Санкт-Петербургский государственный университет
Кафедра математической теории игр и статистических решений

Бубякина Галина Игоревна

Магистерская диссертация

Оптимизация затрат для транспортной сети Якутии

Направление 01.04.02

Прикладная математика и информатика

Магистерская программа «Исследование операций и системный анализ»

Научный руководитель,
кандидат физико-математических наук,
доцент
Громова Е. В.

Санкт-Петербург

2017

Оглавление

Введение

Развитие транспортной сети автомобильных дорог играет большую роль в решении экономических задач. В Указе Президента Российской Федерации "О долгосрочной государственной экономической политике" от 7 мая 2012 года № 596 ставится задача обеспечения транспортными связями труднодоступных территорий Дальнего Востока и Сибири. В Республике Саха (Якутия) реализация этого указа имеет особенности в связи с тем, что на её территории автомобильными дорогами с твердым покрытием обеспечены лишь 7,3% всех населенных пунктов. При этом дороги с твердым покрытием составляют 30%, а остальные 70% дорог представляют собой автозимники.

В работе исследуется теоретико-игровой подход к задаче сокращения затрат при транспортировке сельскохозяйственной продукции на сети автомобильных дорог Республики Саха (Якутия). Предлагается математическая постановка задачи кооперации производителей по транспортировке продукции, то есть представление задачи о сокращении затрат для транспортной сети в виде кооперативной игры в форме характеристической функции, а также кооперативной игры с коалиционной структурой.

Возможности применения кооперативной теории игр для подобных задач были рассмотрены в работах [19, 23]. Автомобильные дороги можно представить в виде конечного графа, определяемого конечным множеством вершин и ребер. Вершины этого графа представляют собой населенные пункты, а ребра — автомобильные дороги с различным типом покрытия. В качестве игроков выступают производители сельскохозяйственной продукции, расположенные в улусных центрах, которые соединены с городом Якутском сетью автомобильных дорог [1]. Задачей каждого игрока является транспортировка продукции в г. Якутск, причем под стратегией игрока понимается выбор пути, на котором затраты на перевозку будут минимальными. Транспортная сеть рассматривается в летний и зимний периоды.

Теория кооперативных игр является средством для построения математической модели экономических задач транспортировки определенной продукции [12, 15]. В таких задачах требуется минимизировать суммарные затраты по перевозке производимой продукции не только за счет усовершенствования сети автомобильных дорог, но и с помощью создания различных коалиций участников, использующих данную дорожную сеть.

Игра называется кооперативной, если игроки могут объединяться в группы и действовать в соответствии с заранее определенным принципом оптимальности, который включает в себя соглашение о множестве кооперативных стратегий и механизм распределения общего выигрыша между игроками [13, 14]. Большинство кооперативных игр описываются с помощью характеристической функции, а вопрос построения этой функции является одним из основных для данного класса игр.

Игры с коалиционной структурой были изучены в работах, где кооперативные решения описываются в виде вектора Оуэна и вектора Ауманна-Дрезе [10, 17].

Одним из главных предметов исследования теории кооперативных игр является построение характеристической функции игры, которая определяет гарантированные суммарные затраты игроков, объединяющихся в коалиции. При этом для построенных характеристических функций должно выполняться свойство супераддитивности, которое имеет важное значение для достижения кооперативных соглашений по снижению затрат на транспортировку продукции.

В данной работе предлагается математическая постановка задачи кооперации производителей сельскохозяйственной продукции по ее транспортировке и построение кооперативной игры в форме характеристической функции в задаче по транспортировке производимой продукции. Кооперативная теория игр позволяет исследовать возможности производителей сельскохозяйственной продукции с целью снижения затрат на её транспортировку. В качестве принципа оптимальности кооперативной игры выбирается вектор, предложенный американским математиком и экономистом Ллойдом Стауэллом Шепли. Вектор Шепли представляет собой n-мерный вектор, в котором i-я компонента представляет собой эффективные затраты i-го игрока. Таким образом, вектор Шепли определяет оптимальное распределение суммарных затрат, которые несет максимальная коалиция (коалиция всех игроков) в результате кооперативного эффекта. Математическая модель в виде кооперативных игр в подобных задачах исследовалась в работах [6, 16].

Итак, предполагается, что имеется несколько производителей сельскохозяйственной продукции, расположенных в улусных центрах, которые соединены с городом Якутском сетью автомобильных дорог. У каждого производителя есть определенный собственный ресурс, предназначенный для транспортировки производимой продукции из улусного центра в город Якутск. Для того, чтобы снизить затраты на перевозку сельскохозяйственной продукции местные производители могут объединяться в различные коалиции. В каждой коалиции может происходить перераспределение затрат между производителями этой коалиции, и, как следствие, изменение пути (стратегии) транспортировки продукции каждого производителя по сравнению с путями, планируемыми без учета возможной кооперации. Тогда, во-первых, требуется найти оптимальный путь для каждого игрока коалиции и определить её суммарные затраты, во-вторых, вычислить значения характеристической функции соответствующей кооперативной игры. Объединение игроков в коалицию равносильно тому, что характеристическая функция должна удовлетворять свойству супераддитивности [9, 12].

В классической кооперативной модели предполагается, что игрокам выгодно объединяться в максимальную коалицию с целью минимизации суммарных затрат в силу свойства супераддитивности характеристической функции [9, 12]. Поэтому задача заключается в нахождении дележа минимальных затрат. Однако, на практике сложно представить возможность объединения всех игроков в одну максимальную коалицию. Следовательно, имеет смысл исследования задачи формирования коалиционного разбиения игроков кооперативной игры.

Начало исследованиям кооперативной теории игр заложено в работе Г.Оуэна [10]. Он обобщил понятия вектора Шепли для игр с коалиционными разбиениями, построив вектор Оуэна $Ow(N, v, \pi)$. Свойства вектора

Оуэна подробно изложены в работах [20, 21, 22]. При вычислении этого вектора, коалиции, образующие коалиционное разбиение, могут действовать как отдельные игроки, так и объединяться в большие коалиции. Для нахождения дележа затрат между коалициями можно использовать вектор Шепли. Внутри каждой коалиции коалиционного разбиения допускается возможность объединения игроков в подкоалиции, при этом для нахождения дележа между игроками также можно использовать вектор Шепли.

Наряду с вектором Оуэна в качестве оптимального принципа распределения затрат между игроками находится векторАуманна-Дрезе φ^{π} [11, 18].

В данной работе предлагается алгоритм формирования коалиционного разбиения и функций выигрышей на основе решения игры в нормальной форме. В качестве принципа оптимальности этой игры рассматривается сильное равновесие, вектор Оуэна и вектор Ауманна-Дрезе.

Целью магистерской диссертационной работы является исследование задачи минимизации затрат по транспортировке продукции на сети автомобильных дорог Республики Саха (Якутия).

Задачами диссертационной работы являются:

1. Исследование задачи сокращения затрат для транспортной сети в виде кооперативной игры в форме характеристической функции и в качестве её решения - вектора Шепли.

2. Нахождение решения задачи сокращения затрат для транспортной сети, представленной как кооперативная игра с коалиционной структурой и ее решение в виде векторов Шепли, Оуэна и Ауманна-Дрезе.

В работе применяются методы теории кооперативных игр, в частности математическая модель решения кооперативных игр в коммуникационных сетях, предложенная Карповым и Петросяном [8], а также связанные с ними принципы оптимальности: вектор Шепли, вектор Оуэна, вектор Ауманна-Дрезе.

Основные результаты магистерской диссертации докладывались на XVIII Международной научной конференции аспирантов и студентов "Процессы управления и устойчивость"(Санкт-Петербургский государственный университет, 2017 г.). Сдана в печать статья "Теоретико-игровой подход в задаче сокращения затрат для транспортной сети Якутии".

Структура магистерской диссертации. Магистерская диссертация состоит из введения, двух глав, заключения и списка использованной литературы.

В первой главе диссертационной работы исследуются решения задач сокращения затрат для транспортной сети автомобильных дорог Республики Саха (Якутия) в виде кооперативных игр в форме характеристической функции. Доказывается, что характеристическая функция обладает свойством супераддитивности. Приводится многошаговый алгоритм определения значений характеристической функции для четырех игроков и находится решение кооперативной игры в виде вектора Шепли [6, 8, 16]. Для определения эффективности решения кооперативной игры вводится коэффициент снижения затрат для каждого из игроков.

Во второй главе изучаются решения задач сокращения затрат для транспортной сети автомобильных дорог Республики Саха (Якутия) в виде кооперативных игр с коалиционной структурой. Для таких игр на основе алгоритма построения сильного коалиционного разбиения определяется сильная коалиционная структура. Решение кооперативных игр находится в виде вектора Шепли, вектора Оуэна и вектора Ауманна-Дрезе [4, 7]. Показывается, что для кооперативной игры в общем случае решения в виде вектора Оуэна, вектора Ауманна-Дрезе и вектора Шепли различны, а для кооперативной игры, где кооперация происходит лишь на паромной переправе, эти решения совпадают, т.е. векторы Оуэна, Ауманна-Дрезе и Шепли равны.

Постановка задачи

В работе исследуется теоретико-игровой подход к задаче сокращения затрат при транспортировке сельскохозяйственной продукции на сети автомобильных дорог Республики Саха (Якутия). Обычно рассматриваемые задачи решаются как оптимизационные задачи, решение которых находится на основе метода динамического программирования - принципа оптимальности Беллмана [2]. Однако, решения задачи о распределении суммарных затрат между игроками остались в стороне.

Автомобильные дороги можно представить в виде конечного графа, определяемого конечным множеством вершин и ребер. Вершины этого графа представляют собой населенные пункты, а ребра — автомобильные дороги с различным типом покрытия. В качестве игроков выступают производители сельскохозяйственной продукции, расположенные в улусных центрах, которые соединены с городом Якутском сетью автомобильных дорог [1]. Задачей каждого игрока является транспортировка продукции в г. Якутск, причем под стратегией игрока понимается выбор пути, на котором затраты на перевозку будут минимальными. Транспортная сеть рассматривается в летний и зимний периоды.

Особый интерес представляет участок с. Нижний Бестях — г. Якутск, поскольку содержит паромную переправу в летний период, что позволяет разделить расходы на перевозку сельскохозяйственной продукции на этом участке дороги между несколькими производителями — с. Амга (Амгинский улус), с. Чурапча (Чурапчинский улус), с. Борогонцы (Усть-Алданский улус), а также с. Павловск (Мегино-Кангаласский улус). Очевидно, что для решения этой задачи необходимо учитывать сложившуюся сеть автомобильных дорог рассматриваемого района и тип дорожного покрытия.

