Press (2008)
- [4] Radhika Vathsan, *Introduction to Quantum Physics and Information Processing*, CRC Press (2015)
- [5] K. Rojan, D. M. Reich, I. Dotsenko, Jean-Michel Raimond, C. P. Koch, G. Morigi, *Arbitrary quantum-state preparation of a harmonic oscillator via optimal control*, Phys. Rev. A **90**, 023824 (2014).
- [6] M. M. Alqahtani, M. S. Everitt, B. M. Garraway, *Cavity QED Photons for Quantum Information Processing*, arXiv:1407.0654.
- [7] B. Mischuck and K. Mølmer, *Qudit quantum computation in the Jaynes-Cummings model*, Phys. Rev. A **87**, 022341 (2013).
- [8] E. T. Jaynes, F. W. Cummings, *Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser*, Proc. IEEE **51**, 89 (1963).
- [9] A. D. Greentree, J. Koch, J. Larson, *Fifty years of Jaynes-Cummings physics*, J. Phys. B **46**, 220201 (2013).
- [10] T. von Foerster, *A comparison of quantum and semi-classical theories of the interaction between a two-level atom and the radiation field*, J. Phys. A **8**, 95 (1975).
- [11] S. Haroche, D. Kleppner, *Cavity Quantum Electrodynamics*, Physics Today **42**, 24 (1989).

- [12] L. D. Faddeev, *Quantum completely integrable models of field theory*, Sov. Sci. Rev. Math. C **1**, 107 (1980).
- [13] V. E. Korepin, N. M. Bogoliubov, A. G. Izergin, *Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [14] P. P. Kulish, E. K. Sklyanin, *Quantum spectral transform method recent developments*, Lect Notes Phys. **151**, 61 (1982).
- [15] N. M. Bogoliubov, P. P. Kulish *Exactly solvable models of quantum nonlinear optics*, J. Math. Sci. (New York) **192**, 14 (2013).
- [16] N. M. Bogoliubov, R. K. Bullough, J. Timonen, *Exact solution of generalised Tavis-Cummings models in quantum optics*, J. Phys. A **29**, 6305 (1996).
- [17] M Tavis, F. W. Cummings, *Exact solutions for an  $N$ -molecule-radiation-field Hamiltonian*, Phys. Rev. **170**, 279 (1968).
- [18] K. Hepp, E. Lieb, *On the Superradiant Phase Transition for Molecules in a Quantized Radiation Field: The Dicke Maser Model*, Annals of Phys. (N.Y.) **76**, 360 (1973).
- [19] N. M. Bogoliubov, R. K. Bullough, J. Timonen, *Exact solution of generalised Tavis-Cummings models in quantum optics*, J. Phys. A **29**, 6305 (1996).
- [20] Nikolay Bogoliubov, Igor Ermakov, Andrey Rybin *Dynamic correlation funtions of the generalized Tavis-Cummings model* arXiv:1702.03740 [quant-ph]
- [21] M. O. Scully, M. S. Zubairy, *Quantum Optics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [22] Н.А. Славнов *Алгебраический анзац, Бете и квантовые интегрируемые системы*, Математический институт В.А. Стеклова, Москва, Россия
- [23] N. A. Slavnov, *Calculation of scalar products of wave functions and form factors in the framework of the alcebraic Bethe ansatz*, Theor. Math. Phys **79**, 502 (1989).

- [24] N. Kitanine, J. M. Maillet, V. Terras, *Form factors of the XXZ Heisenberg spin-1/2 finite chain*, Nucl. Phys. B **516**, 647 (1999).
- [25] V. E. Korepin, *Calculation of Norms of Bethe Wave Functions*, Commun. Math. Phys. **86**, 391 (1982).
- [26] I. G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, Oxford University Press, Oxford, 1995.
- [27] P. Dorey, C. Dunning and R. Tateo *The ODE/IM correspondence*, J. Phys. A **40**, 32 (2007).
- [28] R. Hagemans and Jean-Sebastien Caux *Deformed strings in the Heisenberg model*, J. Phys. A **40**, 14605 (2007).

## 8 Приложение

Таблица 1: Решения уравнений бете для  $c = 0.5, \Delta = 1.0, S = \frac{3}{2}, M = 14, 15$