Итак, предполагается, что имеется несколько производителей сель-

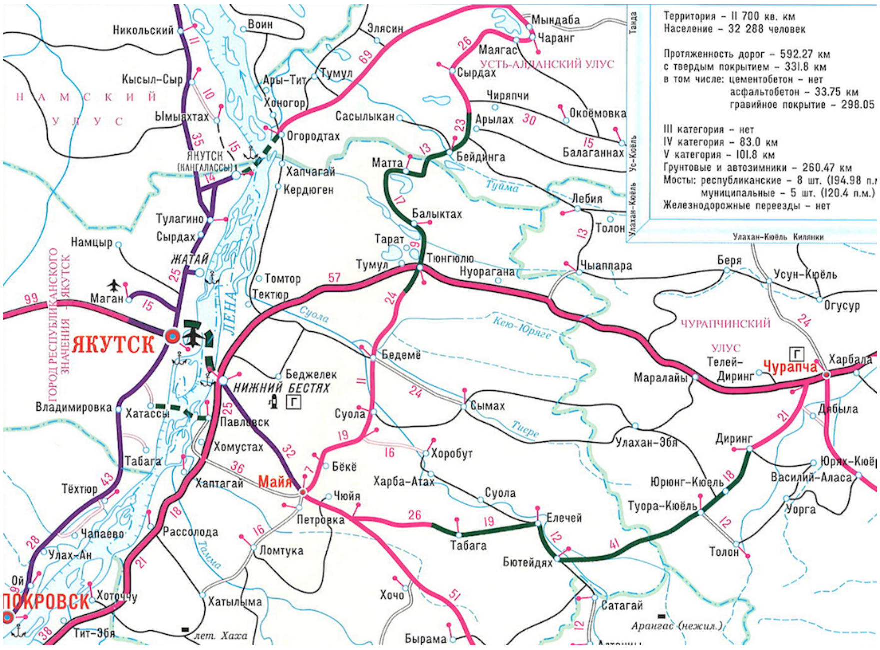

Рис. 1. Сеть дорог, соединяющих улусные центры с г. Якутском

скохозяйственной продукции, расположенных в улусных центрах, которые соединены с г. Якутском сетью автомобильных дорог. У каждого производителя есть определенный собственный ресурс, предназначенный для транспортировки производимой продукции из улусного центра в г. Якутск. Для того, чтобы снизить затраты на перевозку сельскохозяйственной продукции местные производители могут объединяться в различные коалиции. Следовательно, в каждой коалиции может происходить перераспределение затрат между участниками этой коалиции, и, как следствие, изменение пути (стратегии) транспортировки продукции каждого производителя по сравнению с путями, планируемыми без учета возможной кооперации. Тогда, во-первых, требуется найти оптимальный путь для каждого игрока коалиции и определяются её суммарные затраты, во-вторых, вычислить значения характеристической функции соответствующей кооперативной игры. Объединение игроков в коалицию равносильно тому, что характеристическая функция должна удовлетворять свойству супераддитивности [9, 12].

На основе вышесказанного ставится задача исследования данной оптимизационной задачи в виде кооперативной игры в форме характеристической функции для того, чтобы эффективно разделить суммарные затраты между производителями продукции.

Необходимость образования коалиций можно обосновать следующим образом. Пусть $S \subseteq N$ - некоторая коалиция игроков. Минимальные суммарные затраты $v_h(S)$ коалиции S представляют собой сумму минимальных суммарных затрат каждого игрока i коалиции S. Затраты на переход по общему пути входят в эту сумму один раз, при этом количество игроков использующих этот путь, значения не имеет [8]. Это можно интерпретировать так, что коалиция S на преодоление общего пути несет затраты, пропорциональные длине этого пути. Затраты на прохождение паромной переправы коалиции S определяются грузоподъемностью транспортного средства. Например, игрок, имеющий наибольшую среди всех участников игры длину минимального пути, предлагает услуги по перевозке продукции другим игрокам на преодоление общего пути в предположении, что транспортные затраты делятся между игроками коалиции S в соответствии с вектором Шепли.

Обзор литературы

В работе [8] изучаются кооперативные решения в коммуникационных сетях. Построенный в этой работе алгоритм построения оптимального распределения затрат между игроками позволяет находить рациональные решения кооперативных игр на коммуникационных сетях. Исследование оптимизационной задачи в виде кооперативной игры дает возможность эффективно разделить затраты между игроками в виде вектора Шепли.

В исследованиях [6, 16] рассматривается задача оптимизации транспортных затрат при кооперации перевозчиков на сети. Разработанный алгоритм коалиционной индукции построения характеристической функции при кооперации транспортных компаний, обеспечивающей выполнение свойства супераддитивности характеристической функции, позволяет находить оптимальное распределение затрат. В качестве решения рассматривается вектор Шепли. В результате предложенного алгоритма для получения характеристической функции построены эффективные решения соответствующей кооперативной игры - эффективные маршруты грузоперевозок. Тогда этот алгоритм позволяет определить распределение оптимальных затрат между игроками в виде вектора Шепли.

В работе [7] разрабатывается модель маршрутизации доставки грузов. Строится коалиционная транспортная игра. В этой игре образуются коалиции с целью оптимизации транспортных затрат. Затраты делятся между игроками в соответствии с арбитражным решением Нэша. Определяется алгоритм нахождения сильного коалиционного равновесия.

Работа [4] посвящена кооперативной игре патрулирования. Изучается распределение выигрыша между игроками в соответствии с вектором Шепли. Если же участники игры образовывают коалиционные структуры, тогда выигрыш каждого игрока определяется вектором Оуэна и вектором Ауманна-Дрезе. Здесь игра патрулирования исследуется как кооперативная игра с коалиционной структурой. Показывается, что вектор Шепли, вектор Оуэна и вектор Ауманна-Дрезе в этой кооперативной игре совпадают друг с другом при определенном ограничении на количество патрулирующих. В общем случае, когда количество игроков для кооперативной игры патрулирования произвольно, векторы Шепли, Оуэна и Ауманна-Дрезе отличны друг от друга.

Предложенные способы дележа в рассматриваемых работах, основанные на принципах теории кооперативных игр, могут быть использованы для исследования задач сокращения затрат на транспортной сети автомобильных дорог.

Глава 1. Теоретико-игровой подход к задаче сокращения затрат для транспортной сети Якутии

1.1. Математическая модель задачи кооперации производителей продукции для сокращения затрат ее транспортировки

Рассмотрим граф $G = (X, R)$, где X – множество вершин x_i, $i = 1, 2, ..., n$, интерпретирующих населенные пункты исследуемого района, R – множество ребер $r_{ij} = (x_i, x_j), j = 1, 2, ..., n$, являющихся моделью автомобильных дорог исследуемого района и которые являются взвешенными, т.е. имеют численные весовые характеристики, определяемые типом дорожного покрытия. Очевидно, что весовые характеристики p_{ij} удовлетворяют равенству $p_{ij} = p_{ji}$. Таким образом, весовые характеристики образуют симметрическую матрицу $P = (p_{ij})$. Так как каждому ребру графа G поставлено в соответствие число - вес, то этот граф представляет собой сеть. Обычный граф в этом смысле - это сеть, у которой вес p_{ij} каждого ребра (x_i, x_j) равен единице или, не нарушая общности рассуждений, можно считать, что веса всех ребер равны между собой.

На множестве ребер R определим неотрицательную симметрическую действительную функцию $s_{ij} = s(x_i, x_j)$. Значение этой функции определяет затраты, которые связаны с переходом из вершины x_i в вершину x_j по ребру r_{ij}.

Очевидно, что при этом $s_{ij} = s_{ji}$ и $s_{ii} = 0$. Наряду с функцией $s_{ij} = s(r_{ij})$ введем в рассмотрение также функцию $l_{ij} = l(r_{ij})$, определен-

ную следующим образом
$$l_{ij} = p_{ij}s_{ij},$$
где p_{ij} — коэффициент дорожного покрытия или весовая характеристика ребра.

Теперь приведем некоторые теоретические основы для формулировки и решения поставленной задачи в виде кооперативной игры.

Состояние сети $G = (X, R)$ представляет собой n-мерный вектор $z = (z^1, z^2..., z^n)$, такой что его каждая компонента соответствует вершине графа G, в которой расположен i-й игрок [8]. Множество состояний сети G обозначим через Ω. Под *путем* $L(r_{ij})$ из вершины x_i в вершину x_j в сети G понимается любая конечная последовательность ребер из множества R, соединяющих вершину x_i с вершиной x_j.

Рассмотрим теперь игру n лиц на сети $G = (X, U)$, в которой $N = 1, 2, ..., n$ — множество игроков, а z_0 и z_l — начальное и конечное состояния сети G. Обозначим эту игру $\Gamma = (G, N, z_0, z_l)$.

Под *стратегией* h^i i-го игрока будем понимать любой путь, соединяющий его начальное положение z_0^i с конечным местоположением $z_l^i, i = 1, 2, ..., n$. Множество всех стратегий i-го игрока обозначим через $H(\{i\})$, а множество всевозможных ситуаций будем обозначать так $H(N)$.

Далее обозначим $U(H)$ - совокупность ребер в ситуации $h = (h^1, h^2, ..., h^n)$. Особенностью этого множества является то, что оно содержит только различные ребра.

Введем также понятие *суммарных затрат* в игре Γ, соответствующей ситуации h, следующим образом [8]:
$$l(h) = \sum_{r_{ij} \in U(h)} l(r_{ij}). \tag{1.1}$$

Понятие *траектории* в сети G определяется как последовательность состояний сети $(z_1, z_2, ..., z_m)$, где $z_k = (z_k^1, z_k^2, ..., z_k^n)$, $k = 1, 2, ..., m$. Каждое состояние сети z_k определяет n вершин, в которых находятся игроки, т.е. каждой траектории соответствует n стратегий игроков и, стало быть, определенная ситуация h. Траекторию перехода из состояния z_1 в состояние z_m обозначим через $P(z_1, z_m)$.

Оптимальная траектория в сети G называется траектория $P^*(z_1, z_m)$, которой соответствует ситуация h^*, минимизирующая суммарные затраты $l(h^*)$ в игре Γ, то есть [8]:

$$l(h^*) = \min l(h). \tag{1.2}$$

Рассмотрим следующую задачу: найти оптимальную траекторию в игре $\Gamma = (G, N, z_0, z_l)$ n лиц на сети с начальным состоянием z_0 и конечным состоянием z_l. Решение данной задачи можно найти на основе метода динамического программирования, а именно на основе принципа оптимальности Беллмана [2]. Этот принцип оптимальности позволяет найти рекуррентное функциональное уравнение Беллмана.

Рассмотрим функцию $P(z)$, значение которой для любого состояния z равно минимальному пути из начального состояния z_0 в конечное состояние z_l, и для которой выполняется уравнение Беллмана [2]:

$$P(z) = \min_{z' \in \Omega}(P(z, z') + P(z'))$$

с граничным условием

$$P(z_l) = 0,$$

где $P(z, z')$ - суммарные затраты при переходе из состояния z в состояние z'.

Введем также функцию $P_m(z)$, которая для каждого состояния z имеет минимальное значение затрат $l(h)$ при переходе из состояния z в состояние z_l при следующих динамических ограничениях: оптимальная траектория $P_m^*(z, z_l)$ содержит не более m промежуточных состояний [8]. Итак, имеем

$$P_0(z) = P(z, z_l),$$

$$P_m(z) = \min_{z' \in \Omega}(P(z, z') + P_{m-1}(z'))$$

для любых состояний $z \in \Omega$ и для любых m. Очевидно, что с увеличением числа шагов m значения функций $P_m(z)$ не возрастают.

На множестве всех коалиций $S \subseteq N$ рассмотрим задачу минимизации затрат

$$\min_{z \in \Omega(S)} P_m(z),$$

где $\Omega(S)$ - множество всех состояний сети G для коалиции S. Точное значение минимума в этой задаче обозначим через $v^*(S)$.

Необходимость образования коалиций можно обосновать следующим образом. Пусть $S \subseteq N$ - некоторая коалиция игроков. Минимальные суммарные затраты $v_h(S)$ коалиции S представляют собой сумму минимальных суммарных затрат каждого игрока i коалиции S. Затраты на переход по общему пути входят в эту сумму лишь один раз, при этом количество игроков использующих этот путь, значения не имеет [8]. Это можно интерпретировать так, что коалиция S на преодоление общего пути несет затраты, пропорциональные длине этого пути. Затраты на прохождение паромной переправы коалиции S определяются грузоподъемностью транспортного средства. Например, игрок, имеющий наибольшую среди всех участников игры длину минимального пути, предлагает услуги по перевозке продукции другим игрокам на преодоление общего пути в предположении, что транспортные затраты делятся между игроками коалиции S в соответствии с вектором Шепли.

Итак, имеем:

$$v^*(S) \leqslant v_h(S),$$

где $v_h(S) = l(h), h \in H(S)$. Возьмём две непересекающиеся коалиции $S \subseteq N, T \subseteq N$. Тогда, очевидно, выполняется неравенство

$$v^*(S \cup T) \leqslant v^*(S) + v^*(T).$$

Учитывая, что

$$v^*(S) \leqslant v_h(S),$$
$$v^*(T) \leqslant v_h(T)$$

получим

$$v^*(S \cup T) \leqslant v_h(S) + v_h(T).$$

Далее рассмотрим произвольную коалицию $Q \subset S$. Тогда из предыдущих неравенств следует

$$v^*(S \cup T) \leqslant (v_h(Q) + v_h(S \setminus Q)).$$

Характеристической функцией игры n лиц называется вещественная функция v, определенная на множестве коалиций $S \subseteq N$, удовлетворяющая условиям

$$v(\emptyset) = 0,$$

$$v(S \cup T) \leqslant v(S) + v(T),$$

для любых двух непересекающихся коалиций S, T, где $S \subseteq N, T \subseteq N$.

Указанное второе свойство называется свойством супераддитивности. Это свойство означает, что игроки в коалиции не могут затратить больше, чем когда они действуют индивидуально, иначе коалиция будет экономически невыгодной.

Теперь определим характеристическую функцию $v(S)$ рекуррентным образом [6, 16]:

$$v(S) = \min_{Q \subset S}\{(v(Q) + v(S \setminus Q)); v_h(S)\}. \tag{1.3}$$

Для игры Γ четырех лиц имеем следующий алгоритм:

Шаг 1. Находим значение характеристической функции для одноэлементных коалиций

$$v(\{i\}) = v_h(\{i\}),$$

где $h \in H(\{i\})$.

Шаг 2. Вычисляем значение характеристической функции для двухэлементных коалиций

$$v(\{i, j\}) = min\{v(\{i\}) + v(\{j\}); v_h(\{i, j\})\},$$

где $h \in H(\{i, j\}), i \neq j, i, j = 1, 2, 3, 4.$

Шаг 3. Находим значение характеристической функции для трехэлементных коалиций

$$v(\{i,j,k\}) = min\{v(\{i,j\}) + v(\{k\}); v_h(\{i,j,k\})\},$$

где $h \in H(\{i,j,k\}), i \neq j, j \neq k, k \neq i, i,j,k = 1,2,3,4.$

Шаг 4. Вычисляем значение характеристической функции для максимальной коалиции

$$v(N) = min\{v(\{i,j,k\}) + v(\{l\}); v(\{i,j\}) + v(\{k,l\}); v_h(\{i,j,k,l\})\},$$

где $h \in H(\{i,j,k,l\}), i \neq j, j \neq k, k \neq l, l \neq i, i,j,k,l = 1,2,3,4.$

Итак, определенную характеристическую функцию можно представить так. Для того чтобы вычислить значение характеристической функции для коалиции S, во-первых, находим ее значение для всех одноэлементных коалиций, во-вторых - для всех двухэлементных коалиций и т.д., в конце - для s-элементных коалиций, где $s = |S|$. Представление характеристической функции в виде (1.3) можно интерпретировать как минимальные гарантированные затраты коалиции S.

Построенная таким образом характеристическая функция удовлетворяет условию супераддитивности:

$$v(S \cup T) \leqslant v(s) + v(T), \tag{1.4}$$

для любых $S \subseteq T$, и $T \subseteq N$ и $S \cap T = \emptyset$.

Затраты $v_h(S)$ коалиции S складываются из двух составляющих: непосредственные затраты $l_h(S)$ по перевозке селькохозяйственной продукции по пути $U(h_s) \setminus U_0(h_s)$, где $U_0(h_s)$ - множество общих ребер, входящих в пути $h^i \in S$ и затраты $a_h(S)$ коалиции S на преодоление пути $U_0(h_s)$. Отсюда получаем следующее равенство:

$$v_h(S) = l_h(S) + a_h(S),$$

где

$$l_h(S) = \alpha \sum_{r_{ij} \in U(h_s) \setminus U_0(h_s)} l(r_{ij}),$$

$$a_h(S) = \alpha \sum_{r_{ij} \in U_0(h_s)} l(r_{ij})$$

и α - затраты на транспортировку сельскохозяйственной продукции на единицу пути. Положим $\alpha = 10$ из расчета того, что стоимость 1 литра бензина составляет 50 рублей, а на преодоление 1 километра пути потребуется 10 рублей. Предельные тарифы на преодоление паромной переправы с. Нижний Бестях — г. Якутск, на автомобиле зависят от их веса, а именно до 1 тонны (транспортировка сельскохозяйственной продукции одним производителем) - 340 руб., до 2 тонн (перевозка двумя производителями) - 610 руб., до 3 тонн (транспортировка тремя производителями) - 935 руб., до 4 тонн (перевозка четырьмя производителями) - 1275 руб.

1.2. Задача сокращения затрат для транспортной сети Якутии как кооперативная игра в форме характеристической функции

Рассмотрим оптимизационную задачу сокращения затрат при транспортировке сельскохозяйственной продукции на сети автомобильных дорог Республики Саха (Якутия).

Имеются несколько производителей сельскохозяйственной продукции, расположенных в улусных центрах с. Амга (Амгинский улус), с. Чурапча (Чурапчинский улус), с. Борогонцы (Усть-Алданский улус), а также с. Павловск (Мегино-Кангаласский улус). Улусные центры соединены с г. Якутском сетью автомобильных дорог, которую изобразим в виде графа. Этот граф представим на рис. 1.1 с учетом коэффициента дорожного покрытия, который равен 0,1 для дорог с усовершенствованным покрытием; 0,25 для дорог с твердым покрытием; 0,5 для автозимников; 0,75 для грунтовых дорог и 1 для паромной переправы [5]. Этот граф соответствует летнему состоянию сети автомобильных дорог.

У каждого производителя есть определенный собственный ресурс, предназначенный для транспортировки производимой продукции из улусного центра в г. Якутск. Задачей каждого игрока является перевозка сельскохозяйственной продукции с минимальными затратами, т.е. нахождения такого пути по которому затраты на транспортировку будут минимальными.

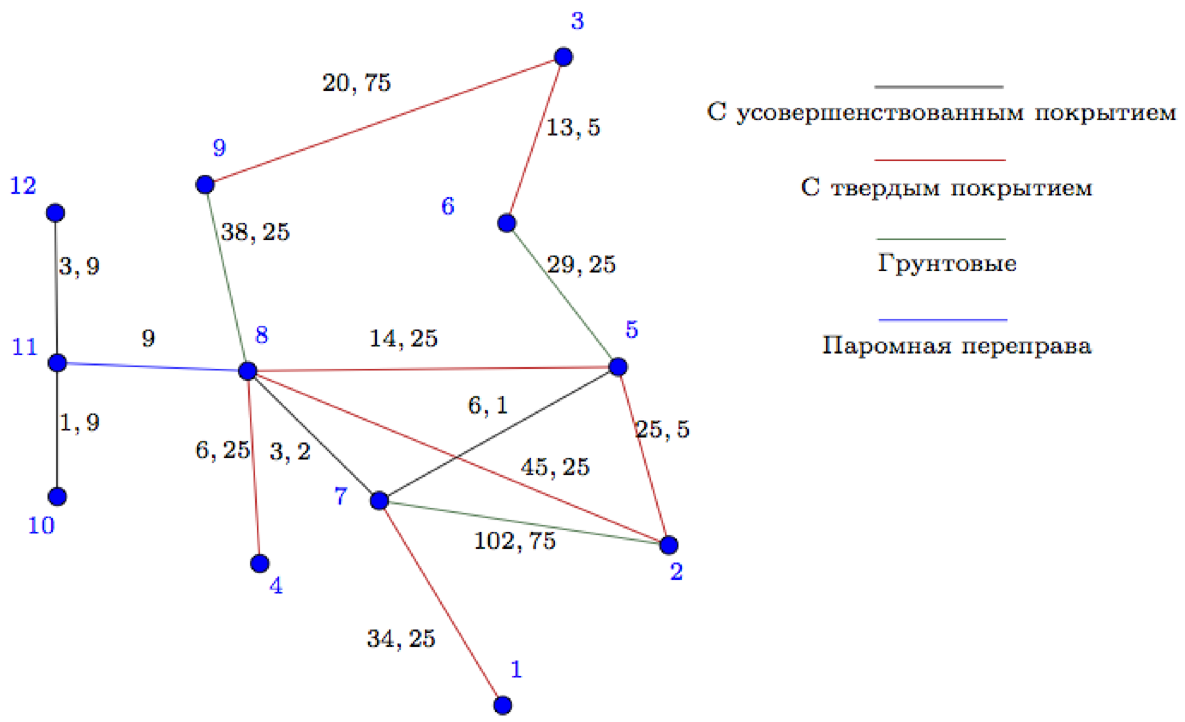

Рис. 1.1. Граф, соответсвующий летнему состоянию сети автомобильных дорог

Начальным состоянием сети является состояние $z_0 = (1, 2, 3, 4)$, а конечным состоянием служит состояние $z_l = (11, 11, 11, 11)$ то есть, например, первый производитель продукции должен преодолеть путь из вершины 2 в вершину 11.