M	14	15	M	14	15
$\lambda_1^1$	-0.239824	-0.750193	$\lambda_1^3$	2.84973	-0.823073
$\lambda_2^1$	-0.750262	-0.241867	$\lambda_2^3$	-0.830452	2.98833 + 0.15896 I
$\lambda_3^1$	0.167747	0.176368	$\lambda_3^3$	5.01624 + 3.90016 I	4.10289 + 2.18817 I
$\lambda_4^1$	1.773790	2.81293 ± 2.33351 I	$\lambda_4^3$	3.33298 + 1.1325 I	3.63948 + 1.39331 I
$\lambda_5^1$	3.79826 ± 4.18216 I	3.44429 ± 3.33488 I	$\lambda_5^3$	6.01243 + 5.25218 I	6.47453 + 5.53095 I
$\lambda_6^1$	2.42263 ± 2.01687 I	4.24773 ± 4.46706 I	$\lambda_6^3$	3.02186 + 0.475188 I	4.69008 + 3.10476 I
$\lambda_7^1$	1.97772 ± 1.03823 I	2.32525 ± 1.40143 I	$\lambda_7^3$	4.29896 + 2.82574 I	3.27731 + 0.71051 I
$\lambda_8^1$	3.02276 ± 3.03848 I	5.33330 ± 5.85846 I	$\lambda_8^3$	3.75156 + 1.91465 I	5.44343 + 4.1804 I
$\lambda_9^1$	4.85600 ± 5.58194 I	2.01400 ± 0.47729 I	$\lambda_9^3$		
$E_{3/2,M}^1$	14.3938	15.2107	$E_{3/2,M}^3$	-5.38734	-5.65903
$N_1^2$	$1.32807 \times 10^{22}$	$1.11114 \times 10^{25}$	$N_3^2$	$4.49629 \times 10^{27}$	$4.9616 \times 10^{30}$
$\lambda_1^2$	-0.73831	-0.740738	$\lambda_1^4$	3.01453	2.99698
$\lambda_2^2$	-0.36595	-0.353435	$\lambda_2^4$	3.25013	4.67624 + 2.19107 I
$\lambda_3^2$	3.12892 + 1.92248 I	2.59874	$\lambda_3^4$	3.87231 + 1.18878 I	3.44765 + 0.216031 I
$\lambda_4^2$	2.73671 + 1.07169 I	2.72731 + 0.62846 I	$\lambda_4^4$	5.60129 + 3.85293 I	4.19098 + 1.42675 I
$\lambda_5^2$	2.51242 + 0.33328 I	3.48714 + 2.22083 I	$\lambda_5^4$	4.3222 + 1.93711 I	3.78925 + 0.767612 I
$\lambda_6^2$	3.67873 + 2.88682 I	3.03737 + 1.37210 I	$\lambda_6^4$	3.50608 + 0.553672 I	5.27176 + 3.07648 I
$\lambda_7^2$	4.41173 + 4.00060 I	4.84837 + 4.28762 I	$\lambda_7^4$	4.88324 + 2.81231 I	6.02349 + 4.12297 I
$\lambda_8^2$	5.43090 + 5.38255 I	5.90050 + 5.66355 I	$\lambda_8^4$	6.58851 + 5.17388 I	7.04506 + 5.44649 I
$\lambda_9^2$		4.07992 + 3.17973 I	$\lambda_9^4$		
$E_{3/2,M}^2$	4.80544	5.0842	$E_{3/2,M}^4$	-16.3119	-17.1358
$N_2^2$	$1.05391 \times 10^{25}$	$9.91835 \times 10^{27}$	$N_4^2$	$2.0875 \times 10^{30}$	$2.71893 \times 10^{33}$

Таблица 2: Численные значения коэффициентов  $f_{15}(\{\lambda^\sigma\})$  и  $g_{15}(\{\lambda^\sigma\})$  для  $c = 0.5, \Delta = 1.0, S = \frac{3}{2}, M = 15$ .

$\sigma$	$f_{15}(\{\lambda^\sigma\})$	$g_{15}(\{\lambda^\sigma\})$
1	$-3.54225 \times 10^9$	$-5.71661 \times 10^{11}$
2	$1.88059 \times 10^{12}$	$1.31435 \times 10^{13}$
3	$-4.84651 \times 10^{14}$	$-1.47409 \times 10^{14}$
4	$8.58641 \times 10^{16}$	$1.09485 \times 10^{15}$

Таблица 3: Численные значения матричных элементов перехода  $A_{15,1}(\{\lambda^\sigma\}, \{\lambda^{\sigma'}\})$  для  $c = 0.5, \Delta = 1.0, S = \frac{3}{2}, M = 15$ .

$\sigma, \sigma'$	1	2	3	4
1	$-1.45983 \times 10^{24}$	$3.73937 \times 10^{23}$	$-6.08001 \times 10^{22}$	$7.89756 \times 10^{21}$
2	$1.65728 \times 10^{24}$	$-1.19478 \times 10^{27}$	$2.30675 \times 10^{26}$	$-2.99671 \times 10^{25}$
3	$-2.81049 \times 10^{23}$	$1.28274 \times 10^{27}$	$-5.40508 \times 10^{29}$	$8.05698 \times 10^{28}$
4	$3.75925 \times 10^{22}$	$-1.71635 \times 10^{26}$	$5.62494 \times 10^{29}$	$-2.6862 \times 10^{32}$

Таблица 4: Численные значения матричных элементов перехода  $A_{15,1}^\dagger(\{\lambda^\sigma\}, \{\lambda^{\sigma'}\})$  для  $c = 0.5, \Delta = 1.0, S = \frac{3}{2}, M = 15$ .

$\sigma, \sigma'$	1	2	3	4
1	$-1.26067 \times 10^{24}$	$7.45656 \times 10^{24}$	$-2.78592 \times 10^{25}$	$8.63194 \times 10^{25}$
2	$6.8671 \times 10^{22}$	$-1.14315 \times 10^{27}$	$5.07159 \times 10^{27}$	$-1.57159 \times 10^{28}$
3	$-5.57847 \times 10^{20}$	$5.87913 \times 10^{25}$	$-5.69246 \times 10^{29}$	$2.02405 \times 10^{30}$
4	$3.41326 \times 10^{18}$	$-3.59844 \times 10^{23}$	$2.70989 \times 10^{28}$	$-3.0869 \times 10^{32}$