На основе алгоритма, описанного в работе [8], найдем оптимальные пути производителей продукции:

$$h^{*1} = \{(1, 7), (7, 8), (8, 11)\};$$
$$h^{*2} = \{(2, 5), (5, 7), (7, 8)(8, 11)\};$$
$$h^{*3} = \{(3, 6), (6, 5), (5, 7), (8, 11)\};$$
$$h^{*4} = \{(4, 8), (8, 11)\}.$$

Согласно указанным тарифам на преодоление паромной переправы найдем минимальные затраты каждого из этих производителей:

$$l(h^{*1}) = l(r_{17}) + l(r_{78}) + 340 = 714,5;$$
$$l(h^{*2}) = l(r_{25}) + l(r_{57}) + l(r_{78}) + 340 = 688;$$
$$l(h^{*3}) = l(r_{36}) + l(r_{65}) + l(r_{57}) + l(r_{78}) + 340 = 860,5;$$
$$l(h^{*4}) = l(r_{48}) + 340 = 402,5.$$

Таким образом, каждый из производителей продукции несет оптимальные затраты, которые запишем в виде вектора

$$(l(h^{*1}), l(h^{*2}), l(h^{*3}), l(h^{*4})) = (714,5; 688; 860,5; 402,5)$$

и при этом

$$l(h^*) = \sum_{i \in N} l(h^{*i}) = 2665,5.$$

Рассмотрим теперь оптимизационную задачу сокращения затрат при транспортировке сельскохозяйственной продукции, отличающуюся от предыдущей задачи тем, что граф соответствует сети автомобильных дорог в зимний период. Переход от графа, соответствующего сети автомобильных дорог в летний период к данному графу отвечает в контексте работы [3] внешним воздействиям - "шокам". Выясним каким образом изменяются оптимальные пути производителей продукции при образовании зимников.

Итак, граф с учетом типа дорожного покрытия изображается на рис.1.2.

Начальным состоянием сети G является состояние $z_0 = (1, 2, 3, 4)$, а конечным состоянием является состояние $z_l = (11, 11, 11, 11)$.

На основе алгоритма, описанного в работе [8], найдем оптимальные пути производителей продукции:

$$h^{*1} = \{(1,7), (7,8), (8,11)\};$$
$$h^{*2} = \{(2,5), (5,7), (7,8), (8,11)\};$$
$$h^{*3} = \{(3,9), (9,12), (12,11)\};$$
$$h^{*4} = \{(4,10), (10,11)\}.$$

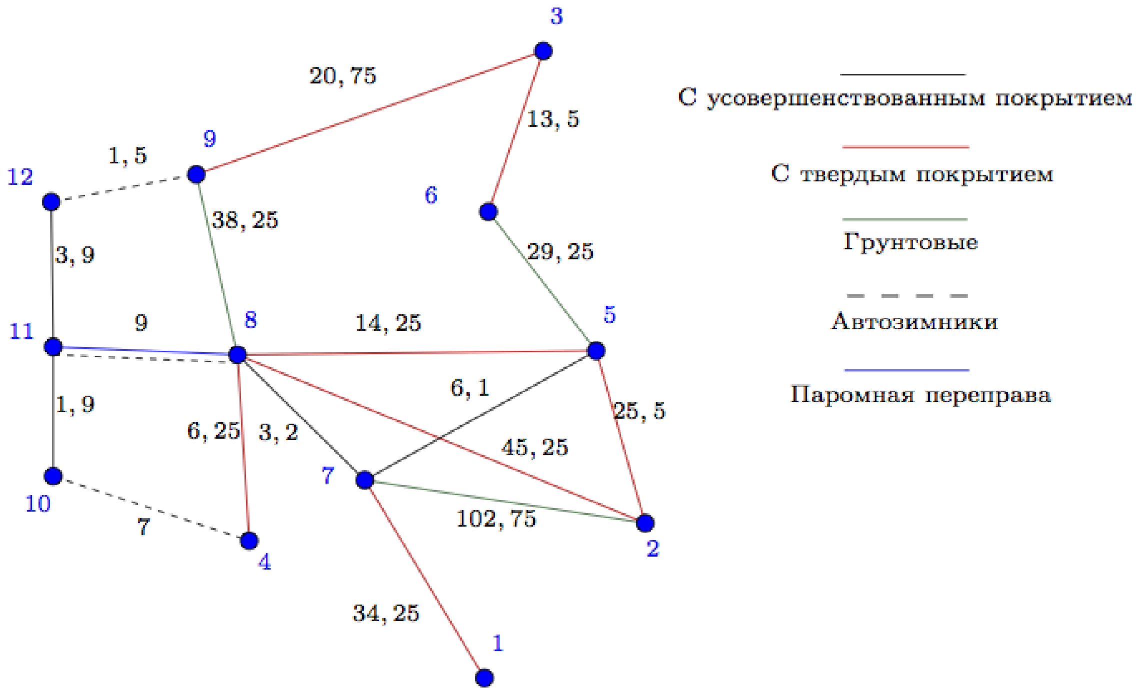

Рис. 1.2. Граф, соответсвующий зимнему состоянию сети автомобильных дорог

Далее находим минимальные затраты каждого из этих производителей:

$$l(h^{*1}) = l(r_{17}) + l(r_{78}) + l(r_{811}) = 464,5;$$
$$l(h^{*2}) = l(r_{25}) + l(r_{57}) + l(r_{78}) + l(r_{811}) = 438;$$
$$l(h^{*3}) = l(r_{39}) + l(r_{912}) + l(r_{1211}) = 261,5;$$
$$l(h^{*4}) = l(r_{410}) + l(r_{1011}) = 89.$$

Таким образом, каждый из производителей продукции несет оптимальные затраты, которые запишем в виде вектора

$$(l(h^{*1}), l(h^{*2}), l(h^{*3}), l(h^{*4})) = (464,5; 438; 261,5; 89)$$

и при этом

$$l(h^*) = \sum_{i \in N} l(h^{*i}) = 1253.$$

Сравнивая векторы оптимальных затрат производителей продукции в двух рассматриваемых оптимизационных задачах, определяемых графами, соответствующими летнему и зимнему состоянию автомобильных дорог рассматриваемого района, убеждаемся, что изменение графа, соответствующего изменению сети автомобильных дорог, заключающегося в образовании автозимников, влечет за собой уменьшение оптимальных затрат каждого из производителей сельскохозяйственной продукции.

Кооперативной игрой n лиц называется игра $\Gamma = (N, v)$, где $N = \{1, 2, ..., n\}$ — множество игроков, а v — характеристическая функция, определенная на множестве коалиций.

Рассмотрим теперь игру 4-х лиц на сети G, в которой $N = 1, 2, ..., n$ - множество игроков, являющихся производителями сельскохозяйственной продукции, расположенных в улусных центрах Республики Саха (Якутия): с. Амга (Амгинский улус), с. Чурапча (Чурапчинский улус), с. Борогонцы (Усть-Алданский улус), а также с. Павловск (Мегино-Кангаласский улус), а z_0 и z_l – начальное и конечное состояния сети G. Обозначим эту игру $\Gamma_1 = (G, N, z_0, z_l)$.

Исследуем игру Γ_1 в виде кооперативной игры $\Gamma_1^* = (N, v)$ в форме характеристической функции. Граф G для данной игры Γ_1^* изображается на рис. 1.1.

Целесообразность образования кооперации между игроками можно обосновать следующим образом. Пусть $S \subseteq N$ - некоторая коалиция игроков. Минимальные суммарные затраты $v_h(S)$ коалиции S представляют собой сумму минимальных суммарных затрат каждого игрока i коалиции S. Затраты на переход по общему пути входят в эту сумму лишь один раз, при этом количество игроков использующих этот путь, значения не имеет [8]. Это можно интерпретировать так, что коалиция S на преодоление общего пути несет затраты, пропорциональные (с коэффициентом пропорциональности $\alpha = 10$) длине этого пути. Затраты на прохождение паромной переправы коалиции S определяются грузоподъемностью транспортного средства и представлены в таблице 1.1.

Таблица 1.1. Затраты коалиции на преодоление паромной переправы

s	Затраты коалиции S(руб.)
1	340
2	610
3	935
4	1275

Например, игрок, имеющий наибольшую среди всех участников игры длину минимального пути, предлагает услуги по перевозке продукции другим игрокам на преодоление общего пути в предположении, что транспортные затраты делятся между игроками коалиции S в соответсвии с вектором Шепли.

Найдем значение характеристической функции согласно описанному выше алгоритма.

Шаг 1. Найдем значения характеристической функции для всех одноэлементных коалиций. Ввиду (1.1) и (1.2) будем иметь:

$$v(\{1\}) = l(r_{17}) + l(r_{78}) + 340 = 714,5;$$
$$v(\{2\}) = l(r_{25}) + l(r_{57}) + l(r_{78}) + 340 = 688;$$
$$v(\{3\}) = l(r_{36}) + l(r_{65}) + l(r_{57}) + l(r_{78}) + 340 = 860,5;$$
$$v(\{4\}) = l(r_{48}) + 340 = 402,5.$$

Шаг 2. Вычислим значения характеристической функции для всех двухэлементных коалиций. На основе результатов первого шага получим:

$$v(\{1,2\}) = \min\{v(\{1\}) + v(\{2\}); l(r_{17}) + l(r_{78}) +$$
$$+ l(r_{25}) + l(r_{57}) + 610\} = 1300,5.$$

Аналогично вычисляя значения характеристической функции для всех других двухэлементных коалиций, будем иметь:

$$v(\{1,3\}) = \min\{v(\{1\}) + v(\{3\}); v_h(\{1,3\})\} = 1473;$$
$$v(\{1,4\}) = \min\{v(\{1\}) + v(\{4\}); v_h(\{1,4\})\} = 1047;$$
$$v(\{2,3\}) = \min\{v(\{2\}) + v(\{3\}); v_h(\{2,3\})\} = 1385,5;$$
$$v(\{2,4\}) = \min\{v(\{2\}) + v(\{4\}); v_h(\{2,4\})\} = 1020,5;$$
$$v(\{3,4\}) = \min\{v(\{3\}) + v(\{4\}); v_h(\{3,4\})\} = 1193.$$

Шаг 3. Находим значение характеристической функции для всех трехэлементных коалиций. На основе результатов первого и второго шага, получим

$$v(\{1,2,3\}) = \min\{v(\{1,2\}) + v(\{3\});$$
$$v(\{1,3\}) + v(\{2\}); v(\{2,3\}) + v(\{1\})\};$$
$$l(r_{17}) + l(r_{78}) + l(r_{25}) + l(r_{57}) + l(r_{36}) + l(r_{65}) + 935\} = 2053.$$

Вычисляя подобным образом значения характеристической функции для всех других трехэлементных коалиций, будем иметь:

$$v(\{1,2,4\}) = \min\{v(\{1,2\}) + v(\{4\}); v(\{1,4\}) + v(\{2\});$$
$$v(\{2,4\}) + v(\{1\}); v_h(\{1,2,4\})\} = 1688;$$
$$v(\{1,3,4\}) = \min\{v(\{1,3\}) + v(\{4\}); v(\{1,4\}) + v(\{3\});$$
$$v(\{3,4\}) + v(\{1\}); v_h(\{1,3,4\})\} = 1860,5;$$
$$v(\{2,3,4\}) = \min\{v(\{2,3\}) + v(\{4\}); v(\{2,4\}) + v(\{3\});$$
$$v(\{3,4\}) + v(\{2\}); v_h(\{2,3,4\})\} = 1773.$$

Шаг 4. Наконец, вычисляем значение характеристической функции для максимальной коалиции

$$v(N) = \min\{v(\{1,2,3\}) + v(\{4\}); v(\{1,2,4\}) + v(\{3\});$$
$$v(\{1,3,4\}) + v(\{2\}); v(\{2,3,4\}) + v(\{1\}); v(\{1,2\})+$$
$$+v(\{3,4\}); v(\{1,3\}) + v(\{2,4\}); v(\{1,4\}) + v(\{2,3\});$$
$$l(r_{17}) + l(r_{78}) + l(r_{25}) + l(r_{57}) + l(r_{36}) + l(r_{65}) + l(r_{48}) + 1275\} = 2432,5.$$

Итак, запишем значения характеристической функции для всех коалиций в виде таблицы 1.2.

Теперь рассмотрим распределение затрат между игроками. В качестве принципа оптимальности выберем вектор Шепли [9, 12], каждая компонента которого есть затраты соответствующего игрока:

$$Sh_i(v) = \sum_{S: i \in S} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}(v(S) - v(S \setminus \{i\}), \tag{1.5}$$

где $s = |S|, i = 1,2,3,4$.

Таблица 1.2. Значения характеристических функций для кооперативной игры Γ_1^*

S	$v(S)$	S	$v(S)$
{1}	714,5	{2,4}	1020,5
{2}	688	{3,4}	1193
{3}	860,5	{1,2,3}	2053
{4}	402,5	{1,2,4}	1688
{1,2}	1300,5	{1,3,4}	1860,5
{1,3}	1473	{2,3,4}	1773
{1,4}	1047	N	2432,5
{2,3}	1385,5		

Вычисляя компоненты вектора Шепли, согласно этому правилу, получим

$$Sh_1^*(v) = 666,167;$$
$$Sh_2^*(v) = 609,167;$$
$$Sh_3^*(v) = 781,667;$$
$$Sh_4^*(v) = 375,5.$$

Таким образом, вектор Шепли равен:

$$Sh^*(v) = (666,167; 609,167; 781,667; 375,5)$$

и при этом выполняется его свойство эффективности

$$\sum_{i \in N} Sh_i^*(v) = 2432,5.$$

Следовательно,

$$\sum_{i \in N} Sh_i^*(v) = v(N).$$

Для вычисления значений характеристической функции, а также значений компонент вектора Шепли в кооперативной игре в форме характеристической функции реализована компьютерная программа (см. Приложение).

Для определения эффективности решения кооперативной игры $\Gamma_1^* = (N, v)$ по сравнению с оптимальными затратами каждого из производителей продукции в оптимизационной задаче, определяемой графом, соответствующим летнему состоянию сети автомобильных дорог, рассмотрим следующую величину - коэффициент снижения затрат [7]. Оптимальные затраты производителей продукции в оптимизационной задаче равны $l(h^{*i})$. Если распределение затрат в кооперативной игре Γ_1^* основывается на векторе Шепли $Sh_i^*(v) = \{Sh_1^*(v), Sh_2^*(v), Sh_3^*(v), Sh_4^*(v)\}$, то снижение затрат игроков в этой игре по сравнению с их минимальными затратами $l(h^{*i})$, можно охарактеризовать с помощью коэффициента q_i, который определяется следующим образом:

$$q_i = 1 - \frac{Sh_i^*(v)}{l(h^{*i})}.$$

Тогда имеем:

$$q_1 = 1 - \frac{666,167}{714,5} = 1 - 0,93 = 0,07;$$
$$q_2 = 1 - \frac{609,167}{688} = 1 - 0,89 = 0,11;$$
$$q_3 = 1 - \frac{781,667}{860,5} = 1 - 0,91 = 0,09;$$
$$q_4 = 1 - \frac{375,5}{402,5} = 1 - 0,93 = 0,07.$$

Таким образом, коэффициенты снижения затрат образуют вектор

$$q = (q_1, q_2, q_3, q_4) = (0,07; 0,11; 0,09; 0,07).$$

Итак, описанный выше алгоритм образования коалиций позволяет игрокам объединяться в коалиции с целью уменьшения затрат на транспортировку продукции, что характеризуется увеличением коэффициента снижения затрат каждого из игроков по сравнению с их затратами до кооперации.

Построенный алгоритм образования коалиций позволяет находить эффективные решения в задачах на сетях, а решение этих задач, в виде кооперативной игры в форме характеристической функции, дает возможность более эффективно разделить затраты между игроками.

Глава 2. Задача сокращения затрат для транспортной сети Якутии при наличии коалиционной структуры

2.1. Алгоритм построения сильного равновесного коалиционного разбиения

Пусть дано множество N и система множеств $\{S_k\}$. Система множеств $\{S_k\}$ называется *разбиением* во множестве N, если оно удовлетворяет условиям [15]:

1. Любое множество S_k системы $\{S_k\}$ является непустым подмножеством множества N;

2. Система множеств $\{S_k\}$ представляет собой систему попарно непересекающихся множеств;

3. Объединение множеств системы $\{S_k\}$ совпадает со всем множеством N, т.е.

$$N = \bigcup_k S_k.$$

Коалиционной структурой в игре (N, v) называется разбиение $\pi = \{S_1, S_2, ..., S_m\}$ множества игроков $N = \{1, 2, ..., n\}$, где $S_1, S_2, ..., S_m$ взаимно непересекающиеся коалиции [10].

Если предположить, что каждая из коалиций S_k имеет затраты $v(S_k), k = 1, 2, ..., m$, которые необходимо разделить между игроками этой коалиции, то очевидно, что величина затрат $v(S_k)$ будет зависеть от коалиционной структуры π. Эти рассуждения приводят к тому, чтобы исследовать игру Γ на сети G в виде кооперативной игры с коалиционной структурой. Предположим, что коалиционная структура во множестве N игроков определена.

Под *стратегией* h^i i-го игрока ($i = 1, 2, ..., n$) понимается коалиция, содержащая этого игрока т.е. $h^i \ni i$. Множество всех стратегий игрока i обозначим $H(\{i\})$. Стратегии h^i игроки $i \in N$ выбирают независимо друг от друга. Тогда образуется ситуация $h = (h^1, h^2, ..., h^n)$ где $h^i \in H(\{i\})$. Множество всех ситуаций обозначим через H.

Поскольку π - коалиционная структура множества N, то имеем

$$\bigcup_{k=1}^{m} S_k = N,$$

где $S_k \cap S_l = \emptyset$ для любых $k, l : k \neq l$.

Для произвольной ситуации $h \in H$ определим многошаговый алгоритм построения коалиционной структуры $\pi = \{S_k\}, k = 1, 2, ..., m$ [7].

Шаг 1. Полагаем множество $N_1 = N = \{1, 2, ..., n\}$ и находим

$$min\{i, i \in N_1\} = i_1 = 1.$$

Тогда множество S_1 определяется так

$$S_1 = \begin{cases} h^{i_1}, & \text{если } h^i = h^{i_1}, i \in h^{i_1}, \\ \{1\}, & \text{если} h^i \neq h^{i_1}, i \in h^{i_1}. \end{cases}$$

Шаг 2. Рассматриваем множество $N_2 = N_1 \setminus S_1$ и если $N_2 = \emptyset$, то коалиционное разбиение совпадает с множеством $\{S_1\}$. Иначе находим

$$min\{i, i \in N_2\} = i_2.$$

В этом случае множество S_2 определяется следующим образом:

$$S_2 = \begin{cases} h^{i_2}, & \text{если } h^i = h^{i_2}, i \in h^{i_2}, \\ \{i_2\}, & \text{если} h^i \neq h^{i_2}, i \in h^{i_2} \end{cases}$$

и т.д.

Шаг k. Пусть множество $N_k = N_{k-1} \setminus S_{k-1}$ и если $N_k = \emptyset$, то коалиционное разбиение совпадает с множеством $\{S_i\}, i = 1, 2, ..., k-1$. Иначе

находим
$$min\{i, i \in N_k\} = i_k.$$
Тогда множество S_k определяется так:
$$S_k = \begin{cases} h^{i_k}, & \text{если } h^i = h^{i_k}, i \in h^{i_k}, \\ \{i_k\}, & \text{если } h^i \neq h^{i_k}, i \in h^{i_k}. \end{cases}$$

Многошаговый алгоритм, описанный выше, каждой ситуации $h = (h^1, h^2, ..., h^n)$ ставит в соответствие единственное коалиционное разбиение $\{S_k\}, k = 1, 2, ..., m$.

Рассмотрим пример построения коалиционного разбиения в игре Γ на сети G. Возьмём следующие стратегии игроков
$$h^1 = \{1, 4\}, h^2 = \{2, 3, 4\}, h^3 = \{1, 2, 3\}, h^4 = \{1, 4\}.$$

Шаг 1. Полагаем множество $N_1 = N = \{1, 2, 3, 4\}$ и находим
$$min\{1, 2, 3, 4\} = i_1 = 1.$$
Тогда множество S_1 определяется следующим образом
$$S_1 = \begin{cases} h^1 = \{1, 4\}, & \text{если } h^1 = \{1, 4\}, h^4 = \{1, 4\}, \\ \{1\}, & \text{в другом случае.} \end{cases}$$
Следовательно,
$$S_1 = \{1, 4\}.$$

Шаг 2. Рассматриваем множество $N_2 = N_1 \setminus S_1 = \{2, 3\}$ и находим
$$min\{2, 3\} = 2.$$
Тогда множество S_2 определяется так
$$S_2 = \begin{cases} h^2 = \{2, 3, 4\}, & \text{если } h^2 = \{2, 3, 4\}, h^3 = \{2, 3, 4\}, h^4 = \{2, 3, 4\}, \\ \{2\}, & \text{в другом случае.} \end{cases}$$

Поэтому,
$$S_2 = \{2\}.$$

Шаг 3. Находим множество $N_3 = N_2 \setminus S_2 = \{3\}$. Очевидно, что множество S_3 следующее:
$$S_3 = \{3\}.$$

Таким образом, коалиционное разбиение, соответствующее ситуации
$$h = \{\{1,4\},\{2,3,4\},\{1,2,3\},\{1,4\}\},$$
представляет собой множество
$$\pi = \{S_1, S_2, S_3\} = \{\{1,4\},\{2\},\{3\}\}.$$

Рассмотрим игру Γ на сети G как кооперативную игру с коалиционной структурой. Распределение оптимальных затрат между игроками определяется арбитражным решением Нэша [10].

Затраты игроков $i \in S \subseteq N$ определяются следующим образом [7]:
$$\alpha_i(S) = v(\{i\}) - \frac{\sum\limits_{j\in S} v(\{j\}) - v(S)}{s},$$
где $s = |S|$.

При этом величина
$$\sum_{j\in S} v(\{j\}) - v(S)$$
определяет выигрыш коалиции S, а величина
$$\beta(S) = \frac{\sum\limits_{j\in S} v(\{j\}) - v(S)}{s}, \tag{2.1}$$
где $S \subseteq N$ называется маржинальным выигрышем коалиции S.

Ввиду (2.1) затраты игроков $i \in S$ будут определяться так:
$$\alpha_i(S) = v(\{i\}) - \beta(S), \tag{2.2}$$

для всех $i \in S$.

Коалиция S называется существенной, если выполняется неравенство

$$\beta(S) \geqslant 0.$$

Теперь рассмотрим игру в виде кооперативной игры с коалиционной структурой следующим образом. Функцию выигрыша i-го игрока определим так [7]:

$$K_i(h) = \beta(S_k),$$

где $i = 1, 2, ..., n, i \in S_k$ и $\{S_k\}, k = 1, 2, ..., m.$ — коалиционная структура, соответствующая ситуации $h = (h^1, h^2, ..., h^n)$.

В результате будем иметь игру Γ в нормальной форме $\Gamma = (G, N, H_i, K_i)$, где H_i - множества стратегий игроков $i = 1, 2, ..., n$, K_i - соответственно их функции выигрыша. Стратегия коалиции $S \subseteq N$ определяется как множество стратегий игроков, входящих в эту коалицию, т.е. $h(S) = \{h^i, i \in S\}$. Множество всех стратегий коалиций S обозначим через $H(S)$. Стратегию коалиции $N \setminus S$ обозначим через $h_{N\setminus S} = \{h^i, i \in N \setminus S\}$.

Ситуация $h^* = (h^*(S), h^*(N \setminus S)$ называется *сильным равновесием* в игре Γ на сети G, если для каждой коалиции $h(S) \subset H(S)$ существует игрок $i_0 \in S$, для которого выполняется неравенство [7]:

$$K_i(h^*(S), h^*(N \setminus S)) \leqslant K_{i_0}(h(S), h^*(N \setminus S)).$$

Иначе говоря, ситуация h^* является сильным равновесием, если при отклонении любого игрока $i \in S$ от этого равновесия его затраты увеличиваются.

Предположим, что ситуация h^* является сильным равновесием в игре Γ. Тогда соответствующее этой ситуации коалиционное разбиение $\pi(h^*) = \{S_k^*\}$, $k = 1, 2, ..., m$ называется сильным равновесным коалиционным разбиением [7].

Алгоритм построения сильного коалиционного разбиения представляет собой следующее [7]:

Шаг 1. Полагаем $N_1 = N = \{1, 2, ..., n\}$ и строим множество

$S_1(h^*) \subseteq N_1$ следующим образом:

$$S_1(h^*) = arg \max_{S \subseteq N_1} \beta(S).$$

Шаг 2. Строим множество $N_2 = N_1 \setminus S_1(h^*)$. Если $N_2 = \emptyset$, то сильное коалиционное разбиение совпадает с множеством $\{S_1(h^*)\}$. Иначе строится множество $S_2(h^*) \subseteq N_2$ такое, что

$$S_2(h^*) = arg \max_{S \subseteq N_2} \beta(S).$$

Шаг k. Строим множество $N_k = N_{k-1} \setminus S_{k-1}(h^*)$. Если $N_k = \emptyset$, то сильное коалиционное разбиение совпадает с множеством $\{S_1(h^*), S_2(h^*), ..., S_{k-1}(h^*)\}$. Иначе строится множество $S_k(h^*) \subseteq N_k$ такое, что

$$S_k(h^*) = arg \max_{S \subseteq N_k} \beta(S).$$

В результате проведенного алгоритма будет построено сильное коалиционное разбиение $\{S_1(h^*), S_2(h^*), ..., S_l(h^*)\}$ и при этом оно будет состоять из существенных непересекающихся коалиций, таких что

$$\bigcup_{j=1}^{l} S_j(h^*) = N.$$

2.2. Задача сокращения затрат для транспортной сети Якутии как кооперативная игра с коалиционной структурой

Рассмотрим построение сильного коалиционного разбиения, а следовательно, и сильного равновесия h^* для исследуемой кооперативной игры Γ_1^*. Будем использовать для этого многошаговый алгоритм, описанный выше.

Ввиду данных значений характеристической функции получим из (2.1) значения маржинальных затрат коалиции $S \subseteq N$, представленных в таблице 2.1.

Таблица 2.1. Значения маржинальных затрат коалиции S в кооперативной игре Γ_1^*

S	$\beta(S)$	S	$\beta(S)$
{1,2}	51	{1,2,3}	70
{1,3}	51	{1,2,4}	39
{1,4}	51	{1,3,4}	39
{2,3}	81,5	{2,3,4}	59,33
{2,4}	35	N	58,25
{3,4}	35		

Значения затрат игроков $i \in S$, ввиду (2.2), запишем в виде таблицы 2.2.

Таблица 2.2. Затраты игроков коалиции S в кооперативной игре Γ_1^*

S	$\alpha_1(S)$	$\alpha_2(S)$	$\alpha_3(S)$	$\alpha_4(S)$
{1}	714,5			
{2}		688		
{3}			860,5	
{4}				402,5
{1,2}	663,3	637		
{1,3}	663,3		809,5	
{1,4}	679,5			367,5
{2,3}		606,5	779	
{2,4}		653		367,5
{3,4}			825,5	367,5
{1,2,3}	644,5	618	790,5	
{1,2,4}	675,5	649		363,5
{1,3,4}	675,5		821,5	363,5
{2,3,4}		628,67	801,17	343,17
N	656,25	629,75	802,25	344,25

Далее построим сильное коалиционное разбиение.

Шаг 1. Положим

$$N_1 = N = \{1, 2, 3, 4\},$$

и найдем множество $S_1(h^*) \subseteq N_1$ удовлетворяющее условию:

$$S_1(h^*) = arg \max_{S_k \subseteq N_1} \beta(S_k) = 81,5.$$

Следовательно, $S_1(h^*)$ представляет собой множество

$$S_1(h^*) = \{2, 3\}.$$

Шаг 2. Строим множество $N_2 = N_1 \setminus S_1(h^*) = \{1, 4\}$. Поскольку $N_2 \neq \emptyset$, то строим множество $S_2(h^*) \subseteq N_2$ такое, что

$$S_2(h^*) = arg \max_{S_k \subseteq N_2} \beta(S_k) = 51.$$

Таким образом, имеем

$$S_2(h^*) = \{1, 4\}.$$

Итак, построено сильное коалиционное разбиение в виде

$$\pi = \{S_1(h^*), S_2(h^*)\},$$

где $S_1(h^*) = \{2, 3\}, S_2(h^*) = \{1, 4\}$. Все множества $S_1(h^*)$ и $S_2(h^*)$ являются существенными и непересекающимися коалициями и при этом их объединение представляет множество N всех игроков рассматриваемой игры.

Докажем, что ситуация $h^* = (h^{*1}, h^{*2}, ..., h^{*n})$, где $h^{*i} = S_i$ и $S_i \subseteq Q^*$ или $S_i \subseteq N \setminus Q^*$ является сильным равновесием по Нэшу в кооперативной игре $\mathit{\Gamma} = (N, v)$, если выполняется условие

$$v(Q^*) + v(N \setminus Q^*) < v_h(N).$$

Действительно, предположим, что

$$\min_{Q \subseteq N} \{v(Q) + v(N \setminus Q)\} = v(Q^*) + v(N \setminus Q^*).$$

Поскольку выполняется условие супераддитивности (1.4), то имеем

$$v(Q^*) + v(N \setminus Q^*) \geqslant v(N).$$

Учитывая условие утверждения, получим

$$v(Q^*) + v(N \setminus Q^*) < v_h(N).$$

На основании построения характеристической функции следует, что

$$v(N) < v_h(N).$$

В результате получаем, что ситуация $h^* = (h^{*1}, h^{*2}, ..., h^{*n})$, где $h^{*i} = S_i$ и $S_i \subseteq N \setminus Q^*$ или $S_i \subseteq Q^*$ является сильным равновесием по Нэшу в кооперативной игре $\Gamma = (N, v)$.

Рассмотрим теперь в качестве принципа оптимальности затрат каждого игрока в кооперативной игре Γ_1^* с коалиционной структурой $\pi = \{\{1,4\},\{2,3\}\}$ вектор Оуэна

$$Ow_i(N, v, \pi) = \frac{1}{|\sum(N, \pi)|} \sum_{\sigma \in \sum(N,\pi)} (v(S_i(\sigma)) - v(S_i(\sigma) \setminus \{i\}), \tag{2.3}$$

где $\sum(N, \pi)$ - это множество перестановок игроков σ, совместимых с коалиционной структурой π, т.е. для любых игроков $i, j \in S_k \in \pi$ выполняется неравенство

$$|\sigma(i) - \sigma(j)| < |S_k|,$$

а $S_i(\sigma)$ - множество игроков, которые в перестановке σ стоят до игрока i, включая его.

Запишем вычисление вектора Оуэна в виде таблицы 2.3.

Рассмотрим теперь в качестве принципа оптимальности затрат игроков в кооперативной игре Γ_1^* с коалиционной структурой $\pi = \{\{1,4\},\{2,3\}\}$ вектор Ауманна-Дрезе:

$$\varphi_i^\pi = \sum_{S \subseteq S_k(i): i \in S} \frac{(s_k - s)!(s-1)!}{s_k!} (v(S) - v(S \setminus \{i\}), \tag{2.4}$$

где $s_k = |S_k(i)|, s = |S|$.

Таблица 2.3. Вычисление вектора Оуэна в кооперативной игре Γ_1^*

$\sigma \backslash i$	1	2	3	4
1423	714,5	641	744,5	332,5
1432	714,5	572	813,5	332,5
4123	644,5	641	744,5	402.5
4132	644,5	572	813,5	402.5
2314	699,5	688	697,5	379,5
2341	659,5	688	697,5	387,5
3214	699,5	625	860,5	379,5
3241	659,5	625	860,5	387,5
$Ow_i(N, v, \pi)$	671,5	606,5	779	375,5

Вычисляя компоненты вектора Ауманна-Дрезе, получим

$$\varphi_1^\pi = 679,5;$$
$$\varphi_2^\pi = 606,5;$$
$$\varphi_3^\pi = 779;$$
$$\varphi_4^\pi = 367,5.$$

или иначе

$$\varphi^\pi = (679,5; 606,5; 779; 367,5).$$

Итак, для кооперативной игры Γ_1^* в форме характеристической функции получим три вектора: вектор Шепли, вектор Оуэна и вектор Ауманна-Дрезе, представляющие собой принципы оптимального распределения затрат между игроками (см. таблицу 2.4).

Таблица 2.4. Оптимальное распределение затрат в кооперативной игре Γ_1^*

i	1	2	3	4
$Sh^*(v)$	666,167	609,167	781,667	375,5
$Ow(N, v, \pi)$	671,5	606,5	779	375,5
φ^π	679,5	606,5	779	367,5

При этом выполняется свойство эффективности распределения затрат между игроками [9]

$$\sum_{i \in N} Sh_i^*(v) = v(N),$$

$$\sum_{i \in N} Ow_i(N, v, \pi) = v(N),$$

$$\sum_{i \in N} \varphi_i^\pi = v(N),$$

$$\sum_{i \in N} Sh_i^*(v) = \sum_{i \in N} Ow_i(N, v, \pi) = \sum_{i \in N} \varphi_i^\pi.$$

Рассмотрим игру $\Gamma_1' = (N, v)$, соответствующую летнему состоянию сети автомобильных дорог. Необходимость образования коалиций можно обосновать следующим образом. Пусть $S \subseteq N$ - некоторая коалиция игроков. Минимальные суммарные затраты $v_h(S)$ коалиции S представляют собой сумму минимальных суммарных затрат каждого игрока i коалиции S. Коалиция S в данной игре Γ_1' образуется на одном общем участке пути - паромной переправе с. Нижний Бестях — г. Якутск. Затраты на прохождение паромной переправы коалиции S определяются грузоподъемностью транспортного средства и представлены в таблице 1.1.

Итак, найдем значение характеристической функции для всевозможных коалиций [4].

Шаг 1. Найдем значения характеристической функции для всех одноэлементных коалиций. Согласно (1.1) и (1.2) имеем:

$$v(\{1\}) = l(r_{17}) + l(r_{78}) + 340 = 714,5;$$

$$v(\{2\}) = l(r_{25}) + l(r_{57}) + l(r_{78}) + 340 = 688;$$

$$v(\{3\}) = l(r_{36}) + l(r_{65}) + l(r_{57}) + l(r_{78}) + 340 = 860,5;$$

$$v(\{4\}) = l(r_{48}) + 930 = 402,5.$$

Шаг 2. Вычислим значения характеристической функции для всех двухэлементных коалиций. На основе результатов первого шага получим:

$$v(\{1,2\}) = \min\{v(\{1\}) + v(\{2\});$$
$$l(r_{17}) + l(r_{78}) + l(r_{25}) + l(r_{57}) + l(r_{78}) + 610\} = 1332,5.$$

Аналогично вычисляя значения характеристической функции для всех других двухэлементных коалиций, будем иметь:

$$v(\{1,3\}) = \min\{v(\{1\}) + v(\{3\}); v_h(\{1,3\})\} = 1505;$$
$$v(\{1,4\}) = \min\{v(\{1\}) + v(\{4\}); v_h(\{1,4\})\} = 1047;$$
$$v(\{2,3\}) = \min\{v(\{2\}) + v(\{3\}); v_h(2,3)\} = 1478,5;$$
$$v(\{2,4\}) = \min\{v(\{2\}) + v(\{4\}); v_h(\{2,4\})\} = 1020,5;$$
$$v(\{3,4\}) = \min\{v(\{3\}) + v(\{4\}); v_h(\{3,4\})\} = 1193.$$

Шаг 3. Находим значение характеристической функции для всех трехэлементных коалиций. На основе результатов первого и второго шага, получим

$$v(\{1,2,3\}) = \min\{v(\{1,2\}) + v(\{3\}); v(\{1,3\}) + v(\{2\}); v(\{2,3\}) + v(\{1\});$$
$$l(r_{17}) + l(r_{78}) + l(r_{25}) + l(r_{57}) + l(r_{78}) + l(r_{36}) +$$
$$+ l(r_{65}) + l(r_{57}) + l(r_{78}) + 935\} = 2178.$$

Вычисляя подобным образом значения характеристической функции для всех других трехэлементных коалиций, будем иметь:

$$v(\{1,2,4\}) = \min\{v(\{1,2\}) + v(\{4\});$$
$$v(\{1,4\}) + v(\{2\}); v(\{2,4\}) + v(\{1\}); \}; v_h(\{1,2,4\})\} = 1720;$$
$$v(\{1,3,4\}) = \min\{v(\{1,3\}) + v(\{4\});$$
$$v(\{1,4\}) + v(\{3\}); v(\{3,4\}) + v(\{1\}); \}; v_h(\{1,3,4\})\} = 1892,5;$$
$$v(\{2,3,4\}) = \min\{v(\{2,3\}) + v(\{4\});$$
$$v(\{2,4\}) + v(\{3\}); v(\{3,4\}) + v(\{2\}); \}; v_h(\{2,3,4\})\} = 1866.$$

Шаг 4. Наконец, вычисляем значение характеристической функции для максимальной коалиции

$$v(N) = \min\{v(\{1,2,3\}) + v(\{4\}); v(\{1,2,4\}) + v(\{3\});$$
$$v(\{1,3,4\}) + v(\{2\}); v(\{2,3,4\}) + v(\{1\}); v(\{1,2\})+$$
$$+v(\{3,4\}); v(\{1,3\}) + v(\{2,4\}); v(\{1,4\}) + v(\{2,3\});$$
$$l(r_{14}) + l(r_{78}) + l(r_{25}) + l(r_{57}) + l(r_{78}) + l(r_{36}) + l(r_{65})+$$
$$+l(r_{57}) + l(r_{78}) + l(r_{48}) + 12755\}\} = 2525,5.$$

Итак, запишем значения характеристической функции для всех коалиций в виде таблицы 2.5.

Таблица 2.5. Значение характеристической функции для кооперативной игры Γ_1'

S	$v(S)$	S	$v(S)$
{1}	714,5	{2,4}	1020,5
{2}	688	{3,4}	1193
{3}	860,5	{1,2,3}	2178
{4}	402,5	{1,2,4}	1720
{1,2}	1332,5	{1,3,4}	1892,5
{1,3}	1505	{2,3,4}	1866
{1,4}	1047	N	2525,5
{2,3}	1478,5		

Рассмотрим распределение оптимальных затрат между игроками в соответствии с вектором Шепли. Компоненты вектора Шепли (1.5) равны:

$$Sh_1'(v) = 679,5;$$
$$Sh_2'(v) = 653;$$
$$Sh_3'(v) = 825,5;$$
$$Sh_4'(v) = 367,5.$$

Таким образом, вектор Шепли равен:

$$Sh'(v) = (679,5; 653; 825,5; 367,5),$$

и при этом выполняется его свойство эффективности

$$\sum_{i \in N} Sh_i'(v) = 2525,5.$$

Следовательно,
$$\sum_{i\in N} Sh'_i(v) = v(N).$$

Для определения эффективности решения кооперативной игры $\varGamma'_1 = (N, v)$ по сравнению с оптимальными затратами каждого из производителей продукции в оптимизационной задаче, определяемой графом, соответствующим летнему состоянию сети автомобильных дорог, рассмотрим следующую величину - коэффициент снижения затрат [7]. Оптимальные затраты производителей продукции в оптимизационной задаче равны $l(h^{*i})$. Если распределение затрат в кооперативной игре $\varGamma'_1$ основывается на векторе Шепли $Sh'_i(v) = \{Sh'_1(v), Sh'_2(v), Sh'_3(v), Sh'_4(v)\}$, то снижение затрат игроков в этой игре по сравнению с их минимальными затратами $l(h^{*i})$, можно охарактеризовать с помощью коэффициента q_i, который определяется следующим образом:

$$q_i = 1 - \frac{Sh'_i(v)}{l(h^{*i})}.$$

Тогда имеем:

$$q_1 = 1 - \frac{679,5}{714,5} = 1 - 0,95 = 0,05;$$
$$q_2 = 1 - \frac{653}{688} = 1 - 0,95 = 0,05;$$
$$q_3 = 1 - \frac{825,5}{860,5} = 1 - 0,96 = 0,04;$$
$$q_4 = 1 - \frac{367,5}{402,5} = 1 - 0,91 = 0,09;$$

Таким образом, коэффициенты снижения затрат образуют вектор

$$q = (q_1, q_2, q_3, q_4) = (0,05; 0,05; 0,04; 0,09).$$

Рассмотрим построение сильного коалиционного разбиения, а следовательно, и сильного равновесия h^* для исследуемой кооперативной игры $\varGamma'_1$.

Ввиду данных значений характеристической функции, получим из (2.1) значения маржинальных затрат коалиции $S \subseteq N$, которые запишем в виде таблицы 2.6.

Таблица 2.6. Значения маржинальных затрат коалиции S в кооперативной игре Γ_1'

S	$\beta(S)$	S	$\beta(S)$
{1,2}	35	{1,2,3}	28,83
{1,3}	35	{1,2,4}	28,83
{1,4}	35	{1,3,4}	28,83
{2,3}	35	{2,3,4}	28,83
{2,4}	35	N	35
{3,4}	35		

Затраты игроков $i \in S$, в силу (2.2), представлены в таблице 2.7.

Таблица 2.7. Затраты игроков коалиции S в кооперативной игре Γ_1'

S	$\alpha_1(S)$	$\alpha_2(S)$	$\alpha_3(S)$	$\alpha_4(S)$
{1}	714,5			
{2}		688		
{3}			860,5	
{4}				402,5
{1,2}	679,5	653		
{1,3}	679,5		825,5	
{1,4}	679,5			367,5
{2,3}		653	825,5	
{2,4}		653		367,5
{3,4}			825,5	367,5
{1,2,3}	686,17	659,67	832,17	
{1,2,4}	686,17	659,67		374,17
{1,3,4}	686,17		832,17	374,17
{2,3,4}		659,67	832,17	374,17
N	679,5	653	825,5	367,5

Сравнивая распределение затрат между игроками на основе арбитражного решения и на основе вектора Шепли получим, что они совпадают

$$Sh_i'(v) = \alpha_i(N).$$

Построим сильное коалиционное разбиение.

Шаг 1. Положим $N = N = \{1, 2, 3, 4\}$ и найдем множество $S_1(h^*) \subseteq$

N_1 удовлетворяющее условию

$$S_1(h^*) = arg \max_{S_k \subseteq N_1} \beta(S_k) = 35.$$

Следовательно, $S_1(h^*)$ представляет собой множество

$$S_1(h^*) = S,$$

где $|S| = 2$.

Шаг 2. Строим множество $N_2 = N_1 \setminus S_1(h^*) = N \setminus S$. Поскольку $N_2 \neq \emptyset$, то строим множество $S_2(h^*) \subseteq N_2$ такое, что

$$S_2(h^*) = arg \max_{S_k \subseteq N_2} \beta(S_k) = 35.$$

Итак, имеем

$$S_2(h^*) = N \setminus S.$$

Таким образом, построено сильное коалиционное разбиение в виде

$$\pi = \{S, N \setminus S\},$$

где $|S| = 2$. Все множества $S_1(h^*)$ и $S_2(h^*)$ являются существенными и непересекающимися коалициями и при этом их объединение представляет множество N всех игроков рассматриваемой игры.

Рассмотрим теперь принцип оптимальности затрат игроков в игре Γ_1' с коалиционной структурой $\pi = \{\{i, j\}, \{k, l\}\}$, где i, j, k, l - величины, принимающие значения 1,2,3,4, неравные друг другу.

Запишем вычисление вектора Оуэна (2.3) в виде таблицы 2.8, где коалиционная структура совпадает со структурой $\pi = \{\{1, 4\}, \{2, 3\}\}$:

Таблица 2.8. Вычисление вектора Оуэна в кооперативной игре Γ_1'

$\sigma \backslash i$	1	2	3	4
1423	714,5	673	805,5	332,5
1432	714,5	633	845,5	332,5
4123	644,5	673	805,5	402.5
4132	644,5	633	845,5	402.5
2314	699,5	688	790,5	347,5
2341	659,5	688	790,5	387,5
3214	699,5	618	860,5	347,5
3241	659,5	618	860,5	387,5
$Ow_i(N, v, \pi)$	679,5	653	825,5	367,5

Отсюда следует, что вектор Оуэна совпадает с вектором Шепли. При этом не составляет трудности показать, что для всех других коалиционных структур π, а именно

$$\{\{1,2\},\{3,4\}\},$$

$$\{\{1,3\},\{2,4\}\}$$

мы будем иметь, что вектор Оуэна совпадает с вектором Шепли.

Рассмотрим теперь в качестве принципа оптимальности в кооперативной игре Γ_1' с коалиционной структурой $\pi = \{\{1,4\},\{2,3\}\}$ вектор Ауманна-Дрезе.

Вычисляя компоненты вектора Ауманна-Дрезе (2.4), получим

$$\varphi_1^\pi = 679,5;$$

$$\varphi_2^\pi = 653;$$

$$\varphi_3^\pi = 825,5;$$

$$\varphi_4^\pi = 367,5;$$

или

$$\varphi^\pi = (679,5; 653; 825,5; 367,5).$$

Итак, для кооперативной игры Γ_1' в форме характеристической функции получим три вектора: вектор Шепли, вектор Оуэна и вектор Ауманна-Дрезе, представляющие собой принципы оптимального распределения затрат между игроками. При этом векторы Шепли, Оуэна и Ауманна-Дрезе совпадают и для коалиционных структур

$$\{\{1,2\},\{3,4\}\},$$
$$\{\{1,3\},\{2,4\}\}.$$

Итак, в игре Γ_1'

$$Sh'(v) = Ow(N,v,\pi) = \varphi^{\pi},$$

для любого сильного коалиционного разбиения.

Заключение

В работе изучен теоретико-игровой подход к задаче сокращения затрат при транспортировке сельскохозяйственной продукции на сети автомобильных дорог Республики Саха (Якутия). Теоретико-игровой подход позволяет производителям сельскохозяйственной продукции, действуя совместно, нести минимальные затраты на ее перевозку. Следовательно, кооперативные игры в форме характеристической функции и кооперативной игры с коалиционной структурой - это такие математические модели рассматриваемой задачи, которые позволяют найти эффективные решения, основанные на принципе оптимальности - векторе Шепли, векторе Оуэна и векторе Ауманна-Дрезе. На примере сети автомобильных дорог Республики Саха (Якутия) показано, что такие математические модели задач способствуют справедливому распределению суммарных затрат между производителями продукции.

В работе реализовано вычисление значений характеристической функции, а также значений компонент вектора Шепли в кооперативной игре в форме характеристической функции на языке программирования C++.

Исследованная в работе математическая модель задачи сокращения затрат для транспортировки продукции может быть использована для решения подобных экономических задач, связанных с транспортными затратами. Практическое применение такого рода математических моделей в подобных задачах по транспортировке продукции поможет избежать излишних затрат на перевозку продукции.

Литература

[1] Атлас автомобильных дорог Республики Саха (Якутия). СПб.: Первый издат.-полиграф. холдинг, 2009. 64 с.

[2] Беллман Р. Е. Динамическое программирование / пер. с англ. И.М. Андреевой. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 400 с.

[3] Бутенко М.С. Двухэтапный принцип оптимальности в сетевой игре с шоком специального вида// Процессы управления и устойчивость: Труды 46-й международной научной конференции аспирантов и студентов / под ред. А. С. Ерёмина, Н. В. Смирнова. СПб.: Издат. Дом Санкт-Петерб. гос. ун-та, 2015. С. 573–578.

[4] Гусев В. В. Векторы Шепли, Оуэна и Ауманна–Дрезе в игре патрулирования с коалиционной структурой //Математическая теория игр и её приложения. 2016. Т. 8. №. 4. С. 30-42.

[5] Евтюков С.А., Евтюков С.С. Параметры, влияющие на сцепные качества покрытий дорог // Вестник "Технические и физико-математические науки". № 3. 2013. С. 75-82.

[6] Захаров В.В., Щегряев А.Н. Устойчивая кооперация в динамических задачах маршрутизации транспорта // Математическая теория игр и её приложения. 2012. Т. 4, вып. 2. С. 39–56.

[7] Зенкевич Н.А., Зятчин А.В. Сильное коалиционное равновесие в транспортной игре// Математическая теория игр и её приложения. 2016. Т. 8. вып. 1. С. 163–79.

[8] Карпов М.И., Петросян Л.А. Кооперативные решения в коммуникационных сетях// Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер.10. 2012. вып. 4. С. 37-45.

[9] Мазалов В.В. Математическая теория игр и приложения: учеб. пособие. - СПб.: Лань. 2010. 448 с.

[10] Оуэн Г. Теория игр. М.: Мир, 1971. 216 с.

[11] Парилина Е.М., Седаков А.А. Устойчивость коалиционных структур одной модели банковской кооперации // Математическая теория игр и ее приложения. 2012. Т. 4, вып. 4. С. 45–62.

[12] Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Шевкопляс Е.В. Теория игр. СПб: БХВ. Петербург, 2017. 432 с.

[13] Розенмюллер И. Кооперативные игры и рынки. М.: Мир, 1974. 295 с.

[14] Мулен Э. Кооперативное принятие решений: аксиомы и модели. — М.: Мир, 1991. 464 с.

[15] Фон-Нейман Д., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. – М.: Наука, 2013. 708 с.

[16] Alexander Shchegryaev, Victor V. Zakharov, Multi-period cooperative vehicle routing games, Contributions to Game Theory and Management. 2014. Vol. 7. P. 349–359.

[17] Aumann R.J., Dreze J. Cooperative games with coalitional structures // International Journal of Game Theory. 1974. P. 217–237.

[18] Belau J. A Note on the Owen Value for Glove Games // International Game Theory Review. 2015. V. 17. N. 4. P. 1550014-1-1550014-8.

[19] Ergun O., Kuyzu G., Savelsbergh M.W.P. Shipper collaboration // Computers & Operations Research. 2007. V. 34. P. 1551–1560.

[20] Juan J. Vidal-Puga and Gustavo Bergantinos An implementation of the Owen value // Games and Economic Behavior. 2003. V. 44. N 2. P. 412–427.

[21] Hamiache G. A new axiomatization of the Owen value for games with coalition structures // Mathematical Social Sciences. 1999. V. 37. P. 281–305.

[22] Khmelnitskaya A.B., Yanovskaya E.B. Owen coalitional value without additivity axiom // Mathematical Methods of Operations Research. 2007. V. 66. N 2. P. 255–261.

[23] Krajewska M.A., Kopfer H., Laporte G., Ropke S., Zaccour G. Horizontal cooperation among freight carriers: request allocation and profit sharing // Journal of the Operational Re search Society. 2008. V. 59. P. 1483-–1491.